Vjerojatnost i statistika

Statistički pristup i klasična definicija vjerojatnosti

17. listopada 2023.

1 Statistički pristup

Definicija 1. Pokus je ponovljen n puta. Ako se pritom događaj A dogodio n_A puta, broj n_A zovemo **frekvencija događaja** A. Broj $f_A(n) = \frac{n_A}{n}$ zovemo **relativna frekvencija događaja** A.

Napomena 1. Iz definicije slijedi da je frekvencija n_A cijeli broj za koji vrijedi

$$0 \leq n_A \leq n,$$

a relativna frekvencija racionalan broj za koji vrijedi

$$0 \leq f_A(n) \leq 1.$$

Zadatak 1. Provedite kratki slučajni pokus bacanja simetrične igraće kockice i statističkim pristupom pokažite da je vjerojatnost realizacije bilo kojeg elementarnog događaja jednaka $\frac{1}{6}$.

Napomena 2. Prethodni zadatak pokazuje da se relativna frekvencija danog događaja A nakon velikog broja ponavljanja pokusa stabilizira u okolini nekog broja p_A. To svojstvo pokusa zovemo **statistička stabilnost relativnih frekvencija**, a broj p_A shvaćamo kao vjerojatnost događaja A.

Definicija 2. Ako slučajan pokus ima svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada **vjerojatnost događaja** A vezanog uz taj pokus definiramo kao broj $P(A) = p_A$ oko kojeg se grupiraju relativne frekvencije $f_n(A)$.

2 Klasična definicija vjerojatnosti

2.1 Osnove teorije skupova

Definicija 3.

1. Skup A je podskup skupa B ($A \subseteq B$) ako je svaki element skupa A ujedno element i skupa B.
2. Skup A jednak je skupu B ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
3. Unija skupova A i B je skup $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ili } \omega \in B\}$.
4. Presjek skupova A i B je skup $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ i } \omega \in B\}$.
5. Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ i } \omega \notin B\}$.
6. Simetrična razlika skupova A i B je skup $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
7. Komplement skupa (događaja) $A \subseteq \Omega$ je skup $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ kojeg nazivamo **suprotan događaj** događaja A.
8. Komplement prostora elementarnih događaja je prazan skup, tj. $\Omega^c = \emptyset$. Cijeli prostor elementarnih događaja Ω nazivamo **siguran događaj**, a njegov komplement **nemoguć događaj**.

1.	$A \cup B = B \cup A$	komutativnost
2.	$A \cap B = B \cap A$	
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	asocijativnost
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
5.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributivnost
6.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
7.	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	De Morganovi zakoni
8.	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	

Zadatak 2. Neka je Ω prostor elementarnih događaja pridružen nekom slučajnom pokusu te neka su A, B i C događaji ($A, B, C \subseteq \Omega$). Pomoću događaja A, B i C izrazite sljedeće događaje:

a) realizirao se samo događaj A,

b) realizirali su se događaji A i B,

c) realizirala su se sva tri događaja,

d) realizirao se *barem* jedan od događaja A, B i C,

e) realizirao se *točno* jedan od događaja A, B i C,

f) realizirali su se *barem* dva od događaja A, B i C,

g) realizirali su se *točno* dva od događaja A, B i C,

h) realizirali su se *najviše* dva od događaja A, B i C,

i) nije se realizirao *niti jedan* od događaja A, B i C.

2.2 Klasični pristup

Teorem 1. *Neka su $A, B, C \subseteq \Omega$ konačni skupovi. Tada*

1. $k(A^c) = k(\Omega) - k(A)$,

2. $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$,

3. *ako je $A \subseteq B$, onda je $k(B \setminus A) = k(B) - k(A)$,*

4. *za proizvoljne A i B vrijedi $k(B \setminus A) = k(B) - k(A \cap B)$,*

5. $k(A \cup B \cup C) = k(A) + k(B) + k(C) - k(A \cap B) - k(A \cap C) - k(B \cap C) + k(A \cap B \cap C)$.

