Odjel za matematiku
24. lipnja 2020.

**Pismeni ispit iz Vektorskih i unitarnih prostora**

1. Neka je
$$N = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) : X \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X = 0 \right\}.$$
Ako je $f \in N^0$ takav da je $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$, izračunajte $f(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix})$.

2. Neka je $V$ konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je $N \in L(V)$ nilotentan operator indeksa nilpotentnosti $n = \dim(V)$. Dokažite da ako je $x \in V$ svojstveni vektor operatora $e^N$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1 onda je $Nx = 0$. Vrijedi li obratna tvrdnja?

3. Zadana je matrica regularnog operatora $A \in L(\mathcal{P}_2)$ u paru kanonske baze $e$ i baze $e' = \left\{1 - t + t^2, 2 + t^2, -1 + 2t - t^2\right\}$ kao
$$A(e', e) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$
Odredite matricu operatora $A^{-1}$ u paru kanonske baze $e$ i baze $e'' = \left\{-1, 1 + t^2, t - 2t^2\right\}$, tj. odredite matricu $A^{-1}(e'', e)$.

4. Linearni operator $D$ u nekoj bazi ima matrični prikaz
$$D = \begin{bmatrix} 3 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & & 2 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & & & 3 \end{bmatrix}.$$
Odresite spektar $\sigma(D)$ operatora $D$. Odredite mu minimalni polinom $\mu_D(\lambda)$, karakteristični polinom $\kappa_D(\lambda)$ i Jordanovu formu $J(D)$. Odredite $\det((D - I)^3)$ i $\operatorname{tr}((D - 2I)^2(D - 3I)^2)$.

5. Neka je $A : V \to V$ normalni operator. Dokažite:

   a) Ako je $v \in V$ svojstveni vektor od $A$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda$, onda je $v$ svojstveni vektor i od $A^*$, ali pridružen svojsvtenoj vrijednosti $\overline{\lambda}$.

   b) Svojstveni vektori operatora $A$ koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno ortogonalni.