

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
05. srpnja 2017.

Pismeni ispit iz Kombinatorne i diskretne matematike
Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 [20b] *Mirko ne voli komarce. Međutim, ljetno je doba i komaraca je posvuda, naročito na terasi njegove kuće koja se nalazi uz obalu Drave. Stoga je smislio način za njihovo istrebljenje. Na ploču dimenzije $1 m \times 1 m$ postavio je primamljivu tvar koja privlači komarce. Kada komarci dolete blizu ploče, on ih zgnječi okruglom mlatilicom polumjera $3.6 cm$. Ako se u jednom trenutku nad pločom nalazi 10001 komarac, dokažite da Mirko jednim udarcem može zgnječiti barem 26 komaraca.*

Zadatak 2 [20b] *Dokažite da je Fibonaccijev broj F_n jednak sumi*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}, \quad n \geq 0.$$

Zadatak 3 [20b] *Koliko je prirodnih brojeva iz intervala $[1, 1000000]$ koji ispunjavaju najmanje jedan od tri uvjeta:*

1. brojevi su oblika $4k + 3$,
2. brojevi su oblika $7k$,
3. brojevi su oblika $10k + 1$?

Zadatak 4 [20b] *Promatramo kodne riječi duljine n sastavljene od znamenaka 0, 1, 2 i 3. Za kodnu riječ kažemo da je legitimna ako sadrži paran broj nula. Neka je a_n ukupan broj legitimnih kodnih riječi duljine n . Nađite rekurziju za a_n i riješite ju! Koliko je legitimnih kodnih riječi duljine 10? (Poredak znamenaka u kodnoj riječi je bitan.)*

Zadatak 5 [20b] *Wienerov indeks $W(G)$ povezanog grafa G definira se kao suma udaljenosti među svim parovima vrhova iz G . Za ciklus C_n , $n \geq 3$, odredite $W(C_n)$. Sjetite se da je ciklus C_n jednostavan graf s n vrhova v_1, v_2, \dots, v_n , a bridovi spajaju vrhove v_i i $v_{(i+1) \bmod n}$, $i = 1, \dots, n$. Rezultat je potrebno zapisati u eksplicitnom obliku, bez sume!*