Prvi kolokvij iz Linearnog programiranja

2013./2014.

Zadatak 1. (20 bodova) *Neko postrojenje proizvodi jednu vrstu proizvoda. Na kraju i-tog mjeseca mora plasirati d_i jedinica tog proizvoda. Proizvodi proizvedeni tijekom mjeseca mogu se plasirati ili na kraju mjeseca u kojem su proizvedeni ili se mogu uskladištiti i plasirati na kraju sljedećeg mjeseca. Za svaku uskladištenu jedinicu proizvoda trošak skladištenja iznosi c_1 kuna mjesečno. Na početku godine je skladište prazno. Ako postrojenje proizvodi x_i jedinica u mjesecu i te x_{i+1} jedinica u mjesecu $i+1$, tada se javlja trošak $c_2|x_{i+1} - x_i|$ kuna, koji nastaje uslijed pripremanja postrojenja na postavke za dugačiji kapacitet proizvodnje.*
Folmulirajte LP problem s ciljem minimizacije troškova u periodu od 12 mjeseci (pretpostavite da se proizvodi ostavljeni u skladištu na kraju godine uništavaju te nemaju nikakvu vrijednost i ne generiraju troškove skladištenja).

Zadatak 2. *Farmer ima 10 hektara površine koju treba zasaditi pšenicom i kukuruzom, pri čemu mora zasaditi najmanje 7 hektara i pri tome smije potrošiti najviše 1200 €. Za sjetvu svakog hektara pšenice treba potrošiti 200 a za svaki hektar kukuruza 100 €. Vrijeme za sjetvu je ograničeno na 12 sati. Za svaki hektar pšenice treba mu 1 sat, a za svaki hektar kukuruza 2 sata. Ako je zarada 500 € po hektaru pšenice i 300 € po hektaru kukuruza, koliko hektara svakog treba zasaditi da se maksimizira zarada dobivena od uroda.*

a) **(15 bodova)** *Dani problem zapišite kao LP i riješite grafičkom metodom.*

b) **(5 bodova)** *Zapišite dani LP problem u standardnom obliku (SOLP)*

Zadatak 3.

a) **(10 bodova)** *Neka su $S, K \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je K konveksan. Provjerite je li skup*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x + S \subseteq K\}$$

konveksan.

b) **(10 bodova)** *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan omeđen konveksan skup i $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in S} \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Provjerite je li f konveksna funkcija.

Zadatak 4. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar.*

a) **(15 bodova)** *Definirajte vrh poliedra i dokažite da ako je x bazično dopustivo rješenje, onda je x vrh poliedra.*

b) **(5 bodova)** *Navedite dva nužna i dovoljna uvjeta da bi poliedar $\mathcal{P}$ imao barem jedan vrh.*

Zadatak 5.

a) **(5 bodova)** *Neka je $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\ \}$ neprazan poliedar. Kada za bazično rješenje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je degenerativno?*

b) **(15 bodova)** *Neka je dan poliedar $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ i nedegenerativno bazično dopustivo rješenje $x^\star$. Dokažite da je tada $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^\star)$ nedegenerativno bazično dopustivo rješenje za poliedar $\mathcal{Q} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{z} \geq 0\}$.*