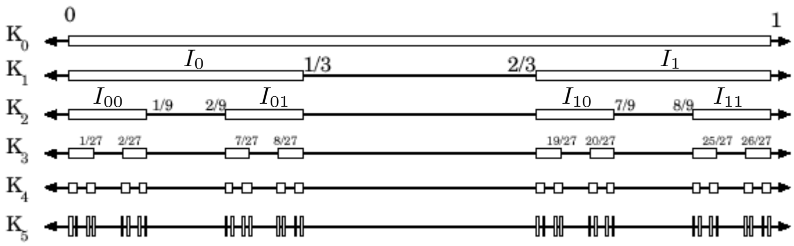
Dragan Jukić

UVOD U TEORIJU MJERE I INTEGRACIJE

PRVI DIO



Osijek, 2008.

D. Jukić – Uvod u teoriju mjere i integracije. Prvi dio.

Izdavač: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku

Recenzenti: Prof.dr.sc. Davor Butković
Prof.dr.sc. Tibor Pogány

Lektor: Ivanka Ferčec, prof.

CIP – Katalogizacija u publikaciji
Gradska i sveučilišna knjižnica, Osijek

UDK 517.987(075.8)

JUKIĆ, Dragan
Uvod u teoriju mjere i integracije / Dragan Jukić. - Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2008 -. (Biblioteka Odjela za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku; U-62)

Dio 1. - 2008
Bibliografija. - Kazalo
ISBN 978-953-6931-32-3

I. Uvod u teoriju mjere i integracije – Udžbenik

120318074

Udžbenik se objavljuje uz suglasnost Senata Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku pod brojem 19/08.

Udžbenik se tiska uz novčanu potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa.

 Tisak: Grafika d.o.o., Osijek

Na naslovnoj stranici prikazano je prvih pet koraka konstrukcije Cantorovog skupa.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova je knjiga napisana s namjerom da pomogne studentima Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku pri pripremanju i polaganju ispita iz kolegija **Odabrana poglavlja analize**.

Knjiga je podijeljena u četiri poglavlja: Mjera, Izmjerive funkcije, Integracija izmjerivih funkcija i Produkt prostora mjere. Od čitatelja se pretpostavlja znanje iz matematičke analize. U svim poglavljima teorijski dio ilustriran je mnoštvom primjera. Za većinu zadataka dane su detaljne upute. U svakom poglavlju redom su numerirane definicije, teoremi, leme, propzicije, primjeri i slike.

Autor će biti zahvalan svim čitateljima na njihovim primjedbama u svezi s eventualnim pogreškama, nepreciznostima ili nedostacima koje će koristiti za novo izdanje.

Na kraju, zahvaljujem svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ova knjiga tiska i bude što bolja. To se posebice odnosi na recenzente koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama utjecali na mnoge dijelove teksta.

U Osijeku, rujan 2008. Dragan Jukić

1. Mjera

1.1. σ-algebra

Neka je X bilo koji neprazan skup. Njegov partitivni skup označavat ćemo s 2^X.

Definicija 1.1. *Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X nazivamo σ-*algebra skupova *na skupu X ako ona ima sljedeća svojstva:*

(σ1) $X \in \mathcal{A}$

(σ2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(σ3) *Unija prebrojivo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz (A_n) skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je izmjeriv prostor. *Svaki element od $\mathcal{A}$ se zove* izmjeriv skup.

Dakle, σ-algebra na skupu X je familija podskupova od X koja sadrži skup X, zatvorena je na komplementiranje i na formiranje prebrojivih unija. Korisno je usporediti definiciju σ-algebre na skupu X s definicijom topologije na skupu X. Prisjetimo se, topološki prostor je par $(X,\mathcal{U})$ gdje su X neprazan skup, a $\mathcal{U}$ familija podskupova od X sa svojstvima:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,

(ii) Unija svake familije skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$,

(iii) Presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$.

Familija $\mathcal{U}$ zove se topološka struktura ili topologija, a njezine članove zovemo otvorenim skupovima.

Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu X. Kako je $\emptyset = X^c$, svojstvo (σ2) povlači $\emptyset \in \mathcal{A}$ i govori nam da uvjet (σ1) iz definicije σ-algebre možemo zamijeniti uvjetom

(σ1)$'$ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Nadalje, također zbog (σ2), umjesto svojstva (σ3) iz definicije 1.1. može se zahtijevati da familija $\mathcal{A}$ bude zatvorena na prebrojive presjeke:

(σ3)$'$ *Presjek prebrojivo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz (A_n) skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Primjedba 1.2. *Ako se u definiciji 1.1. umjesto uvjeta (σ3) zahtijeva da $\mathcal{A}$ bude zatvorena na formiranje konačnih unija, dobiva se definicija* algebre skupova *na skupu X.*

Očito da je svaka σ-algebra ujedno i algebra. Obrat ne vrijedi, tj. postoji algebra koji nije σ-algebra (vidi primjer 1.4.).

Primjer 1.3. *Evo nekoliko primjera σ-algebri:*

1. *Neka je X bilo koji skup. Tada su familije $\mathcal{A} = 2^X$ i $\mathcal{A}' = \{\emptyset, X\}$ istovremeno i σ-algebre i topologije na X. Uočimo da je $\mathcal{A}$ najveća, a $\mathcal{A}'$ najmanja σ-algebra na X.*

2. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$. Familija $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ je σ-algebra na X.*

   Uočite da je $\mathcal{A}$ istovremeno i topologija na X. Skupovi $\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}$ su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.

   Pokažite da je $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, \{2, 3\}\}$ topologija na skupu X koja nije algebra na X, pa stoga nije ni σ-algebra.

3. *Neka je $X = [0, 1]$. Familija $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, [0, 1/2], (1/2, 1]\}$ je σ-algebra na X.*

4. *Neka je $X = \mathbb{R}$. Familija $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ prebrojiv ili A^c prebrojiv$\}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}$: Očigledno je da $\mathcal{A}$ ima svojstva ($\sigma 1$)-($\sigma 2$). Neka je (A_n) niz skupova iz $\mathcal{A}$. Ako su svi skupovi A_n prebrojivi, onda je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ prebrojiv skup i zato je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Ako je neki skup $A_{n_0}^c$ prebrojiv, onda je $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$, odakle slijedi da je skup $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c$ prebrojiv i zato je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

   Sada ćemo pokazati da familija $\mathcal{A}$ nije zatvorena na proizvoljne unije, što će značiti da $\mathcal{A}$ nije topologija na $\mathbb{R}$. Svaka točka $x \in \mathbb{R}$ je izmjeriv skup. Zato, kada bi $\mathcal{A}$ bila zatvorena na proizvoljne unije, onda bi svaki podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ bio izmjeriv, što nije točno.

Primjer 1.4. *Navedimo nekoliko primjera algebri koje nisu σ-algebre:*

1. *Neka je X bilo koji beskonačan skup. Lako je provjeriti da familija*

   $$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ konačan ili } A^c \text{ konačan}\}$$

   predstavlja jednu algebra na skupu X. Pokažimo da ta algebra nije σ-algebra. U tu svrhu prvo odaberimo bilo koji niz (x_n) međusobno različitih točaka iz X. Svi skupovi $A_n := \{x_{2n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, pripadaju familiji $\mathcal{A}$. Kako su $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c$ beskonačni skupovi, to znači da $\mathcal{A}$ nije σ-algebra.

2. *Neka je $\mathcal{A}$ familija koja sadrži $\emptyset$ i sve podskupove od $\mathbb{R}$ koji se mogu prikazati kao unija konačno mnogo intervala oblika $(a, b]$, $(a, +\infty)$ i $(-\infty, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.*

   Lako je pokazati da je $\mathcal{A}$ algebra. Pokažimo da algebra $\mathcal{A}$ nije σ-algebra. Neka su a, b bilo koja dva realna broja takva da je $b - a > 1$. Tada je $(a, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a, b - \frac{1}{n}] = (a, b)$ i $(a, b) \notin \mathcal{A}$, familija $\mathcal{A}$ nema svojstvo ($\sigma 3$).

