Vjerojatnost i statistika

Osnove kombinatorike, slučajan pokus i
prostor elementarnih događaja

10. listopada 2023.

1 Osnove kombinatorike

1.1 Osnovni principi prebrojavanja

Teorem 1 (Princip jednakosti). *Neka su S i T konačni skupovi. Ako postoji bijekcija među njima, tada je*

$$k(S) = k(T).$$

Teorem 2 (Princip sume). *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi takvi da je $S_i \cap S_j = \emptyset$, čim je $i \neq j$ (disjunktni). Tada je $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ konačan skup i vrijedi*

$$k(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = k(S_1) + k(S_2) + \cdots + k(S_n).$$

Primjer 1. Iz jednog grada prema sjeveru vode 3 ceste, prema zapadu 2 ceste, prema istoku 2 ceste i prema jugu 1 cesta. Na koliko se različitih načina može cestom izaći iz toga grada?

Teorem 3 (Princip produkta). *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $S_1, \ldots, S_n$ konačni skupovi (ne nužno disjunktni). Tada je njihov Kartezijev produkt konačan skup i vrijedi*

$$k(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n) = k(S_1)k(S_2) \cdots k(S_n).$$

Primjer 2. Trebamo odabrati jedan par, mladića i djevojku, iz razreda koji se sastoji od 21 djevojke i 5 mladića. Na koliko različitih načina to možemo napraviti?

Teorem 4 (Princip uzastopnog prebrojavanja). *Neka su za* $i = 1, \dots, n$ *dani konačni skupovi* A_i *sačinjeni od* k_i *elemenata. Nadalje, neka je* $T \subset A_1 \times \cdots \times A_n$ *skup uređenih* n*-torki* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *definiranih na sljedeći način:*

- *prva komponenta* a_1 *može se birati na* k_1 *načina;*
- *za svaku već izabranu prvu komponentu, drugu komponentu* a_2 *možemo birati na* k_2 *različitih načina;*
- *za svaki izbor komponenata* $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$*,* n*-tu komponentu* a_n *možemo odabrati na* k_n *različitih načina.*

Tada je

$$k(T) = k_1 \cdots k_n.$$

Zadatak 1. Muškarac na raspolaganju ima 4 košulje, 3 kravate, 2 hlača i 2 para cipela. Na koliko se različitih načina on može odjenuti?

Primjer 3. Iz grada A u grad B vode 4 ceste, a iz grada B u grad C vode 3 ceste. Na koliko se različitih načina može doći iz grada A u grad C preko grada B ?

1.2 Varijacije i permutacije

Definicija 1. Neka je $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \leq n$ prirodan broj. **Varijacija r-tog razreda** u skupu A je svaka uređena r-torka međusobno različitih elemenata iz skupa A.
Broj varijacija r-tog razreda n-članog skupa je

$$V_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Primjer 4. Koliko ima međusobno različitih "riječi" od 2 slova, a koliko od 3 slova iz skupa $\{M, O, R, E\}$?

Definicija 2. Svaku uređenu n-torku skupa od n elemenata zovemo **permutacija**. Broj permutacija n-članog skupa je

$$p_n = V_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Primjer 5. Na koliko različitih načina pet ljudi može stati u red?

Zadatak 2. Na koliko različitih načina možemo n osoba razmjestiti na n mjesta oko okruglog stola?

Zadatak 3. Šest muškaraca i pet žena trebaju stati u red tako da alterniraju (poredani su na način muškarac-žena-muškarac-žena...). Na koliko je različitih načina to moguće napraviti ?

Definicija 3. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata. **Varijacija r-tog razreda s ponavljanjem** skupa od n-elemenata je svaka uređena r-torka elemenata iz skupa A. Broj takvih varijacija s ponavljenjem je n^r.

Primjer 6. Koliko ima binarnih nizova duljine 7?

Zadatak 4. Lokot na šifru ima 4 koluta s 10 znamenki $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Lokot se može otvoriti ako je na svakom kolutu ispravna znamenka. Koliko ima različitih šifri?

1.3 Kombinacije

Definicija 4. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup koji se sastoji od n elemenata i neka je $r \leq n$ prirodan broj. **Kombinacija r-tog razreda** u skupu A je svaki r-člani podskup skupa A. Broj kombinacija r-tog razreda skupa od n elemenata je

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Zadatak 5. U razredu ima 15 dječaka i 10 djevojčica. Na koliko načina možemo odabrati:

a) 3 dječaka,

b) 3 dječaka i 2 djevojčice,

c) jednak broj dječaka i djevojčica,

d) petero ljudi, od kojih su barem 3 djevojčice,

e) četvero ljudi, od kojih su najviše 2 dječaka?

