Pismeni ispit iz Numeričke linearne algebre

20. veljače 2014.

1. Dokažite da je matrična norma inducirana vektorskom normom $\|\cdot\|_1$ dana s

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|.$$

   Provjerite je li to unitarno invarijantna norma.

2. Koristeći LU faktorizaciju s djelomičnim pivotiranjem izračunajte inverz matrice A i matrice L, U, P tako da je $PA = LU$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 8 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   Pomoću Householderovih matrica odredite QR faktorizaciju matrice A, te pomoću dobivene faktorizacije riješite izračunajte $(\det A)^2$ i riješite sustav $Ax = b$, gdje je $b = [3\ 2\ 5]^T$.

4. Neka je dan sustav Ax = b, pri čemu je A simetrična pozitivno definitna matrica i iterativna metoda za rješavanje linearnog sustava $x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k$. Izvedite izraz za parametar α_k takav da se u k-tom koraku iteracije dobije greška s minimalnom A-normom.

5. Neka je dana singularna dekompozicija matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Ako su prvih r singularnih vrijednosti netrivijalne, u terminima stupaca matrica U i V iskažite sliku range(A). Navedenu tvrdnju dokažite.