

Numerička linearna algebra - Zadaci za vježbu 2

1. Neka je B bilo koja podmatrica matrice A . Dokažite da je tada

$$\|B\|_p \leq \|A\|_p, \quad 1 \leq p < \infty.$$

2. Neka su $\|\cdot\|_\alpha$ i $\|\cdot\|_\beta$ vektorske norme te odgovarajuće inducirane matrice norme

$$\|A\|_\alpha = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}, \quad \|A\|_\beta = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta}.$$

Dokažite da je tada

$$\max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_\alpha}{\|x\|_\beta} \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_\alpha}$$

3. Neka je $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normalna matrica. Dokažite da je

$$|x^*Nx| \leq \rho(N)\|x\|_2.$$

4. Provjerite je li norma $\nu(A) = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$ unitarno invarijantna norma.
Neka je $\|\cdot\|_1$ matična norma inducirana s vektorskom normom $\|\cdot\|_1$. Dokažite da je

$$\|A\|_1 \leq \nu(A) \leq n \cdot \|A\|_1.$$