Definicija 4 (klasična definicija vjerojatnosti). Ako su svi ishodi u konačnom skupu elementarnih događaja

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

jednako mogući, vjerojatnost realizacije događaja $A \subseteq \Omega$ jednaka je kvocijentu broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa Ω, tj.

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Zadatak 3. Na raspolaganju nam je kutija u kojoj se nalazi 100 papirića numeriranih brojevima $1, 2, \dots, 100$. Slučajan pokus sastoji se od izvlačenja jednog papirića iz kutije. Upotrebom klasične definicije vjerojatnosti, odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{\text{izvučeni broj je jednoznamenkast}\}$,

b) $B = \{\text{izvučeni broj je dvoznamenkast}\}$,

c) $C = \big\{\text{izvučeni broj je manji ili jednak broju } m, m \in \{1, 2, \dots, 100\}\big\}$,

d) $D = \big\{\text{izvučeni broj je strogo veći od } m, m \in \{1, 2, \dots, 100\}\big\}$,

e) $E = \{\text{suma znamenaka izvučenog broja je } 3\}$,

f) $F = \{\text{umnožak znamenaka izvučenog broja je } 6\}$.

Zadatak 4. Simetrična igraća kockica baca se dva puta. Koristeći klasični pristup, odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{\text{pali su jednaki brojevi}\}$,

b) $B = \{\text{suma brojeva koji su pali je } 8\}$,

c) $C = \{\text{produkt brojeva koji su pali je } 8\}$,

d) $D = \{\text{suma brojeva koji su pali veća je od njihovog produkta}\}$,

e) $E = \{\text{produkt brojeva koji su pali veći je od njihove sume}\}$.

Zadatak 5. Pretpostavimo da u pošiljci od ukupno 500 jabuka 2% čine prezrele jabuke. Kolika je vjerojatnost da slučajan uzorak od 20 jabuka uzet iz te pošiljke sadrži točno dvije prezrele jabuke?

Zadatak 6. U kutiji se nalazi 20 bijelih i 15 plavih kuglica. Iz kutije na slučajan način istovremeno izvlačimo pet kuglica. Odredite vjerojatnosti događaja

a) $A = \{\text{izvučene kuglice su iste boje}\}$,

b) $B = \{\text{izvučene su 3 bijele i 2 plave kuglice}\}$.

Zadatak 7. Simetričan novčić bacamo 10 puta za redom. Kolika je vjerojatnost da se pismo realizira točno tri puta?

Zadatak 8. Simetričnu igraću kockicu bacamo 10 puta. Kolika je vjerojatnost da se kao rezultat bacanja brojevi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ pojave redom $2, 3, 1, 1, 1, 2$ puta?

Rješenja

1.

2. a) $A \cap B^c \cap C^c$
   b) $A \cap B$
   c) $A \cap B \cap C$
   d) $A \cup B \cup C$
   e) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
   f) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
   g) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C)$
   h) $(A \cap B \cap C)^c$
   i) $(A \cup B \cup C)^c$

3. a) $9/100$ b) $9/10$
   c) $m/100$ d) $1 - m/100$
   e) $1/25$ f) $1/20$

4. a) $1/6$ b) $5/36$
   c) $1/18$ d) $11/36$
   e) $2/3$

5. $\frac{\binom{10}{2}\binom{490}{18}}{\binom{500}{20}}$

6. $P(A) = \frac{\binom{20}{5}+\binom{15}{5}}{\binom{35}{5}}$, $P(B) = \frac{\binom{20}{3}\binom{15}{2}}{\binom{35}{5}}$

7. $\frac{\binom{10}{3}}{2^1 0}$

8. $k(A) = \frac{10!}{2!3!1!1!1!2!} = 151200$, $k(\Omega) = 6^{10}$, $P(A) = 0.0025$