Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima, a kodovi se šalju na e-mail mpuvaca@mathos.hr uz naslov/predmet e-mail-a "NLA−kolokvij3". Kolokvij nosi 120 bodova, što znači da je moguće ostvariti više od 100%. Pored zadatka je naznačeno koliko bodova nosi. Moguće je ostvariti parcijalne bodove po zadacima. Zadaci označeni s "⋆" su teorijski. Rezultati kolokvija će biti na web stranici kolegija u toku iduća 4 dana.

Zadatak 1 (5+5+15).

- ⋆ Definirajte pseudo inverz.
- ⋆ Definirajte SVD dekompoziciju matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- ⋆ Neka je $A = U\Sigma V^*$ singularna dekompozicija matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ te neka je prvih r singularnih vrijednosti netrivijalno. Dokažite da vrijedi $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^{\perp}$.

Zadatak 2 (10).

- Konstruirajte Householderovu matricu H tako da poništi $x_2, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}$, pri čemu je x_7 nepromjenjena. Neka je vektor $x = [1, -1, 2, 5, 1, 3, -2, 1, -1, 2]^T$. Napišite čemu je jednako Hx.

Zadatak 3 (5+15). Neka je $A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -24 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}.$

- Može li se sustav riješiti metodom najbržeg silaska?
- Napišite program koji rješava sustav Gauss - Seidelovom metodom tako da norma $||\cdot||_\infty$ reziduala bude manja od 0.0001. Za početnu aproksimaciju uzmite nul-vektor. Koliko je koraka bilo potrebno napraviti Gauss - Seidelovom metodom?
Čemu su jednake dobivena aproksimacija i norma reziduala?

Zadatak 4 (15+15+15).

- Odredite x koji minimizira normu $||Ax-b||_2$, koristeći algoritam za LPNK pomoću SVD dekompozicije, ako je

$$A \in \mathbb{R}^{10\times 3}, A(i,:) = [\frac{1}{i}, i^2, log(i)], \quad b \in \mathbb{R}^{10}, b(i) = -2i+3.$$

  Pri rješavanju linearnog sustava nije dozvoljeno korištenje naredbi \ i inv$(\cdot)$.

  Napišite dobiveno rješenje i odgovarajuću normu reziduala.

⋆ Neka je $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||Ax-b||_2 = min\}$. Dokažite da tada $A^T(b-Ax) = 0 \Rightarrow x \in S$.

⋆ Izvedite rješenje LPNK, x s najmanjom 2-normom, ukoliko je $A = U\Sigma V^* \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ukoliko Σ ima r netrivijalnih vrijednosti.

Zadatak 5 (20).

- Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 20 & -10 & -1 & \dots & -1 \\ 10 & 20 & -10 & \ddots & \vdots \\ 1 & 10 & 20 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -10 \\ 1 & \dots & 1 & 10 & 20 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{15\times 15}.$$

  Matricu unesite u Matlab koristeći naredbe ugrađene u Matlab.
  Dopušta li matrica A LU dekompoziciju bez pivotiranja?
  Koristeći Matlab funkciju *lu* odredite LU dekompoziciju matrice te pomoću supstitucija unaprijed i unatrag riješite sustav $Ax = b$, ukoliko je
  $b = [29, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 20, -20, 11]^T$. Koje je rješenje sustava?

Sve svoje tvrdnje obrazložite.