Funkcije više varijabli

Definicija
Neka je n prirodan broj. Skup $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n puta, pri čemu je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva) se sastoji od svih uređenih n-torki realnih brojeva te $\mathbb{R}^n$ nazivamo *n-dimenzionalni Euklidski prostor*.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

Uređena n-torka realnih brojeva: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}$, sastoji se od n realnih brojeva, pri čemu je bitan poredak. Npr. za $n = 2$ bismo rekli da se radi o uređenom paru realnih brojeva, koji bi prikazivali u koordinatnoj ravnini.

Preslikavanje $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazivamo *realna funkcija n realnih varijabli*. Ukoliko je $n = 1$, tada se jednostavno radi o realnoj funkciji realne varijable. Ako je $n \geq 2$, kažemo da je f *funkcija više varijabli*.

Dakle, domena funkcije više varijabli je podskup od $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$.

Ako je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija više varijabli (tj. $n \geq 2$), tada elemente iz domene D obično kratko označavamo jednim velikim slovom, npr. umjesto $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kao vrijednost funkcije f u točki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pišemo $f(T)$, pri čemu je naravno $T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definicija
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija n realnih varijabli. Graf funkcije f, u oznaci Γ_f je skup

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\} = \{f(T) : T \in D\}.$$

Primijetimo da je Γ_f podskup od $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sjetimo se kako se graf realne funkcije (jedne) realne varijable prikazivao u koordinatnoj ravnini $\mathbb{R}^2$. Analogno se graf realne funkcije dvije realne varijable ($n = 2$) prikazuje u prostoru, u $\mathbb{R}^3$.

Ukoliko je $n = 2$, umjesto (x_1, x_2) kao varijable obično koristimo (x, y). U slučaju $n = 3$ bi za varijable umjesto x_1, x_2, x_3 koristili x, y, z. Za $n \geq 4$ koristimo $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Primjer
Odrediti domenu funkcije $f(x, y) = \frac{2}{x^2+y^2}$.
Primijetimo da se radi o funkciji dvije varijable. Funkciji se pristupa kao standardnoj elementarnoj funkciji, treba primijetiti da se radi o razlomku te da nazivnik ne smije biti nula, tj. funkcija f nije definirana u elementima $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ za koje je $x^2 + y^2 = 0$. Jedini takav uređen par je $(0, 0)$ pa je tražena domena jednaka $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Primjer
Odrediti domenu funkcije $f(x, y) = \ln(x + y - 2)$.
Kako je logaritamska funkcije definirana za pozitivne realne brojeve, domenu funkcije f čine uređeni parovi (x, y) za koje je $x + y - 2 > 0$, tj. za koje je $y > -x + 2$. Radi se o tzv. poluravnini (skica se može vidjeti na Slici 3.7. u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Definicija).

Primjer
Odrediti i skicirati domenu funkcije $f(x,y,z) = \arcsin(x^2+y^2+z^2-2)$.

Ovdje se radi o funkciji tri varijable pa je domena sadržana u $\mathbb{R}^3$. Domena funkcije $\arcsin$ je segment $[-1,1]$ pa domenu funkcije f čine sve točke $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ za koje vrijedi $x^2+y^2+z^2-2 \in [-1,1]$, tj. $-1 \leq x^2+y^2+z^2-2 \leq 1$ odnosno $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 3$. Ovo područje se nalazi između dviju ploha određenih jednadžbama $x^2+y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=3$ a zbog $\leq$ u $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 3$ su u domenu uključene i te plohe.

Sjetimo se da je jednadžbom $x^2+y^2=1$ dana kružnica sa središtem u ishodištu radijusa 1, dok je jednadžbom $x^2+y^2=3$ dana kružnica sa središtem u ishodištu radijusa $\sqrt{3}$. Ovdje se ide korak dalje te su s $x^2+y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=3$ dane generalizacije u slučaju tri varijable. Radi se jednadžbama sfera - vanjskih dijelova odnosno plašteva kugli. Slično kao i u slučaju dvije varijable, sfere dane jednadžbama $x^2+y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=3$ imaju središta u ishodištu $(0,0,0)$, prva je radijusa 1, a druga radijusa $\sqrt{3}$. Skica domene se može vidjeti na Slici 3.8. u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Definicija.

Primjer
Skicirati graf funkcije $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Primijetimo da je domena ove funkcije čitav skup $\mathbb{R}^2$, jer je $x^2+y^2 \geq 0$, a drugi korijen je definiran za nenegativne vrijednosti. Graf funkcije f se nalazi u $\mathbb{R}^3$, jer je f funkcija dvije varijable. Također, kako drugi korijen poprima nenegativne vrijednosti $\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, graf funkcije f se nalazi iznad xy-ravnine u kojoj je $z=0$ (iznad te ravnine je $z>0$). Jedina točka koja pripada grafu funkcije f i xy-ravnini je točka $(0,0,0)$.

Da bi skicirali graf funkcije f, i općenito graf funkcije više varijabli, promatramo presjeke tog grafa pojedinim ravninama. Na grafu funkcije f se, po definiciji, nalaze točke oblika (x,y,z) gdje je $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Najprije pogledajmo presjek grafa od f s ravninom $y=0$ (tj. s xz-ravninom). Točke koje se nalaze na tom presjeku zadovoljavaju jednadžbu $z=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}=|x|$. Prema tome, presjek grafa od f s ravninom $y=0$ ima oblik grafa funkcije $|x|$, koji je oblika slova V (Slika 3.1. u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Definicija). Na isti način, pogledamo li presjek grafa od f s ravninom $x=0$ (tj. s yz-ravninom), vidimo da točke na tom presjeku zadovoljavaju jednadžbu $z=\sqrt{0^2+x^2}=\sqrt{y^2}=|y|$ pa i presjek grafa od f s ravninom $x=0$ ima oblik slova V.

Prema tome, graf ove funkcije gledan s dvije strane ima oblik slova V. Pogledajmo sada i presjek s ravninom u kojoj je treća varijable, z, konstanta. Promatramo presjek grafa od f s ravninom $z=c$, gdje je c neki realan broj (konstanta) i možemo uzeti da je $c>0$, jer se na grafu funkcije f ne nalaze točke kojima je $c<0$. Presjek grafa funkcije f s ravninom $z=c$ čine točke koje zadovoljavaju jednadžbu $c=\sqrt{x^2+y^2}$, tj. za koje je $x^2+y^2=c^2$. Ovo je jednadžba kružnice (koja se nalazi u prostoru), sa središtem u $(0,0,c)$ radijusa c. Drugim riječima, presječemo li graf funkcije f ravninom paralelnom s xy-ravninom koja se nalazi iznad xy-ravnine, presjek će biti kružnica. Osim toga, kako se penjemo više po osi z, tada raste c pa raste i radijus kružnice koja se nalazi u presjeku. (Slika 3.3. u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Definicija)

Konačno, graf funkcije f gledan s dvije strane ima oblik slova V, a gledan s treće strane ima oblik kružnice pa se radi o plaštu stošca, koji ima vrh u ishodištu i nije omeđen. (Slika 3.4. u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Definicija)

Definicija
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija n realnih varijabli. Jednadžbama $f(T) = c$, pri čemu je c neka realna konstanta, su zadane tzv. *nivo plohe*, koje služe za lakše predočavanje grafa funkcije. Nivo plohe su upravo presjeci grafa funkcije i ravnine $x_{n+1} = c$. U slučaju $n = 2$, nivo plohe nazivamo *nivo krivulje*, jer se i radi o krivuljama.

Definicija
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija n realnih varijabli. Kažemo da je f *omeđena odozdo* ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je $f(T) \geq m$ za sve $T \in D$. Kažemo da je f *omeđena odozgo* ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $f(T) \leq M$ za sve $T \in D$. Kažemo da je f *omeđena* ako je omeđena i odozdo i odozgo.

Primjer
Funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ je omeđena odozdo jer je $f(x, y) \geq 0$, ali nije omeđena odozgo.
Funkcija $g(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^4$ je omeđena odozgo jer je $g(x, y, z) \leq 1$, ali nije omeđena odozdo.
Funkcija $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sin(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_4)$ je omeđena, jer je funkcija sinus omeđena.

Kod funkcija više varijabli ne možemo definirati pojam rastuće i padajuće funkcije, jer ne možemo uspoređivati elemente domene, tj. ne možemo uspoređivati elemente iz $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$. Na primjer. $(2, 3, 4) \geq (5, -1, 29)$ ili $(2, 3, 4) \leq (5, -1, 29)$?! Ništa od navedenog. Zato se uvodi pojam funkcije više varijabli padajuće odnosno rastuće obzirom na varijablu i danu točku.

Definicija
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ realna funkcija n realnih varijabli. Neka je $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (indeks koji će označavati varijablu) i $T = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in D$ (dana točka). Definiramo realnu funkciju f_i (jedne) realne varijable s

$$f_i(x) = f(c_1, \dots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \dots, c_n).$$

Primijetimo da smo svim varijablama osim jednoj, osim varijable x_i, pridružili realne vrijednosti (konstante) te smo na taj način dobili funkciju jedne varijable. Tu jednu varijablu standardno označavamo s x, nema potrebe pisati x_i na tom mjestu.

Kažemo da je funkcija f rastuća (padajuća, strogo rastuća, strogo padajuća) obzirom na varijablu x_i i točku $T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ako je funkcija f_i rastuća (padajuća, strogo rastuća, strogo padajuća).

Primjer
Funkcija $f(x, y) = x - y$ je strogo rastuća obzirom na varijablu x i točku $T = (1, 0)$, jer tada dobivamo funkciju $f_1(x) = x - 0 = x$ koja je rastuća.
Funkcija $f(x, y) = x - y$ je strogo padajuća obzirom na varijablu y i točku $T = (1, 0)$, jer tada dobivamo funkciju $f_2(x) = 1 - y$ koja je padajuća. Primijetimo da

broj 2 u indeksu znači da umjesto druge varijable, tj. umjesto varijable y uvrštavamo x, jer je f_2 funkcija u varijabli x, dok na ostalim mjestima uvrštavamo odgovarajuće vrijednosti iz točke T.
Neka je $f(x, y, z) = x - y^2 + 2z$ i $T = (2, 3, 4)$. Tada je $f_1(x) = x - 3^2 + 2 \cdot 4 = x - 1$, $f_2(x) = 2 - x^2 + 2 \cdot 4 = 10 - x^2$ te $f_3(x) = 2 - 3^2 + 2x = 2x - 7$.

Funkcije više varijabli - nizovi i neprekidnost

Prilikom proučavanje funkcija više varijabli osnovna je ideja imitirati pristup i pojmove vezane uz realne funkcije (jedne) realne varijable. Kao i tom slučaju, krenut ćemo od pojma niza.

Definicija

Neka je m prirodan broj. niz u $\mathbb{R}^m$ je preslikavanje sa skupa prirodnih brojeva u skup $\mathbb{R}^m$. Dakle, niz (T_n) u $\mathbb{R}^n$ je funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}^m$, koja svakom prirodnom broju n pridružuje točku iz T_n in $\mathbb{R}^m$.

Ovdje namjerno koristimo terminologiju ,,niz u $\mathbb{R}^m$" (iako smo ranije uvijek govorili $\mathbb{R}^n$) kako se ne bi pomiješali indeksi, jer niz označavamo s (T_n), tj. n koristimo za oznaku indeksa, dok će elementi iz skupa vrijednosti niza $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ biti uređene m-torke realnih brojeva.

Primjer

S $T_n = (\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}, 4)$ je dan niz u $\mathbb{R}^3$. Prvih nekoliko članova tog niza redom je jednako $T_1 = (1, 2, 4), T_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4), T_3 = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 4), \ldots$.

Primijetimo kako se niz u $\mathbb{R}^m$ ustvari sastoji od m nizova realnih brojeva. Na primjer, niz u $\mathbb{R}^3$ iz prethodnog primjera se sastoji od nizova $(\frac{1}{n}), (2 - \frac{1}{n})$ i stacionarnog niza (4). Općenito za niz (T_n) u $\mathbb{R}^m$ možemo reći da se sastoji od m nizova realnih brojeva $(x_n^{(1)}), (x_n^{(2)}), \ldots, (x_n^{(m)})$. U eksponentu namjerno koristimo broj unutar zagrade ($(x_n^{(i)})$ bi označavalo i-ti niz, kada ne bi koristili zagradu dobili bi (x_n^i), što je oznaka za i-te potencije).

Idući pojam koji želimo imitirati je pojam limesa niza. Prisjetimo se definicije vezane uz nizove realnih brojeva (poput gornje situacije u slučaju da je $m = 1$): Kažemo da je realan broj L limes niza (a_n) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $|l - a_n| < \epsilon$ za $n \geq n_0$.

Primijetimo da je ključni dio definicije upravo pojavljivanje izraza $|l - a_n| < \epsilon$, koji znači da je udaljenost članova niza od broja l manja od ϵ. Kako su članovi nizova koje sad promatramo iz $\mathbb{R}^m$, da bi mogli generalizirati definiciju limesa najprije trebamo pojam udaljenosti elemenata iz $\mathbb{R}^m$.

Definicija

Neka su $T_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ i $T_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ elementi iz $\mathbb{R}^m$. Udaljenost točaka T_1 i T_2 definiramo kao

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2}.$$

Udaljenosti $d(T_1, T_2)$ nazivamo *euklidska udaljenost točaka T_1 i T_2*.

Svojstva euklidske udaljenosti:

1. Za sve T_1 i T_2 iz $\mathbb{R}^m$ vrijedi $d(T_1, T_2) \geq 0$. (Jer je drugi korijen uvijek nenegativan.)

2. Za T_1 i T_2 iz $\mathbb{R}^m$ vrijedi $d(T_1, T_2) = 0$ ako i samo ako je $T_1 = T_2$. (Ako je $d(T_1, T_2) = 0$, tada je $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2} = 0$ te $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2 = 0$. No, kako su kvadrati realnih

brojeva nenegativni slijedi da je $x_1-y_1=0$, $x_2-y_2=0,\ldots,x_m-y_m=0$, tj. $x_1=y_1,x_2=y_2,\ldots,x_m=y_m$ te $T_1=T_2$. S druge strane, ako je $T_1=T_2$ tada je $x_1=y_1,x_2=y_2,\ldots,x_m=y_m$ te $T_1=T_2$.)

3. Za T_1 i T_2 iz $\mathbb{R}^m$ vrijedi $d(T_1,T_2)=d(T_2,T_1)$. (Primijetimo da je $(x_1-y_1)^2=(y_1-x_1)^2$, $(x_2-y_2)^2=(y_2-x_2)^2,\ldots,(x_m-y_m)^2=(y_m-x_m)^2$. Zato je i $d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_m-y_m)^2}=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_m-x_m)^2}=d(T_2,T_1)$.)
4. Za T_1,T_2 i T_3 iz $\mathbb{R}^m$ vrijedi $d(T_1,T_2)\leq d(T_1,T_3)+d(T_3,T_2)$. Ovo svojstvo nazivamo nejednakost trokuta.
5. Za $l\geq 0$ postoje T_1 i T_2 iz $\mathbb{R}^m$ takvi da je $d(T_1,T_2)=l$. (Možemo uzeti $T_1=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ i $T_2=(x_1+l,x_2,\ldots,x_m)$ pa je $d(T_1,T_2)=l$.)
6. Za $m=1$ je $T_1=x_1$, $T_2=y_1$ te $d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_1-y_1)^2}=|x_1-y_1|$. Za $m=2$ možemo uzeti $T_1=(x_1,y_1)$ i $T_2=(x_2,y_2)$ te je $d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, standardna formula za udaljenost točaka u koordinatnoj ravnini, iz analitičke geometrije.

Definicija
Neka je $T=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ i neka je $\epsilon>0$. Skup

$$K(T,\epsilon)=\{S\in\mathbb{R}^m : d(T,S)<\epsilon\}$$

nazivamo *otvorena kugla radijusa ϵ sa središtem u točki T*. Ovaj se skup sastoji od svih elemenata iz odgovarajućeg euklidskog prostora koji su od središta udaljeni za manje od ϵ, te predstavlja i ϵ-okolinu točke T.

Za $m=1$ je $T=x_1$ i $K(T,\epsilon)=\{x_2\in\mathbb{R} : |x_1-x_2|<\epsilon\}=\langle x_1-\epsilon,x_1+\epsilon\rangle$, upravo ϵ-okolina od x_1.

Za $m=2$ možemo uzeti $T=(x_1,y_1)$ te je $K(T,\epsilon)=\{(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\epsilon\}$, krug radijusa ϵ sa središtem u točki T.

Sada možemo definirati i limes niza u $\mathbb{R}^m$.

Definicija
Neka je (T_n) niz u $\mathbb{R}^m$. Kažemo da je $T\in\mathbb{R}^m$ *limes niza* (T_n) ako za svaki $\epsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da je $d(T,T_n)<\epsilon$ za sve $n\geq n_0$. Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} T_n=T.$$

Kažemo da je niz (T_n) konvergentan ako ima limes. Kažemo da je niz divergentan ako nije konvergentan.

Primjer
Niz $T_n=(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n},4)$ je konvergentan te vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}=(0,2,4).$$

Općenito, niz $(T_n)=(x_n^{(1)},x_n^{(2)},\ldots,x_n^{(m)})$ u $\mathbb{R}^m$ je konvergentan ako i samo ako su svi nizovi $(x_n^{(1)}),(x_n^{(2)}),\ldots,(x_n^{(m)})$ konvergentni i tada je

$$\lim_{n\to\infty} T_n=(\lim_{n\to\infty} x_n^{(1)},\lim_{n\to\infty} x_n^{(2)},\ldots,\lim_{n\to\infty} x_n^{(m)}).$$

Primjer
Niz $T_n = (\frac{1}{n}, 2, 4-n, n)$ u $\mathbb{R}^4$ je divergentan jer su nizovi realnih brojeva (a_n) i (b_n) dani s $a_n = 4 - n$ i $b_n = n$ divergentni.

Pomoću limesa niza ćemo sada definirati i limes funkcije više varijabli.

Definicija
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ realna funkcija m realnih varijabli. Kažemo da je realan broj a limes funkcije f u točki $T_0 \in \mathbb{R}^m$ ako za svaki niz (T_n) elemenata iz D takav da je

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T_0$$

vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = a.$$

U tom slučaju pišemo

$$\lim_{T\to T_0} f(T) = a.$$

Primijetimo da je $\lim_{n\to\infty} T_n = T_0$ limes niza u $\mathbb{R}^m$, dok je $\lim_{n\to\infty} f(T_n) = a$ limes niza u $\mathbb{R}$. Drugim riječima, funkcija f ima limes jednak a u točki T_0 ako za svaki niz (T_n) u domeni D funkcije f koji teži (konvergira) prema T_0 niz funkcijskih vrijednosti $f(T_n)$ teži prema realnom broju a. Također, funkcije ne mora biti definirana u točki T_0 da bi u toj točki imala limes.

U slučaju funkcije jedna varijable je za limes funkcije bilo dovoljno promatrati samo limes s desna i limes s lijeva, jer se točki na pravcu (realnom broju) može približiti ili s lijeve ili s desne strane. Nasuprot tome, u slučaju funkcije više varijabli se točki T_0 može približiti s beskonačno mnogo strana, tj. na beskonačno mnogo načina. Na primjer, ishodištu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ s možemo približiti po koordinatnim osima (s lijeva, s desna, od gore, od dolje), po bilo kojem pravcu koji prolazi kroz ishodište ($y = kx$), po bilo kojoj paraboli koji prolazi kroz ishodište ($y = kx^2$) te na brojne druge načine.

Primjer
Pokažimo da funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nema limes u točki $T_0 = (0,0)$.

Pogledajmo najprije niz $T_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ koji očito imali limes $(0,0)$. Odgovarajući limes niza funkcijskih vrijednosti je

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})^2 - (\frac{1}{n})^2}{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2} = 0,$$

pa ako postoji limes od f u točki $(0,0)$, on mora biti jednak 0.

Pogledajmo sada niz $T_n = (0, \frac{1}{n})$ koji očito imali limes $(0,0)$. Odgovarajući limes niza funkcijskih vrijednosti je

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = \lim_{n\to\infty} f(0, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{0^2 - (\frac{1}{n})^2}{0^2 + (\frac{1}{n})^2} = -1,$$

pa ako postoji limes od f u točki $(0, 0)$, on mora biti jednak -1.

Prema tome, nije moguće da postoji limes funkcije f u točki $(0, 0)$.

Primjer

Odredimo limes funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x, y) = x^2 - y^2$ u točki $T_0 = (0, 0)$.

Neka je $(T_n) = (x_n, y_n)$ proizvoljan niz u $\mathbb{R}^2$ koji konvergira prema $(0, 0)$. Tada je $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 - y_n^2) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 - \lim_{n\to\infty} y_n^2 = 0,$$

pa je

$$\lim_{T\to T_0} f(T) = 0.$$

Navedimo rezultat donekle sličan usporedbi jednostranih limesa u slučaju funkcije jedne varijable, ali nešto slabiji:

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ te $T_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Neka je $L = \lim_{T\to T_0} f(T)$. Ako postoje *uzastopni limesi* $L_1 = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x, y))$ i $L_2 = \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x, y))$, tada je $L = L_1 = L_2$.