Koristeći se definicijom σ-algebre lako je dokazati sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.5. *Neka je $(\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ bilo koja familija σ-algebri na skupu X. Tada je $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ σ-algebra na skupu X.*

Primjedba 1.6. *Ilustrirajmo primjerom da unija σ-algebri ne mora biti σ-algebra. Neka je $X = \{1, 2, 3\}$. Tada su $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 3\}\}$ σ-algebre na X. Kako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, a $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, unija $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ nema svojstvo ($\sigma 3$) pa nije σ-algebra.*

Pomoću propozicije 1.5. lako je dokazati sljedeći rezultat koji je koristan alat za konstrukciju σ-algebri.

Korolar 1.7. *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa X. Tada postoji najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}$.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.5.,

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \big\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\big\} \tag{1.1}$$

je σ-algebra na skupu X. Lako je zaključiti da je $\sigma(\mathcal{F})$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}$. □

Definicija 1.8. *Za σ-algebru $\sigma(\mathcal{F})$ definiranu s (1.1) kažemo da je* σ-algebra generirana s $\mathcal{F}$.

Dakle, $\sigma(\mathcal{F})$ je najmanja σ-algebra na skupu X koja sadrži familiju $\mathcal{F}$ podskupova skupa X.

Propozicija 1.9. *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}^c),$$

gdje je $\mathcal{F}^c = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$.

Dokaz. Kako je $\sigma(\mathcal{F})$ zatvorena na komplementiranje, vrijedi $\mathcal{F}^c \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, odakle slijedi $\sigma(\mathcal{F}^c) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Postupajući analogno, dobiva se $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}^c)$. □

Borelova σ-algebra. Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Za σ-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$ kaže se da je Borelova σ-algebra na skupu X, i najčešće se označava s $\mathcal{B}(X,\mathcal{U})$, $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}_X$. Članovi od $\mathcal{B}_X$ zovu se Borelovi skupovi. U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$.

Napomenimo da se ideja σ-aditivnosti, koju ćemo obraditi u sljedećoj točki, pripisuje Borelu[1] i Lebesgueu[2].

U najopćenitijem slučaju, vrlo je teško eksplicitno opisati σ-algebru $\sigma(\mathcal{F})$ generiranu familijom $\mathcal{F}$. Za Borelovu σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ vrijedi ovaj teorem:

[1]Emil Borel (1871-1956), francuski matematičar.
[2]Henri Léon Lebesgue(1875-1941), francuski matematičar.

Teorem 1.10. *Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ generirana je sa svakom od sljedećih familija:*

(a) $\mathcal{F}_1 := \{F \subseteq \mathbb{R} : F \text{ zatvoren}\}$

(b) $\mathcal{F}_2 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$

(c) $\mathcal{F}_3 := \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathcal{F}_4 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$

(e) $\mathcal{F}_5 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

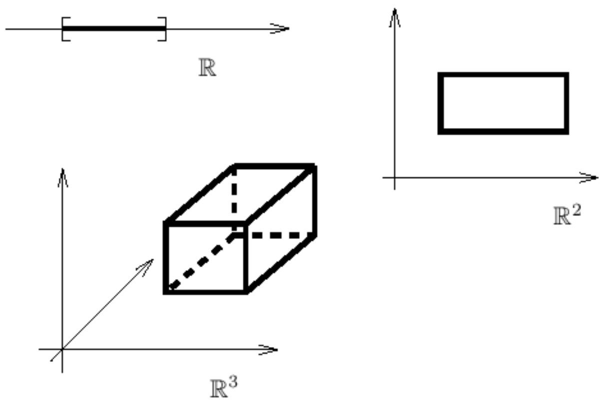
(f) $\mathcal{F}_6 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

(g) $\mathcal{F}_7 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

(h) $\mathcal{F}_8 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

(i) $\mathcal{F}_9 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Dokaz teorema 1.10. dat ćemo poslije. Prvo uvedimo pojam d-intervala na $\mathbb{R}^d$. Intervale oblika (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, zovemo 1-intervali. Neka su $I_1, \dots, I_d$ 1-intervali. Skup oblika $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$ zovemo d-interval na $\mathbb{R}^d$.



