# Vjerojatnost i statistika

Formula potpune vjerojatnosti. Bayesova formula.

7. studenoga 2023.

## Formula potpune vjerojatnosti

**Definicija 1.** Događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ čine potpun sustav događaja ako je

- $H_i \neq \emptyset,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- $H_i \cap H_j = \emptyset,\ i \neq j$,
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Elemente potpunog sustava događaja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ zvat ćemo **hipotezama**. Važno je imati na umu da se hipoteze međusobno isključuju i da se u svakom izvođenju slučajnog pokusa točno jedna od njih mora dogoditi.

**Teorem 1 (Formula potpune vjerojatnosti).** *Neka je* $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ *potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. *Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i).$$

**Zadatak 1.** Cilj se gađa iz tri topa. Topovi pogađaju cilj nezavisno jedan od drugoga s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj uništava ga s vjerojatnošću 0.3, ako ga pogode dva topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.7, a ako ga pogode tri topa uništavaju ga s vjerojatnošću 0.9. Izračunajte vjerojatnost uništenja cilja.

**Zadatak 2.** Na usmenom ispitu ponuđeno je 10 pitanja od kojih je student naučio njih $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Student će položiti ispit ako točno odgovori na dva slučajno odabrana pitanja ili ako točno odgovori na jedno od njih te na treće, dodatno postavljeno pitanje. Na koliko pitanja student treba znati točno odgovoriti da bi s vjerojatnošću većom od 0.8 položio ispit?

**Zadatak 3.** Na raspolaganju imamo dvije kutije: u prvoj se nalaze 2 bijele i 4 plave, a u drugoj 3 bijele i 2 plave kuglice. Iz prve kutije na slučajan način odaberemo dvije kuglice i prebacimo ih u drugu kutiju. Kolika je vjerojatnost da potom odabrana kuglica iz druge kutije bude bijele boje?

## Bayesova formula

Neka je zadan potpun sustav događaja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ čije su vjerojatnosti hipoteza poznate. Pretpostavimo da je pokus izveden i da se realizirao događaj $A$. Nadalje, neka su poznate i uvjetne vjerojatnosti događaja $A$ uz svaku od hipoteza $H_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Sada je prirodno postaviti pitanje o iznosu vjerojatnosti hipoteza $H_i$ nakon izvođenja pokusa, tj. uvjetno na događaj $A$. Drugim riječima, želimo odrediti vjerojatnosti $P(H_i|A)$.

**Teorem 2 (Bayesova formula).** *Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i neka je $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ takav da je $P(A) > 0$. Tada vrijedi*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Zadatak 4.** Ptica slijeće u slučajno izabrano gnijezdo od ukupno tri gnijezda koja su joj na raspolaganju. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to:

- u prvom gnijezdu su oba jaja zdrava,
- u drugom je jedno zdravo i jedno pokvareno,
- u trećem su oba jaja pokvarena.

Odredite vjerojatnost da ptica sjedi na pokvarenom jajetu. Ako je sjela na pokvareno jaje, kolika je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

**Zadatak 5.** Neki izvor emitira poruke koje se sastoje od znakova 0 i 1 koji se šalju nezavisno. Vjerojatnost emitiranja znaka 1 je 0.6, a vjerojatnost emitiranja znaka 0 je 0.4. Na izlazu iz komunikacijskog kanala 10% znakova pogrešno se interpretira. Ako je primljena poruka 101, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

## Rješenja

1. 0.3888
2. $n \geq 7$
3. 11/21
4. 1/2, 1/3
5. 0.7438