Prema tome, ako su uzastopni limesi L_1 i L_2 različiti, funkcija f ne može imati limes u točki T_0. No, moguće je da funkcija nema limes u točki T_0 iako su joj uzastopni limesi u toj točki jednaki. Zato prethodni rezultat koristimo jedino kada želimo pokazati da funkcija dvije varijable u nekoj točki nema limes.

Pogledamo li ponovno funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, za jednostrane limese u točki $(0, 0)$ dobivamo

$$L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = L_1 = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

i

$$L_2 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = L_1 = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

zbog $L_1 \neq L_2$ funkcija f nema limes u točki $(0, 0)$.

Pojam neprekidnosti funkcije u točki se i u slučaju funkcija više varijabli prirodno veže uz pojam limesa funkcije.

Definicija

Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *neprekidna u točki* $T_0 \in D$ ako je

$$\lim_{T\to T_0} f(T) = f(T_0).$$

Kažemo da je funkcija *neprekidna na skupu* S ako je neprekidna u svakoj točki iz S. Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *neprekidna* ako je neprekidna na skupu D, tj. ako je neprekidna na čitavoj domeni.

Dakle, isto kao i u slučaju funkcije jedne varijable, funkcija više varijabli je neprekidna u točki ako je limes funkcije u toj točki jednak vrijednosti funkcije u toj točki.

Promotrimo i još jedan, ekvivalentan, način pristupa neprekidnosti funkcije. Neka je $T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $T_0 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Veličinu $\Delta x_i = x_i - c_i$, pri čemu je $i = 1, 2, \ldots, n$, nazivamo *prirast varijable* x_i u točki T_0. Veličinu $\Delta u = f(T) - f(T_0)$ nazivamo *prirast funkcije* f u točki T_0.

Primijetimo da $T \to T_0$ ako i samo ako $x_1 \to c_1, x_2 \to c_2, \ldots, x_n \to c_n$, odnosno $x_1 - c_1 \to 0, x_2 - c_2 \to 0, x_n - c_n \to 0$, tj. u prethodnim oznakama $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Ako je funkcija f neprekidna u T_0, tada je $\lim_{T \to T_0} f(T) = f(T_0)$, odnosno $\lim_{T \to T_0} f(T) - f(T_0) = 0$ te $\lim_{T \to T_0}(f(T) - f(T_0)) = 0$ ili, konačno

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0} \Delta u = 0.$$

Prema tome, funkcija je neprekidna u točki ako prirast funkcije u toj točki teži prema 0 kada prirasti svih varijabli teže prema 0.

Navedimo i neka svojstva neprekidnih funkcija, koja su sasvim analogna svojstvima neprekidnih funkcija jedne varijable:

1. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka je $f(T_0) > 0$ za neki $T_0 \in D$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(T) > 0$ za sve $T \in K(T_0, \epsilon)$ (ako je neprekidna funkcija pozitivna u nekoj točki, onda je pozitivna i u nekoj okolini te točke).

2. Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i neka je $f(T_0) < 0$ za neki $T_0 \in D$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(T) < 0$ za sve $T \in K(T_0, \epsilon)$ (ako je neprekidna funkcija negativna u nekoj točki, onda je negativna i u nekoj okolini te točke).

3. Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada su i funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ i f/g (uz pretpostavku $g(T) \neq 0$ za sve $T \in D$) neprekidne.

Parcijalne derivacije

U ovom ćemo poglavlje prilagoditi pojam derivacije funkcije jedne varijable na slučaj funkcije više varijabli. U slučaju funkcije više varijabli ne postoji ,,derivacija", ali kada fiksiramo jednu varijablu tada možemo dobiti derivaciju po toj, fiksiranoj varijabli, te ćemo takvu derivaciju nazivati parcijalna derivacija.

Najprije ćemo, slično kao ranije, obzirom na jednu točku iz $\mathbb{R}^n$ funkciji n varijabli pridružiti n funkcija jedne varijable te promatrati njihove derivacije.

Definicija
Neka je n prirodan broj i $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija n realnih varijabli. Neka je $T = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ definiramo funkciju $f_i : D_i \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f_i(x) = f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_n)$. **Parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x_i u točki T** je derivacija funkcije f_i u točki c_i. Parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x_i u točki T označavamo s

$$\frac{\partial f(T)}{\partial x_i}.$$

Oznaku ∂ čitamo ,,delta", to je malo pisano slovo delta.

Dakle, parcijalnu derivaciju funkcije u točki pišemo kao razlomak, u brojniku je ,,delta f", što označava parcijalnu derivaciju funkcije f, zatim dolazi točka T u zagradu, dok je u nazivniku ,,delta x_i", što označava varijablu po kojoj se funkcija f parcijalno derivira.

Primijetimo da je

$$\frac{\partial f(T)}{\partial x_i} = f_i'(c_i) = \lim_{x \to c_i} \frac{f_i(x) - f_i(c_i)}{x - c_i} =$$

$$\lim_{x \to c_i} \frac{f(c_1, \ldots, c_{i-1}, x, c_{i+1}, \ldots, c_n) - f(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)}{x - c_i}.$$

Definicija
Ako za funkciju f u točki T postoje parcijalne derivacije po svim varijablama, kažemo da je funkcija f **derivabilna** u točki T. Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki svoje domene, kažemo da je f derivabilna funkcija.

Primjer
Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Neka je $T = (2, 3, 4)$. Odredimo $\frac{\partial f(T)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(T)}{\partial y}$ i $\frac{\partial f(T)}{\partial z}$. (Podsjetimo, prema ranijoj konvenciji u slučaju da funkcije manje od četiri varijable za varijable koristimo oznake x, y i z.)

Odredimo najprije funkcije f_1, f_2 i f_3. Ponovima da kod dobivanja funkcije f_i na mjesto i-te varijable pišemo x, a na mjesta ostalih varijabli pišemo brojeve koji stoje na odgovarajućim mjestima u točki T. Zato je $f_1(x) = x \cdot 3^2 \cdot 4^3 = 576x$. Derivacija ove funkcije u 2 (jer na mjestu prve varijable u točki T stoji 2, a deriviramo po prvoj varijable) je 576, tj. $\frac{\partial f(T)}{\partial x} = 576$.

Slično, $f_2(x) = 2 \cdot x^2 4^3 = 128x^2$, a derivacija ove funkciju u 3 je jednaka 768 pa je $\frac{\partial f(T)}{\partial y} = 768$. Konačno, $f_3(x) = 2 \cdot 3^2 \cdot x^3 = 18x^3$. Derivacija ove funkcije u 4 je $18 \cdot 3 \cdot 4^2 = 864$ pa je $\frac{\partial f(T)}{\partial z} = 864$.

Podsjetimo se, u slučaju funkcije jedne varijable smo najprije definirali derivaciju funkcije u točki (kao broj, preko limesa), a zatim i derivaciju funkcije, kao funkciju koju točki iz domene pridružuje derivaciju funkcije u toj točki. Slično ćemo napraviti i u slučaju funkcije više varijabli.

Definicija
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Neka je $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Funkciju koja točki T iz D pridružuje vrijednost parcijalne derivacije funkcije f po varijabli x_i u točki T nazivamo **parcijalna derivacija funkcije f po varijabli** x_i te označavamo s

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Dakle, $\frac{\partial f(T)}{\partial x_i}$ (nekad se piše i $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T)$) je broj, dok je $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ funkcija, $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ koja točki $T \in D$ pridružuje broj $\frac{\partial f(T)}{\partial x_i}$.

Kada računamo parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x_i, tada deriviramo po toj varijabli, dok sve druge varijable tretiramo kao konstante.

Primjer
Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Tada je $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3$, a $\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$.

Kako je i $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ funkcija n varijabli, i ona može imati svoje parcijalne derivacije. Parcijalnu derivaciju funkcije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ po varijabli x_j, za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nazivamo **parcijalna derivacija drugog reda funkcije f po varijablama x_i i x_j** te označavamo s

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Ovdje potencija u brojniku označava o parcijalnoj derivaciji kojeg reda se radi, dok su u nazivniku navedene varijable po kojima se parcijalno derivira, s tim da je desnom rubu najbliža varijabla po kojoj se prvo parcijalno derivira. Parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nekad nazivamo i parcijalnim derivacijama prvog reda.

Sada bi slično za $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (mogu biti i jednaki) definirali parcijalnu derivaciju trećeg reda funkcije f po varijablama x_i, x_j i x_k kao $\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i})$ (parcijalna derivacija po x_k parcijalne derivacije drugog reda po x_i i x_j) te pisali

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}.$$

Općenito, za $i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bi imali parcijalnu derivaciju m-tog reda funkcije f po varijablama $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, u oznaci

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \cdots \partial x_{i_1}}.$$

Obično u zapisu koristimo pokratu u nazivniku oblika:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3},$$

pri čemu jednake uzastopne varijable u nazivniku okupljamo zajedno i broj njihova pojavljivanja označavamo potencijom u nazivniku.

Primjer
Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) = x^2 y^3$. Odredimo sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije f.

Sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije f su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2$, redom imamo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y.$$

Primijetimo da je $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. To nije slučajno, jer vrijedi idući rezultat:

Teorem (Schwartzov teorem)
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ te neka je m prirodan broj. Ako f ima parcijalne derivacije prvog, drugog, $\ldots$, m-tog reda i ako su parcijalne derivacije prvog, drugog, $\ldots$, $(m-1)$-vog reda funkcije f neprekidne, tada parcijalne derivacije m-tog reda funkcije f ne ovise o redoslijedu deriviranja po pojedinim varijablama.

Primjer
Neka je

$$f(x, y, z) = x^{\ln(y + x^{\arcsin x^2})} - \frac{x - \cos(2^x)}{y + \sqrt{\arccos(2^y)}}.$$

Odrediti $\frac{\partial^{47} f}{\partial^{22} x \partial z \partial y^2 \partial^{22} x}$.

Očito bi bilo vrlo komplicirano računati parcijalne derivacije funkcije f po x i po y. Ali, kako se u izrazu u definiciji funkcije f ne pojavljuje z, tada je parcijalna derivacija funkcije f po z jednaka nuli, jer u tom slučaju čitavu funkciju tretiramo kao konstantu.

Prema Schwartzovom teoremu je

$$\frac{\partial^{47} f}{\partial^{22} x \partial z \partial y^2 \partial^{22} x} = \frac{\partial^{47} f}{\partial^{44} x \partial y^2 \partial z} = 0.$$

Primjer
Odredimo sve parcijalne derivacije trećeg reda funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Zbog Schwartzova teorema je jedino bitno koliko puta parcijalno deriviramo funkciju f po kojoj varijabli. Zato su sve tražene parcijalne derivacije

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x}, \frac{\partial^3 f}{\partial^3 y}, \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y}.$$

Primjer
Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ za $(x, y) \neq (0, 0)$ i

$f(0,0) = 0$. Primijetimo da za sve x i y vrijedi $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Pokažimo da funkcija f nije neprekidna u točki $(0,0)$.

Neka je najprije $T_n = (\frac{1}{n}, 0)$ niz koji teži prema $(0,0)$. Odgovarajući limes funkcijskih vrijednosti je

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{(\frac{1}{n})^2 + 0^2} = 0.$$

Neka je sada $T_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ drugi niz koji teži prema $(0,0)$. Odgovarajući limes funkcijskih vrijednosti je sada

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n}^2} = \frac{1}{2}.$$

Kako smo dobili dvije različite vrijednosti, ne postoji limes funkcije f u točki $(0,0)$ pa f nije neprekidna u toj točki, tj. funkcija f ima prekid u toj točki.

Pogledajmo sada parcijalne derivacije funkcije f u točki $(0,0)$, po definiciji:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0,$$

pa je funkcija f derivabilna u točki $(0,0)$ jer u toj točki ima parcijalne derivacije po svim varijablama.

Prema tome, funkcije više varijabli može u nekoj točki biti derivabilna i ako nije neprekidna u toj točki. Kod funkcija jedne varijable ovo nije bio slučaj.

Diferencijabilnost

U slučaju funkcije jedne varijable se derivabilnost i diferencijabilnost smatraju jednakim pojmovima. U slučaju funkcije više varijabli nije tako.

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija više varijabli, $T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ i $T_0 = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in D$. Neka je $\Delta u = f(T) - f(T_0)$ te $\Delta x_i = x_i - c_i$.

Definicija

Neka je f derivabilna u točki T_0 i neka je

$$\rho = d(T, T_0) = \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \ldots + (x_n - c_n)^2} = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}.$$

Kažemo da je funkcija f **diferencijabilna u točki** T_0 ako je

$$\Delta u = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_n}\Delta x_n + \rho\alpha(\rho),$$

za funkciju $\alpha : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takvu da je

$$\lim_{\rho \to 0} \alpha(\rho) = 0.$$

Ako je f diferencijabilna u svakoj točki $T_0 \in D$, kažemo da je f **diferencijabilna funkcija**.

U prethodnom smo poglavlju vidjeli da derivabilna funkcija ne mora biti i neprekidna. Po definiciji, diferencijabilna funkcija mora biti i derivabilna. Sada ćemo pogledati neprekidnost: primijetimo da $T \to T_0$ ako $\Delta x_i \to 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. No, tada vrijedi i $\rho = d(T, T_0) \to 0$ pa i $\rho\alpha(\rho) \to 0$. Zato vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{T \to T_0} \Delta u &= \lim_{T \to T_0} \left(\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_n}\Delta x_n + \rho\alpha(\rho) \right) \\
&= \lim_{T \to T_0} \left(\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_n}\Delta x_n \right) + \lim_{T \to T_0} \rho\alpha(\rho) \\
&= \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_n}\Delta x_n \right) + \lim_{\rho \to 0} \rho\alpha(\rho) = 0.
\end{aligned}$$

Iz $\lim_{T \to T_0} \Delta u = 0$ slijedi $\lim_{T \to T_0} f(T) = f(T_0)$, što je upravo definicija neprekidnosti u točki T_0, pa diferencijabilna funkcija mora biti i neprekidna.

Primjer

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ za $(x, y) \neq (0, 0)$ i $f(0, 0) = 0$. Primijetimo da za sve x i y vrijedi $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Pokažimo da funkcija f nije diferencijabilna u točki $(0, 0)$.

Provjera diferencijabilnost funkcije u nekoj točki se ustvari svodi na provjeru svojstava funkcije $\alpha(\rho)$ iz definicije. Iz izraza koji se pojavljuje u definiciji diferencijabilnosti funkcije u točki treba izraziti funkciju $\alpha(\rho)$ te provjeriti da li je $\lim_{\rho \to 0} \alpha(\rho) = 0$.

U našem je primjeru $c_1 = c_2 = 0$, jer promatramo diferencijabilnosti u točki $(0,0)$. Kako koristimo varijable x i y, jer je f funkcija dvije varijable, imamo $\Delta x = x - 0 = x$ i $\Delta y = y - 0 = y$. Sada je $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Također je $\Delta u = f(x,y) - f(0,0) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, za $(x,y) \neq (0,0)$. Trebamo i parcijalne derivacije u točki $(0,0)$:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

(jer je $f(x,0) = f(0,y) = f(0,0) = 0$).

Primijetimo da $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ znači da istovremeno $x \to 0$ i $y \to 0$, tj. $(x,y) \to (0,0)$.

Uvrstimo li sve u izraz iz definicije diferencijabilnosti u točki, dobivamo $\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \rho\alpha(\rho) = \sqrt{x^2+y^2}\alpha(\rho)$, odakle je

$$\alpha(\rho) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sada je

$$\lim_{\rho\to 0}\alpha(\rho) = \lim_{\rho\to 0}\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pokazat ćemo da ovaj limes ne postoji, tj. pokazat ćemo da funkcija $g(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ nema limes u $(0,0)$. U tu svrhu ćemo promatrati dva niza s limesom $(0,0)$.

Neka je najprije $T_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Tada je $\lim_{n\to\infty} T_n = (0,0)$ i

$$\lim_{n\to\infty} g(T_n) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{n})^2\cdot 0}{((\frac{1}{n})^2 + 0^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Neka je sada $T_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. I tada je $\lim_{n\to\infty} T_n = (0,0)$, ali

$$\lim_{n\to\infty} g(T_n) = \lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}}{((\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2^{\frac{3}{2}}}{n^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}.$$

Kako smo dobili dvije različite vrijednosti, traženi limes ($\lim_{\rho\to 0}\alpha(\rho)$) ne postoji pa funkcija f nije diferencijabilna u točki $(0,0)$.

Definicija

Kažemo da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilna u točki $T_0 \in D$ ako je f derivabilna na nekoj okolini $K(T_0, \epsilon), \epsilon > 0$ točke T_0 te su sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ neprekidne u točki T_0.

Teorem
Ako je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilna u točki $T_0 \in D$ tada je f i diferencijabilna u točki T_0.

Ponovimo odnose među klasama funkcija:
Ako je f funkcija jedne varijable, tada vrijedi:

- f je derivabilna $=$ f je diferencijabilna;
- f je derivabilna $\Rightarrow$ f je neprekidna.

Ako je f funkcija više varijabli, tada vrijedi:

- f je diferencijabilna $\Rightarrow$ f je derivabilna;
- f je diferencijabilna $\Rightarrow$ f je neprekidna;
- derivabilna funkcija ne mora biti diferencijabilna;
- derivabilna funkcija ne mora biti neprekidna;
- f je neprekidno derivabilna $\Rightarrow$ f je diferencijabilna.

Plohe drugog reda

Definicija
Neka su $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J \in \mathbb{R}^3$ takvi da je barem jedan od brojeva A, B, C, D, E, F različit od nule te postoji točka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ takva da je $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$. Skup svih točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ takvih da je $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ nazivamo ploha drugog reda.

Primijetimo da brojevi A, B, C, D, E, F stoje upravo uz članove drugog reda, odatle i dolazi naziv ovih ploha. Jedan primjer plohe drugog reda smo već vidjeli kod primjera domena funkcija više varijabli. Sfera (rub kugle, kuglina ploha) sa središtem u točki (x_0, y_0, z_0) radijusa r je zadana jednadžbom

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

odnosno, u obliku zapisa iz definicije plohe drugog reda

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (x_0^2 + z_0^2 + z_0^2 + r^2) = 0.$$

U konkretnim situacijama se obično izbjegava korištenje zapisa iz definicije te se traži zapis koji je pogodniji za predočavanje presjeka plohe s ravninama oblika $x = c_0$, $y = c_0$ i $z = c_0$ za neki realan broj (konstantu c_0), tj. nivo-ploha, pomoću kojih je često lakše vizualizirati i skicirati plohu te odrediti naziv, odnosno klasu kojoj pripada.

Primjerice, kako je kružnica specijalan slučaj elipse, tako je sfera specijalan slučaj *elipsoida*, plohe drugog reda dane jednadžbom

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Naziv elipsoid dolazi od činjenice da se u presjeku sa svakom od gore navedenih ravnina dobiva elipsa, a sfera se dobiva u slučaju da je $a = b = c$. Slika elipsoida se može vidjeti na Slici 3.12 u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Plohe drugog reda.

U nastavku ćemo navesti još neke standardne primjere ploha drugog reda:

Eliptički paraboloid je zadan jednadžbom $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ili, općenitije $z - z_0 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$ (sada je tjeme paraboloida u točki (x_0, y_0, z_0)). Naziv dolazi od toga što uvrstimo li konstantu umjesto z dobivamo jednadžbu elipse (kao presjek s ravninom oblika $z = z_0$), a uvrstimo li konstantu umjesto x ili y dobivamo jednadžbu parabole (kao presjek s ravninama oblika $x = c_0$ ili $y = c_0$). Slika se može vidjeti na Slikama 3.13 - 3.16 u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Plohe drugog reda.

Primijetimo da je jednadžbom $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ zadan paraboloid s otvorom prema gore, po osi z. Malom promjenom $-z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ dobivamo paraboloid s otvorom prema dolje, također po osi z. Također, jednadžbom $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ je zadan paraboloid s otvorom po osi x, a jednadžbom $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ je zadan paraboloid s otvorom po osi z.

Hiperbolički paraboloid je zadan jednadžbom $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ili, općenitije $z - z_0 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$. Uvrstimo li konstantu umjesto z dobivamo jednadžbu hiperbole (koja se sastoji od dvije grane), a uvrstimo li konstantu umjesto x ili y dobivamo jednadžbu parabole (s otvorom prema gore, odnosno s otvorom prema dolje, ovisno o predznaku). Slika se može vidjeti na Slici 3.17 u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Plohe drugog reda.

Hiperboloidi su zadani jednadžbama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Uvrštavanjem konstanti dobivamo jednadžbe elipsi i hiperbola. Primijetimo da se ove dvije jednadžbe razlikuju u broju minusa. Hiperboloide zadane prvom jednadžbom, s jednim minusom, nazivamo *jednokrilni hiperboloidi*, dok hiperboloide zadane drugom jednadžbom, s dva minusa, nazivamo *dvokrilni hiperboloidi*.

