Pismeni ispit iz Numeričke linearne algebre

6. veljače 2014.

1. Neka je $\nu(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}|$. Dokažite da je ν matrična norma. Je li to unitarno invarijantna norma?
   Neka je $\|\cdot\|_1$ matrična norma inducirana s vektorskom normom $\|\cdot\|_1$. Dokažite da je
   $$\|A\|_1 \leq \nu(A) \leq n\|A\|_1.$$

2. Za matricu
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 4 & 0 & 8 & -16 \\ -1 & -6 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$
   Odredite matrice P, L i U koje određuju LU faktorizaciju matrice A s djelomičnim pivotiranjem PA = LU. Koristeći izračunatu LU faktorizaciju odredite $(\det(A))^2$.

3. Neka je
   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
   Odredite QR faktorizaciju matrice A, te pomoću dobivene faktorizacije riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [8 \ -2 \ 6]^T$.

4. Neka je A simetrična pozitivno definitna matrica i neka je x_k k-ta aproksimacija dobivena metodom najbržeg silaska te neka je r_k odgovarajući rezidual. Dokažite da vrijedi $(x - x_{k+1})^T A r_k = 0$ i $\|x - x_{k+1}\|_A \leq \|x - x_k\|_A$.

5. Neka je dano m točaka $(u^{(i)}, v^{(i)})$, gdje je $u^{(i)} \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $v^{(i)} \in \mathbb{R}$. Želimo odrediti $\alpha \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ koji minimiziraju
   $$\sum_{i=1}^{m} |\alpha^T u^{(i)} + \beta - v^{(i)}|^2.$$
   Pokažite da se taj problem može preformulirati kao standardni problem najmanjih kvadrata za specijalan odabir matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i vektora $b \in \mathbb{R}^m$.