

Drugi kolokvij iz Primjena diferencijalnog i integralnog računa
2013./14.

Zadatak 1. (10 bodova) Na raspolaganju vam je limena kvadratna ploča stranice $a = 72$ cm. Iz svakog njenog kuta treba izrezati kvadrat stranice x . Kolika mora biti stranica kvadrata da bi se iz nastalog komada ploče mogla načiniti posuda najvećeg volumena?

Zadatak 2. (10 bodova) Zadan je volumen V cisterne koja ima oblik valjka polumjera baze r i visine h . Koliki moraju biti r i h tako da ukupna vanjska površina cisterne bude najmanja?

Zadatak 3. Skicirajte područje omeđeno danim krivuljama i odredite njegovu površinu, ako je

a) (10 bodova) $y = |x^2 - 1|$, $y = 3$;

b) (15 bodova) $y^2 - 2y - 2 = 2x$, $y = x + 1$.

Zadatak 4. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom područja omeđenog krivuljama $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$

a) (15 bodova) oko y -osi;

b) (15 bodova) oko osi $y = -\frac{1}{2}$.

Zadatak riješite bez primjene Pappusova teorema.

Zadatak 5. (20 bodova) Izvedite formulu za površinu plohe dobivene rotacijom grafa funkcije $x = g(y)$, $y \in [c, d]$, oko y -osi, gdje je g pozitivna funkcija s neprekidnom derivacijom.

Zadatak 6. (15 bodova) Izračunajte duljinu luka krivulje parametarski zadane s $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, za $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.

Zadatak 7. (5 bodova) Prirodna duljina opruge iznosi 40 cm. Da bi opruga bila rastegnuta na 60 cm potrebna je sila od 50 N. Odredite rad potreban za rastezanje opruge do 50 cm.

Zadatak 8. (20 bodova) Odredite koordinate centra mase područja

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \quad y \geq 0\}.$$

Zadatak 9. (15 bodova) U desnu pretkljetku srca ubrizgano je 0.3 mg boje. Ako je ukupna koncentracija boje modelirana funkcijom $c(t) = (t^2 + 1)e^{-2t}$, $t \in [0, 20]$, odredite ukupni volumen krvi koju pumpa srce.