Iz $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ slijedi $\frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ pa, kako je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 0$ slijedi $\frac{z^2}{c^2} \geq 1$, odnosno $z^2 \geq c^2$. Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je $z \in \langle -\infty, -c] \cup [c, \infty\rangle$, uzmemo li da je $c > 0$. Prema tome, dvokrilni se hiperboloid sastoji od dva dijela, dva krila, jednog iznad ravnine $z = c$, a drugog ispod ravnine $z = -c$. Slike se mogu vidjeti na Slici 3.19 u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Plohe drugog reda.

Cilindri ili cilindrične plohe nastaju interpretacijom jednadžbi krivulja u prostoru $\mathbb{R}^3$. Zaista, u jednadžbi iz definicije plohe drugog reda se pojedine varijable uopće ne moraju pojavljivati (npr. uzimajući $C = E = F = I = 0$ u jednadžbi iz definicije plohe drugog reda dobivamo cilindar jer se ne pojavljuje varijabla z).

S $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je zadan eliptički cilindar, s $\frac{x^2}{a^2} + -\frac{z^2}{c^2} = 1$ je zadan hiperbolički cilindar, a s $z = x^2$ je zadan parabolički cilindar. Slike se mogu vidjeti na Slikama 3.21 i 3.22 u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Plohe drugog reda.

Tangencijalna ravnina

Prisjetimo se, ako je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija jedne varijable, tada pomoću derivacije možemo odrediti jednadžbu tangente u točki na grafu funkcije f. Za $x_0 \in D$ je točka na grafu dana s $(x_0, f(x_0))$, a jednadžba tangenta (koja je pravac) je dana s $y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + y_0$. Slično možemo postupiti i u slučaju diferencijabilne funkcije dvije varijable.

Ako je $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija dvije varijable, tada je graf funkcije f ploha. Tu plohu zadajemo i s $z = f(x, y)$. Uočimo jednu točku T_0 na toj plohi, tj. na grafu funkcije f. Tada je točka T_0 oblika $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, za neku točku $(x_0, y_0) \in D$. Svaka krivulja koja leži u toj plohi i prolazi točkom T_0 ima tangentu u toj točki. Tangente svih takvih krivulja se nalaze u istoj ravnini, koju nazivamo *tangencijalna ravnina*.

Definicija
Neka je Γ_f graf diferencijabilne funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i neka je $T_0 \in \Gamma_f$. Tangencijalna ravnina na plohu Γ_f u točki T_0 je ravnina koja sadrži tangente u točki T_0 na sve krivulje koje leže u Γ_f i prolaze točkom T_0.

Za opis tangencijalne ravnine u danoj točki će nam trebati jednadžbe pravca i ravine u prostoru.

Pravac u prostoru je određen točkom $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ kojom prolazi i vektorom smjera $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$ (koji leži na pravcu). Ovdje je uređena trojka $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ ortonormirana baza. Kanonski oblik jednadžbe tako zadanog pravca je

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.$$

Ovdje se ne radi o klasičnom dijeljenju, već samo o zapisu. Moguće je i da neki od brojeva a_x, a_y, a_z bude jednak nuli. Na primjer, ako je pravac paralelan osi x, tada je njegov vektor smjera oblika $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i}$ te su a_y i a_z jednaki nuli. Iz jednakosti $\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{0}$ takozvanim unakrsnim množenjem dobivamo $0 = y - y_0$ te $y = y_0$, odnosno sve točke na pravcu imaju istu ordinatu. Na isti bi način dobili da je i $z = z_0$ pa sve točke ina pravcu imaju i istu aplikatu.

Ravnina u prostoru je određena točkom $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ kojom prolazi i vektorom normale $\overrightarrow{n} = A\overrightarrow{i} + B\overrightarrow{j} + C\overrightarrow{k}$ (koji je okomit na tu ravninu). Opći oblik jednadžbe ravnine je dan s

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

pri čemu se D određuje uvrštavanjem točke (x_0, y_0, z_0). Na primjer, ako ravnina prolazi točkom $(1, 2, 3)$ te ima vektor normale $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, tada je $A = 1, B = -1, C = 1$ te uvrštavanjem dobivamo $1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + D = 0$, odakle je $D = 0$ pa je jednadžbe te ravnine jednaka $x - y + z = 0$.

Odredimo sada jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ u točki $T_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Označimo $f(x_0, y_0)$ sa z_0, tada je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Dakle, tangencijalna ravnina prolazi točkom (x_0, y_0, z_0). Još treba odrediti vektor normale.

Tangencijalna ravnina u točki (x_0, y_0, z_0) je određena pravcima

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}},$$

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}}.$$

Promatramo li presjek plohe $z = f(x, y)$ s ravninom $y = y_0$, tada u presjeku dobivamo krivulju danu jednadžbom $z = f(x, y_0)$. U presjeku ravnine $y = y_0$ i tangencijalne ravnine dobivamo pravac koji je tangenta na krivulju $z = f(x, y_0)$ te za čije točke vrijedi $y = y_0$. Zato je u drugom nazivniku nula ($\frac{y-y_0}{0}$), dok jednakost $\frac{x-x_0}{1} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}$ upravo imitira jednadžbu tangente na graf derivabilne funkcije. Slično se dobiva i drugi pravac.

Vektori smjerova ovih pravaca su

$$\overrightarrow{s_1} = \overrightarrow{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{s_2} = \overrightarrow{j} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\overrightarrow{k}.$$

Ovi pravci leže u tangencijalnoj ravnini, pa je vektor normale okomit na njihove vektore smjerove i vektor normale je dan s

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\overrightarrow{i} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Još treba u jednadžbi tangencijalne ravnine uvrštavanjem odrediti zadnji parametar:

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 + 1 \cdot z_0 + D = 0,$$

pa je $D = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x_0 + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y_0 - z_0$.

Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $z = f(x, y)$ dana je s

$$-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y + z + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 - z_0 = 0$$

što obično zapisujemo u obliku

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Primjer

Odredimo tangencijalnu ravninu na graf funkcije $f(x, y) = -2x^2 + 4x - y^2 - 2$ u točki $(1, 0)$.

Primijetimo da je $f(x,y) = -2(x^2 - 2x + 1) - y^2 = -2(x-1)^2 - y^2$ pa je graf funkcije f ploha $z = f(x,y) = -2(x-1)^2 - y^2$ eliptički paraboloid s otvorom prema dolje i tjemenom u točki $(1,0,0)$.

Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x + 4$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, uvrštavanjem $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0.$$

Također je $z_0 = f(x_0,y_0) = f(1,0) = 0$ pa je jednadžba tražene tangencijalne ravnine jednaka $z = 0$, tj. radi se upravo o xy-ravnini. Ovaj je rezultat i očekivan, jer tangencijalna ravnina u tjemenu paraboloida mora biti paralelna xy-ravnini (kao što je tangenta na parabolu u njenom tjemenu paralelna x-osi).

Ekstremi funkcija više varijabli

Ekstreme funkcija više varijabli definiramo analogno kao u slučaju funkcija jedne varijable.

Definicija
Kažemo da funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u točki $T_0 \in D$ ima lokalni maksimum ako postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(T_0) \geq f(T)$ za sve $T \in K(T_0, \epsilon)$. Kažemo da funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u točki $T_0 \in D$ ima strogi lokalni maksimum ako postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(T_0) > f(T)$ za sve $T \in K(T_0, \epsilon)$, $T \neq T_0$.
Kažemo da funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u točki $T_0 \in D$ ima lokalni minimum ako postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(T_0) \leq f(T)$ za sve $T \in K(T_0, \epsilon)$. Kažemo da funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ u točki $T_0 \in D$ ima strogi lokalni minimum ako postoji $\epsilon > 0$ takav da je $f(T_0) < f(T)$ za sve $T \in K(T_0, \epsilon)$, $T \neq T_0$.

Točke lokalnih minimuma i lokalnih maksimuma jednim imenom nazivamo točkama *lokalnih ekstrema*. U slučaju derivabilnih funkcija postoje posebne metode za određivanje točaka lokalnih ekstrema, slično kao i u slučaju funkcije jedne varijable.

Ako je f diferencijabilna funkcija dvije varijable, tada je tangencijalna ravnina u točki T_0 lokalnog ekstrema funkcije f paralelna xy-ravnini, tj. oblika je $z = z_0$, za neki realni broj z_0. Iz jednadžbe tangencijalne ravnine slijedi da je

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(T_0)}{\partial y} = 0.$$

Ovaj rezultat vrijedi i općenitije.

Teorem (Nužan uvjet ekstrema)
Ako derivabilna funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima u točki $T_0 \in D$ lokalni ekstrem, tada je

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_n} = 0.$$

Definicija
Kažemo da je točka T_0 stacionarna točka funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ako vrijedi

$$\frac{\partial f(T_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(T_0)}{\partial x_n} = 0.$$

Prema tome, u slučaju derivabilnih funkcija su stacionarne točke kandidati za lokalne ekstreme.

Primjer
Neka je $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$. Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$, jedina stacionarna točka funkcije f je točka $T_0 = (-1, 2)$. Primijetimo da je $f(x, y) = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 2 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 - 2 \geq -2 = f(-1, 2)$. Kako za svaku točku T vrijedi $f(T) \geq f(T_0)$, točka T_0 je točka lokalnog minimuma funkcije f.

Navedimo primjer stacionarne točke koja nije točka lokalnog ekstrema.

Primjer
Neka je $f(x,y) = xy$. Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = y$, jedina stacionarna točka funkcije f je točka $T_0 = (0,0)$. Neka je $\epsilon > 0$. Okolina $K(T_0, \epsilon)$ je krug radijusa ϵ sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, koji siječe sva četiri kvadranta. Neka je $T_1 = (x_1, y_1) \in K(T_0, \epsilon)$ točka koja se nalazi u prvom kvadrantu, uz $x_1, y_1 \neq 0$, te neka je $T_1 = (x_2, y_2) \in K(T_0, \epsilon)$ točka koja se nalazi u drugom kvadrantu, uz $x_2, y_2 \neq 0$. Kako je $x_1 > 0$ i $y_1 > 0$, slijedi $f(x_1, y_1) = x_1 y_1 > 0 = f(T_0)$ pa f u točki T_0 ne može imati lokalni maksimum, jer u svakoj okolini točke T_0 postoji točka u kojoj funkcija poprima vrijednost manju od one u točki T_0. Kako je $x_1 > 0$ i $y_1 < 0$, slijedi $f(x_1, y_1) = x_1 y_1 < 0 = f(T_0)$ pa f u točki T_0 ne može imati lokalni miniimum, jer u svakoj okolini točke T_0 postoji točka u kojoj funkcija poprima vrijednost manju od one u točki T_0. Prema tome, funkcija f nema lokalni ekstrem, iako ima stacionarnu točku.

Primjer
Neka je $f(x,y) = 1 - x^2 - 2x - |y-2|$. Primijetimo da ova funkcija nije derivabilna, jer funkcija apsolutne vrijednosti nije derivabilna. U ovom slučaju postoji parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x, ali ne i po varijabli y. No, iz $f(x,y) = 2 - (x^2 + 2x + 1) - |y-2| = 2 - (x+1)^2 - |y-2|$ i $(x+1)^2 \geq 0$, $|y-2| \geq 0$, slijedi da je $f(x,y) \leq 2$. Kako je $f(-1,2) = 2$, dobivamo da $(-1,2)$ točka lokalnog maksimuma funkcije f, iako to nije i stacionarna točka.

Sada ćemo navesti kriterij za određivanje lokalnih ekstrema, tj. kriterij za ispitivanje svojstava stacionarnih točaka derivabilne funkcije.

Teorem (Dovoljni uvjeti ekstrema)
Neka je T_0 stacionarna točka derivabilne funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Neka funkcija f ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda. Za $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definiramo

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

te neka je $\Delta_1 = A_{11}$ i za $r = 2, 3, \ldots, n$,

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}.$$

1. Ako je $\Delta_r > 0$ za sve r, tada f u točki T_0 ima lokalni minimum.

2. Ako je $\Delta_r < 0$ za sve neparne r i $\Delta_r > 0$ za sve parne r, tada f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

3. Ako je $\Delta_r < 0$ za barem jedan paran r, ili postoje neparni r_1, r_2 takvi da je $\Delta_{r_1} > 0$ i $\Delta_{r_1} < 0$, tada f u točki T_0 nema lokalni ekstrem.

4. U ostalim slučajevima f može i ne mora imati lokalni ekstrem u točki T_0.

Primijetimo da iz Schwartzovog teorema slijedi da je $A_{ij} = A_{ji}$ za sve i, j pa su sve matrice čije determinante tražimo simetrične.

Primjer
Pogledajmo opet funkciju $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$. Vidjeli smo da je jedina stacionarna točka funkcije f točka $T_0 = (-1, 2)$. Sada je $A_{11} = 2$, $A_{12} = A_{21} = 0$ te $A_{22} = 2$. Odatle je $\Delta_1 = 2 > 0$ i $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$. Kako su i Δ_1 i Δ_2 pozitivni, nalazimo se u situaciji $1.$ iz prethodnog teorema pa funkcija f u točki T_0 ima lokalni minimum.

Primjer
Vidjeli smo da je $T_0 = (0, 0)$ jedina stacionarna točka funkcije $f(x, y) = xy$. U ovom slučaju je $A_{11} = 0$, $A_{12} = A_{21} = 1$ te $A_{22} = 0$. Odatle je $\Delta_1 = 0$ i $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Kako je $\Delta_2 < 0$, prema dijelu $3.$ prethodnog teorema, funkcije f nema lokalni ekstrem u točki T_0.

Primjer
Neka je $f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2$. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \frac{\partial f}{\partial z} = -6z,$$

jedina stacionarna točka funkcije f je točka $T_0 = (0, 0, 0)$. Redom imamo:

$$A_{11} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x^2} = -4, A_{22} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial y^2} = -2, A_{33} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial z^2} = -6,$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x \partial y} = 0, A_{13} = A_{31} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial x \partial z} = 0, A_{23} = A_{32} = \frac{\partial^2 f(T_0)}{\partial y \partial z} = 0.$$

Zato je

$$\Delta_1 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -48.$$

Sada se nalazimo u situaciji 2. iz prethodnog teorema pa funkcija f u točki T_0 ima lokalni maksimum.

Uvjetni ekstremi

U pojedinim problemima nije dovoljno samo odrediti lokalne ekstreme funkcije više varijabli, jer ponekad oni neće predstavljati traženo rješenje. Često se moraju paralelno promatrati i dodatni uvjeti.

Radi ilustracije pogledajmo jedan primjer.

Primjer

1. Neka je $T_0(3,4,5)$. Odredite točku koja je najbliža točki T_0 i točku koja je najudaljenija od točke T_0.
2. Neka je $T_0(3,4,5)$. Odredite točku na sferi $x^2+y^2+z^2=1$ koja je najbliža točki T_0 i točku na istoj sferi koja je najudaljenija od točke T_0.

U prvom dijelu primjera je očito točka T_0 najbliža točki T_0, jer je udaljenost između tih točaka jednaka nuli. Najudaljenija točka od točke T_0 ne postoji. U drugom dijelu treba odrediti točke u kojima funkcija udaljenosti od točke T_0 postiže minimum i maksimum. Prisjetimo se da je udaljenost točke $T(x,y,z)$ od točke T_0 dana s $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2}$. Ako bi klasičnim postupkom određivali lokalne ekstreme funkcije $f(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2}$, dobili bi isti rezultat kao i u prvom dijelu primjera, što nije traženi odgovor jer se točka T_0 ne nalazi na promatranoj sferi, a na sferi mora postojati i točka koja je najudaljenija od točke T_0. Razlog što ovaj pristup ne daje traženi rezultat leži u tome što se klasičnim postupkom određivanja lokalnih ekstrema promatra funkcija na čitavoj svojoj domeni i u ovom slučaju se traže lokalni ekstremi na čitavom $\mathbb{R}^3$. No, u ovom primjeru treba promatrati samo točke koje se nalaze na sferi pa se ustvari traže lokalni ekstremi restrikcije funkcije $f(x,y,z)=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2}$ na sferu $x^2+y^2+z^2=1$. Prema tome, ekstremi se traže uz dodatni uvjet koji je dan s $x^2+y^2+z^2=1$, što se obično zapisuje u obliku $x^2+y^2+z^2-1=0$ ili, općenitije, $\varphi_1(x,y,z)=0$ za $\varphi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$.

Definicija Neka je $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ i neka su funkciji f pridruženi *uvjeti*

$$\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=\varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=\cdots=\varphi_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=0.$$

Neka je $S=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D:\varphi_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0,\text{ za } i=1,2,\dots,m\}$. Kažemo da funkcija $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ima lokalni *uvjetni ekstrem* u točki T_0 uz uvjete $\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, $\varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, $\dots,\varphi_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, ako restrikcija $f|_S:S\to\mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem u točki T_0.
Drugim riječima, f ima *lokalni uvjetni maksimum* u točki T_0 ako postoji $\epsilon>0$ takav da je $f(T)\le f(T_0)$ za sve $T\in S$ takve da je $d(T,T_0)<\epsilon$, te f ima *lokalni uvjetni minimum* u točki T_0 ako postoji $\epsilon>0$ takav da je $f(T)\ge f(T_0)$ za sve $T\in S$ takve da je $d(T,T_0)<\epsilon$.

Pri određivanju lokalnih uvjetnih ekstrema koristimo *metodu Lagrangeovih multiplikatora*:

definiramo novu, pomoćnu, funkciju

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)+$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)+\cdots+\lambda_m\varphi_m(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Ovdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ realni brojevi koje nazivamo *multiplikatori* te su u samoj definiciji funkcije F oni nepoznanice koje tek treba odrediti.

Ako je f diferencijabilna i u točki $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ima lokalni uvjetni ekstrem uz $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\ldots, \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, tada vrijede idući nužni uvjeti:

$$\varphi_1(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \varphi_2(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \ldots, \varphi_m(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0.$$

Na ovaj način dobivamo sustav od $m + n$ jednadžbi s $m + n$ nepoznanica $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, c_1, \ldots, c_n)$ iz kojih se određuju kandidati za lokalne uvjetne ekstreme.

Ako je $n = 2$ (tj. f je funkcija dvije varijable) i $m = 1$ (tj. zadan je samo jedan uvjet $\varphi_1(x, y) = 0$), neka je (c_1, c_2, λ_1) uređena trojka koja zadovoljava nužne uvjete. Tada promatramo

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(c_1, c_2) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\delta > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c_1, c_2) > 0$, tada f u točki (c_1, c_2) ima lokalni uvjetni minimum. Ako je $\delta > 0$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c_1, c_2) < 0$, tada f u točki (c_1, c_2) ima lokalni uvjetni maksimum. Ako nije ispunjena niti jedna od ove dvije mogućnosti, promatramo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(c_1, c_2) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(c_1, c_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(c_1, c_2) \end{vmatrix}.$$

Ako je $\Delta > 0$, tada f u točki (c_1, c_2) ima lokalni uvjetni maksimum. Ako je $\Delta < 0$, tada f u točki (c_1, c_2) ima lokalni uvjetni minimum. Ako je $\Delta = 0$, tada funkcija f u točki (c_1, c_2) može i ne mora imati lokalni uvjetni ekstrem.

Primjer
Odredimo lokalne uvjetne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ uz uvjet $x + y - 2 = 0$. Primijetimo da je f funkcija dvije varijable te imamo jedan uvjet $\varphi_1(x, y) = 0$ za $\varphi_1(x, y) = x + y - 2$. Definiramo pomoćnu funkciju

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda_1(x + y - 2).$$

Kako je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda_1$ i $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y + \lambda_1$, uvrštavajući c_1 umjesto x i c_2 umjesto y dobivamo idući sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice (c_1, c_2, λ_1):

$$\begin{aligned} 2c_1 + \lambda_1 &= 0 \\ 2c_2 + \lambda_1 &= 0 \\ c_1 + c_2 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi $c_1 = c_2$ pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $c_1 = c_2 = 1$, uz $\lambda_1 = -2$. Kako je $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, dobivamo

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Prema tome, funkcija f u točki $(1, 1)$ ima lokalni uvjetni minimum. Zaista, graf funkcije f je paraboloid, a točke koje zadovoljavaju $x + y - 2 = 0$ čine ravninu. Presjek te ravnine i paraboloida je parabola s otvorom prema gore (prema pozitivnom dijelu z-osi). Zato na tom presjeku funkcija f i postiže lokalni minimum, a ne postiže lokalni maksimum. Kako je uvjet u ovom primjeru zadan dosta jednostavno, mogli smo iz njega i zaključiti da je $y = -x + 2$, što bi zatim uvrstili u funkciju f te dobili izraz oblika $x^2 + (-x + 2)^2 = 2x^2 - 4x + 4$, što predstavlja funkciju jedne varijable koja postiže lokalni minimum u točki $x = 1$ (iz $y = -x + 2$ potom slijedi da funkcija f postiže lokalni uvjetni minimum u točki $(1, 1)$).

