



JMBAG \_\_\_\_\_  
Ime i prezime \_\_\_\_\_

## Upute

Vrijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 50 bodova. Korištenje pomoćnih materijala nije dozvoljeno. Svi studenti, bez obzira na ostvareni broj bodova, imaju pravo pristupiti drugom kolokviju.

### Zadatak 1 (3 boda + 2 boda).

- Definirajte funkciju distribucije slučajne varijable  $X$  uvjetno na događaj  $\{Y \in A\}$ ,  $A \subseteq \mathcal{R}(Y)$ . Diskutirajte posebno problematiku u diskretnom, a posebno problematiku u neprekidnom slučaju.
- Definirajte uvjetno očekivanje slučajne varijable  $X$  uz danu slučajnu varijablu  $Y$  te iskažite i interpretirajte teorem o dvostrukom očekivanju.

**Zadatak 2 (7 bodova).** Slučajne varijable  $X_1, \dots, X_n$ , takve da je za  $k \in \{1, \dots, n\}$   $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$ , međusobno su nezavisne. Ako je  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable  $S_k$  uz uvjet  $\{S_n = m\}$ ,  $k \leq n$ .

**Zadatak 3 (8 bodova).** Vijek trajanja žarulje modeliran je eksponencijalnom distribucijom s parametrom  $\lambda > 0$ . Očekivani vijek trajanja žarulje od 80 vati je 300 sati, a očekivani vijek trajanja žarulje od 100 vati je 200 sati. Uz prirodnu pretpostavku o nezavisnosti vijeka trajanja tih žarulja, kolika je vjerojatnost da će žarulja od 100 vati trajati dulje od žarulje od 80 vati?

**Zadatak 4 (10 bodova).** Slučajni vektor  $X = (X_1, X_2)$  ima uniformnu distribuciju na krugu  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Odredite distribuciju slučajne varijable  $X$  uvjetno na  $\{Y = 0\}$  te funkciju gustoće slučajne varijable  $Z = \frac{Y}{X}$ .

**Zadatak 5 (10 bodova).** Rudar je zarobljen u rudniku i vidi četvora vrata. Prva vrata vode u tunel koji će ga, nakon očekivano dva sata hoda, dovesti na površinu i spasiti će se. Druga vrata vode ga u tunel iz kojeg će se spasiti nakon očekivano četiri sata hoda. Treća i četvrta vrata vode u kružne tunele koji ga, redom nakon očekivano tri i pet sati hoda, vraćaju na isto mjesto s kojega je krenuo. Ako svaki puta slučajno odabire vrata, koliko će očekivano vremena proći dok se ne spasi?

**Zadatak 6 (10 bodova).** Nezavisne slučajne varijable  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$  imaju sljedeće distribucije:

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{2^k}, \quad P(X_2 = k) = \frac{2}{3^k}, \quad P(X_3 = k) = \frac{4}{5^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Koristeći funkcije izvodnice vjerojatnosti odredite distribuciju, matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable  $X = X_1 + X_2 + X_3$ .