

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku.  
2. veljače 2017.

### Pismeni ispit iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa II

**Zadatak 1.** [15 bodova] Spremnik sadrži 30 kg soli otopljene u 4000 L vode. Lužina koja sadrži 0,05 kg soli po litri utječe u spremnik brzinom 30 L/min. Nakon miješanja dobivena supstanca otječe iz spremnika istom brzinom. Koliko soli ostaje u spremniku nakon pola sata?

**Zadatak 2.** [10 bodova] Izvedite jednadžbu kontinuiteta za nestacionaran tok fluida gustoće mase  $\rho$  i brzine  $\vec{v}$ .

**Zadatak 3.** [10 bodova] Neka je tijelo  $T$  ograničeno po dijelovima glatkom plohom  $\Sigma$ , koja samu sebe ne presijeca. Dokazati da je volumen tijela  $T$  dan formulom

$$V = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \vec{r} \cdot \vec{n}_0 dS,$$

gdje je  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , a  $\vec{n}_0$  polje vanjskih normala na  $\Sigma$ .

**Zadatak 4.** [10 bodova] U Italiji sladoled, kako bi bio prodan po boljoj cijeni, mora biti određene gustoće. Izračunati srednju vrijednost gustoće sladoleda koji poslužujemo u kornetu koji ima oblik kružnog stošca čiji je vrh u ishodištu koordinatnog sustava, ima visinu 2 i os OZ je os stošca. Gustoća u svakoj točki stošca zadana je funkcijom  $\rho(x, y, z) = (x + 3)(y + 3)(z + 1)$ .

**Zadatak 5.** [15 bodova] Populacija bakterijske kulture na hranjivoj podlozi u trenutku  $t = 0$  iznosi 4 jedinice. Poznato je da hranjiva podloga može othranjivati populaciju bakterija do veličine 200 jedinica. Ukoliko populacija padne ispod 2 jedinice ona izumire. Ako je populacija bakterija u trenutku  $t = 4$  iznosila 64 jedinice, odredite populaciju bakterijske kulture u trenutku  $t = 5$ . Model promjene populacije dan je s

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{M}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{P}\right),$$

gdje je  $k \in \mathbb{R}$  nepoznati koeficijent.

**Zadatak 6.** [15 bodova] Riješite Dirichletov rubni problem:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{na } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}, \\ u(x, 0) = 4, \\ u(0, y) = -1. \end{cases}$$

**Zadatak 7.** [10 bodova] Ugostitelju je Grad Osijek ustupio proizvoljnih  $800\text{m}^2$  pravokutne površine tik uz rijeku Dravu za izgradnju luksuznog restorana. Ono što restoran čini jedinstvenim je činjenica da se restoran u potpunosti sastoji od terase na kojoj se nalaze stolovi za goste i, kao posebna atrakcija, otvorena kuhinja namještena na način da gosti u svakom trenutku mogu vidjeti u kojoj je fazi priprava njihovih narudžbi. Budući da ugostitelj želi da njegovi gosti imaju lijep pogled na Dravu sa svojih stolova, odlučio je terasu ograditi samo s tri strane koje ne gledaju na Dravu. Pomozite ugostitelju odrediti duljinu i širinu terase tako da minimizirate duljinu ograde.

**Zadatak 8.** [15 bodova] Riješite integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{x^2 - 9} dx.$$