Slika 1. Intervali na $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$.

Lema 1.11. *Svaki neprazan otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^d$ može se prikazati kao prebrojiva unija međusobno disjunktnih d-intervala oblika*

$$\left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : j_i 2^{-k} \leq x_i < (j_i + 1)2^{-k},\ i = 1, \dots, d\right\}, \tag{1.2}$$

gdje su $j_1, \dots, j_d$ neki cijeli brojevi, a k neki prirodan broj.

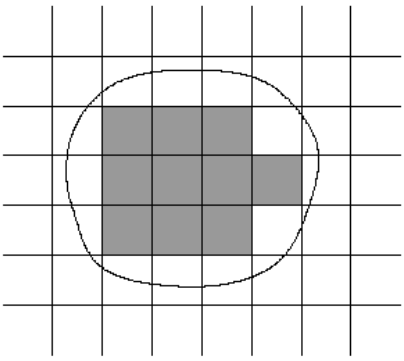
Dokaz. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ sa $\mathcal{C}_k$ označimo familiju svih d-intervala oblika (1.2). Familija $\mathcal{C}_k$ ima sljedeća dva očigledna svojstva:

(a) $\mathcal{C}_k$ je particija skupa $\mathbb{R}^d$,

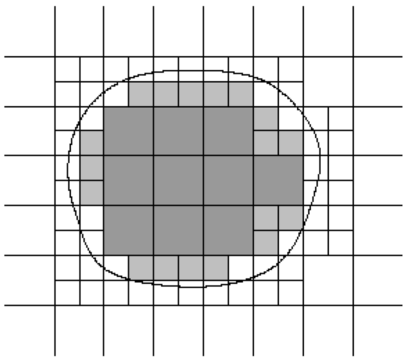
(b) Ako je $k_1 < k_2$, onda je svaki član iz $\mathcal{C}_{k_2}$ sadržan u nekom članu iz $\mathcal{C}_{k_1}$.

Prvo pokažimo da je $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ prebrojiv skup. U tu svrhu, svakom d-intervalu oblika (1.2) pridružimo točku $(j_1, j_2, \ldots, j_d, k) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. Ovako definirano preslikavanje je bijekcija sa $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ na prebrojiv skup $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. Dakle, skup $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ je prebrojiv. Kako je $\mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{N}$, pravi podskup od $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$, i on je prebrojiv skup.

Sada ćemo pokazati da se U može prikazati kao prebrojiva unija međusobno disjunktnih d-intervala oblika (1.2). U tu svrhu induktivno ćemo definirati familiju $\mathcal{D}$ na sljedeći način: Na početku ($k = 1$) u $\mathcal{D}$ stavimo sve d-intervale iz $\mathcal{C}_1$ koji su sadržani u skupu U. U k-tom koraku ($k = 2, 3, \ldots$) dodajmo u $\mathcal{D}$ sve d-intervale iz $\mathcal{C}_k$ koji su sadržani u skupu U i koji su disjunktni sa svim d-intervalima stavljenim u $\mathcal{D}$ u nekom ranijem koraku. Za slučaj otvorenog skupa u $\mathbb{R}^2$ prva dva koraka prikazana su na slici 2.



