

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.
06. rujna 2018.

Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

Zadatak 1. [25 bodova]

Na krivulji $x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0$ pronađite točke koje su najbliže i najdalje od sjecišta krivulje $y = x^3 - 1$ i pravca $y = 2x$. Odaberite ono sjecište koje ima cjelobrojne koordinate.

Zadatak 2. [20 bodova]

Žica je savijena u obliku krivulje $y = \frac{1}{x} + e$ između točaka $x = 1$ i $x = 5$. Gustoća žice opisana je funkcijom $\rho_1(x, y) = x^5$ za sve x koji se nalaze u lijevoj polovici segmenta $[1, 5]$, a u ostalim točkama zadana je s $\rho_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}$. Izračunajte masu žice.

Zadatak 3. [10 bodova]

Nad \mathbb{R}^3 zadano je vektorsko polje \vec{F} i skalarno polje f . Dokažite:

$$\operatorname{div}(f \cdot \vec{F}) = f \cdot \operatorname{div}(\vec{F}) + \vec{F} \cdot \operatorname{grad}(f).$$

Zadatak 4. [20 bodova]

Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - x - 1} dx.$$

Zadatak 5. [15 bodova]

U jednom institutu znanstvenici provode eksperiment kojim žele opravdati pretpostavku da je širenje zarazne bolesti proporcionalno produktu broja zaraženih i broja nezaraženih miševa, pri čemu koeficijent proporcionalnosti iznosi približno 0.01. U populaciju od 500 miševa stavljeno je 5 zaraženih miševa. Ako je pretpostavka točna, za koliko godina će biti zaraženo pola populacije?

Zadatak 6. [10 bodova]

Izvedite rješenje jednadžbe prigušenih slobodnih oscilacija jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora.