

Vjerojatnost i statistika

Slučajne varijable

14. studenoga 2023.

Diskretne slučajne varijable

Definicija 1. Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Svaku funkciju $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zvat ćemo **diskretna slučajna varijabla**.

Diskretnu slučajnu varijablu X karakteriziramo pomoću pripadnog skupa vrijednosti (slike)

$$\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

i pridruženih im vjerojatnosti

$$p_n = P(X = x_n).$$

To pregledno zapisujemo u obliku tablice

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

koju nazivamo **tablica distribucije (distribucija ili zakon razdiobe)** slučajne varijable X , a ima sljedeća svojstva

- $x_i \neq x_j$ čim je $i \neq j$,
- $0 \leq p_i \leq 1, \forall i$,
- $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Zadatak 1. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja simetričnog novčića dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj realiziranih pisama. Nađite distribuciju od X te ju prikazite grafički.

Zadatak 2. Strijelac na raspolaganju ima tri metka i gađa metu dok ju ne pogodi ili dok ne potroši sva tri metka. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj potrošenih metaka. Uz pretpostavku o nezavisnosti gađanja, odredite distribuciju od X ako je vjerojatnost pogotka mete pri svakom gađanju jednaka 0.8.

Zadatak 3. Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilne igrace kockice dva puta zaredom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost suma realiziranih brojeva u oba bacanja. Odredite distribuciju slučajne varijable X .

Napomena 1. Koristimo sljedeću oznaku za original skupa $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

i pripadnu vjerojatnost zapisujemo u obliku

$$P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Od posebne važnosti su skupovi oblika $(-\infty, x]$. U tom slučaju pišemo $\{X \leq x\}$, odnosno $P(X \leq x)$.

Napomena 2. Vjerojatnost skupa $\{X \in A\}$ se računa kao

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

Neprekidne slučajne varijable

Definicija 2. Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi:

- $\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- postoji nenegativna realna funkcija f realne varijable sa svojstvom

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Funkcija X zove se **(apsolutno) neprekidna** slučajna varijabla, a funkcija f je **funkcija gustoće** slučajne varijable X .

Napomena 3. Funkcija gustoće ima dva bitna svojstva:

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (**nenegativnost**)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (**normiranost**)

Zadatak 4. Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odredite vrijednost nepoznate konstante k tako da bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable:

a) $f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ke^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} k \cos(2x), & x \in [-\pi/4, \pi/4), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Zadatak 5. Vijek trajanja žarulje je slučajan broj (u danima) iz intervala $[50, 1300)$. Funkcija gustoće slučajne varijable X koja modelira vijek trajanja žarulje je

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-3}, & 50 \leq x < 1300, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite vrijednost nepoznate konstante k te vjerojatnost da je vijek trajanja žarulje dulji od 90 dana.

Rješenja

$$1. X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$2. X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.8 & 0.16 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$3. X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \text{a) } k = 2 \qquad \qquad \qquad \text{b) } k = 2 \qquad \qquad \qquad \text{c) } k = 1$$

$$5. k \approx 5000, P(X > 90) = 25/81$$