Vjerojatnost i statistika

Parametarske familije diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli
Čebiševljeva nejednakost

28. studenoga 2023.

Parametarske familije diskretnih slučajnih varijabli

Bernoullijeva slučajna varijabla

Bernoullijev pokus ima samo dva moguća ishoda: 0 = neuspjeh, 1 = uspjeh. Pretpostavimo da se uspjeh realizira s vjerojatnošću p, a neuspjeh s vjerojatnošću $1-p$. Slučajna varijabla X koja modelira ovaj pokus ima tablicu distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in (0,1)$$

i zove se **Bernoullijeva slučajna varijabla**. Njezina distribucija zove se **Bernoullijeva distribucija** s parametrom p.

Očekivanje i varijanca Bernoullijeve slučajne varijable su

$$EX = p, \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

Binomna slučajna varijabla

Pretpostavimo da Bernoullijev pokus ponavljamo nezavisno n puta. Svako izvođenje modelirano je Bernoullijevom slučajnom varijablom s parametrom $p \in (0,1)$. Vjerojatnost da se pojavi točno $k \in \{0,1,\dots,n\}$ uspjeha dana je s

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Naime, u n nezavisnih ponavljanja pokusa točno k puta pojavila realizacija koju nazivamo uspjeh (s vjerojatnošću p) i točno $n-k$ puta realizacija koju nazivamo neuspjeh (s vjerojatnošću $1-p$).

Slučajna varijabla X koja modelira broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja istog Bernoullijevog pokusa s parametrom p ima tablicu distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ (1-p)^n & \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} & \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} & \dots & p^n \end{pmatrix}, \quad p \in (0,1),$$

a zove se **binomna slučajna varijabla**. Njezina distribucija zove se **binomna distribucija** s parametrima n i p te se označava s $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable dani su s

$$EX = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Zadatak 1. Ako je u proizvodnji nekog proizvoda 5% loših proizvoda, odredite vjerojatnost da se u slučajnom uzorku od 200 proizvoda nađu najviše 2 loša proizvoda. Koliki je očekivani broj loših proizvoda u uzorku od 200 proizvoda?

Zadatak 2. Student rješava pismeni ispit koji se sastoji od dvadeset pitanja. Na svako pitanje ponuđena su samo dva odgovora: točno i netočno. Izračunajte vjerojatnost da slučajnim odabirom odgovora na svih dvadeset pitanja student točno riješi 80% ispita. Kolika je vjerojatnost da na isti način točno riješi barem 80% ispita?

Zadatak 3. Iz skladišta je otpremljeno 600 boca. Vjerojatnost da se prilikom transporta razbije 1 boca iznosi 0.05. Odredite vjerojatnost da se na odredište dopremi 10 razbijenih boca. Koliki je očekivani broj razbijenih boca prilikom tog transporta?

Parametarske familije neprekidnih slučajnih varijabli

Uniformna slučajna varijabla

Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

zove se **uniformna slučajna varijabla** s parametrima a i b. Pišemo $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Numeričke karakteristike uniformne slučajne varijable su

$$EX = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Generiranje neprekidne slučajne varijable

Teorem 1. *Neka je F funkcija distribucije neke slučajne varijable. Ukoliko je $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, tada slučajna varijabla $X = F^{-1}(U)$ ima funkciju distribucije F.*

Teorem 2. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_X te neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g) \subseteq \mathbb{R}$ bijekcija. Ako je g derivabilna na $\mathbb{R}$, onda je $Y = g(X)$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right) \left|g^{-1}(y)'\right|, & y \in \mathcal{R}(g), \\ 0, & y \notin \mathcal{R}(g). \end{cases}$$

Zadatak 4. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = -\ln X$ te izračunajte njezino očekivanje.

Eksponencijalna slučajna varijabla

Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

zove se **eksponencijalna slučajna varijabla** s parametrom $\lambda > 0$. Pišemo $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Zadatak 5. Odredite funkciju distribucije te izračunajte očekivanje i varijancu od $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Zadatak 6. Neka je $X \sim \mathcal{E}(2)$. Odredite vjerojatnost da X poprimi vrijednost

a) u intervalu $(-1, 4]$,

b) veću od 2.5,

c) manju od 2.

Zadatak 7. Neka je $X \sim \mathcal{E}(1)$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = e^{-X}$ te izračunajte njezino očekivanje i varijancu.

Normalna slučajna varijabla

Slučajna varijabla X čija je gustoća

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

zove se **normalna slučajna varijabla** s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$. Pišemo $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Numeričke karakteristike normalne slučajne varijable su

$$EX = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Napomena 1. Normalna slučajna varijabli s očekivanjem 0 i varijancom 1 zove se **standardna normalna** slučajna varijabla, u oznaci $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Zadatak 8. Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^2$ te izračunajte njezino očekivanje.

Čebiševljeva nejednakost

Teorem 3. *Neka je X slučajna vrijabla koja ima varijancu σ^2 i neka je $k > 0$. Tada vrijedi*

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2},$$

gdje je μ očekivanje slučajne varijable X.

Napomena 2. Primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja slijedi

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Zadatak 9. Neka je X slučajna varijabla kojom je modeliran broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine. Poznato je da je očekivani broj kišnih dana 128, a standardna devijacija 4. Ocijenite vjerojatnost da broj kišnih dana u Osijeku odstupa od očekivanog za barem pet standardnih devijacija.

Zadatak 10. Neka je X slučajna varijabla kojom je modelirana visina snježnog pokrivača na Zavižanu u prosincu. Poznato je da je očekivana visina snijega u prosincu na Zavižanu 75 cm, a standardna devijacija 12 cm. Kolika se visina snijega može očekivati tijekom prosinca ako Čebiševljeva ocjena vjerojatnosti nije manja od 0.9?

Rješenja

1. $P(X \leq 2) = 0.0023$, $EX = 10$
2. $P(X = 16) = 0.0046$, $P(X \geq 16) = 0.0059$
3. $P(X = 10) = \binom{600}{10} \cdot 0.05^{10} \cdot (1 - 0.05)^{590}$
4. $Y \sim \mathcal{E}(1)$
5. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$, $EX = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$
6. a) $1 - e^{-8}$ b) e^{-5} c) $1 - e^{-4}$
7. Vidjeti Zadatak 4.
8. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, $EY = 1$
9. $\leq 1/25$
10. $27 \leq X \leq 123$