Prvi kolokvij iz Linearnog programiranja

2011./2012.

1. [25 bodova] Sljedeći problem zapišite kao LP problem, te ga riješite grafičkom metodom.

   Neko postrojenje proizvodi dva proizvoda P_1 i P_2. Svaki proizvod obrađuje se na dva stroja S_1 i S_2. Potreban broj sati obrade na strojevima za svaki proizvod i raspoloživi kapacitet strojeva (u satima), te dobit po komadu proizvoda pojedine vrste iznose:

	Proizvod P_1	Proizvod P_2	Kapacitet strojeva
Stroj S_1	1	1	20
Stroj S_2	2	1	30
Dobit	4	6	

   Na tržištu se može prodati najviše 15 jedinica proizvoda P_2. Potrebno je odrediti broj jedinica proizvoda P_1 i P_2 koje treba proizvesti da bi se ostvarila maksimalna dobit.

2. a) [10 bodova] Dokažite da je poluprostor u $\mathbb{R}^n$ konveksan skup.

   b) [15 bodova] Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Dokažite da je tada skup $S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \le \alpha\}$ konveksan skup.

3. a) [5 bodova] Definirajte ekstremnu točku poliedra i vrh poliedra.

   b) [20 bodova] Neka je $\mathcal{P}$ poliedar i $x \in \mathcal{P}$. Dokažite da ako je x vrh poliedra, onda je x ekstremna točka poliedra.

4. [25 bodova] Zadan je poliedar $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0\}$, pri čemu su

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [5, 2, 3]^T.$$

   Odredite dva različita bazična rješenja: jedno koje je bazično dopustivo rješenje i jedno koje nije bazično dopustivo rješenje.

5. a) [5 bodova] Neka je $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Kada kažemo da je vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ dopustiv smjer u vektoru $\mathbf{x}$?

   b) [20 bodova] Neka je $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + 2x_2 + x_3 = 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\}$, te $\mathbf{x} = [0, 0, 5]^T$. Odredite skup svih dopustivih smjerova u $\mathbf{x}$.

6. a) [5 bodova] Kako se računa utjecaj nebazične varijable? Koliki je utjecaj bazične varijable?

   b) [20 bodova] Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je $\mathbf{x}$ bazično dopustivo rješenje s vektorom utjecaja $\overline{\mathbf{c}} \ge 0$, onda je $\mathbf{x}$ optimalno rješenje.