Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Numerička linearna algebra - Zadaci za vježbu 1

1. a) Neka je $A = BB^*$, gdje je $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dokažite da je matrica A pozitivno semidefinitna i da su dijagonalni elementi matrice A nenegativni.

   b) Neka je A pozitivno semidefinitna matrica. Dokažite da je tada i matrica A^k pozitivno semidefinitna za svaki $k \in \mathbb{N}$..

2. Neka su $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}, \ldots, \|\cdot\|_{(n)}$ dane matrične norme na M_n. Provjerite je li

$$\|A\| = \max\{\|A\|_{(1)}, \|A\|_{(2)}, \ldots, \|A\|_{(n)}\}$$

   matrična norma.

3. Dokažite da ako je $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onda je

$$\|D\|_p = \max_i |d_i|, \quad 1 \leq p < \infty\,,$$

   gdje je $\|D\|_p$ matrična norma inducirana odgovarajućom vektorskom normom.

4. Neka je $\|\cdot\|_2$ matrična norma inducirana Euklidskom vektorskom normom, i neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrica takva da je $A^*A = AA^*$. Dokažite da je tada $\|A\|_2 = \rho(A)$, gdje $\rho(A)$ označava spektralni radijus matrice A.