2 Slučajan pokus i prostor elementarnih događaja

2.1 Osnovni pojmovi

- **pokus** (eksperiment) određen je uvjetima u kojima se odvija
- ishod pokusa nazivamo **elementarni događaj**, a on može biti
  - determiniran
  - nedeterminiran (slučajan, stohastičan)

Primjer 7. Na raspolaganju imamo kutiju u kojoj se nalazi 10 bijelih kuglica. Promotrimo pokus koji se sastoji od izvlačenja dvaju kuglica iz kutije. Što možete reći o boji izvučenih kuglica?

Primjer 8. Promotrimo pokus koji se sastoji od zagrijavanja određene količine vode pod normalnim atmosferskim tlakom na temperaturu od $100°C$. Rezultat ovog pokusa jednoznačno je određen uvjetima u kojima se pokus odvija, a sastoji se od promjene agregatnog stanja vode (iz tekućeg u plinovito).

Primjer 9. Promotrimo bacanje simetričnog novčića i pri tome registrirajmo je li ishod bacanja pismo (P) ili glava (G). Ukoliko je novčić simetričan (ima oblik pravilnog valjka) i napravljen je od homogenog materijala (težište mu se nalazi u središtu pravilnog valjka), pri bilo kojem izvođenju pokusa ne možemo sa sigurnošću tvrditi da će pasti pismo ili glava. Dakle, rezultat bacanja novčića nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se odvija. Na osnovu toga zaključujemo da je bacanje simetričnog novčića slučajan pokus čiji su mogući ishodi elementi sljedećeg dvočlanog skupa $\{P, G\}$.

Definicija 5. Svaki ishod slučajnog pokusa je jedan **elementarni događaj** i označava se slovom ω. Skup svih mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa naziva se **prostor elementarnih događaja** i označava se s Ω.

Definicija 6. Neka je dan konačan prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Ako je $A \subset \Omega$ onda kažemo da je A **slučajni događaj** ili samo **događaj**. Smatramo da se događaj $A = \{\omega_{a_1}, \ldots, \omega_{a_r}\} \subset \Omega$ *realizirao* (ili dogodio) ako se u pokusu realizirao bilo koji od ishoda $\omega_{a_i} \in A, i = 1, \ldots, r$.

Primjer 10. Elementarni događaji iz Primjera 9 su $P = \{\text{palo je pismo}\}$ i $G = \{\text{pala je glava}\}$, a prostor elementarnih događaja je skup $\Omega = \{P, G\}$.

Primjer 11. Bacamo homogenu igraću kocku i bilježimo broj koji se pojavio. Tada je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Odredite događaje $A = \{\text{pao je broj manji od } 3\}$ i $B = \{\text{pao je neparan broj}\}$.

Zadatak 6. Konstruirajte prostor elementarnih događaja za sljedeće slučajne pokuse:

a) uzastopno bacanje simetričnog novčića dva puta,

b) istovremeno bacanje dvaju simetričnih igraćih kockica,

c) uzastopno bacanje simetrične igraće kockice n puta,

d) slučajan izbor delegacije od dva člana iz skupa osoba $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Zadatak 7. Slučajan pokus sastoji se od istovremenog bacanja simetričnog novčića i simetrične igraće kockice, pri čemu se kao ishod registriraju pojava pisma ili glave na novčiću i broj na gornjoj strani kockice, tim redom. Modelirajte prostor elementarnih događaja.

Zadatak 8. U kutiji se nalaze četiri papirića numerirana brojevima 1, 2, 3, i 4. Iz kutije se na slučajan način izvlači po jedan papirić i to:

a) bez vraćanja, sve dok se ne izvuče papirić na kojem je neparan broj;

b) sa vraćanjem, sve dok se ne izvuče papirić na kojem je neparan broj.

Ako se kao ishod ovog slučajnog pokusa registriraju izvučeni brojevi, modelirajte pripadni prostor elementarnih događaja.

Zadatak 9. U kutiji imamo 15 kuglica: 8 crvenih, 2 bijele i 5 plavih. Odjednom izvlačimo 4 kuglice. Koliko imamo različitih mogućnosti za odabir 2 crvene, 1 bijele i 1 plave?

Rješenja

1. 48
2. $(n-1)!$
3. $6!5!$
4. 10^4
5. a) $\binom{15}{3}$
   b) $\binom{15}{3}\binom{10}{2}$
   c) $\sum_{i=1}^{10}\binom{15}{i}\binom{10}{i}$
   d) $\sum_{i=3}^{5}\binom{15}{5-i}\binom{10}{i}$
   e) $\sum_{i=0}^{2}\binom{15}{i}\binom{10}{4-i}$
6.
7.
8.
9. 280