1. korak ($k = 1$)



2. korak ($k = 2$)

Slika 2. Dekompozicija skupa $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Kako je $\mathcal{D} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$, $\mathcal{D}$ je prebrojiva familija međusobno disjunktnih d-intervala oblika (1.2). Nadalje, očito je unija svih članova iz $\mathcal{D}$ sadržana u skupu U. Preostaje pokazati da je skup U sadržan u uniji svih članova iz $\mathcal{D}$. Neka je $x \in U$. Kako je U otvoren skup, svaki d-interval iz $\mathcal{C}_k$ koji sadrži x bit će sadržan u skupu U ako je k dovoljno velik. Neka je k_0 najmanji takav k. Tada d-interval iz $\mathcal{C}_{k_0}$ koji sadrži x pripada familiji $\mathcal{D}$. $\square$

Dokaz teorema 1.10. Prvo ćemo pokazati da je

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{F}_1) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_3) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_4) = \sigma(\mathcal{F}_5) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_6) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_7) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_8) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_9)$$

a zatim da je $\sigma(\mathcal{F}_9) \supseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Time će dokaz biti kompletan.

Prvo uočimo da su jednakosti u gornjem lancu posljedica propozicije 1.9. Nadalje ćemo stalno koristiti činjenicu da je svaka σ-algebra zatvorena s obzirom na komplementiranje, formiranje prebrojive unije i formiranje prebrojivog presjeka.

(b) Kako je $(-\infty, b) = [b, \infty)^c \in \sigma(\mathcal{F}_1)$, te kako je $\sigma(\mathcal{F}_2)$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}_2$, to je $\sigma(\mathcal{F}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_1)$.

(d) Kako je $(-\infty, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, b + \frac{1}{n}) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [b + \frac{1}{n}, \infty)\Big)^c \in \sigma(\mathcal{F}_3)$, te kako je $\sigma(\mathcal{F}_4)$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}_4$, dobivamo $\sigma(\mathcal{F}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_3)$.

(f) Dovoljno je provjeriti da vrijedi $(a, b] = (a, \infty) \cap (-\infty, b] = (a, \infty) \cap (b, \infty)^c \in \sigma(\mathcal{F}_5)$, odakle zaključujući na isti način kao u prethodnim slučajevima dobivamo $\sigma(\mathcal{F}_6) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_5)$.

(g) $[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a - \frac{1}{n}, b] \in \sigma(\mathcal{F}_6)$ implicira $\sigma(\mathcal{F}_7) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_6)$.

(h) Pomoću jednakosti $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ koja vrijedi za svaki dovoljno velik prirodan broj n_0 lako se pokaže da je $\sigma(\mathcal{F}_8) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_7)$.

(i) Kako je $[a, b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a - \frac{1}{n}, b) \in \sigma(\mathcal{F}_8)$, slijedi $\sigma(\mathcal{F}_9) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_8)$.

Preostaje pokazati inkluziju $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{F}_9)$. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ generirana je s familijom $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. Neka je $U \in \mathcal{U}$. Prema lemi 1.11. U se može prikazati kao prebrojiva unija međusobno disjunktnih intervala oblika $[a, b)$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Kako svaki taj interval $[a, b)$ pripada σ-algebri $\sigma(\mathcal{F}_9)$, to je $U \in \sigma(\mathcal{F}_9)$. Dakle, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \sigma(\mathcal{F}_9)$. □

Teorem 1.12. *Borelovu σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ generira svaka od sljedećih familija:*

(a) Familija svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$,

(b) Familija svih zatvorenih poluprostora u $\mathbb{R}^d$ oblika

$$\mathbb{R}^{i-1} \times (-\infty, b] \times \mathbb{R}^{d-i}, \quad b \in \mathbb{R},$$

(c) Familija svih pravokutnika u $\mathbb{R}^d$ oblika

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_d, b_d].$$

Dokaz. Ovaj se teorem može dokazati na isti način kao i teorem 1.10. Zato izostavljamo detalje. Tvrdnja pod (a) slijedi iz propozicije 1.9. Sa $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ označimo σ-algebre generirane familijama pod (a), (b) i (c). Kako je svaki član iz familije (b) zatvoren skup, on je sadržan u σ_a i zato je $\sigma_b \subseteq \sigma_a$. Nadalje, svaka pruga oblika $\mathbb{R}^{i-1} \times (a, b] \times \mathbb{R}^{d-i}$ može se prikazati kao razlika dva poluprostora iz familije (b). Zato je ta pruga sadržana u σ_b. Kako se svaki pravokutnik iz familije (c) može prikazati kao presjek odgovarajućih d pruga, to je i pravokutnik sadržan u σ_b, odakle se lako zaključuje da je $\sigma_c \subseteq \sigma_b$. Dakle, za sada smo pokazali da vrijedi

