

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
6. rujna 2016.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. [15 bodova]

Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje zadana je s $P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ pri čemu je L uloženi rad, a K uloženi kapital. Ako je količina proizvodnje P fiksna, koje vrijednosti L i K minimiziraju funkciju troška $C(L, K) = mL + nK$? Broj m predstavlja cijenu jedinice rada, a n cijenu jedinice kapitala.

Zadatak 2. [15 bodova]

Izvedite jednadžbu oscilacija žice iz zakona o sačuvanju količine gibanja.

Zadatak 3. [10 bodova]

Orbitalni teleskop postavljen je u Zemljinu orbitu. No, NASA je pogriješila u proračunima pa je teleskop postavljen na krive koordinate. Odredite rad koji je potreban uložiti kako bi se u Zemljinom gravitacijskom polju teleskop mase 0.55 tona pomaknuo iz točke $(2, 1, 2)$ u točku $(0, 5, 12)$ po po dijelovima glatkoj krivulji. Za masu Zemlje koristite $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, a za gravitacijsku konstantu $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

Zadatak 4. [10 bodova]

Tijelo mase 12kg obješeno je za oprugu konstante elastičnosti 7. U trenutku $t = 0$ opruga je istegnuta za 2m s početnom brzinom $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Odredite jednadžbu gibanja tijela ako u sustavu nema vanjskih sila niti prigušenja.

Zadatak 5. [15 bodova]

Zbog neuspjeha s orbitalnim teleskopom iz trećeg zadatka koji se srušio iz orbite, glasina je kako NASA otpušta djelatnike. U 6 sati ujutro kad se problem dogodio, dvoje ljudi od ukupno 500 u timu započelo je širiti glasinu. U podne je 40% tima znalo za moguće otkaze. Koliko ljudi je čulo glasine pred kraj radnog vremena u 16 sati ako je brzina širenja glasina proporcionalna broju ljudi koji su čuli i koji nisu čuli glasinu?

Zadatak 6. [10 bodova]

Prilikom utvrđivanja uzroka pogreške pozicije orbitalnog teleskopa (iz trećeg zadatka), otkriveno je kako navigacijsko računalo nije dobivalo dovoljno električne energije zbog pogreške u dimenziji solarne ćelije koja ga napaja. Solarna ćelija se nalazi između krivulja $x = ay^2$ i $y = ax^2$ u prvom kvadrantu. Njezina površina je trebala biti 0.5m^2 . Odredite vrijednost parametra a uz koji bi solarne ćelije imale traženu površinu.

Zadatak 7. [10 bodova]

Neka je $\omega(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ kompleksni potencijal idealnog fluida. Dokažite da su $\varphi(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ i $\psi(x, y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ međusobno ortogonalne familije krivulja.

Zadatak 8. [15 bodova]

Riješite Dirichletov rubni problem

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\} \\ u(x, y) = 5, & y = x. \end{cases}$$