

Prva kontrolna zadaća iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Ak. god. 2020./2021.

UPUTE: Kolokvij studenti pišu do 19h. Svaki zadatak student treba riješiti na zasebnoj stranici tako da najprije napiše tekst zadatka, a ispod teksta stavi podnaslov: Rješenje ispod kojeg će pisati postupak rješenja. Ako neki zadatak student nije riješio, treba prepisati tekst tog zadatka i ispod teksta napisati da taj zadatak nije riješio. Rješenja zadataka trebaju biti čitko napisana i detaljno obrazložena. Zadatke s rješenjima student treba posložiti u pdf dokument onim redoslijedom kakav je u kolokviju. Paziti da su stranice pdf-a pravilno rotirane. Pdf dokument treba imati naziv imena i prezimena studenta bez kvačica. Studenti pdf dokumente trebaju poslati na smajstor@mathos.hr do 19:20 h. Naknadno poslani dokumenti neće biti uzeti u obzir. Prepisivanje je strogo zabranjeno. Ukoliko studenti budu prepisivali, poništiti će im se kolokvij i zabraniti izlazak na drugi kolokvij, a svi sumnjivi studenti bit će usmeno ispitani. Nejasnoće oko teksta zadataka studenti mogu poslati u terminu 17-17:40h na smajstor@mathos.hr. Izvan tog termina nije dozvoljeno slati upite.

Zadatak 1 (15 bodova) Jedne nedjelje Tvrtko je biciklirao po brdskom području, čija se nadmorska visina može procijeniti funkcijom $f(x, y) = 4x^2y + y^3$. U daljini je uočio drvenu kućicu koja je smještena u točki $(0, 0)$. Oko kućice se nalazi puteljak čije koordinate (x, y) zadovoljavaju jednadžbu $2x^2 + y^2 = 6$. Tvrtko bi htio istražiti područje oko kućice, ali zbog visinskih razlika ne zna hoće li uspjeti biciklirati po puteljku. Ako je najveća razlika u nadmorskoj visini točaka puteljka veća od 10 mjernih jedinica za duljinu, Tvrtko neće uspjeti obići kućicu biciklom. Odredite ekstremne vrijednosti nadmorske visine u svim točkama puteljka. Hoće li Tvrtko uspjeti?

Zadatak 2 (10 bodova) Pogledajte Zadatak 1. Ako uzmemo u obzir poziciju kućice, hoće li se prema poziciji $(\sqrt{3}, 0)$ nadmorska visina povećavati ili smanjivati? U kojem smjeru će nadmorska visina najbrže padati?

Zadatak 3 (15 bodova) Odredite količinu naboja tanke ploče omeđene pravcima $y = 1$, $y = 2$ i $y = x$ te krivuljom $y^3 = x$. Gustoća naboja dana je funkcijom $\rho(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$.

Zadatak 4 (15 bodova) Koristeći sferne koordinate, postavite integral za moment tromosti s obzirom na os OZ tijela omeđenog plohama $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Gustoća tijela zadana je funkcijom $\rho(x, y, z) = \frac{xz}{x^2 + y^2}$.
NAPOMENA: Integral je postavljen ako su postavljene granice integracije, a podintegralna funkcija je do kraja pojednostavljena (skraćena).

Zadatak 5 (15 bodova) Izračunajte centar mase žice savijene u obliku gornje polukružnice $x^2 + y^2 = 4$. Gustoća naboja žice proporcionalna je iznosu koji je za jedan veći od kvadrata udaljenosti do osi OY , a u točki $(1, 3)$ iznosi 4.

Zadatak 6 (15 bodova) Automobil se približava izlazu s autoceste. U tom području puše vjetar čija je sila dana s $\vec{F} = 4x^2\vec{i} + y\vec{j}$. Koliki rad obavlja automobil vozeći se u smjeru suprotnom od sile vjetra po ravnom putu od točke $(2, 1)$ do točke $(1, 4)$?

Zadatak 7 (15 bodova) Rastavite vektorsko polje

$$\vec{a}(x, y, z) = (yz + \sin x)\vec{i} + (xz + \cos y)\vec{j} + (xy)\vec{k}$$

na potencijalno i solenoidalno.