24. studeni 2011.

Vektorski prostori
Prvi kolokvij

1. Provjeriti koji od sljedećih skupova su realni vektorski prostori (uz standardna zbrajanja i množenja skalarom), te za one koji to jesu naći jednu bazu i dimenziju:
(a) $V_1 = [-n, n]$, gdje je n prirodan broj;
(b) $V_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = y - w\}$;
(c) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x + 2| = |y + 2|\}$.

2. Provjeriti koje su od slijedećih funkcija linearni operatori te za one koji to jesu odrediti sliku i jezgru, gdje sve vektorske prostore promatramo nad poljem $\mathbb{R}$:
(a) $A_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definirana s $A_1(z) = |z|$;
(b) $A_2 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, definirana s $A_2(z_1, z_2, z_3) = \overline{z}_1 + 5z_3$;
(c) $A_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, definirana s $A_3(z) = (z \cdot \overline{z}, 4 \cdot \mathrm{Re}(z))$.

3. Neka su $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ dvije baze realnog vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, gdje je e kanonska baza te $e'_1 = (1, 2, 4)$, $e'_2 = (-2, 0, 2)$, $e'_3 = (1, 2, -4)$. Nadalje, neka su $f = \{f_1, f_2\}$ i $f' = \{f'_1, f'_2\}$ dvije baze realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}$, gdje je $f_1 = 1$, $f_2 = i$ te $f'_1 = 2 + i$, $f'_2 = 3i$. Odredite matrice operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ definiranog s $A(e_1) = f_1 + 2f_2$, $A(e_2) = f_1 - f_2$, $A(e_3) = 2f_1 - f_2$ u parovima baza (e', f), (e, f') te (e', f').

4. Neka je n prirodan broj, K polje te V n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem K. Dokažite da postoji linearan operator $T \in L(V)$, $T \neq I$, takav da je $T^2 = I$. Dokažite da je tada $\mathrm{r}(T - I) + \mathrm{r}(T + I) = n$.

5. Neka je $V_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A - A^t = 0\}$ i $V_2 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$. Ako je $T \in L(V_2, V_1)$, dokažite da postoji $A \in V_1$ takav da je $T(B) \neq A$, za sve $B \in V_2$.

I. Matić