Višestruki integrali

Do sad smo za funkcije više varijabli uveli sve pojmove koji su u predmetu Matematika 1 obrađeni za funkcije jedne varijable. Sada preostaje uvesti pojam integrala funkcije više varijabli. U slučaju funkcija više varijabli ne postoji pojam neodređenog integrala niti pojam primitivne funkcije, jedini integrali funkcija više varijabli su određeni integrali, rezultat je uvijek broj.

Sjetimo se da je osnovna motivacija za uvođenje određenog integrala (funkcije jedne varijable) bio problem određivanja površine lika koji se pojavljuje ispod grafa funkcije. Sada ćemo ovaj pristup generalizirati. Geometrijski je tu situaciju moguće ilustrirati i zamisliti jedino u slučaju funkcije dvije varijabli (s većim brojem varijabli se gubi sam geometrijski dojam, iako će definicije ostati iste). Ako imamo funkciju dvije varijable, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tada se između domene D, koja leži u xy-ravnini (tj. ravnini $z = 0$) i grafa te funkcije (koji je ploha) nalazi jedno geometrijsko tijelo te je osnovni problem kako odrediti volumen tog tijela. Naravno, pošto se radi o tijelu tu više nema govora o površini, niti o podjeli tijela na likove. Sada je ideja podijeliti ovo geometrijsko tijelo na manje dijelove te u njih opisivati i upisivati kvadre, jer je određivanje volumena kvadra sasvim elementarno. Ova je podjela analogna podjeli geometrijskog lika na manje dijelove te upisivanje i opisivanju pravokutnika u te dijelove, prilikom uvođenje pojma određenog integrala funkcije jedne varijable.

Volumen kvadra je, jasno, visina puta površina baze, pri čemu će visinu davati najmanja i najveća vrijednost funkcije f (odnosno, infimum i supremum), dok će baze biti pravokutnik, na koje će biti podijeljena domena D.

Ekstreme funkcija više varijabli definiramo analogno kao u slučaju funkcija jedne varijable.

Sada ćemo redom uvesti pojmove potrebne za izgradnju višestrukog integrala.

Definicija

Neka je n prirodan broj. **Zatvoreni n-dimenzionalni kvadar** K je skup

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

pri čemu je svaki segment $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$. Drugim riječima,

$$K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i]\}.$$

U slučaju $n = 2$, zatvoreni dvodimenzionalni kvadar je ustvari pravokutnik $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, s vrhovima u točkama $(a_1, a_2), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (b_1, b_2)$.

U slučaju $n = 3$, zatvoreni trodimenzionalni kvadar je kvadar u standardnom geometrijskom smislu. Ako je $n = 1$, tada je K ustvari segment $[a_1, b_1]$.

Kako bi podijelili n-dimenzionalni kvadar na manje dijelove, potrebno je na manje dijelove podijeliti svaku od njegovih strana, tj. svaki od segmenata $[a_i, b_i]$. Na primjer, podjela stranica $[a_1, b_1]$ i $[a_2, b_2]$ pravokutnika $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ će inducirati podjelu tog pravokutnika na manje dijelove.

Rastav segmenata koji su stranice kvadra smo uveli prilikom definiranja određenog integrala:

Definicija
Neka je $D_i = \{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{k_i}^{(i)}\}$ rastav (dekompozicija) segmenta $[a_i, b_i]$,

$$a_i = x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \cdots < x_k^{(i)} = b_i.$$

Ovdje se dio (i) koristi isključivo u svojstvu indeksa, kako bi se naglasilo da se radi o dekompoziciji i-tog segmenta, koji je podijeljen na k_i dijelova. Označimo skup svih rastava segmenta $[a_i, b_i]$ s $\mathcal{D}_i$.
Produkt

$$D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n,$$

nazivamo **rastav ili dekompozicija zatvorenog n-dimenzionalnog kvadra K.** Skup svih rastava kvadra K označavamo s $\mathcal{D}$.

U slučaju da je $n = 2$ je pravokutnik (dvodimenzionalni kvadar) na ovaj način podijeljen na $k_1 \cdot k_2$ dijelova, a u slučaju $n = 3$ je trodimenzionalni kvadar podijeljen na $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$ dijelova.

Neka je $f : K \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.

Da bi promatrali pojedini dio na koji je podijeljen n-dimenzionalni kvadar K, odaberimo indekse $i_1 \in \{1, 2, \ldots, k_1\}$, $i_2 \in \{1, 2, \ldots, k_2\}, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$. Tada je odgovarajući dio u rastavu n-dimenzionalng kvadra K manji n-dimenzionalni kvadar

$$[x_{i_1-1}^{(1)}, x_{i_1}^{(1)}] \times [x_{i_2-1}^{(2)}, x_{i_2}^{(2)}] \times \cdots \times [x_{i_n-1}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}].$$

Kako je funkcija f omeđena, na prethodnom skupu postiže infimum i supremum. Označimo infimum funkcije f na tom skupu s $m_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, a supremum funkcije f na tom skupu s $M_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$.

Sada svakom rastavu $D \in \mathcal{D}$ možemo pridružiti **gornju integralnu sumu**

$$g(f, D) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{k_n} M_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1-1}^{(1)})(x_{i_2}^{(2)} - x_{i_2-1}^{(2)}) \cdots (x_{i_n}^{(n)} - x_{i_n-1}^{(n)})$$

i **donju integralnu sumu**

$$d(f, D) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \sum_{i_2=1}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{k_n} m_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1-1}^{(1)})(x_{i_2}^{(2)} - x_{i_2-1}^{(2)}) \cdots (x_{i_n}^{(n)} - x_{i_n-1}^{(n)}).$$

U prethodnim definicijama moramo imati više suma kako bi prošli po svim dijelovima u podjeli kvadra K (prva suma prolazi po točkama na prvom segmentu $[a_1, b_1]$, druga suma po točkama na segmentu $[a_2, b_2]$ itd.). Izrazi u zagradama su upravo duljine stranica manjeg kvadra $[x_{i_1-1}^{(1)}, x_{i_1}^{(1)}] \times [x_{i_2-1}^{(2)}, x_{i_2}^{(2)}] \times \cdots \times [x_{i_n-1}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$, pa je produkt volumen tog kvadra, za $n \geq 3$, odnosno površina manjeg pravokutnika za $n = 2$.

Geometrijski gledano, $g(f, D)$ daje gornju ocjenu na volumen tijela određenog grafom funkcije nad kvadrom K, dok $d(f, D)$ daje donju ocjenu tog volumena. Zato trebamo što manju gornju ocjenu i što veću donju ocjenu, tj. infimum skupa $\{g(f, D) : D \in \mathcal{D}\}$ i supremum skupa $\{d(f, D) : D \in \mathcal{D}\}$.

Ako je inf$\{g(f,D)$: $D \in \mathcal{D}\}$ =sup$\{d(f,D)$: $D \in \mathcal{D}\} = I$, kažemo da je funkcija f integrabilna na kvadru K i broj I nazivamo **višestruki (n-terostruki) integral funkcije f na kvadru K** te pišemo

$$I = \int_K f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

ili

$$I = \int \int_K \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Funkciju f nazivamo **podintegralna funkcija**, $x_1, x_2, \ldots, x_2$ su **varijable integracije**, a kvadar K je **područje integracije**.

Primijetimo da smo zasad definirali samo integral omeđene funkcije na zatvorenom n-dimenzionalnom kvadru, jer smo takav skup mogli podijeliti na manje skupove istog tipa. Takvu situaciju nismo imali u slučaju određenog integrala funkcije jedne varijable, jer je područje integracije tada uvijek bio segment koji bi bio podijeljen na manje segmente.

Sada želimo poopćiti definiciju na općenitije područje integracije. Želimo da to područje bude *omeđeno*, jednako kao što smo i u slučaju određenog integrala računali integral po segmentu $[a, b]$, a ne po npr. neograničenom skupu oblika $[a, +\infty\rangle$ (taj se slučaj pojavljivao u nepravim integralima).

Kažemo da je podskup D od $\mathbb{R}^n$ **omeđen** ako postoji zatvoreni n-dimenzionalni kvadar K takav da je $D \subseteq K$. Kako bi odredili integral funkcije f na skupu D, proširit ćemo funkciju f nulom na skup K (tj. izvan skupa D će f biti jednaka nuli) te zatim odrediti integral funkcije f po kvadru K.

Definicija

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija i neka je skup D sadržan u nekom zatvorenom n-dimenzionalnom kvadru K. Definiramo funkciju $g : K \to \mathbb{R}$ s $g(T) = f(T)$ za $T \in D$ i $g(T) = 0$ za $T \notin D$. Ako je funkcija g integrabilna na kvadru K, integral funkcije f na skupu D definiramo s

$$\int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_K g(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

te kažemo da je sada D područje integracije.

Višestruki integral je linearan, tj. za integrabilne funkcije $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i realne brojeve α, β vrijedi

$$\int_D (\alpha f + \beta g) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \alpha \int_D f dx_1 dx_2 \cdots dx_n + \beta \int_D g dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Višestruki integral ima i svojstvo integriranja po dijelovima područja integracije, tj. za D_1, D_2 takve da je $D = D_1 \cup D_2$ i $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ vrijedi

$$\int_D f dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{D_1} f dx_1 dx_2 \cdots dx_n + \int_{D_2} f dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Općenito, višestruki integral se određuje računanjem n uzastopnih određenih integrala, koristeći Newton-Leibnitzovu formulu.

Dvostruki integrali

Posebno ćemo promotriti dvostruke integrale. Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija na skupu D koji je sadržan u nekom pravokutniku. Koristimo varijable x i y, te se dvostruki integral

$$\int_D f dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy$$

određuje pomoću dvije uzastopne primjene Newton-Leibnitzove formule.

Ako je $f(T) \geq 0$ za sve $T \in D$, tada je s $\int_D f(x,y)dxdy$ dan upravo volumen tijela omeđenog bazom D u xy-ravnini i grafom funkcije f, tj. plohom $z = f(x,y)$. Izraz dx možemo zamišljati kao mali dio na osi x, a izraz dy možemo zamišljati kao mali dio na osi y, pa je $dxdy$ površina malog pravokutnika određenog stranicama dx i dy. Za točku (x,y) iz tog pravokutnika je $f(x,y)$ visina odgovarajućeg kvadra, na kakve je tijelo podijeljeno. Kako je volumen jednak produktu visine i površine baze, izraz $f(x,y)dxdy$ ispod integrala možemo smatrati volumenom malog kvadra na kakve bi dijelili tijelo čiji volumen trebamo odrediti.

Posebno, ako je $f(T) = 1$ za sve $T \in D$, tada je s $\int_D f(x,y)dxdy = \int_D dxdy$ dana površina lika D, jer je volumen tijela visine 1 jednak površini baze tog tijela.

Dakle, $\int_D f(x,y)dxdy$ za $f(x,y) \geq 0$ daje volumen, a $\int_D dxdy$ daje površinu od D.

Također, volumen tijela omeđenog plohama $z = f(x,y)$ i $z = g(x,y)$, za neprekidne funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}$, dan je s

$$\iint_D |f(x,y) - g(x,y)|dxdy.$$

Ovdje apsolutnu vrijednost koristimo kako bi podintegralna funkcija bila nenegativna.

Za određivanje dvostrukog integrala je ključan način zadavanja područja integracije.

Ako je područje integracije dano *pravokutno*, $D = [a,b] \times [c,d]$, tada je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Prvo se rješava unutarnji integral, u slučaju $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$ je to integral $\int_a^b f(x,y)dx$ u kojem je varijabla y konstanta. Nakon određivanja tog integrala varijabla x nestaje, jer se prema Newton-Leibnitzovoj formuli u odgovarajuću funkciju umjesto x uvrštava a i b. Zatim se računa preostali integral po y.

Posebno, ako je $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, tj. ako se funkcija f može napisati u obliku produkta funkcije u varijabli x i funkcije u varijabli y, tada je

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d g(x) \cdot h(y)dy \right) dx \\ &= \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y)dy \right) dx = \int_a^b g(x)dx \cdot \int_c^d h(y)dy\end{aligned}$$

te kažemo da se radi o *integralu sa separiranim varijablama*. Primijetimo da je $g(x)$ u integralu $\int_c^d g(x) \cdot h(y)dy$ konstanta pa se može izlučiti, isto kao i $\int_c^d h(y)dy$ u integralu $\int_a^b g(x)(\int_c^d h(y)dy)dx$.

Druga mogućnost je zadavanje područja integracije pomoću dvije neprekidne funkcije. Treba razlikovati dva slučaja:

1. $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, gdje su $g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada se x kreće po segmentu $[a,b]$, a za x između a i b se y kreće od $g(x)$ do $h(x)$. Tada je
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

2. $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$, gdje su $g,h : [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada znamo da se y kreće po segmentu $[c,d]$, a za x između c i d se x kreće od $g(y)$ do $h(y)$. Tada je
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Uvijek treba rezimirati na idući način: u integralu koji se računa posljednji (dakle, u vanjskom integralu) granice integracije moraju biti brojevi, jer te brojevi uvrštavamo umjesto varijable integracije i rezultat će biti broj. U unutarnjem integralu granice integracije mogu biti zadane u terminima neke varijable, jer će se po toj varijabli kasnije još integrirati.

Primjer

Neka je D gornja polovica kruga radijusa 1 sa središtem u ishodištu. Kada promatramo integral $\iint_D f(x,y)dxdy$, treba D zadati kao skup $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Zašto? Redom, vrijednosti na x osi idu od -1 do 1 pa je x iz segmenta $[-1,1]$. Za x iz tog segmenta, y ide od 0 do gornje polovice kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu. Ta kružnica ima jednadžbu $x^2+y^2=1$, odakle je $y^2 = 1-x^2$, a vrijednosti od y na gornjoj polovici kružnice su nenegativne pa je tamo $y = \sqrt{1-x^2}$.

Zato je
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \right) dx.$$

Primijetimo: u integralu po y (gdje je y varijabla integracije), granice integracije mogu biti zadane u terminima od x, ako će se u idućem integralu integrirati po x. Ključno je da se jedina varijabla koja se pojavljuje u zadnjem integralu (onom koji se zadnji rješava) bude upravo varijabla integracije u tom integralu.

U prethodnom primjeru možemo ići i obratno: u gornjem polukrugu y ide od 0 do 1, a x od lijeve do desne polukružnice. Jednadžbe tih polukružnica također dobivamo iz $x^2+y^2=1$, odakle je $x^2 = 1-y^2$. Na lijevoj polukružnici je $x \leq 0$, pa je tamo $x = -\sqrt{1-y^2}$, dok je na desnoj polukružnici $x = \sqrt{1-y^2}$. Zato je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Sada su granice unutarnjeg integrala zadane u terminima od y, koji je upravo i varijabla integracije u vanjskom integralu.

Treća je mogućnost zadavanje područja integracije u polarnim koordinatama. Podsjetimo, ako je $T = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, tada su polarne koordinate te točke zadane s (r,φ), za $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (udaljenost od točke (x,y) do ishodišta) i φ kut između pravca kroz ishodište i točku T i pozitivnog dijela x-osi. Tada je $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$.

Zadavanje u polarnim koordinatama se obično koristi kada udaljenost r točke od ishodišta treba biti funkcija kuta φ.

Područje integracije $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zadano u polarnim koordinatama je oblika

$$D = \{(r,\varphi) : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

pri čemu su $r_1, r_2 : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \right) d\varphi.$$

Uočimo kako se sada, prilikom prijelaza s pravokutnih koordinata (x,y) na polarne koordinate (r,φ), koji se naziva i zamjena varijabli u integralu, pored podintegralne funkcije pojavljuje i r, tj. umjesto $dxdy$ sada imamo $rdrd\varphi$.

Kod dvostrukog integrala $dxdy$ imitira površinu malog pravokutnika, stranica duljina dx i dy. Kod polarnih koordinata će takav mali element površine biti kružni isječak. Kad uzmemo male dijelove na x i y osi, oni zajedno čine pravokutnik. Kad uzmemo mali kut $d\varphi$ i mali radijus dr, dobivamo kružni isječak. Općenito, površina kružnog isječka radijusa r i kuta φ jednaka je $r^2\varphi$, što je sada imitirano s $rdrd\varphi$.

Primjer

Odrediti $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, gdje je D polukrug u prvom kvadrantu omeđen kružnicom $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Polukrug D se nalazi između x osi i kružnice $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, koja ima radijus $\frac{1}{2}$ i središte u točki $(\frac{1}{2}, 0)$ pa prolazi točkama $(0,0)$ i $(1,0)$. Zadamo li integral u pravokutnim koordinatama, tada je $x \in [0,1]$, a za x iz tog segmenta je $y \in [0, \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}]$. Zato je

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy \right) dx.$$

Pogledajmo sada situaciju u polarnim koordinatama. Najprije u jednadžbu kružnice

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ uvrstimo $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ te dobivamo

$$\begin{aligned}(r\cos\varphi-\frac{1}{2})^2+(r\sin\varphi)^2&=\frac{1}{4}\\ r^2\cos^2\varphi-r\cos\varphi+\frac{1}{4}+r^2\sin^2\varphi&=\frac{1}{4}\\ r^2-r\cos\varphi&=0\\ r(r-\cos\varphi)&=0.\end{aligned}$$

Zbog $r\neq 0$ (jednakost vrijedi samo za točku $(0,0)$, a prethodnu jednakost zadovoljavaju sve točke na kružnici), slijedi $r=\cos\varphi$. Dakle, jednadžba kružnice $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ je u polarnim koordinatama jednaka $r=\cos\varphi$.

Kako se polukrug D nalazi u prvom kvadrantu, kut φ je između 0 i $\frac{\pi}{2}$, a za dani kut iz tog segmenta udaljenost ide od 0 do $\cos\varphi$ (kada povučemo polupravac iz ishodišta, koji prolazi prvim kvadrantom, taj polupravac je zadan kutom između 0 i $\frac{\pi}{2}$ te siječe polukrug D od ishodišta do kružnice dane jednadžbom $r=\cos\varphi$).

Sada je

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}rdr\right)d\varphi\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}rdr\right)d\varphi.\end{aligned}$$

Ovaj zapis je za rješavanje daleko jednostavniji od ranijeg zapisa u terminima od x i y. Unutarnji integral se može riješiti supstitucijom $1-r^2=t$, odakle je $-2rdr=dt$ te slijedi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\cos\varphi}\sqrt{1-r^2}rdr\right)d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sin^2\varphi}\sqrt{t}dt\right)d\varphi=$$
$$-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\varphi-1)d\varphi=$$
$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi,$$

pri čemu je $\sin^3\varphi$ prikazano u obliku $\sin^2\varphi\sin\varphi=(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi$. Korištenjem supstitucije $u=\cos\varphi$ u drugom integralu konačno dobivamo

$$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}.$$

Trostruki integrali

Trostruki se integrali određuju slično dvostrukim integralima, uzastopnim računanjem tri određena integrala koristeći Newton-Leibnitzovu formulu. Ovdje idemo korak dalje od dvostrukog integrala: sada je podintegralna funkcija omeđena funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, varijable su x, y, z, te je trostruki integral općenito oblika

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz.$$

Geometrijska interpretacija dijela $dxdydz$ je, analogno slučaju dvostrukog integrala, volumen malog kvadra čije su stranice duljina dx, dy i dz. Prema tome, ako je $f(T) = 1$ za sve $T \in D$, tada je

$$\iiint_D dxdydz$$

volumen tijela određenog područjem integracije D. Na primjer, ako je D kugla radijusa R, tada je $\iiint_D dxdydz = \frac{4}{3}R^3\pi$.

Nešto je općenitija fizikalna interpretacija trostrukog integrala. U takvom se integralu pojavljuje izraz oblika $f(x,y,z)dxdydz$ gdje je vrijednost funkcije pomnožena s volumenom. Kako je masa jednaka umnošku gustoće i volumena, ako je s $f(x,y,z)$ dana **gustoća** tijela određenog područjem integracije D u točki (x,y,z), tada je s $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ dana **masa** tog tijela.

Područje integracije opet može biti zadano na više načina.

Ako je područje integracije kvadar $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$, tada je

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_b^a \left(\int_d^c \left(\int_g^e f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Postoji nekoliko mogućnosti za zadavanje područja integracije pomoću neprekidnih funkcija, promotrit ćemo samo jednu jer se sve druge dobivaju permutiranjem, odnosno promjenom redoslijeda, varijabli x, y, z.

Ako je D određeno s

$$a \le x \le b$$
$$h_1(x) \le y \le h_2(x)$$
$$g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y),$$

tada je

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_b^a \left(\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} \left(\int_{g_2(x,y)}^{g_1(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Primijetimo da nakon računanja prvog unutarnje integrala nestaje varijabla z te se pojavljuju samo x i y, a nakon računanja drugog integrala nestaje i varijable y. Kao i prije, zadnji, vanjski integral mora imati brojeve kao granice integracije, dok granice integracije u unutarnjim integralima mogu biti funkcija u varijablama po kojima se integriraju vanjski integrali.

Za zamjenu varijabli (korištenje drugačijih koordinata od (x, y, z)) će nam biti potreban idući rezultat:

Teorem o zamjeni varijabli

Neka je zadan integral $\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{R}^3$ i funkcija f je neprekidna i integrabilna na D. Neka je $D' \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka su $\alpha, \beta, \gamma : D' \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije takve da je preslikavanje $p : D' \to D$ dano s

$$p(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))$$

bijekcija. Matricu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{pmatrix}$$

nazivamo **Jacobijeva matrica**, a njenu determinantu **Jakobijan**. Jakobijan označavamo s $J(u, , v, w)$, tj.

$$J(u, , v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Ako je $J(u, , v, w) \neq 0$ za sve $(u, v, w) \in D'$, tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{D'} f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))|J| dudvdw.$$

U prethodnoj jednakosti je ključno pojavljivanje apsolutne vrijednosti Jakobijana prije $dudvdw$.

Varijable u, v, w su nove varijable kojima se mijenjaju varijable x, y, z i svaka točka iz D se može prikazati pomoću varijabli u, v, w. Kako je funkcije f bijekcija, svakoj uređenoj trojci (u, v, w) iz D' odgovara točno jedna točka (x, y, z) iz D.

U slučaju ravninskih koordinata smo imali i polarne koordinate, u kojima se pojavljuje i jedan kut. U slučaju prostornih koordinata (u $\mathbb{R}^3$, (x, y, z)), postoje još dva tipa specifičnih koordinata, u kojima se pojavljuju jedan ili dva kuta.

Cilindrične koordinate

Za točku $T(x, y, z)$ su zadane s

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$
$$z = z.$$

Neka je $T'(x, y, 0)$ projekcija točke (x, y, z) na xy-ravninu, gdje je $z = 0$. Sada je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, udaljenost točke T' od ishodišta, a φ kut između polupravca kroz ishodište i T' i pozitivnog dijela x-osi. Dakle, zamjena kod x i y je ista kao u slučaju polarnih koordinata, dok z ostaje nepromijenjeno. Ovdje je $r \geq 0$ i $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$.

Nove varijable su (r, φ, z), funkcije su $\alpha(r, \varphi, z) = r\cos\varphi$, $\beta(r, \varphi, z) = r\sin\varphi$, $\gamma(r, \varphi, z) = z$. Jakobijan je jednak

$$J(r, , \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

pa je

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

Prema Teoremu o zamjenu varijabli bi u prethodnom integralu trebalo pisati $|r|$, kao apsolutna vrijednost Jakobijana, no kako je $r \geq 0$ vrijedi $|r| = r$.

Sferne koordinate

Neka je dana točke $T(x, y, z)$. Označimo s r udaljenost ove točke do ishodišta, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Povucimo iz ishodišta kroz točku T polupravac te označimo kut između tog polupravca i pozitivnog dijela osi z s θ. Tada je $\theta \in [0, \pi]$.

Neka je $T'(x, y, 0)$ projekcija točke (x, y, z) na xy-ravninu i neka je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, udaljenost točke T' od ishodišta, a φ kut između polupravca kroz ishodište i T' i pozitivnog dijela x-osi. (Slika 4.10 u materijalima I. Slapničar: Funkcije više varijabli - Cilindrične i sferne koordinate) Sada je

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Kako je ρ duljina katete nasuprot kuta θ u pravokutnom trokutu hipotenuze r, imamo $\rho = r\sin\theta$. Zato su sferne koordinate dane s

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

a nove varijable su r, φ, θ, pri čemu je $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ i $\theta \in [0, \pi]$.

Jakobijan je u slučaju sfernih koordinata jednak

$$J(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r^2\sin\theta.$$

Za $\theta \in [0, \pi]$ je $\sin\theta \geq 0$ pa je $|J(r, \varphi, \theta)| = r^2\sin\theta$ te

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\varphi d\theta.$$

Primjer

Odredimo volumen kugle radijusa R.

Koristit ćemo sferne koordinate. Možemo uzeti da promatramo kuglu sa središtem u ishodištu, jer sve kugle radijusa R imaju isti volumen. Kako bi odredili volumen, podintegralna će funkcija biti jednaka 1, r mora ići od 0 do R, kao udaljenost od središta do ruba kugle, θ mora ići od 0 do π, a φ od 0 do 2π. Sada je volumen dan s

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^R r^2 dr$$
$$= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Napomena

Točke na Zemaljskoj kugli se obično prikazuju pomoću sfernih koordinata. Pri tome je r nadmorska visina, φ je zemljopisna dužina, a θ je zemljopisna širina, s tim da se ponekad umjesto $\theta \in [0, \pi]$ uzima $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Vektorske funkcije, krivulje i krivuljni integrali

Odsad nadalje radimo prema literaturi S. Suljagić: Matematika 2, dostupno na http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat2/mat2.html

Funkcije koje smo uvodili su imale isto svojstvo: elementu domene su pridruživale realan broj, odnosno kodomena im je bila sadržana u skupu realnih brojeva. Sada će uvesti pojam drugačije funkcije, funkcije koja realnom broju pridružuje vektor. Podsjetimo, s V^2 označavamo skup vektora u ravnini, a s V^3 skup vektora u prostoru.

Od posebne će nam važnosti biti ortonormirana baza. U ravnini će ortonormirana baza biti uređen par $(\vec{i}, \vec{j})$ jediničnih i međusobno okomitih vektora, dok će u prostoru ortonormirana baza biti uređena trojka $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ jediničnih i međusobno okomitih vektora.

Svaki vektor $\vec{a} \in V^2$ možemo na jedinstven način prikazati u obliku $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, a svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ možemo na jedinstven način prikazati u obliku $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, pri čemu su a_x, a_y, a_z realni brojevi.

Definicija
Vektorska funkcija je svako preslikavanje $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^2$ ili $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$. Dakle, vektorska funkcija je preslikavanje koje realnom broju pridružuje vektor.

Primijetimo da u oznaci vektorske funkcije pišemo strijelicu, isto kao i kod oznake vektora. U slučaju vektorske funkcije za varijablu obično koristimo oznaku t. Dakle, ako je $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$ vektorska funkcija i $t \in D$, tada je $\vec{r}(t)$ vektor. Zato je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, gdje su $x(t), y(t), z(t)$ realni brojevi koji ovise o t. Namjerno ih označavamo s $x(t), y(t), z(t)$, jer zbog oodabira ortonormirane baze oni određuju poziciju vektora $\vec{r}(t)$ obzirom na x, y, z-os.

Prema tome, vektorska funkcija $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$ je određena s tri realne funkcije realne varijable $x, y, z : D \to \mathbb{R}$. Isto tako, vektorska funkcija $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^2$ je određena s dvije realne funkcije realne varijable $x, y : D \to \mathbb{R}$. Funkcije $x, y, z : D \to \mathbb{R}$ nazivamo **skalarne komponente** vektorske funkcije $\vec{r}$.

Na vektorsku funkciju vektorska funkcija $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, možemo gledati kao na funkciju koja realnom broju $t \in D$ pridružuje vektor $\overrightarrow{OT}$, koji ima početak u ishodištu O i kraj u točki $T = (x(t), y(t), z(t))$.

Primjer
Neka je $\vec{a} \in V^3$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Vektorska funkcija $\vec{r} : \mathbb{R} \to V^3$ dana s $\vec{r}(t) = \vec{a}$ je konstantna funkcija, te je $x(t) = a_x$, $y(t) = a_y$, $z(t) = a_z$.

Primjer
Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija realne varijable. Tada je $\vec{r} : D \to V^2$ dana s $\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$ vektorska funkcija te za $t \in D$ vrijedi $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OT}$, pri čemu je $T = (t, f(t))$. Primijetimo da se točke oblika $(t, f(t))$ nalaze upravo na grafu funkcije f. Prema tome, vektori koji se nalaze u slici vektorske funkcije $\vec{r}$ imaju početak u ishodištu i kraj na grafu funkcije f, tj. vrhovi ovih vektora opisuju graf funkcije f.

Primjer
Neka su a, b realni brojevi, $a > 0$, $b > 0$. Tada je s $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} +$

$bt\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$, zadana vektorska funkcija takva da krajevi vektora $\vec{r}(t)$ opisuju spiralu u prostoru.

Sjetimo se da vektore možemo zbrajati, množiti skalarom, množiti skalarno i vektorski. Isto možemo i s vektorskim funkcijama. Na primjer, ako su $\vec{r}, \vec{s} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$ vektorske funkcije, tada su njihova suma $(\vec{r} + \vec{s})(t) = \vec{r}(t) + \vec{s}(t)$ i vektorski umnožak $(\vec{r} \times \vec{s})(t) = \vec{r}(t) \times \vec{s}(t)$ također vektorske funkcije, dok je njih skalarni umnožak $(\vec{r} \cdot \vec{s})(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t)$ realna funkcija.

Neka je $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$ vektorska funkcija, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Kažemo da vektorska funkcija $\vec{r}$ ima u točki $t_0 \in D$ limes $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ako je

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_x, \lim_{t\to t_0} y(t) = a_y, \lim_{t\to t_0} z(t) = a_z.$$

Neka je $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^2$ vektorska funkcija, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Kažemo da vektorska funkcija $\vec{r}$ ima u točki $t_0 \in D$ limes $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ ako je

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_x, \lim_{t\to t_0} y(t) = a_y.$$

Definicija
Kažemo da je vektorska funkcija **neprekidna** ako su njene skalarne komponente neprekidne.

Ako su $\vec{r}$ i $\vec{s}$ neprekidne vektorske funkcije, tada su i funkcije $\vec{r} + \vec{s}$, $\vec{r} \cdot \vec{s}$, $\vec{r} \times \vec{s}$ i $\lambda\vec{r}$, za realan broj λ, neprekidne.

Definicija
Kažemo da je vektorska funkcija $\vec{r}$ **neprekidna na segmentu** $[a, b]$ ako postoji neprekidna vektorska funkcija $\vec{s} : D \subseteq \mathbb{R} \to V^3$ (ili V^2) takva da je $[a, b] \subseteq D$ te za sve $t \in [a, b]$ vrijedi $\vec{r}(t) = \vec{s}(t)$. Drugim riječima, funkcija je neprekidna na segmentu ako je ona restrikcija neke neprekidne funkcije.

Definicija
Neka je $\vec{r} : [a, b] \to V^3$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ te neka je $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Skup točaka $\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in [a, b]\}$ nazivamo **krivulja u prostoru**.
Neka je $\vec{r} : [a, b] \to V^2$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ te neka je $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Skup točaka $\Gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$ nazivamo **krivulja u ravnini**.
Uređeni par $([a, b], \vec{r})$ nazivamo **parametrizacija krivulje** Γ.

Za krivulju je nužno da bude parametrizirana na segmentu, jer krajevi segmenta daju krajnje točke krivulje $(x(a), y(a), z(a))$ i $(x(b), y(b), z(b))$.

Primjer
Kružnica radijusa a sa središtem u ishodištu je krivulja čija je parametrizacija dana s $([0, 2\pi], \vec{r})$, za $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$. Za kružnicu kažemo da je zatvorena krivulja, primijetimo da joj se krajnje točke podudaraju (kada uvrstimo krajeve segmenta 0 i 2π). Gornja polukružnica je na primjer zadana parametrizacijom

$([0,\pi],\overrightarrow{r})$, za $\overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j}$.
Parametrizacijom $([0,2\pi],\overrightarrow{r})$, $\overrightarrow{r} = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k}$, pri čemu su a, b pozitivni realni brojevi, je zadan *prvi zavoj helikoide*. Ostali zavoji se dobivaju uzimanjem drugih segmenata za kutove. Slika se može vidjeti na
http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node15.html

Definicija
Kažemo da je vektorska funkcija $\overrightarrow{r}$ derivabilna u točki t_0 ako postoji limes

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{r}(t) - \overrightarrow{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

Ukoliko prethodni limes postoji, označavamo ga s $\overrightarrow{r}'(t_0)$ te nazivamo derivacija funkcije $\overrightarrow{r}$ u točki t_0. Primijetimo da je ovaj limes vektor. Kažemo da je funkcija derivabilna ukoliko je derivabilna u svakoj točki svoje domene.

Kriterij: vektorska funkcija $\overrightarrow{r}$ je derivabilna ukoliko su njene skalarne komponente derivabilne. Tada vrijedi $\overrightarrow{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\overrightarrow{i} + y'(t_0)\,\overrightarrow{j} + z'(t_0)\,\overrightarrow{k}$, odnosno $\overrightarrow{r}'(t_0) = x'(t_0)\,\overrightarrow{i} + y'(t_0)\,\overrightarrow{j}$. Primijetimo da je $\overrightarrow{r}'(t_0) = \overrightarrow{0}$ jedino ako su derivacije svih skalarnih komponenti funkcije $\overrightarrow{r}$ u točki t_0 jednake nuli.

Ako su $\overrightarrow{r}$ i $\overrightarrow{s}$ derivabilne vektorske funkcije, tada su i funkcije $\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{s}$ derivabilne.

Neka je Γ krivulja dana parametrizacijom $([a,b],\overrightarrow{r})$, pri čemu je $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j} + z(t)\,\overrightarrow{k}$ derivabilna vektorska funkcija (na potpuno analogni način možemo diskutirati i vektorske funkcije u V^2 pa ćemo ovdje promatrati samo slučaj vektorske funkcije u V^3). Neka su $t_1, t_2 \in [a,b]$. Tada se točke $T_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ i $T_2 = (x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ nalaze na krivulji Γ (svaka točka na krivulji Γ je dana s $(x(t), y(t), z(t))$ za neki $t \in [a,b]$). Kako je $\overrightarrow{r}(t_2) - \overrightarrow{r}(t_1) = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OT_2} + \overrightarrow{T_1O} = \overrightarrow{T_1T_2}$, vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ ima i početak i kraj na krivulji Γ te se radi o vektoru sekante ove krivulje. Kako je

$$\frac{\overrightarrow{r}(t_2) - \overrightarrow{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\overrightarrow{i} + \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}\overrightarrow{j} + \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1}\overrightarrow{k},$$

pustimo li da t_2 teži prema t_1 vektor sekante prelazi u vektor tangente u točki T_1, koji je jednak $\overrightarrow{r}'(t_1) = x'(t_1)\,\overrightarrow{i} + y'(t_1)\,\overrightarrow{j} + z'(t_1)\,\overrightarrow{k}$. Jednadžba tangente u točki $T_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ dana je s

$$\frac{x - x(t_1)}{x'(t_1)} = \frac{y - y(t_1)}{y'(t_1)} = \frac{z - z(t_1)}{z'(t_1)}$$

te tangenta postoji ukoliko je vektor $\overrightarrow{r}'(t_1)$ različit od $\overrightarrow{0}$, jer je tada barem jedan od prethodnih nazivnika različit od nule.

Definicija
Neka je Γ krivulja dana parametrizacijom $([a,b],\overrightarrow{r})$. Kažemo da je Γ **jednostavna glatka krivulja** ako vrijede iduća svojstva:

1. $\overrightarrow{r}$ je injekcija, tj. $\overrightarrow{r}(t_1) \neq \overrightarrow{r}(t_2)$ za $t_1 \neq t_2$,

2. skalarne komponente funkcije $\overrightarrow{r}$ su derivabilne,

3. $\overrightarrow{r}'(t) \neq \overrightarrow{0}$ za sve $t \in [a,b]$.

Uvjet 1. govori da je krivulja *jednostavna*, odnosno da ne siječe samu sebe. Na primjer, dužina je jednostavna krivulja, ali kružnica, slovo O ili slovo α nisu. Preostala dva uvjeta govore da u svakoj točki krivulje postoji tangenta na krivulju, tj. da je krivulja *glatka*. Na primjer, slova C i U su jednostavne glatke krivulje, ali slovo V nije (jer u oštrom prijelazu na dnu tog slova ne postoji tangenta, u toj točki krivulja nije glatka).

Primjer
Prvi zavoj helikoide je jednostavna glatka krivulja. Zaista, kako je $\overrightarrow{r} = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + bt\,\overrightarrow{k}$ iz $\overrightarrow{r}(t_1) = \overrightarrow{r}(t_2)$ slijedi $bt_1 = bt_2$ pa je $t_1 = t_2$ te za $t_1 \neq t_2$ vrijedi i $\overrightarrow{r}(t_1) \neq \overrightarrow{r}(t_2)$. Funkcije $a\cos t, a\sin t, bt$ su očito derivabilne te za $\overrightarrow{r}'(t) = -a\sin t\,\overrightarrow{i} + a\cos t\,\overrightarrow{j} + b\,\overrightarrow{k}$ različito od $\overrightarrow{0}$ jer je $b \neq 0$.

Definicija
Neka je Γ krivulja dana parametrizacijom $([a,b], \overrightarrow{r})$. Kažemo da je Γ **zatvorena jednostavna glatka krivulja** ako vrijede iduća svojstva:

1. $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$ i $\overrightarrow{r}(t_1) \neq \overrightarrow{r}(t_2)$ za $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle$,

2. skalarne komponente funkcije $\overrightarrow{r}$ su derivabilne,

3. $\overrightarrow{r}'(t) \neq \overrightarrow{0}$ za sve $t \in [a,b]$.

Dakle, u zatvorenoj jednostavnoj glatkoj krivulji se krajnje točke podudaraju. Prema tome, kružnica i slovo O su zatvorene jednostavne glatke krivulje.

Definicija
Neka je Γ krivulja dana parametrizacijom $([a,b], \overrightarrow{r})$. Kažemo da je Γ **po dijelovima jednostavna glatka krivulja** ako postoje točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ takve da je svaka od krivulja $([t_{i-1}, t_i], \overrightarrow{r})$, za $i = 1, 2, \ldots, n$, jednostavna glatka krivulja.

Prema tome, po dijelovima jednostavnu glatku krivulju možemo podijeliti na konačno mnogo jednostavnih glatkih krivulja. Zato su slova V i E po dijelovima jednostavne glatke krivulje, iako nisu jednostavne glatke krivulje (slovo V možemo podijeliti na dvije, a slovo E na četiri jednostavne glatke krivulje).

Kako izmjeriti duljinu krivulje? Postoji jedan direktan pristup: podijelimo ju na manje dijelove točkama nekim točkama, koje se nalaze u ravnini ili prostoru te možemo odrediti udaljenost između susjednih točaka. Zatim te udaljenosti zbrojimo te dobivamo aproksimaciju duljine krivulje. Naravno, općenito je ta aproksimacija daleko od točne duljine krivulje, ali uzimamo li sve više točaka i raspoređujemo li ih sve gušće, aproksimacija će biti sve preciznija.

A ako znamo gustoću krivulje u svakoj njenoj točki, na sličan način možemo odrediti i masu krivulje. Općenito masa krivulje nije jednaka umnošku gustoće i duljine krivulje, jer se gustoća može razlikovati od točke do točke. Ukoliko je krivulja načinjena od više materijala, međusobno različitih gustoća, gustoće se u pojedinim točkama mogu znatno razlikovati. Kako bi tome doskočili, možemo koristiti isti princip kao i ranije: podijelimo krivulju na manje dijelove te na svakom dijelu odaberemo točku. Tada masu pojedinog dijela možemo aproksimirati s umnoškom gustoće u točki koju smo na tom dijelu odabrali i duljinom tog dijela. Što su dijelovi manji, to će i aproksimacija biti bolja. Ovim dolazimo do iduće definicije:

Definicija
Neka je Γ krivulja s rubnim točkama A i B te neka je dana funkcija $f : \Gamma \to \mathbb{R}$. Podijelimo krivulju Γ na manje dijelove točkama $A = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = B$ tako da je $P_i \in \Gamma$ za sve i te se P_i nalazi između P_{i-1} i P_{i+1}. Na svakom dijelu $P_{i-1}P_i$ odaberimo točku $T_i \in \Gamma$. Neka je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(T_i) d(P_{i-1}P_i),$$

gdje je $d(P_{i-1}P_i)$ udaljenost točaka P_{i-1} i P_i. Ako kada $n \to \infty$ i $d(P_{i-1}P_i) \to 0$ za sve i, s_n teži prema nekom broju K, tada K nazivamo krivuljni integral 1. vrste funkcije f po krivulji Γ te pišemo

$$K = \int_\Gamma f(T) ds.$$

Primijetimo da je f realna funkcija dvije ili tri realne varijable, ovisno da li je Γ ravninska ili prostorna krivulja. Kada $n \to \infty$, krivulju dijelimo na sve više dijelova. Važno je da $d(P_{i-1}P_i) \to 0$ za sve i, jer to znači da se svake dvije susjedne točke približavaju, tj. smanjuje se svaki od dijelova u podjeli krivulje.

Ako je $f = 1$, tada krivuljni integral prve vrste daje upravo duljinu krivulje, odnosno $\int_\Gamma ds =$duljina krivulje Γ.

Ako je $f(T) = \rho(T)$ (gustoća krivulje u točki T), tada krivuljni integral prve vrste daje upravo masu krivulje, odnosno $\int_\Gamma \rho(T) ds =$masa krivulje Γ.

