

Vjerojatnost i statistika

Funkcija distribucije Numeričke karakteristike slučajne varijable

21. studenoga 2023.

Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable

Definicija 1. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla zadana tablicom distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Funkciju $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da realizacija dane slučajne varijable bude manja ili jednaka tom broju, tj.

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i),$$

nazivamo **funkcijom distribucije diskretne slučajne varijable** X .

Napomena 1. Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable ima skokove vrijednosti u točkama x_i , a na intervalu $[x_i, x_{i+1})$ poprima vrijednost $F(x_i)$. Za takvu funkciju kažemo da je *stepenasta*.

Zadatak 1. Pretpostavimo da provodimo slučajan pokus koji se sastoji od istovremenog bacanja dvaju simetričnih kovanica: jedne kovanice od 1€ i jedne kovanice od 2€. Slučajna varijabla $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definirana je kao funkcija koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje sumu vrijednosti kovanica na kojima se nakon bacanja realiziralo pismo. Odredite distribuciju ove slučajne varijable te njenu funkciju distribucije. Odredite vjerojatnosti $P(X \leq 2)$, $P(X < 2)$, $P(X \geq 2)$ i $P(X > 2)$.

Zadatak 2. Iz kutije u kojoj se nalazi 7 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 7 izvlače se istovremeno tri kuglice $\{i, j, k\}$. Odredite tablicu distribucije i funkciju distribucije slučajne varijable X definirane na sljedeći način:

$$X(\{i, j, k\}) = \max\{i, j, k\}, \quad i, j, k \in \{1, \dots, 7\}.$$

Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable

Definicija 2. Neka je $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f . Funkciju distribucije $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ slučajne varijable X definiramo na sljedeći način:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Napomena 2. Često će nas zanimati vjerojatnost da neprekidna slučajna varijabla X prima vrijednosti u nekom skupu $A \subseteq \mathbb{R}$. U slučaju kada je $A = (a, b]$, imamo sljedeće

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \in (a, b]) \\ &= P(X \in (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Zadatak 3. Zadana je funkcija gustoće f neprekidne slučajne varijable X

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, & 0 \leq x < 1, \\ 2/3, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunajte funkciju distribucije slučajne varijable X te skicirajte grafove funkcije gustoće i funkcije distribucije.

Zadatak 4. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf.
- b) Izračunajte $P(0.25 < X \leq 2)$.

Zadatak 5. Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x), & x \in [-\pi/4, \pi/4), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf.
- b) Izračunajte $P(0 < X \leq \pi/8)$.

Numeričke karakteristike diskretne slučajne varijable

Definicija 3. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

diskretna slučajna varijabla na njemu. Ako je $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| p_i < \infty$, definiramo **očekivanje** slučajne varijable X s

$$EX = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i.$$

Definicija 4. Za diskretnu slučajnu varijablu X i $r > 0$, takve da je $EX^r < \infty$, definiramo

- r -ti moment: $EX^r = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i$,
- r -ti centralni moment: $E(X - EX)^r$.

Napomena 3. Drugi centralni moment slučajne varijable X zove se **varijanca**:

$$\text{Var}(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2.$$

Korijen iz varijance zove se **standardna devijacija**:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Napomena 4. Neka su X i Y slučajne varijable koje imaju očekivanje ($E|X| < \infty$ i $E|Y| < \infty$). Očekivanje ima sljedeća svojstva:

- linearnost: $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha EX + \beta EY$,
- $X = c \Rightarrow EX = c$, $c \in \mathbb{R}$,
- monotonost: $X \leq Y \Rightarrow EX \leq EY$,
- $X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0$,
- $X \geq 0$ i $EX = 0 \Rightarrow X = 0$.

Zadatak 6. Odredite očekivanja i varijance slučajnih varijabli X i Y ako su zadane na sljedeći način:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix},$$
$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 7. Slučajna varijabla X zadana je tablicom distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ a & 1/8 & a - b^2 & b^2 & 1/4 & b \end{pmatrix},$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ako je $EX = 25/8$, odredite:

- vrijednosti parametara a i b ,
- varijancu slučajne varijable X .

Numeričke karakteristike neprekidne slučajne varijable

Definicija 5. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f . Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$, definiramo **očekivanje** slučajne varijable X s

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Definicija 6. Za neprekidnu slučajnu varijablu X s gustoćom f i $r > 0$ takve da je $EX^r < \infty$ definiramo

- r -ti moment:** $EX^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx,$
- r -ti centralni moment:** $E(X - EX)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^r f(x)dx.$

Napomena 5. **Varijanca** neprekidne slučajne varijable X s funkcijom gustoće f dana je s

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx.$$

Drugi korijen iz varijance zove se **standardna devijacija** i označava se sa σ .

Napomena 6. Prethodno navedena svojstva očekivanja za diskretnu slučajnu varijablu vrijede i za neprekidnu slučajnu varijablu.

Zadatak 8. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunajte očekivanje i varijancu od X .

Rješenja

$$1. X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/4, & x \in [0, 1) \\ 1/2, & x \in [1, 2) \\ 3/4, & x \in [2, 3) \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$P(X \leq 2) = 3/4, P(X < 2) = 1/2$$

$$2. X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1/35 & 3/35 & 6/35 & 10/35 & 15/35 \end{pmatrix}, F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 1/35, & x \in [3, 4) \\ 4/35, & x \in [4, 5) \\ 10/35, & x \in [5, 6) \\ 20/35, & x \in [6, 7) \\ 1, & x \geq 7 \end{cases}$$

$$3. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x, & x \in [0, 1) \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, & x \in [1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } P(0.25 < X \leq 2) = \frac{15}{16}$$

$$5. \text{ a) } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/4 \\ 1/2 + \sin x \cos x, & x \in [-\pi/4, \pi/4) \\ 1, & x \geq \pi/4 \end{cases}$$

$$\text{b) } P(0 < X \leq \pi/8) \approx 0.3535$$

$$6. EX = 15/16, EY = -17/16, \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 367/256$$

$$7. \text{ a) } a = 3/16, b = 1/4$$

$$\text{b) } \text{Var}(X) = 711/64$$

$$8. EX = 0, \text{Var}(X) = 1/6$$