27. siječnja 2012.

Vektorski prostori
Treći kolokvij

1. (35 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ dan matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 13 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

u kanonskoj bazi. Odredite $\sin A$ i e^{A^2} te kompleksan broj α takav da je $e^{\alpha A^2} + (\sin A)^2 = I$.

2. (30) Provjerite da li je s $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A, B) = det(A \cdot B)$ dan skalarni produkt na prostoru $M_n(\mathbb{R})$.

Ako je M potprostor od $\mathbb{R}^5$ razapet skupom vektora $\{(2, 0, 1, 0, 0), (0, 4, 5, 0, 0), (4, -8, -8, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0), (1, 2, 3, 0, 0)\}$, odredite ortonormiranu bazu za M i ortonormiranu bazu za $M^\perp$ obzirom na standardni (kanonski) skalarni produkt.

3. (35) Neka je U unitaran prostor te $A, B \in L(U)$. Ako je $B^*A = 0$, odredite A^*B te dokažite da vrijedi $\mathrm{Ker}(A + B) = \mathrm{Ker}A \cap \mathrm{Ker}B$ i $\mathrm{Im}A + \mathrm{Im}B = \mathrm{Im}A \dot{+} \mathrm{Im}B$.

I. Matić