

PERTURBIRANI DISKRETNİ MODELI BEVERTON-HOLTOVOG TIP A S KAŠNJENJEM

Prof. dr. sc. MEHMED NURKANOVIĆ

Prirodno-matematički fakultet - Odsjek matematika, Univerzitet u Tuzli
Bosna i Hercegovina

Email: *mehmed.nurkanovic@untz.ba nurkanm@yahoo.com*

Beverton–Holtov model je klasični diskretni populacioni model koji daje očekivani broj N_{t+1} (ili gustinu) individua populacije u $(t + 1)$ -oj generaciji kao funkciju broja individua u prethodnoj generaciji:

$$N_{t+1} = \frac{R_0 N_t}{1 + \frac{N_t}{M}}.$$

Ovdje je R_0 stopa prirasta populacije po generaciji i $K = (R_0 - 1)M$ je sposobnost propusnosti životne sredine. Model je uveden kao model za populaciju riba (Beverton&Holt, 1975. godine) i, iako nelinearan, može se eksplicitno riješiti i rješenje je oblika

$$N_t = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)R_0^{-t}}.$$

Zbog svog oblika, model se može promatrati kao diskretni analogon kontinuiranog modela rasta stanovništva (Verhulst–Pearlova logistička jednadžba)

$$\frac{dn}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{K}\right),$$

čije je rješenje

$$n(t) = \frac{Kn(0)}{n(0) + (K - n(0))e^{-rt}}.$$

U predavanju će biti riječi o dva perturbirana diskretna modela Beverton-Holtovog tipa s kašnjenjem. Oba su predstavljena racionalnim diferentnim jednadžbama drugog reda s kvadratnim članovima. Prvi od njih (razmatran u radu [1]) je model oblika

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{ax_n^2 + cx_{n-1} + f}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje su parametri a, e i f nenegativni brojevi takvi da je $a + e + f > 0$, a početni uvjeti x_{-1}, x_0 su proizvoljni nenegativni brojevi takvi da je $x_{-1} + x_0 > 0$. Kompletna dinamika ovog diskretnog modela je u potpunosti rasvijetljena, uključujući pojavu tri bifurkacije (od čega dvije bifurkacije izmjenjene stabilnosti i jednu bifurkaciju udvostručenja perioda) i određivanje bazena privlačenja tačaka ekvilibrijuma, odnosno periodičnih tačaka osnovnog perioda dva.

Zatim će biti napravljena komparacija s drugim modelom, koji je predstavljen u obliku perturbirane Sigmoid Beverton-Holtove diferentne jednadžbe

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}^2}{bx_n x_{n-1} + cx_{n-1}^2 + f}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

razmatran u radu [2].

References

- [1] S. Jašarević-Hrustić, M.R.S. Kulenović and M. Nurkanović, Global Dynamics and Bifurcations of Certain Second Order Rational Difference Equation with Quadratic Terms, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, Vol. 14, No.2 (2015), 15: 283. doi:10.1007/s12346-015-0148-x.
- [2] M.R.S. Kulenović, S. Moranjkić and Z. Nurkanović, Global dynamics and bifurcation of a perturbed Sigmoid Beverton-Holt difference equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39 (2016), 2696-2715.
- [3] A. Bret and M.R.S. Kulenović, Two Species Competitive Model with Allee Effect, *Advances in Difference Equations*, 307 (2014), 28p.
- [4] G.G. Thomson, A proposal for a treshold stock size and maximum fishing mortality rate, In *Risk Evolution and Biological Reference Points for Fisheries Managment*, *Canad. Spec. Publ. Fish. Aquat. Sci.*, Vol 120, Smith SJ, Rivard D (eds.), NCR Research Press; Ottawa Canada, 1993; 303320.