Prvi kolokvij iz Linearnog programiranja

2012./2013.

Zadatak 1. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$
\begin{aligned}
& x_1 - 2x_2 \to \min_{x_1,x_2} \\
& \textit{uz uvjete} \\
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 + x_2 \leq 12 \\
& x_1 \leq 5 \\
& x_2 \leq 9
\end{aligned}
$$

a) (20 bod) Grafički riješite problem. b) (15 bod) Zapišite problem na standardni oblik problema linearnog programiranja. c)(5 bod) Zamijenite funkciju cilja $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ nekom novom funkcijom cilja tako da odgovarajući problem ima beskonačno mnogo rješenja.

Zadatak 2. *(20 bod) Proizvođač proizvodi dvije vrste betona. Svaka vreća visokokvalitetnog betona sadrži 10 kg šljunka i 5 kg cementa, dok svaka vreća niskokvalitetnog betona sadrži 12 kg šljunka i 3 kg cementa. U skladištu postoji 1920 kg šljunka i 780 kg cementa. Proizvođač ostvaruje zaradu od 120 kuna za svaku vreú visokokvalitetnog, a 100 kuna za svaku vreću niskokvalitetnog betona. Odredite koliko koliko vreća treba proizvesti jednoga i drugoga betona iz dostupnih sirovina kako bi se maksimizirala zarada proizvođača.*

Zadatak 3. *Neka je $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i, \, i = 1 \ldots, m\}$ neprazan poliedar. a) (5 bodova) Kada za bazičcno rješenje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je degenerativno? b) (15 bodova) Zadan je poliedar $\mathcal{P} = \{[x_1, x_2, x_3]^T : x_1 + x_2 = 4, x_1 - x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Odredite sva bazična rješenja i navedite bazična dopustiva rješenja koja su degenerativna. c)(10 bodova) Dokažite da poliedar $\mathcal{P}$ ne sadrži pravac.*

Zadatak 4. *(20 bod.) Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zadana s $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. Odredite nužan i dovoljan uvjet na matricu $\mathbf{A}$ da bi f bila konveksna funkcija.*

Zadatak 5. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar. a) (5 bod.) Definirajte vrh i ekstremnu točku poliedra. b) (25 bod.) Dokažite tvrdnju: Ako je $\mathbf{x}^*$ je vrh poliedra $\mathcal{P}$, onda je $\mathbf{x}^*$ ektremna točka poliedra $\mathcal{P}$.*