Svojstva krivuljnog integrala 1. vrste

1. linearnost: za realne brojeve α, β i funkcije f, g na krivulji Γ vrijedi $\int_\Gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\Gamma f ds + \beta \int_\Gamma g ds$.

2. monotonost: ako su f, g funkcije takve da je $f(T) \leq g(T)$ za sve $T \in \Gamma$, tada je $\int_\Gamma f(T) ds \leq \int_\Gamma g(T) ds$.

3. integriranje po dijelovima područja integracije: ako je $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, tada je $\int_\Gamma f(T) ds = \int_{\Gamma_1} f(T) ds + \int_{\Gamma_2} f(T) ds$.

Izvest ćemo formulu za računanje krivuljnog integrala 1. vrste u slučaju kada je Γ glatka krivulja u prostoru. Neka je Γ dana parametrizacijom $([a, b], \overrightarrow{r})$, $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, pri čemu su funkcije x, y, z derivabilne. Kako je svaka točka na krivulji oblika $(x(t), y(t), z(t))$ za neki $t \in [a, b]$, da bi podijelili krivulju na manje dijelove možemo uzeti i podijelu (rastav) segmenta $[a, b]$: neka je $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ i $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$. Na ovaj način dobivamo upravo podjelu kakva nam je trebala. Da bi odabrali točku T_i na dijelu krivulje između točaka P_{i-1} i P_i, odaberimo c_i iz segmenta $[t_{i-1}, t_i]$ te neka je $T_i = (x(c_i), y(c_i), z(c_i))$.

Iz udaljenosti u prostoru $\mathbb{R}^3$ je

$$d(P_{i-1}, P_i) = d((x(t_{i-1}), y(t_{i-1}), z(t_{i-1})), (x(t_i), y(t_i), z(t_i))) =$$
$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}$$

te dobivamo

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(T_i) d(P_{i-1}, P_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(c_i), y(c_i), z(c_i)) \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

Kako je funkcija x derivabilna, po Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji $d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ takva da je $(x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(d_i)(t_i - t_{i-1})$. Na isti način možemo zaključiti da postoji $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$ takva da je $(y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(e_i)(t_i - t_{i-1})$ te $f_i \in [t_{i-1}, t_i]$ takva da je $(z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(f_i)(t_i - t_{i-1})$. Odatle je

$$\begin{aligned}
(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 &= x'(d_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2 \\
(y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 &= y'(e_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2 \\
(z(t_i) - z(t_{i-1}))^2 &= z'(f_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u prethodni izraz za s_n dobivamo

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(T_i) d(P_{i-1}, P_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(c_i), y(c_i), z(c_i)) \sqrt{x'(d_i)^2 + y'(e_i)^2 + z'(f_i)^2} (t_i - t_{i-1}).$$

Kada $n \to \infty$ te $d(P_{i-1}, P_i) \to 0$, s_n prelazi u krivuljni integral 1. vrste. S druge strane, kada $d(P_{i-1}, P_i) \to 0$ točke P_{i-1} u P_i se približavaju pa se približavaju i t_{i-1} i t_i te $t_i - t_{i-1} \to 0$. Dakle, izraz $t_i - t_{i-1}$ prelazi u (beskonačno) mali dio segmenta, tj. prelazi u dt, suma prelazi u integral, a kako se sve točke c_i, d_i, e_i, f_i nalaze između t_{i-1} i t_i, moraju se međusobno izjednačiti pa prethodni izraz postaje

$$\int_\Gamma f(T) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Kako je $\overrightarrow{r}'(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}$, iz formule za duljinu vektora slijedi $|\overrightarrow{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ pa je

$$\int_\Gamma f(T) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\overrightarrow{r}'(t)| dt.$$

Ako je Γ ravninska krivulja, na isti bi način dobili

$$\int_{\Gamma} f(T)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Ako je pritom Γ i graf neke derivabilne funkcije g, tada možemo uzeti $\overrightarrow{r}(t) = t\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}$ pa je

$$\int_{\Gamma} f(T)ds = \int_a^b f(t, g(t))\sqrt{1 + g'(t)^2}dt.$$

Ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama, tada je parametrizacija dana s $([\alpha, \beta], \overrightarrow{r})$ za $\overrightarrow{r}(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi\overrightarrow{i} + r(\varphi)\sin\varphi\overrightarrow{i}$. Sada je $(r(\varphi)\cos\varphi)' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$ i $(r(\varphi)\sin\varphi)' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$. Iz

$$((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2 = r'(\varphi)^2\cos^2\varphi - 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$r(\varphi)^2\sin^2\varphi + r'(\varphi)^2\sin^2\varphi + 2r'(\varphi)r(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + r(\varphi)^2\cos^2\varphi = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2$$

dobivamo

$$\int_{\Gamma} f(T)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}dt.$$

Krivuljni integral druge vrste

Neka je Γ glatka krivulja (u ravnini ili u prostoru). Tada u svakoj točki krivulje postoji tangenta. **Orijentirati krivulju** znači u svakoj točki te krivulje odabrati jedan od dva jedinična vektora u smjeru tangente u toj točki.

Očito u svakoj točki možemo takav jedinični vektor odabrati na dva načina pa postoji beskonačno mnogo načina za orijentirati krivulju. No, nas će zanimati samo orjentacije u kojima je pridruživanje odabranih jediničnih vektora točkama krivulje neprekidno, tj. zanimat će nas orijentacije u kojima svi vektori gledaju u istom smjeru, odnosno nalažu gibanje po krivulju u istom smjeru.

Sjetimo se da je krivulja ustvari skup točaka u ravnini ili u prostoru te da krivulja ima krajnje točke (u slučaju da je krivulja zatvorena, te se točke podudaraju). Orjentirati krivulju znači odabrati koja je od tih dvaju točaka početna, a koja je završna točke krivulje. U slučaju da je krivulja zatvorena, odabir orijentacije ustvari znači odabir smjera u kojem obilazimo krivulju.

Sličnu smo situaciju imali kod dužina i vektora. Dužina $\overline{AB}$ je skup točaka koje se nalaze između krajnjih točaka A i B, dok dužina postaje orijentirana kada napravimo odabir početne i završne točke (npr. $\overrightarrow{AB}$ je orijentirana dužina kojoj je A početna te B završna točka). Tako je i kod krivulje. Ako krivulja nije zatvorena, ima krajnje točke A i B. Jedan odabir orijentacije nalaže gibanje po krivulju počevši od točke A pa prema točki B, dok drugi mogući odabir orijentacije nalaže gibanje po krivulji u obratnom smjeru.

Orijentiranu krivulju Γ zapisujemo u obliku $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$. Prema tome, orijentirana krivulja $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ je glatka krivulja Γ na kojoj je odabrana jedna od dvije moguće orijentacije. Istu krivulju s drugim odabirom orijentacije tada označavamo s $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$.

Parametrizacija krivulje $([a,b],\overrightarrow{r})$ daje jednu moguću orijentaciju. Sjetimo se da je s $\overrightarrow{r}'(t)$ dan vektor tangente na krivulju u točki $(x(t),y(t),z(t))$, pa je jedinilni vektor potreban za dobivanje orijentacije dan s $\frac{\overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}$, jer znamo da je na glatkoj krivulji uvijek $\overrightarrow{r}'(t) \neq \overrightarrow{0}$ i dijeljenjem vektora s njegovom normom dobivamo jedinični vektor.

Ako je Γ glatka krivulja dana parametrizacijom $([a,b],\overrightarrow{r})$ i ako se orijentacija na orijentiranoj krivulji $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ podudara s orijentacijom koja dolazi od parametrizacije, kažemo da su **parametrizacija i orijentacija u skladu**.

Ako je Γ zatvorena glatka ravninska krivulja, kažemo da je orijentirana krivulja $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ **pozitivno orijentirana** ako orijentacija nalaže gibanje po krivulji u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu. U suprotnom kažemo da je orijentirana krivulja $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ **negativno orijentirana**.

Primjer

Neka je Γ kružnica radijusa R, $R > 0$, sa središtem u ishodištu. Jedna moguća parametrizacija je $([0,2\pi],\overrightarrow{r})$, za $\overrightarrow{r}(t) = R\cos t\,\overrightarrow{i} + R\sin t\,\overrightarrow{j}$. Ukoliko je orijentacija na $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ u skladu s ovom parametrizacijom, krivulja $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ je pozitivno orijentirana. Druga moguća parametrizacija je $([0,2\pi],\overrightarrow{r})$, za $\overrightarrow{r}(t) = R\cos t\,\overrightarrow{i} - R\sin t\,\overrightarrow{j}$.

Ukoliko je orijentacija na $\overset{\frown}{\Gamma}$ u skladu s ovom parametrizacijom, krivulja $\overset{\frown}{\Gamma}$ je negativno orijentirana.
Primijetimo da je za $t = 0$ prva točka na krivulji upravo točka $(R, 0)$. Koristimo li prvu parametrizaciju, nakon te točke krećemo u prvi kvadrant, dakle suprotno od kazaljke na satu. Koristimo li drugu orijentaciju, nakon te točke krećemo u četvrti kvadrant, tj. u smjeru kazaljke na satu.

Za pojedine fizikalne veličine je važno i u kojem smjeru djeluju, ne samo kojim iznosom. Naravno, radi se o vektorskim veličina. Neke od takvih veličina su sila i akceleracija.

Neka je $\overset{\frown}{\Gamma}$ orijentirana glatka krivuljam, s početnom točkom A i završnom točkom B. Neka u svakoj točki P krivulje Γ djeluje akceleracija $\overrightarrow{a}(P)$. Npr. možemo zamišljati da orijentirana krivulja $\overset{\frown}{\Gamma}$ predstavlja rijeku, koja teče od A prema B, čiji tijek daje akceleraciju u svakoj točki. Kako bi točka (ili tijelo) mase m prešlo put po krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$ od točke A do točke B, mora uložiti neki rad. Kako odrediti koliki je to rad?

Krenemo li od najelementarnijih formula, rad je sila puta put, a sila je masa put akceleracija. No, akceleracija općenito nije konstanta te ovisi o točki na krivulji u kojoj se uzima. Zato je ideja postupiti slično kao i u slučaju određivanja mase ili duljine krivulje: podijelit ćemo krivulju na manje dijelove i na svakom dijelu odabrati točku u kojoj ćemo odrediti akceleraciju. Tako ćemo približno dobiti rad potreban da bi se prešao svaki od dijelova krivulje, te sumiranjem dobiti traženi rad. Naravno, želimo da tih dijelova bude što više te da budu što manji. Rad je broj, tj. skalarna veličina, dok je akceleracija vektorska veličina. Zato sada nećemo množiti s duljinom puta, već ćemo koristiti skalarni produkt s odgovarajućim vektorima koji imaju krajnje točke na krivulji.

Ovim dolazimo do iduće definicije:

Definicija

Neka je $\overset{\frown}{\Gamma}$ orijentirana glatka krivulja, s početnom točkom A i završnom točkom B. Neka je dana vektorska funkcija $\overrightarrow{a} : \Gamma \to V^2$ ili $\overrightarrow{a} : \Gamma \to V^3$, ovisno da li je krivulja ravninska ili prostorna. Podijelimo krivulju Γ na manje dijelove točkama $A = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = B$ tako da je $P_i \in \Gamma$ za sve i te se P_i nalazi između P_{i-1} i P_{i+1}. Na svakom dijelu $P_{i-1}P_i$ odaberimo točku $T_i \in \Gamma$. Neka je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a}(T_i) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i},$$

Ako kada $n \to \infty$ i $d(P_{i-1}P_i) \to 0$ za sve i, s_n teži prema nekom broju K, tada K nazivamo krivuljni integral 2. vrste vektorske funkcije $\overrightarrow{a}$ po orijentiranoj krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$ te pišemo

$$K = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r}.$$

Primijetimo da za domenu funkcije $\overrightarrow{a}$ uzimamo Γ umjesto $\overset{\frown}{\Gamma}$, jer domena treba biti podskup od $\mathbb{R}^n$.

Ukoliko je vektorska funkcija $\overrightarrow{a}$ jednaka umnošku mase i akceleracije, tada će krivuljni integral 2. vrste biti upravo rad potreban za prelazak krivulje.

Svojstva krivuljnog integrala 2. vrste

1. linearnost: za realne brojeve α, β i vektorske funkcije $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ na krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$ vrijedi $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} (\alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}) d\overrightarrow{r} = \alpha \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r} + \beta \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{b} d\overrightarrow{r}$.

2. integriranje po dijelovima područja integracije: ako je $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma}_1 \cup \overset{\frown}{\Gamma}_2$, tada je $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r} + \int_{\overset{\frown}{\Gamma}_2} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r}$.

3. $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r} = -\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{a} d\overrightarrow{r}$.

Izvest ćemo formulu za računanje krivuljnog integrala 2. vrste u slučaju kada je $\overset{\frown}{\Gamma}$ orijentirana glatka krivulja u prostoru i da je orijentacija u skladu s parametrizacijom. Neka je Γ dana parametrizacijom $([a,b], \overrightarrow{r})$ te neka je $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$. Neka je na Γ zadana vektorska funkcija $\overrightarrow{a} : \Gamma \to V^3$, te neka je

$$\overrightarrow{a}(T) = a_x(T)\overrightarrow{i} + a_y(T)\overrightarrow{j} + a_z(T)\overrightarrow{k}.$$

Uzmimo rastav segmenta $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, koji daje podjelu krivulje Γ točkama $A = P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, $P_1 = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$, $\ldots, B = (x(t_n), y(t_n), z(t_n))$. Da bi odabrali točku T_i na dijelu krivulje između točaka P_{i-1} i P_i, odaberimo c_i iz segmenta $[t_{i-1}, t_i]$ te neka je $T_i = (x(c_i), y(c_i), z(c_i))$.

Primijetimo da je $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = (x(t_i) - x(t_{i-1}))\overrightarrow{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\overrightarrow{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\overrightarrow{k}$.

Sada je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a}(T_i) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a}(T_i) \cdot (x(t_i) - x(t_{i-1}))\overrightarrow{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\overrightarrow{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\overrightarrow{k}.$$

Kako je funkcija x derivabilna, po Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji $d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ takva da je $(x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(d_i)(t_i - t_{i-1})$. Na isti način možemo zaključiti da postoji $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$ takva da je $(y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(e_i)(t_i - t_{i-1})$ te $f_i \in [t_{i-1}, t_i]$ takva da je $(z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(f_i)(t_i - t_{i-1})$.

Odatle je

$$(x(t_i) - x(t_{i-1}))\overrightarrow{i} + (y(t_i) - y(t_{i-1}))\overrightarrow{j} + (z(t_i) - z(t_{i-1}))\overrightarrow{k} =$$
$$(x'(d_i)\overrightarrow{i} + y'(e_i)\overrightarrow{j} + z'(f_i)\overrightarrow{k})(t_i - t_{i-1}).$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a}(T_i) \cdot (x'(d_i)\overrightarrow{i} + y'(e_i)\overrightarrow{j} + z'(f_i)\overrightarrow{k})(t_i - t_{i-1}).$$

Kako je $\overrightarrow{a}(T_i) = a_x(T_i)\overrightarrow{i} + a_y(T_i)\overrightarrow{j} + a_z(T_i)\overrightarrow{k}$ i

$$(a_x(T_i)\overrightarrow{i} + a_y(T_i)\overrightarrow{j} + a_z(T_i)\overrightarrow{k}) \cdot (x'(d_i)\overrightarrow{i} + y'(e_i)\overrightarrow{j} + z'(f_i)\overrightarrow{k}) = \\ a_x(T_i)x'(d_i) + a_y(T_i)y'(e_i) + a_z(T_i)z'(f_i),$$

dobivamo

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n}(a_x(T_i)x'(d_i) + a_y(T_i)y'(e_i) + a_z(T_i)z'(f_i))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(a_x(x(c_i), y(c_i), z(c_i))x'(d_i) + a_y(x(c_i), y(c_i), z(c_i))y'(e_i) + \\ &\qquad a_z(x(c_i), y(c_i), z(c_i))z'(f_i)\big)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Kada $n \to \infty$ te $d(P_{i-1}, P_i) \to 0$, s_n prelazi u krivuljni integral 1. vrste. S druge strane, kada $d(P_{i-1}, P_i) \to 0$ točke P_{i-1} u P_i se približavaju pa se približavaju i t_{i-1} i t_i te $t_i - t_{i-1} \to 0$. Dakle, izraz $t_i - t_{i-1}$ prelazi u (beskonačno) mali dio segmenta, tj. prelazi u dt, suma prelazi u integral, a kako se sve točke c_i, d_i, e_i, f_i nalaze između t_{i-1} i t_i, moraju se međusobno izjednačiti pa prethodni izraz postaje

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \\ \int_a^b (a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

Ovu formulu nekad zapisujemo i u obliku

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\widehat{\Gamma}} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Ukoliko je Γ ravninska krivulja, tada je

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} = \int_{\widehat{\Gamma}} a_x dx + a_y dy.$$

Primjer

Neka je $\overrightarrow{a} = 2xy\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$ te neka je $\widehat{\Gamma}$ dio parabole $y = x^2$ od $x = 0$ do $x = 1$. Odredimo $\int_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r}$.

Kako na paraboli vrijedi $y = x^2$, parabolu možemo parametrizirati pomoću $([0, 1], \overrightarrow{r})$, pri čemu je $\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j}$. Drugim riječima, uzimamo $a = 0$, $b = 1$, $x(t) = t$

i $y(t) = t^2$.
Iz definicije od $\overrightarrow{a}$ je $a_x = 2xy = 2t \cdot t^2 = 2t^3$ i $a_y = x^2 = t^2$. Sada je

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} &= \int_a^b (a_x(x(t), y(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t))y'(t))dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 \cdot 1 + t^2 \cdot (2t))dt = \int_0^1 4t^3 dt = 1.\end{aligned}$$

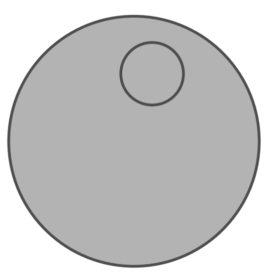
Pogledamo li formule za računanje krivuljnih integrala 1. i 2. vrste, možemo primijetiti sličnost među njima. Štoviše, vrijedi iduće:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{a}\, d\overrightarrow{r} &= \int_a^b (a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k})dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt = \int_a^b \overrightarrow{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}|\overrightarrow{r}'(t)|dt \\ &= \int_a^b \left(\overrightarrow{a} \cdot \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{|\overrightarrow{r}'(t)|}\right)|\overrightarrow{r}'(t)|dt = \int_\Gamma \left(\overrightarrow{a} \cdot \frac{\overrightarrow{r}'}{|\overrightarrow{r}'|}\right)ds.\end{aligned}$$

Polazni integral je krivuljni integral 2. vrste pa ovisi o orijentaciji krivulje. Završni je integral krivuljni integral 1. vrste pa ne ovisi o orijentaciji krivulje, ali o orijentaciji krivulje ovisi $\frac{\overrightarrow{r}'}{|\overrightarrow{r}'|}$.

Definicija
Kažemo da je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ jednostruko povezano područje ako se unutrašnjost svake jednostavne zatvorene krivulje unutar U čitavo nalazi unutar U. Za podskup od $\mathbb{R}^2$ koji nije jednostruko povezano područje kažemo da je **višestruko povezano područje**.

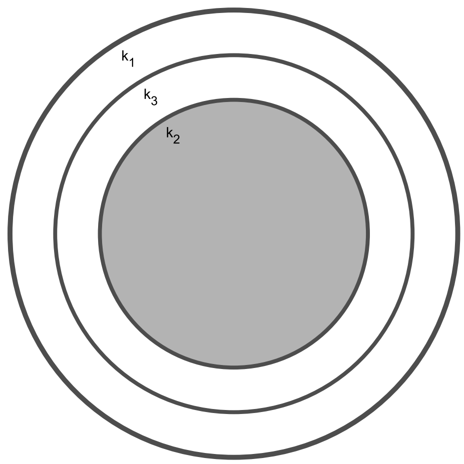
Primjer
Krug je jednostruko povezano područje. Pogledamo li, kao na Slici 1., zatvorenu krivulju unutar kruga (npr. drugu kružnicu), i čitava se njena unutrašnjost nalazi unutar tog kruga.



Slika 1: Jednostruko povezano područje

Primjer

Kružni vijenac nije jednostruko povezano područje. Na Slici 2. je prikazan kružni vijenac određen koncentričnim kružnicama k_1 i k_2. Unutar tog kružnog vijenca se nalazi kružnica k_3, koja je zatvorena jednostavna krivulja, no čitava njena unutrašnjost se ne nalazi unutar kružnog vijenca (jer u unutrašnjost ove krivulje pripada i krug omeđen kružnicom k_2).



