Vjerojatnost i statistika

Vjerojatnost na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$.
Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

31. listopada 2023.

Vjerojatnost na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$

Primjer 1. Promotrimo segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ i pokus koji se sastoji od slučajnog odabira točke ω iz $[a,b]$. Ako je $[c,d] \subseteq [a,b]$, možemo postaviti sljedeće pitanje: *kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka $\omega \in [a,b]$ pripada segmentu $[c,d]$?* Prirodno je pretpostaviti sljedeće

- svaka točka segmenta $[a,b]$ ima jednaku vjerojatnost biti izabrana,
- vjerojatnost odabira točke ω iz segmenta $[c,d] \subseteq [a,b]$ proporcionalna je duljini $d-c$ tog segmenta i ne ovisi o njegovom položaju.

Ako označimo $A = \{\text{slučajno odabrana točka pripada segmentu } [c,d]\}$, onda je

$$P(A) = k(d-c),$$

gdje je k koeficijent proporcionalnosti. S obzirom da je $0 \leq P(A) \leq 1$, slijedi je $k = 1/(b-a)$ pa je

$$P(A) = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\lambda([c,d])}{\lambda([a,b])}.$$

Napomena 1. Prethodno razmatranje može se poopćiti i na $\mathbb{R}^2$, pri čemu $\lambda(\cdot)$ označava površinu. Ako je prostor elementarnih događaja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takav da je $0 < \lambda(\Omega) < \infty$, tada je vjerojatnost da slučajno odabrana točka pripada $A \subseteq \Omega$ dana s

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Zadatak 1. Za fiksnu točku $c \in [a, b]$ i slučajno odabranu točku $x \in [a, b]$ odredite vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $x \leq c$,

b) $x < c$,

c) $x = c$,

d) x je bliže točki a nego točki b.

Zadatak 2. Neka je x slučajno odabran broj iz segmenta $[0, 1]$ i y slučajno odabran broja iz segmenta $[0, 2]$. Odredite vjerojatnost da za njih vrijedi:

a) $x > y$,

b) $x + y > 1$,

c) $x = y$,

d) $y \geq x^2 + 1$ i $y < x + 1$.

Napomena 2. Geometrijski pristup pretpostavlja da su intervali jednake duljine jednako vjerojatni. Ako zanemarimo tu pretpostavku, onda vjerojatnost definiramo pomoću funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

- $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D$,
- $\int_D f(x)dx = 1$,

pri čemu je $D = \mathbb{R}$ ili $D = \mathbb{R}^2$. Za $A \subseteq D$ tada definiramo

$$P(A) = \int_A f(x)dx.$$

Zadatak 3. Pokažite da funkcijom $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranom s

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{23}(3x + y^2), & (x,y) \in [0,1] \times [1,2] \\ 0, & (x,y) \notin [0,1] \times [1,2] \end{cases}$$

možemo definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz $\mathbb{R}^2$ pripada pravokutniku

$$A = [1/3, 1] \times [1, 3/2].$$

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

Definicija 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B događaji takvi da je $P(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B je broj iz segmenta $[0,1]$ kojeg označavamo s $P(A|B)$, a definiran je na sljedeći način

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definicija 2. Događaji A i B su nezavisni ako vjerojatnost realizacije događaja A ne ovisi o realizaciji događaja B, tj. ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Zadatak 1. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetrične igraće kockice. Odredite

a) vjerojatnost da je ishod bacanja kockice neparan broj,

b) vjerojatnost da je ishod bacanja kockice prost broj,

c) vjerojatnost da je ishod bacanja kockice neparan broj **ako je poznato** da je ishod prost broj.

Zadatak 2. Slučajan pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića tri puta za redom. Odredite vjerojatnost događaja A **uz dani događaj** B ako je

- $A = \{\text{glava je pala više puta nego pismo}\}$,
- $B = \{\text{prvo je palo pismo}\}$.

Jesu li događaji A i B nezavisni?

Zadatak 3. U kutiji se nalazi 10 kuglica: 7 bijelih i 3 crne. Na slučajan način izvlačimo 2 kuglice, jednu po jednu, bez vraćanja. Označimo

- $A = \{\text{druga izvučena kuglica je crna}\}$,
- $B = \{\text{prva izvučena kuglica je bijela}\}$.

Odredite $P(A)$ i $P(A|B)$. Jesu li događaji A i B nezavisni?

Zadatak 4. Dva broja se na slučajan način odjednom izabiru iz skupa $\{1, 2, \ldots, 10\}$. **Ako je poznato** da je njihov zbroj paran broj, odredite vjerojatnost da su oba neparna.

Zadatak 5. Neka su x, y dva slučajno odabrana broja iz segmenta $[0, 1]$. Odredite vjerojatnost da je $y \leq x^2$ **ako je poznato** da je $x + y < 1$.

Rješenja

Vjerojatnost na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$

1. a) $\frac{c-a}{b-a}$ b) $\frac{c-a}{b-a}$ c) 0 d) 1/2

2. a) 1/4 b) 3/4 c) 0 d) 1/12

3. $P(A) = 43/138$

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

1. $P(A) = P(B) = 1/2$, $P(A|B) = 2/3$
2. $P(A) = P(B) = 1/2$, $P(A|B) = 1/4$
3. $P(A) = 3/10$, $P(A|B) = 1/3$
4. 1/2
5. $c^3/3 + c^2/2 - c + 1/2$ pri čemu je c rješenje jednadžbe $x^2 + x - 1 = 0$ koje leži u $[0, 1]$