



Broj indeksa _____
Ime i prezime _____

Upute

Vijeme pisanja kolokvija je 120 minuta. Na kolokviju je moguće ostvariti najviše 40 bodova. Korištenje bilo kakvih pomoćnih materijala nije dozvoljeno.

Zadatak 1 (2 boda + 2 boda).

- Definirajte konvergenciju gotovo sigurno, konvergenciju po vjerojatnosti, konvergenciju u srednjem redu p ($1 \leq p < \infty$) i konvergenciju po distribuciji.
- Iskažite i interpretirajte centralni granični teorem za nizove nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

Zadatak 2 (3 boda + 3 boda + 3 boda). Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

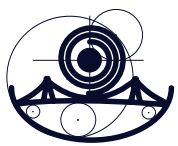
ima χ^2 distribuciju s $n > 0$ stupnjeva slobode, gdje je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija definirana na sljedeći način:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

- Odredite karakterističnu funkciju slučajne varijable X .
- Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X .
- Ispitajte konvergenciju po distribuciji niza nezavisnih slučajnih varijabli ($X_n, n \in \mathbb{N}$) jednako distribuiranih kao slučajna varijabla X .

Zadatak 3 (9 bodova). Ispitajte sve četiri vrste konvergencije prema jedinici niza slučajnih varijabli ($X_n, n \in \mathbb{N}$) s funkcijama distribucije

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \langle -\infty, 1 - 1/n \rangle \\ \frac{1}{2} (nx - n - 1) & , x \in [1 - 1/n, 1 + 1/n] \\ 1 & , x \in \langle 1 + 1/n, \infty \rangle. \end{cases}$$



Zadatak 4 (9 bodova). Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli s očekivanjem nula, varijancama $\text{Var}(X_n) = e^{-k}$ za neki $k \in \mathbb{N}$ i kovarijancama

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = e^{-(i+j)}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergenciju po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli $(\bar{X}_n, n \in \mathbb{N})$.

Zadatak 5 (9 bodova). Turist dolazi u Las Vegas i odlučuje igrati kockarsku igru, takvu da u svakoj partiji ulaže 1 dolar, te ako dobije, osvaja 2 dolara i vraća mu se ulog od 1 dolara, a ako izgubi partiju gubi 1 uloženi dolar. Poznato je da je vjerojatnost dobitka u ovoj igri $1/4$. Naš je turist, vođen kockarskom groznicom, odigrao čak 240 partija. Kolika je vjerojatnost da turist nije na gubitku?

NŠ