Slika 2: Višestruko povezano područje

Teorem (Greenov teorem)

Neka je U jednostruko povezano područje te neka su $M, N : U \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije koje imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Neka je unutar U zadana pozitivno orijentirana glatka zatvorena krivulja $\overset{\frown}{\Gamma}$. Označimo s D područje unutar U omeđeno krivuljom $\overset{\frown}{\Gamma}$. Tada vrijedi iduća formula, koju nazivamo Greenova formula:

$$\iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Greenov teorem daje jednakost dvostrukog integrala funkcije $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ po $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sadržanom unutar krivulje $\overset{\frown}{\Gamma}$ i krivuljnog integrala 2. vrste vektorske funkcije $M(x,y)\overrightarrow{i} + N(x,y)\overrightarrow{j}$ po krivulji $\overset{\frown}{\Gamma}$.

Greenov teorem možemo primijeniti na određivanje površine. Neka je L lik omeđen krivuljom $\overset{\frown}{\Gamma}$. Prema interpretaciji dvostrukog integrala, površina tog lika je jednaka $P(L) = \iint_L dxdy$.

Uzmemo li $M(x,y) = -\frac{1}{2}y$ i $N(x,y) = \frac{1}{2}x$, dobivamo $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$. Sada je

$$P(L) = \iint_L dxdy = \iint_L \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dxdy = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} M(x,y)dx + N(x,y)dy$$
$$= \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy = \frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} xdy - ydx.$$

Dakle, površina lika L jednaka je $\frac{1}{2}\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} xdy - ydx$, gdje je $\overset{\frown}{\Gamma}$ pozitivno orijentiran rub lika L.

Primjer

Odredimo površinu lika omeđenog elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Parametrizacija ove elipse je dana s $([0, 2\pi], \overrightarrow{r})$, pri čemu je $\overrightarrow{r}(t) = a\cos t\,\overrightarrow{i} + b\sin t\,\overrightarrow{j}$ pa je $x(t) = a\cos t$ i $y(t) = b\sin t$. Odatle je $dx = -a\sin t$ i $dy = a\cos t$.
Uvrštavanjem u raniju formulu za površinu lika dobivamo

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t + a\sin t\cdot b\sin t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt = ab\pi.$$

Prema tome, tražen površina je jednaka $ab\pi$.

Skalarna i vektorska polja

Definicija
Funkciju $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nazivamo **skalarno polje**.

Dakle, skalarno polje je jedan od naziva za realnu funkciju tri realne varijable (nekad se i realna funkcije dvije realne varijable naziva skalarno polja). Osnovni razlog ovog naziva je što takva funkcija točki pridružuje broj, odnosno skalar. Standardni primjeri skalarnih polja su gustoća i temperatura (funkcije koje točki u prostoru pridružuju odgovarajuću gustoću odnosno temperaturu, skalarne veličine).

Definicija
Funkciju $\overrightarrow{a} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to V^3$ nazivamo **vektorsko polje**.

Vektorsko polje točki pridružuje vektor. Standardni primjeri vektorskih polja su sila i akceleracija, koje su vektorske veličine. Općenito postoji mnogo vektorskih polja, npr. $\overrightarrow{a}(x, y, z) = x\overrightarrow{i}$.

Vektorsko polja $\overrightarrow{a} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to V^3$ možemo zapisati u obliku $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$, gdje su $a_x, a_y, a_Z : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarna polja te $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ortonormirana baza. Dakle, vektorsko polje možemo smatrati uređenom trojkom skalarnih polja.

Definicija
Neka je f derivabilno skalarno polje te neka je $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ortonormirana baza. Vektorsku funkciju

$$\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

nazivamo **gradijent skalarnog polja** f.

Najčešća oznaka za gradijent skalarnog polja f je ∇f. Izraz ∇f naravno čitamo ,,gradijent od f". Sama oznaka ∇ se naziva ,,nabla".

Primjer
Neka je $f = xy + z$ skalarno polje. Tada je

$$\nabla f = y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ derivabilno skalarno polje te neka je $c \in \mathbb{R}$ takav da postoji $T \in D$ za koji je $f(T) = c$. Tada skup $\{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = c\}$ predstavlja plohu. Na primjer, ako je $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ i $c > 0$, skup $\{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = c\}$ predstavlja sferu.

Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ točka na toj plohi i neka tom točkom prolazi glatka krivulja Γ dana parametrizacijom $([a, b], \overrightarrow{r})$, $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$. Neka je $t_0 \in [a, b]$ takav da je $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ i $z(t_0) = z_0$. Pretpostavimo da čitava krivulja Γ leži na plohi, tj. da je $f(x(t), y(t), z(t)) = c$ za sve $t \in [a, b]$. Deriviramo li ovu jednakost, dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = 0.$$

Lijeva strana prethodne jednakosti je jednaka skalarnom produktu

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) \cdot (x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}),$$

koji je jednak $\nabla f(T) \cdot \overrightarrow{r}'(t)$, odakle je $\nabla f(T) \cdot \overrightarrow{r}'(t) = 0$. Prema tome, $\nabla f(T_0)$ je okomit na vektor $\overrightarrow{r}'(t_0)$, koji je vektor tangente na krivulju Γ u točki T_0 pa leži u tangencijalnoj ravnini na plohu u točki T_0. Dakle, gradijent je okomit na tangencijalnu ravninu.

Očito, ∇f je vektorsko polje, tj. gradijent skalarnom polju pridružuje vektorsko polje. Takva vektorska polja imaju i poseban naziv.

Definicija
Kažemo da je vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ **potencijalno** (ili **konzervativno**) ako je jednako gradijentu nekog skalarnog polja, tj. ako postoji skalarno polje f takvo da je $\overrightarrow{a} = \nabla f$. Tada kažemo da je f funkcija potencijala od $\overrightarrow{a}$.

Definicija
Vektorsko polje $\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$ je potencijalno jer je jednako gradijentu skalarnog polja $f = \frac{x^2}{2} + yz$.

Teorem
Neka je $\overset{\frown}{\Gamma}$ orijentirana glatka krivulja dana parametrizacijom $([a,b], \overrightarrow{r})$, $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$. Neka je f diferencijabilno skalarno polje takvo da je ∇f neprekidno vektorsko polje. Tada vrijedi

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \nabla f \, d\overrightarrow{r} = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)).$$

Prema tome, krivuljni integral 2. vrste potencijalnog vektorskog polja ovisi samo o krajnjim točkama krivulje.

Kažemo da integral *ne ovisi o putu* ako je

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}_1} \overrightarrow{a} \, d\overrightarrow{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}_2} \overrightarrow{a} \, d\overrightarrow{r}$$

za sve orijentirane glatke krivulje Γ_1 i Γ_2 čije su početna i završna točka jednake.

Dakle, integral potencijalnog vektorskog polja ne ovisi o putu. Vrijedi i obrat ove tvrdnje:

Teorem
Ako integral $\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \overrightarrow{a} \, d\overrightarrow{r}$ ne ovisi o putu, tada je vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ potencijalno.

Pretpostavimo sada da integral vektorskog polja $\overrightarrow{a}$ ne ovisi o putu i neka je Γ jednostavna glatka zatvorena krivulja. Odaberimo na toj krivulju dvije točke A i B. Ovim se odabirom krivulja Γ raspada na dvije krivulje, označimo ih s Γ_1 i Γ_2, čije su krajnje točke A i B. Odaberimo orijentaciju krivulja $\overset{\frown}{\Gamma}_1$ i $\overset{\frown}{\Gamma}_2$ tako da je $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma}_1 \cup \overset{\frown}{\Gamma}_2$. Tada je početna točka krivulje $\overset{\frown}{\Gamma}_1$ ujedno i završna točke krivulje

$\overset{\frown}{\Gamma_2}$ i obratno. Prema tome, krivulje $\overset{\frown}{\Gamma_1}$ i $\overset{\frown}{\Gamma_2}$ imaju jednake početne i završne točke. Kako integral vektorskog polja $\vec{a}$ ovisi samo o početnoj i završnoj točki, slijedi

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} \vec{a}\, d\vec{r},$$

odakle je

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} \vec{a}\, d\vec{r} - \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} \vec{a}\, d\vec{r} = 0.$$

S druge strane, imamo

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} \vec{a}\, d\vec{r} - \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_1}} \vec{a}\, d\vec{r} + \int_{\overset{\frown}{\Gamma_2}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma_1} \cup \overset{\frown}{\Gamma_2}} \vec{a}\, d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r}.$$

Slijedi

$$\int_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{a}\, d\vec{r} = 0.$$

Prema tome, ako integral vektorskog polja $\vec{a}$ ne ovisi o putu tada je integral vektorskog polja $\vec{a}$ po jednostavnoj glatkoj zatvorenoj krivulji jednak nuli.

Promotrimo sada jedan poseban slučaj. Neka je $\vec{a} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to V^2$ vektorsko polje na podskupu od $\mathbb{R}^2$ te zapišimo $\vec{a}$ u obliku $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$. Sada je $(\vec{i}, \vec{j})$ uređen par jediničnih međusobno okomitih vektora. Pretpostavimo da je $\vec{a}$ potencijalno vektorsko polje, tj. neka postoji $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takva da je $\nabla f = \vec{a}$. Tada je

$$a_x = \frac{\partial f}{\partial x}, a_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Sjetimo se kako prema Schwartzovu teoremu vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Zato vrijedi

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}.$$

Dakle, za potencijalno vektorsko polje vrijedi

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}.$$

U posebnom slučaju vrijedi i obrat prethodnog rezultata, koji može pomoći pri ispitivanju da li je vektorsko polje potencijalno.

Teorem

Neka je $\vec{a} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to V^2$ vektorsko polje definirano na jednostruko povezanom području D te neka je $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$. Ako a_x i a_y imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda i vrijedi $\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$, tada je vektorsko polje $\vec{a}$ potencijalno.

Primjer
Provjerimo da li je vektorsko polje $\overrightarrow{a} = (x-y)\overrightarrow{i} + (x-2)\overrightarrow{j}$ potencijalno.
Primijetimo da je $a_x = x - y$ i $a_y = x - 2$. Vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ je deifinirano na čitavom $\mathbb{R}^2$, koji je jednostruko povezano područje. Funkcije a_x i a_y očito imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Također, vrijedi $\frac{\partial a_x}{\partial y} = -1$ i $\frac{\partial a_y}{\partial x} = 1$ pa iz $\frac{\partial a_x}{\partial y} \neq \frac{\partial a_y}{\partial x}$ slijedi da vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ nije potencijalno.
Primjer
Provjerimo da li je vektorsko polje $\overrightarrow{a} = (3+2xy)\overrightarrow{i} + (x^2-3y^2)\overrightarrow{j}$ potencijalno. Sada je $a_x = 3+2xy$ i $a_y = x^2-3y^2$. Ove funkcije očito imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda i $\overrightarrow{a}$ je definirano na jednostruko povezanom području $\mathbb{R}^2$. Imamo $\frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x$ i $\frac{\partial a_y}{\partial x} = 2x$ pa iz $\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$ slijedi da je vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ potencijalno. Primijetimo da nismo morali odrediti skalarno polje f takvo da je $\overrightarrow{a} = \nabla f$.

Definicija
Neka je $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$ vektorsko polje te neka su funkcije a_x, a_y, a_z derivabilne. **Rotacija vektorskog polja** $\overrightarrow{a}$ je vektorsko polje definirano s

$$rot\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}.$$

Simbolički zapisano, imamo

$$rot\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}.$$

Nekad se koristi i zapis $rot\overrightarrow{a} = \nabla \times \overrightarrow{a}$.
Rotacija vektorskom polju pridružuje vektorsko polje.
Primjer
Odredimo rotaciju vektorskog polja $\overrightarrow{a} = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$.
Direktnim računom dobivamo

$$rot\overrightarrow{a} = (-2y - xy)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + yz\overrightarrow{k}.$$

Ako je f derivabilno skalarno polje, tada je ∇f vektorsko polje te možemo računati i rotaciju od ∇f.

Teorem
Neka je f derivabilno skalarno polje koje ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda. Tada je

$$rot(\nabla f) = 0.$$

Dokaz: Kako je $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}$, koristeći Schwartzov teorem dobivamo

$$rot(\nabla f) = rot\bigg(\frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{k}\bigg) =$$
$$\bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\bigg)\overrightarrow{i} + \bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\bigg)\overrightarrow{j} + \bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\bigg)\overrightarrow{k} = 0.$$

Kako je svako potencijalno vektorsko polje oblika ∇f, za neko derivabilno skalarno polje f, iz prethodnog teorema slijedi da za potencijalno vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ vrijedi $rot(\overrightarrow{a}) = 0$.

Primjer
Dokažimo da vektorsko polje $\overrightarrow{a} = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$ nije potencijalno.
Kako je $rot\overrightarrow{a} = -y(2+x)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + yz\overrightarrow{k} \neq 0$, slijedi da vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ nije potencijalno.

Sada znamo da iz $rot\overrightarrow{a} \neq 0$ slijedi da vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ nije potencijalno. Ako je $rot\overrightarrow{a} = 0$, to i dalje ne znači da $\overrightarrow{a}$ mora biti potencijalno vektorsko polje, osim u posebnom slučaju koji ćemo navesti u idućem teoremu, koji daje i još jedan način za ispitivanje da li je vektorsko polje potencijalno.

Teorem
Neka je $\overrightarrow{a} == a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$ vektorsko polje definirano na čitavom $\mathbb{R}^3$ te neka funkcije a_x, a_y, a_z imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Ako je $rot\overrightarrow{a} = 0$, tada je vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ potencijalno.

Primjer
Vektorsko polje $\overrightarrow{a} = y^2z^3\overrightarrow{i} + 2xyz^3\overrightarrow{j} + 3y^2z^2\overrightarrow{k}$ je potencijalno.
Vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ je definirano na čitavom $\mathbb{R}^3$ i može se direktno vidjeti da je rotacija ovog vektorskog polja jednaka nuli. Prema prethodnom teoremu je vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ potencijalno.

Definicija
Neka je $\overrightarrow{a} == a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$ vektorsko polje takvo da su funkcije a_x, a_y, a_z derivabilne. **Divergencija vektorskog polja** $\overrightarrow{a}$ je skalarno polje dano s

$$div\overrightarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ponekad simbolički pišemo $div\overrightarrow{a} = \nabla \cdot \overrightarrow{a}$.

Primjer
Odredimo divergenciju vektorskog polja $\overrightarrow{a} = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$.
Direktnim računom dobivamo $div\overrightarrow{a} = z + xz$.

Ako je $\overrightarrow{a}$ vektorsko polje, tada je i $rot\overrightarrow{a}$ vektorsko polje pa možemo odrediti i divergenciju rotacije od $\overrightarrow{a}$:

$$div(rot\overrightarrow{a}) = div\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} =$$
$$\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z\partial y} = 0,$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti koristili Schwartzov teorem.

Definicija
Kažemo da je vektorsko polja $\overrightarrow{a}$ **solenoidalno** ako postoji vektorsko polje $\overrightarrow{b}$ takvo da je $\overrightarrow{a} = rot\,\overrightarrow{b}$.

Prema prethodnom teoremu, za solenoidalno vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ vrijedi $div\overrightarrow{a} = 0$.

Primjer
Vektorsko polje $\overrightarrow{a} = xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$ nije solenoidalno, jer je $div\overrightarrow{a} = z + xz \neq 0$.

Primjer
Vektorsko polje $-y(2+x)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + yz\overrightarrow{k}$ je solenoidalno, jer je jednako rotaciji vektorskog polja $xz\overrightarrow{i} + xyz\overrightarrow{j} - y^2\overrightarrow{k}$.

Vidjeli smo da postoje potencijalna vektorska polja i solenoidalna vektorska polja. Općenito, vektorsko polje ne mora biti niti potencijalno niti solenoidalno, ali se može prikazati pomoću vektorskih i solenoidalnih polja, što ćemo iskazati u idućem teoremu.

Teorem
Neka $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$ vektorsko polje takvo da funkcije a_x, a_y, a_z imaju parcijalne derivacije drugog reda. Tada se vektorsko polje $\overrightarrow{a}$ može zapisati u obliku sume potencijalnog i solenoidalnog vektorskog polja, tj. postoje skalarno polje f i vektorsko polje $\overrightarrow{b}$ tako da je

$$\overrightarrow{a} = \nabla f + rot\,\overrightarrow{b}.$$

Plohe i plošni integrali

Plohu možemo smatrati idućim korakom od krivulju. Ranije smo vidjeli definiciju plohe drugog reda, no to je samo jedan specifičan primjer plohe. Nas će zanimati takozvane **glatke plohe**, odnosno plohe koje u svakoj točki imaju tangencijalnu ravninu. Prisjetimo se, rekli smo da je krivulja glatka ako u svakoj točki te krivulje postoji tangenta pa je pojam glatke plohe prirodan idući korak, oblik poopćenja krivulje.

Postoje tri temeljna načina zadavanja glatke plohe:

Zadavanje plohe eksplicitno

Neka je $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija dvije varijable koja ima neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Tada graf funkcije f nazivamo glatkom plohom, odnosno skup $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ je glatka ploha. Ukoliko se točka (x, y, z) nalazi na grafu funkcije f, tada vrijedi $z = f(x, y)$ pa je glatka ploha zadana jednadžbom

$$z = f(x, y).$$

Ovaj način zadavanja nazivamo eksplicitnim jer se treća varijabla, z, može izraziti u terminima varijabli x i y.

Primjer

Za $f(x, y) = x^2+y^2$ dobivamo eliptički paraboloid, dan jednadžbom $z = x^2+y^2$. Za $f(x, y) = x^2 - y^2$ dobivamo hiperbolički paraboloid, dan jednadžbom $z = x^2 - y^2$.

Kako smo već rekli, za glatke plohe je ključno da u svakoj točki imaju tangencijalnu ravnini. Kako bi zadali tangencijalnu ravninu u točki P_0 na plohi, dovoljno je imati zadan vektor normale na ravnine u točki P_0 (jer je ravnina potpuno određena točkom kojom prolazi i vektorom normale u toj točki).

U slučaju da je glatka ploha zadana eksplicitno vektor normale u točki P_0 je dan s

$$\vec{n}(P_0) = -\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}.$$

Standardno, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je ortonormirana baza.

Zadavanje plohe implicitno

Postoje plohe koje nije moguće zadati eksplicitno. Na primjer, znamo da je sfera radijusa R s središtem u ishodištu zadana jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. No, u tom slučaju nije moguće izraziti z pomoću x i y. Prebacivanjem na desnu stranu, dobivamo $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$. Uzmemo li $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, ovom funkcijom je eksplicitno zadana gornja polovica sfere. Uzmemo li $f(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, funkcijom f je eksplicitno zadana donja polovica sfere. Dakle, pojedine dijelove sfere možemo zadati eksplicitno, ali ne i čitavu sferu.

Neka je $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima neprekidne parcijalne derivacije prvog reda te neka postoji $P_0 \in D$ takav da je $F(P_0) = 0$. Označimo sa Σ skup svih točaka $P_0 \in D$ takvih da je $F(P_0) = 0$ i

$$\left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\right)^2 > 0. \tag{1}$$

Tada kažemo da je skup Σ glatka ploha koja je zadana implicitno.

Pojasnimo navedene uvjete: najprije, zahtijevamo da postoji $P_0 \in D$ takav da je $F(P_0) = 0$ kako bi izbjegli prazan skup (ukoliko $F(T) = 0$ nema rješenja, slijedilo bi da na plohi nema točaka). Nadalje, uvjet (1) znači da je barem jedna od parcijalnih derivacija $\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(P_0)}{\partial z}$ različita od nule (suma kvadrata je veća od nule čim je jedan od kvadrata različit od nule). Ovaj uvjet povlači postojanje tangencijalne ravnine te daje glatkoću plohe.

Primjer

Neka je $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$. Točke za koje vrijedi $F(x, y, z) = 0$ zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ pa je funkcijom F zadana sfera sa središtem u ishodištu radijusa R. Primijetimo da je

$$\left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\right)^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4R^2 > 0.$$

U slučaju da je glatka ploha zadana implicitno, vektor normale u točki P_0 je dan s

$$\overrightarrow{n}(P_0) = \frac{\partial F(P_0)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

Zadavanje plohe parametarski

Slično kao krivulju, i plohu možemo zadati parametarski. Razlika je u tome što će nam sada biti potrebna dva parametra, koja ćemo označiti s u i v.

Neka je $\overrightarrow{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to V^3$ vektorska funkcija tri realne varijable te neka je

$$\overrightarrow{r}(u, v) = x(u, v)\overrightarrow{i} + y(u, v)\overrightarrow{j} + z(u, v)\overrightarrow{k}.$$

Skalarne komponente vektorske funkcije $\overrightarrow{r}$ su sada funkcije $x, y, z : D \to \mathbb{R}$, koje su realne funkcije dvije realne varijable te ćemo zahtijevati da ove funkcije imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda.

Parametarski zadana ploha je skup točaka

$$\Sigma = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : (u, v) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Kažemo da je uređen par $(D, \overrightarrow{r})$ **parametrizacija plohe** Σ.