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma_a \supseteq \sigma_b \supseteq \sigma_c.$$

Dokaz inkluzije $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \sigma_c$ provodi se na potpuno isti način kao dokaz odgovarajuće inkluzije u teoremu 1.10. $\square$

Za niz $(A_i, i \in \mathbb{N})$ podskupova od X kažemo da je uzlazan ako je $A_i \subseteq A_{i+1}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. U tom slučaju, ako je $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, pišemo $A_n \uparrow A$.

Niz $(A_i, i \in \mathbb{N})$ je silazan ako je $A_i \supseteq A_{i+1}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju pišemo $A_n \downarrow A$, gdje je $A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Propozicija 1.13. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu X koja ima barem jedno od sljedeća dva svojstva:*

(a) Za svaki niz uzlaznih skupova iz $\mathcal{A}$ i njihova unija je član od $\mathcal{A}$,

(b) Za svaki niz silaznih skupova iz $\mathcal{A}$ i njihov presjek je član od $\mathcal{A}$.

Tada je $\mathcal{A}$ σ-algebra.

Dokaz. Treba pokazati da je familija $\mathcal{A}$ zatvorena na formiranje prebrojivih unija. Neka je $(A_i, i \in \mathbb{N})$ niz skupova iz $\mathcal{A}$. Treba pokazati da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. U tu svrhu definirajmo uzlazan niz skupova iz $\mathcal{A}$:

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{1.3}$$

(a) Po pretpostavci je $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$, odakle pomoću (1.3) dobivamo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
(b) Kako je $(B_i^c, i \in \mathbb{N})$ silazan niz skupova iz algebre $\mathcal{A}$, po pretpostavci je $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c \in \mathcal{A}$. Zato je $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$, a zbog (1.3) je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. $\square$

Definicija 1.14. *Familija $\mathfrak{M}$ podskupova od X zove se* monotona klasa *na skupu X ako ima sljedeća dva svojstva:*

(i) Za svaki niz uzlaznih skupova iz $\mathfrak{M}$ i njihova unija je član od $\mathfrak{M}$,

(ii) Za svaki niz silaznih skupova iz $\mathfrak{M}$ i njihov presjek je član od $\mathfrak{M}$.

Svaka σ-algebra je očito monotona klasa.

Korolar 1.15. *Familija $\mathcal{A}$ podskupova od X je σ-algebra na X onda i samo onda ako je $\mathcal{A}$ algebra i monotona klasa.*

Zadaci.

1. Zadana je σ-algebra $\mathcal{A}$ na skupu X. Dokažite: (a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$. (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$, gdje je $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ simetrična razlika skupova A i B.

2. Neka je X skup, a $B \subseteq X$. Dokažite: (a) Ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, onda je $B \cap \mathcal{A} = \{B \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ također σ-algebra na skupu X (vidi propoziciju 3.37.). (b) Ako je $\mathfrak{M}$ monotona klasa na X, onda je $B \cap \mathfrak{M} = \{B \cap M : M \in \mathfrak{M}\}$ također monotona klasa.

3. Neka je $f : X \to Y$ funkcija, a $(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija podskupova od Y. Dokažite ove tvrdnje: (a) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$. (b) $f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$.

4. Neka je $f : X \to Y$ funkcija, a Σ neka σ-algebra na Y. Dokažite da je $f^{-1}(\Sigma) = \{f^{-1}(S) : S \in \Sigma\}$ σ-algebra na X.

5. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor mjere i $f : X \to Y$ funkcija. Dokazati da je $\Sigma := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ jedna σ-algebra na Y.

