

Pismeni ispit iz Kompleksne analize

1. i) [10 bod.] Skicirajte skup $D = \{z \in \mathbb{C} : |2z| > |1 + z^2|\}$.
ii) [15 bod.] Odredite analitičku funkciju $f = u + iv$, ako je poznato da je

$$v = 2\operatorname{ch}x \cos x - x^2 + y^2, \quad f(0) = 0.$$

2. [18 bod.] Funkcijom $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ preslikati područje $G_1 \cap G_2$, ako je

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < 1\},$$

$$G_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

3. i) [15 bod.] Funkciju

$$f(z) = \frac{2z^3 - 6z^2 + 6z - 2}{z^4 - 9z^2}$$

razviti u Laurentov red oko točke $z_0 = 1$ u području $D = \{z : 1 < |z - 1| < 2\}$.

- ii) [7 bod.] Odredite radijus konvergencije za red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} (z - 2)^n$.

4. [20 bod.] Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

5. [15 bod.] Primjenom Cauchy integralne formule izračunajte integral

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$$

gdje je Γ pozitivno orjentirani trokut s vrhovima $A = 0$, $B = 4 - i$ i $C = 4 + i$.