Neka je

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\overrightarrow{k}$$

i

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\overrightarrow{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\overrightarrow{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\overrightarrow{k}.$$

Kažemo da je ploha parametarski zadana s $(D, \overrightarrow{r})$ glatka ako u svakoj točki plohe vrijedi

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \neq \overrightarrow{0}.$$

Primjer

Sferu radijusa R sa središtem u ishodištu možemo zadati i parametarski pomoću sfernih koordinata. Pri tome će nam parametri biti kutovi φ i ψ, $0 \leq \varphi < 2\pi$ i $0 \leq \psi \leq \pi$. Neka je $D = [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]$. Neka je $\overrightarrow{r}(\varphi, \psi) = R \sin\psi \cos\varphi \overrightarrow{i} + R \sin\psi \sin\varphi \overrightarrow{j} + R \cos\psi \overrightarrow{k}$. Tada je $(D, \overrightarrow{r})$ parametrizacija sfere radijusa R sa središtem u ishodištu.

Plošni integral 1. **vrste**

Pojam plošnog integrala 1. vrste dolazi od problema određivanja površine i mase plohe, te se promatra vrlo slično kao i analogni problemi kod krivulja koji su vodili prema definiciji krivuljnog integrala 1. vrste.

Kako odrediti površinu plohe? Osnovna je ideja podijeliti plohu na manje dijelove te svaki od tih dijelova aproksimirati likom kojem nije previše komplicirano odrediti površinu, a zatim te male površine zbrojiti. Kako bi postigli povoljnu aproksimaciju malih dijelova plohe, svaki mali dio ćemo zamijeniti odgovarajućim dijelom tangencijalne ravnine nad plohom. Uzmemo li mali dio tangencijalne ravnine, taj dio će biti paralelogram ili pravokutnik, kojima je jednostavno odrediti površinu. Kada govorimo o masi plohe, to znači da u svakoj točki plohe trebamo znati njenu gustoću. Tada ćemo samo na svakom malom dijelu plohe odabrati točku u kojoj ćemo izračunati gustoću te tim brojem pomnožiti odgovarajuću površinu manjeg dijela kako bi dobili njegovu masu.

Naravno, što je dijelova više i što su manji, možemo bolje aproksimirati svaki od njih dijelom tangencijalne ravnine. Prema tome, opet ćemo zahtijevati da se broj dijelova u podjeli plohe povećava te da se svaki od dijelova smanjuje. Kako bi inzistirali na smanjivanju dijelova plohe, tražit ćemo da površina svakog od njih teži prema nuli.

Na ovaj način dolazimo do iduće definicije:

Definicija

Neka je Σ glatka ploha i neka je na plohi Σ definirana funkcija $h : \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Podijelimo plohu Σ na manje dijelove $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ te na svakom dijelu Σ_i odaberimo točki P_i. Označimo sa S_i površinu dijela Σ_i te neka je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} h(P_i) S_i.$$

Ako kada $n \to \infty$ i $S_i \to 0$ za sve i, izraz s_n teži prema nekom broju J, tada J nazivamo **plošni integral** 1. **vrste funkcije** h **po plohi** Σ. Pišemo

$$J = \iint_\Sigma h(x, y, z) dS = \iint_\Sigma h dS.$$

Ukoliko je ploha zadana eksplicitno funkcijom $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, možemo uzeti da je D pravokutnik (dvodimenzionalni kvadar) oblika $[a, b] \times [c, d]$ (inače D smjestimo unutar takvog pravokutnika te uzimamo da je funkcija h jednaka nuli izvan skupa D). Kako bi podijelili plohu na manje dijelove, jednostavno podijelimo pravokutnik $[a, b] \times [c, d]$ na manje pravokutnike, tako što uzmemo odgovarajuće dekompozicije (rastave) segmenata $[a, b]$ i $[c, d]$. Podijelimo li prvi segment na k, a drugi na l dijelova, pravokutnik pa time i plohu Σ smo podijelili na $k \cdot l$ dijelova. Neka je npr. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ i $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_l = d$. Na dijelu plohe iznad malog pravokutnika $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ odaberimo točku P_{ij}, a taj dio plohe označimo s Σ_{ij}. Označimo stranice malog pravokutnika s $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Može se pokazati da je površina dijela tangencijalne ravnine iznad Σ_{ij} jednaka

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(P_{ij})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(P_{ij})}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_j,$$

čime možemo aproksimirati i površinu tog dijela plohe.

Sada je

$$s = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} h(P_{ij}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(P_{ij})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(P_{ij})}{\partial y}\right)^2} \Delta x_i \Delta y_j. \qquad (2)$$

Kako bi dobili podjelu plohe na veći broj dijelova čije površine teže prema nuli, želimo da $k \to \infty$, $l \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$ i $\Delta y_j \to 0$. Tada s prelazi u plošni integral 1. vrste funkcije h po plohi Σ, dok izraz s desne strane jednakosti u (2) prelazi u

$$\iint_D h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

(sjetimo se da je eksplicitno zadana ploha graf funkcije f pa su točke na toj plohi oblika $(x, y, f(x, y))$; kada Δx_i, Δy_j teže prema nuli postaju mali dijelovi na osima x i y, tj. postaju dx i dy). Prema tome, plošni integral 1. vrste se računa kao dvostruki integral po D:

$$\iint_\Sigma h(x, y, z) dS = \iint_D h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Kako je $\overrightarrow{n}(P_0) = -\frac{\partial f(P_0)}{\partial x} \overrightarrow{i} - \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, vrijedi

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1$$

pa je

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} = |\overrightarrow{n}|.$$

Zato formulu za plošni integral 1. vrste možemo zapisati u obliku

$$\iint_\Sigma h(x, y, z) dS = \iint_D h(x, y, f(x, y)) |\overrightarrow{n}| dxdy,$$

kojeg možemo i direktno prenijeti na parametarski zadane plohe. Neka je Σ sada glatka ploha dana parametrizacijom $(D, \overrightarrow{r})$, pri čemu je $\overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}$. Tada je

$$\iint_{\Sigma} h(x,y,z)dS = \iint_{D} h(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\right| dudv.$$

Primijetimo da plošni integral 1. vrste ima ista svojstva kao dvostruki integral. Želimo li odrediti površinu plohe, uzimamo $h = 1$. Za određivanje mase plohe, za funkciju h uzimamo gustoću ρ. Prema tome, površina plohe je dana s

$$P = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D} |\overrightarrow{n}| dxdy.$$

Primjer
Odredimo površinu sfere radijusa R.
Koristimo parametrizaciju sfere $(D, \overrightarrow{r})$ gdje je $D = [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]$ te $\overrightarrow{r}(\varphi, \psi) = R\sin\psi\cos\varphi\overrightarrow{i} + R\sin\psi\sin\varphi\overrightarrow{j} + R\cos\psi\overrightarrow{k}$. Površina sfere Σ dana je s

$$\iint_{\Sigma} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \psi}\right| d\varphi d\psi.$$

Kako je

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \varphi} = -R\sin\psi\sin\varphi\overrightarrow{i} + R\sin\psi\cos\varphi\overrightarrow{j}$$

te

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \psi} = R\cos\psi\cos\varphi\overrightarrow{i} + R\cos\psi\sin\varphi\overrightarrow{j} - R\sin\psi\overrightarrow{k}$$

slijedi

$$\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \psi} = R^4\sin^2\psi$$

pa je

$$\left|\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \psi}\right| = R^2\sin\psi$$

(primijetimo da je $\sin\psi \geq 0$ zbog $\psi \in [0, \pi]$). Prema tome, površina sfere radijusa R je jednaka

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\psi d\varphi d\psi = R^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi}\sin\psi d\psi = 4R^2\pi.$$

Orijentacija plohe

Neka je Σ glatka ploha. Tada u svakoj točki plohe postoji tangencijalna ravnina pa u svakoj točki plohe postoje dva jedinična vektora normale na tangencijalnu ravninu (ovi vektori imaju istu duljinu i smjer, samo im se orijentacija razlikuje). Orijentacija plohe je izbor po jednog jediničnog vektora normale u svakoj točki plohe. Kažemo da je ploha **orijentabilna** ako je moguće odabrati u svakoj točki jedinični vektor normale na način da pridruživanje odabranih vektora točkama plohe bude neprekidno. Drugim riječima, ploha je orijentabilna ako se jedinični vektori normala mogu odabrati tako da svi gledaju u istom smjeru. Na primjer, sfera je orijentabilna plohe i može se orijentirati na dva način: tako da svi odabrani jedinični vektori normala gledaju prema van i tako da svi odabrani jedinični vektori normala gledaju prema unutra. Ako je ploha npr. ravnina, tada se orijentacija može odabrati da svi odabrani jedinični vektori normala gledaju prema gore (iznad ravnine) ili dolje (ispod ravnine).

Zamislimo pravokutnik $ABCD$, pri čemu točke A i C leže na dijagonali (isto kao i točke B i D). Od tog pravokutnika možemo dobiti plohu na dva načina. Prvi je način da spojimo točku A s točkom B i točku D s točkom C. Tako dobivamo (konačni) cilindar. Taj je cilindar orijentabilna ploha (opet, odabrani vektori normala gledaju svi prema van ili svi prema unutra). Stavimo li npr. olovku na vanjsku točku na tom cilindru te opišemo krug oko cilindra, olovka će ostaviti trag samo na vanjskoj strani. Drugi je način da spojimo točku A s točkom C i točku D s točkom B. Tako dobivamo plohu koja se naziva Möbiusova traka ili Möbiusova vrpca. Ova je ploha standardni primjer neorijentabilne plohe. Zaista, stavimo li olovku na vanjsku točku te plohe i opišemo krug, olovka će ostaviti trag na čitavoj plohi, a završit će u točki suprotnoj od one od koje smo krenuli (završit će na unutarnjoj točki, pokazujući suprotni jedinični vektor normale od polaznog). Prema tome, ova ploha nije orijentabilna. (slika se može naći u materijalima S. Suljagić: Matematika 2, Tok vektorskog polja - Orijentacija plohe http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat2/)

Orijentirana ploha je orijentabilna ploha Σ s odabirom orijentacije. Orijentiranu plohu ćemo označavati s $\overset{\frown}{\Sigma}$.

Plošni integral 2. **vrste**

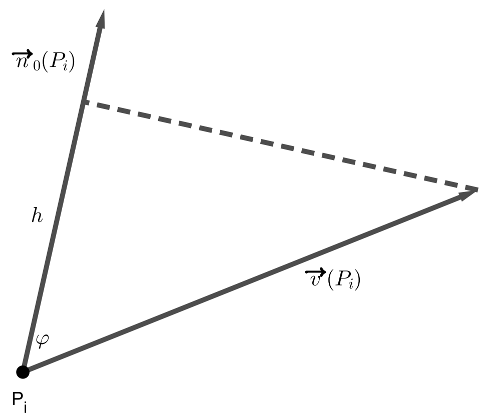
Ako na plohi Σ djeluje vektorsko polje $\overrightarrow{v}$, postavlja se pitanje kako odrediti ukupan tok (količinu) tog vektorskog polja na plohi u jedinici vremena. Primjerice, možemo plohu zamišljati kao korito rijeke, a vektorsko polje $\overrightarrow{v}$ kao protok vode u točki na plohi. Zanima nas kako odrediti količinu vode koje proteče koritom rijeke u jedinici vremena. Dakle, trebamo volumen dobiven od vektorskog polja $\overrightarrow{v}$ i plohe Σ, pri čemu visina dolazi od vektorskog polja. No, ta se visina može razlikovati od točke do točke na plohi pa ne možemo samo pomnožiti površinu plohe s visinom u nekoj točki, već plohu treba podijeliti na manje dijelove. Tada treba odrediti volumen nad svakim od manjih dijelova. Na svakom manjem dijelu, označimo ga zasad sa Σ_i, odaberimo točku P_i. Površinu dijela Σ_i treba pomnožiti s visinom kako bi dobili volumen nad tim dijelom. Ali, $|\overrightarrow{v}(P_i)|$ će biti visina jedino ukoliko je vektor $\overrightarrow{v}(P_i)$ okomit na plohu. Znamo da je vektor normale $\overrightarrow{n}(P_i)$ okomit na plohu, te neka je $\overrightarrow{n}_0(P_i)$ pripadni jedinični vektor normale:

$$\overrightarrow{n}_0(P_i) = \frac{\overrightarrow{n}(P_i)}{|\overrightarrow{n}(P_i)|}.$$

Naravno, $|\vec{n}_0(P_i)| = 1$. Kut između vektora $\vec{n}_0(P_i)$ i vektora $\vec{v}(P_i)$ ćemo označiti s φ, a traženu visinu ćemo označiti s h. Iz pravokutnog trokuta sa slike 1. možemo vidjeti da je

$$h = |\vec{v}(P_i)| \cos\varphi = |\vec{v}(P_i)| \cdot |\vec{n}_0(P_i)| \cdot \cos\varphi = \vec{v}(P_i) \cdot \vec{n}_0(P_i),$$

po definiciji skalarnog produkta.



Slika 1: Visina na dio plohe

Prema tome, volumen nad dijelom Σ_i je jednak $\vec{v}(P_i) \cdot \vec{n}_0(P_i) \cdot S_i$, pri čemu smo sa S_i označili površinu dijela Σ_i.

Time dolazimo do iduće definicije:

Definicija

Neka je $\overset{\frown}{\Sigma}$ orijentirana glatka ploha i neka je definirano vektorsko polje jediničnih vektora normala $\vec{n}_0$. Neka je na toj plohi zadano vektorsko polje $\vec{v} : \Sigma \to V^3$. Podijelimo plohu Σ na manje dijelove $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ te na svakom dijelu Σ_i odaberimo točki P_i. Označimo sa S_i površinu dijela Σ_i te neka je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}(P_i) \cdot \vec{n}_0(P_i) \cdot S_i.$$

Ako kada $n \to \infty$ i $S_i \to 0$ za sve i, izraz s_n teži prema nekom broju J, tada J nazivamo **plošni integral** 2. **vrste vektorskog polja** $\vec{v}$ **po plohi** Σ. Pišemo

$$J = \iint_{\overset{\frown}{\Sigma}} \vec{v}\, d\vec{S}.$$

Nekad se koristi i izraz tok vektorskog polja $\vec{v}$ na plohi $\overset{\frown}{\Sigma}$.

Primijetimo da se u izrazu za s_n u prethodnoj definiciji pojavljuje $\vec{v}(P_i) \cdot \vec{n}_0(P_i) = (\vec{v} \cdot \vec{n}_0)(P_i)$, što je skalarna funkcija na plohi Σ, kao skalarni produkt dvije vektorske funkcije. Prema tome, izraz iz definicije plošnog integrala 2.

vrste vektorskog polja $\vec{v}$ po plohi Σ je jedna izrazu iz definicije plošnog integrala 1. vrste funkcije $\vec{v} \cdot \vec{n}_0$ na plohi Σ.

Prema formuli za računanje plošnog integrala 1. vrste je sada

$$\iint_{\widehat{\Sigma}} \vec{v}\, d\vec{S} = \iint_{\Sigma} (\vec{v} \cdot \vec{n}_0) dS = \iint_{D} (\vec{v} \cdot \vec{n}_0)|\vec{n}| dxdy = \iint_{D} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dxdy.$$

Ako je ploha zadana eksplicitno, orijentacija se može odabrati tako da vektor normale na plohi zatvara s vektorom $\vec{k}$ šiljast ili tupi kut. Ukoliko se radi o šiljastom kutu, uzimamo $\vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$. Ukoliko se radi o tupom kutu, uzimamo $\vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$.

Zapišemo li vektorsko polje $\vec{v}$ u obliku $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, dobivamo

$$\iint_{\widehat{\Sigma}} \vec{v}\, d\vec{S} = \pm \iint_{D} \Big(- v_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - v_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \Big) dxdy,$$

pri čemu predznak $+$ uzimamo ako vektor normale s vektorom $\vec{k}$ zatvara šiljast kut, a predznak $-$ ako vektor normale s vektorom $\vec{k}$ zatvara tupi kut.

Ako je ploha zadana parametarski, tada parametrizacija daje jednu moguću orijentaciju, jer je vektorsko polje normala zadano s

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

Ukoliko se orijentacija ploha podudara s orijentacijom koju određuje parametrizacija, imamo iduću formulu:

$$\iint_{\widehat{\Sigma}} \vec{a}\, d\vec{S} = \iint_{D} \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dxdy.$$

U suprotnom, imamo formulu

$$\iint_{\widehat{\Sigma}} \vec{a}\, d\vec{S} = \iint_{D} \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) dxdy.$$

Ovdje namjerno koristimo oznaku $\vec{a}$ za vektorsko polje, jer jedan od parametara označavamo s v. Primijetimo da je, po svojstvima vektorskog produkta,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -\vec{n}.$$

Također, izrazi pod dvostrukim integralima u prethodnim formulama su mješoviti produkti vektora.

Veza između plošnih integrala 1. i 2. vrste dana je s

$$\iint_{\widehat{\Sigma}} \vec{v}\, d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n}_0 dS.$$

Plošni integral 1. vrste ne ovisi o orijentaciji plohe, ali vektorsko polje $\overrightarrow{n}_0$, koje se pojavljuje pod tim integralom, ovisi.

Plošni integral 2. vrste ima svojstva kao dvostruki integral. Osim toga, vrijedi

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{\Sigma}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{S} = - \iint_{\overset{\curvearrowleft}{\Sigma}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{S},$$

pri čemu je s $\overset{\curvearrowleft}{\Sigma}$ označena orijentirana krivulja s odabirom orijentacije suprotnim od onog na orijentiranoj krivulji $\overset{\curvearrowright}{\Sigma}$.

Teorem (Teorem o divergenciji)
Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^3$ skup koji je omeđen orijentabilnom glatkom plohom Σ. Neka je na plohi Σ zadano vektorsko polje vanjskih jediničnih normala te neka je $\overrightarrow{v} : D \to V^3$ vektorsko polje, $\overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k}$, pri čemu funkcije x_x, v_y, v_z imaju neprekidne parcijalne derivacije prvog reda. Tada je

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{\Sigma}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{S} = \iiint_D div \overrightarrow{v}\, dxdydz.$$

Na primjer, ukoliko je D kugla, tada je Σ sfera, jer je kugla omeđena sferom. Teorem o divergenciji uspostavlja vezu između plošnog integrala 2. vektorskog polja $\overrightarrow{v}$ po sferi i trostrukog integrala divergencije od $\overrightarrow{v}$ po kugli (prisjetimo se da je divergencija vektorskog polja skalarno polje).

Ako je $\overrightarrow{v}$ vektorsko polje takvo da je $div \overrightarrow{v} = 1$, tada je

$$\iint_{\overset{\curvearrowright}{\Sigma}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{S} = \iiint_D div \overrightarrow{v}\, dxdydz = \iiint_D dxdydz = V(D),$$

pri čemu je s $V(D)$ označen volumen područja D.

Primjer
Odredimo plošni integral 2. vrste vektorskog polja $\overrightarrow{v} = z \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + x \overrightarrow{k}$ na jediničnoj sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orijentiranoj vektorima vanjskih jediničnih normala.
Primijetimo da je $div \overrightarrow{v} = 1$ pa je traženi integral jednak volumenu kugle radijusa 1, odnosno jednak je $\frac{4}{3}\pi$.

Definicija
Neka je dana orijentabilna ploha Σ čiji rub je po dijelovima glatka krivulja Γ. Kažemo da su ploha $\overset{\curvearrowright}{\Sigma}$ i njen rub $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ **koherentno orijentirani** ako orijentacija plohe $\overset{\curvearrowright}{\Sigma}$ nalaže gibanje po krivulji $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ u pozitivnom smjeru (suprotno od smjera kazaljke na satu), gledano s vrha vektora normale na plohu u nekoj točki plohe.

Na primjer, polusfera je orijentabilna ploha čiji rub je kružnica. Orijentacija polusfere daje i orijentaciju kružnice.

Teorem (Stokesov teorem)
Neka je rub orijentabilne plohe Σ po dijelovima glatka krivulja Γ te neka su $\overset{\curvearrowright}{\Sigma}$ i $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$ koherentno orijentirane. Neka je $\overrightarrow{v} : \Sigma \to V^3$ vektorsko polje, $\overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} +$

$v_z \overrightarrow{k}$, pri čemu funkcije v_x, v_y, v_z imaju neprekidne parcijalne derivacije drugog reda. Tada vrijedi:

$$\iint_{\widehat{\Sigma}} rot\overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{S} = \iint_{\widehat{\Gamma}} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{s}.$$

Prisjetimo se da je rotacija vektorskog polja također vektorsko polje. Stokesov teorem daje vezu između plošnog integrala 2. vrste rotacije vektorskog polja $\overrightarrow{v}$ po plohi Σ i krivuljnog integrala 2. vrste vektorskog polja $\overrightarrow{v}$ po krivulji Γ koja je rub plohe Σ. Na primjer, plošni integral 2. vrste rotacije vektorskog polja $\overrightarrow{v}$ po polusferi je jednak krivuljnom integralu 2. vrste vektorskog polja $\overrightarrow{v}$ po kružnici.