Pismeni ispit iz Linearnog programiranja

Zadatak 1. (20 bodova)

a) *Polunorma na vektorskom prostoru X je funkcija $p\colon X \to [0, \infty\rangle$ takva da vrijedi*

1. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \forall x \in X, \ \lambda \in \mathbb{R}$,
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$.

Neka je p polunorma i $x \in X$. Dokažite da je skup $A = \{y \in X \colon p(x-y) < 1\}$ konveksan skup.

b) *Neka su zadani $c_i \in \mathbb{R}^n$, te $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. Dokažite da je funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{c_i^T x + d_i\}$ konveksna na $\mathbb{R}^n$.*

Zadatak 2. (20 boda) *Formulirajte sljedeći problem kao SOLP*

$$x_1 + |x_2 - 10| \to \max$$

uz uvjet:

$$|x_1 + 2| - x_2 \leq 5.$$

Zadatak 3. (20 bodova) *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$-x_1 - 2x_2 \to \min_{x_1, x_2}$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 - x_2 &\geq -3 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Svedite problem na standardni problem linearnog programiranja i riješite problem primjenom simpleks tableua koristeći Blandovo pravilo za izbor pivota.
Zadani problem riješite i geometrijski. Na tom grafičkom prikazu naznačite svaku iteraciju koju ste dobili primjenom simpleks tableua.

Zadatak 4. (20 bodova) *Dokažite sljedeću tvrdnju:*
Dopustivo rješenje $\mathbf{x}$ je optimalno ako i samo ako vrijedi $\mathbf{c}^T\mathbf{d} \geq 0$ za svaki dopustivi smjer $\mathbf{d}$ u vektoru $\mathbf{x}$. Pri tome je dopustivo rješenje $\mathbf{x}$ jedinstveno optimalno rješenje ako i samo ako za svaki dopustivi smjer $\mathbf{d}$ u vektoru $\mathbf{x}$ vrijedi $\mathbf{c}^T\mathbf{d} > 0$.

Zadatak 5. (20 bodova) *Formulirajte dual problema linearnog programiranja*

$$3x_1 + 2x_2 \to \max$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dobiveni dualni problem napišite u standardnom obliku.