

**Druga kontrolna zadaća iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II**  
Ak. god. 2014./2015.

**Zadatak 1** Objekt se kreće po krivulji  $C \dots \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} - 2t\vec{k}$  u smjeru porasta parametra  $t$  pod utjecajem neprekidnog polja sila  $\vec{F}(x, y, z) = (2xy + z^2)\vec{i} + x^2\vec{j} + (2xz + \cos z)\vec{k}$ .

- a) [5b] Odredite jakost izvora (ili ponora) polja  $\vec{F}$  u točki  $T = (1, 1, 0)$ .  
b) [10b] Dokažite da je  $\vec{F}$  potencijalno vektorsko polje i odredite mu potencijal.  
c) [5b] Odredite rad potreban za gibanje objekta po krivulji  $C$  za  $t \in [1, 2]$ .

**Zadatak 2** [10b] Rastavite vektorsko polje  $\vec{a} = (x^2 + y^2 + z)\vec{i} + (x + y^2 + z^2)\vec{j} + z^2\vec{k}$  na potencijalno i solenoidalno.

**Zadatak 3** [20b] Pronađite zakon titranja homogene žice duljine  $l = 4$ , napetosti  $p = 10$ , linijske gustoće  $\rho = 2$  koja je pričvršćena na rubovima. Početni položaj žice dobiven je izvlačenjem žice iz ravnotežnog položaja na polovici svoje duljine za 1 tako da je žica na oba dijela afina. Početne brzine nema, a nema niti utjecaja vanjske sile.

**Zadatak 4** [10b] Nađite ravnotežni položaj teške homogene žice mase  $m = 2$  i duljine  $l = 5$ , a napete horizontalno utegom mase  $M = 10$  na lijevom kraju. Desni kraj je slobodan. Žica se nalazi u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti  $q = 2$ .

**Zadatak 5** [10b] Riješite Dirichletov rubni problem

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \\ u(0, y) = 2, & y > 0 \\ u(0, y) = 0, & y < 0. \end{cases}$$

UPUTA: Područje  $D$  preslikajte u gornju poluravninu funkcijom  $w = iz + 1$ , a zatim uz pomoć rješenja rubnog problema na gornjoj poluravnini riješite zadani problem.

**Zadatak 6** [10b] Zadan je kompleksni potencijal  $\omega(z) = 2iz^2$ . Odredite kompleksnu brzinu  $\vec{v}(z)$ , iznos brzine u točki  $T = (1, 1)$ , potencijal  $\varphi(x, y)$  i funkciju toka  $\psi(x, y)$ . Skicirajte ekvipotencijalne linije i strujnice.

**Zadatak 7** [10b] Primjenom reziduuma izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

**Zadatak 8** [10b] Promatrajmo prostor na kojem obitava neka populacija. Neka su  $r_0$ ,  $u_0$ ,  $m_0$  početne stope rađanja, umiranja i migracija. Pretpostavimo da stopa rađanja pada proporcionalno veličini populacije, stopa umiranja raste proporcionalno veličini populacije, a migracija pada proporcionalno kvadratu veličine populacije.

Iz zakona o sačuvanju populacije izvedite diferencijalnu jednadžbu čije rješenje predstavlja veličinu populacije u trenutku  $t$ .

**Druga kontrolna zadaća iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II**  
Ak. god. 2014./2015.

**Zadatak 1** Objekt se kreće po krivulji  $C \dots \vec{r}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$  u smjeru porasta parametra  $t$  pod utjecajem neprekidnog polja sila  $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z + 2xy)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} + (x \cos z + y^2)\vec{k}$ .

- a) [5b] Odredite jakost izvora (ili ponora) polja  $\vec{F}$  u točki  $T = (1, 0, 0)$ .  
b) [10b] Dokažite da je  $\vec{F}$  potencijalno vektorsko polje i odredite mu potencijal.  
c) [5b] Odredite rad potreban za gibanje objekta po krivulji  $C$  za  $t \in [1, 2]$ .

**Zadatak 2** [10b] Rastavite vektorsko polje  $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} - (y^2 + z^2)\vec{j} - (x + y^2 + z^2)\vec{k}$  na potencijalno i solenoidalno.

**Zadatak 3** [20b] Homogena žica duljine  $l = 4$ , napetosti  $p = 12$  i linijske gustoće  $\rho = 4$  učvršćena je na rubovima. Žica se pobudi na titranje udarom krutog ravnog čekića širine  $\epsilon = 0.6$  na polovici njene duljine tako da početna brzina na segmentu  $[1.7, 2.3]$  kvadratno ovisi o točki žice. Riješite problem oscilacije žice ako je u trenutku  $t = 0$  žica postavljena horizontalno.

**Zadatak 4** [10b] Nađite ravnotežni položaj teške homogene žice mase  $m = 2$  i duljine  $l = 5$ , a napete horizontalno utegom mase  $M = 10$  na desnom kraju. Lijevo kraj je slobodan. Žica se nalazi u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti  $q = 2$ .

**Zadatak 5** [10b] Riješite Dirichletov rubni problem

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \\ u(0, y) = 1, & y > 0 \\ u(0, y) = 0, & y < 0. \end{cases}$$

UPUTA: Područje  $D$  preslikajte u gornju poluravninu funkcijom  $w = 1 - zi$ , a zatim uz pomoć rješenja rubnog problema na gornjoj poluravnini riješite zadani problem.

**Zadatak 6** [10b] Zadan je kompleksni potencijal  $\omega(z) = e \cdot \ln z + 1$ . Odredite kompleksnu brzinu  $\vec{v}(z)$ , iznos brzine u točki  $T = (1, 1)$ , potencijal  $\varphi(x, y)$  i funkciju toka  $\psi(x, y)$ . Skicirajte ekvipotencijalne linije i strujnice.

**Zadatak 7** [10b] Primjenom reziduuma izračunajte integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

**Zadatak 8** [10b] Promatrajmo prostor na kojem obitava neka populacija. Neka su  $r_0$ ,  $u_0$ ,  $m_0$  početne stope rađanja, umiranja i migracija. Pretpostavimo da stopa rađanja pada proporcionalno veličini populacije, stopa umiranja raste proporcionalno veličini populacije, a migracija raste proporcionalno kvadratu veličine populacije.

Iz zakona o sačuvanju populacije izvedite diferencijalnu jednadžbu čije rješenje predstavlja veličinu populacije u trenutku  $t$ .