6. Neka je $f : X \to Y$ funkcija i $\mathcal{A}$ neka σ-algebra na skupu X. Pokažite primjerom da $f(\mathcal{A}) = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ općenito nije σ-algebra na Y.

7. Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X. Za neprazan skup $A \in \mathcal{A}$ kažemo da je atom ako nijedan njegov pravi podskup ne pripada σ-algebri $\mathcal{A}$. a) Neka $\mathcal{A}$ ima n atoma. Dokažite da $\mathcal{A}$ ima najmanje 2^n elemenata. (b) Što su atomi u $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$?

8. Neka je $X = [0, 1]$. Pronađite σ-algebru generiranu skupovima i odredite atome: (a) $\{(0, 1/2)\}$. (b) $\{[0, 1/4), (3/4, 1]\}$. (c) $\{[0, 3/4], [1/4, 1]\}$.

   (Rješenje: (a) $\{\emptyset, (0, 1/2), \{0\}, [1/2, 1], [0, 1]\}$, tri atoma: $\{0\}, (0, 1/2)$ i $(0, 1/2)^c$. (b) $\{\emptyset, [0, 1/4), [1/4, 3/4], (3/4, 1], [0, 3/4], [1/4, 1], [0, 1/4) \cup (3/4, 1], [0, 1]\}$, tri atoma: $[0, 1/4)$, $[1/4, 3/4]$, $(3/4, 1]$.)

9. Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Je li topologija $\mathcal{U}$ ujedno i σ-algebra ?

10. (a) Pokazati da je presjek proizvoljne familije monotonih klasa nad istim skupom X također monotona klasa. Za najmanju monotonu klasu koja sadrži familiju $\mathcal{E}$ podskupova od X, tj. za presjek svih monotonih klasa koje sadrže familiju $\mathcal{E}$ kažemo da je generirana sa $\mathcal{E}$ i označavamo je sa $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$. (b) Neka je $\mathcal{A}$ algebra na X. Pokažite da je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ algebra.

    (Uputa: (b) Definirajte $\mathfrak{M}_1 := \{B \subseteq X : B^c, B \cup A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ za svaki $A \in \mathcal{A}\}$, a zatim pokažite da je $\mathfrak{M}_1$ monotona klasa koja sadrži $\mathcal{A}$, što će implicirati $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}_1$. Zatim postupajući na sličan način pokažite da je $\mathfrak{M}_2 := \{B \subseteq X : B^c, B \cup A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ za svaki $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$ monotona klasa koja sadrži $\mathcal{A}$. Zato je $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}_2$, odakle slijedi $\emptyset \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ i da je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ zatvorena na komplemente i konačne unije.)

11. Pokažite da je Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ generirana s familijom $\mathcal{K}^d$ svih kompaktnih skupova iz $\mathbb{R}^d$.

    (Uputa: Neka je $\mathcal{C}^d$ familija svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$. Prema teoremu 1.12. je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma(\mathcal{C}^d)$. Kako je $\mathcal{K}^d \subseteq \mathcal{C}^d$, imamo $\sigma(\mathcal{K}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{C}^d)$. S druge strane, ako je $C \in \mathcal{C}^d$, onda je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup

    $$C_n := C \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\, \boldsymbol{x}\| \leq n\}$$

    omeđen i zatvoren pa prema tome i kompaktan, tj. $C_n \in \mathcal{K}^d$. Po konstrukciji je $C = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathcal{K}^d)$, odakle slijedi da je $\mathcal{C}^d \subseteq \sigma(\mathcal{K}^d)$. Zato je $\sigma(\mathcal{C}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{K}^d)$.)

12. Skup $\mathbb{Q}$ primjer je Borelova skupa koji nije otvoren, a nije ni zatvoren. Navedite još nekoliko primjera takvih Borelovih skupova.

13. Neka je $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ Borelov skup i $t > 0$ realan broj. Dokažite da je $tA = \{ta : a \in A\}$ Borelov skup.

    (Uputa: Tvrdnja očito vrijedi ako je $A \in \mathcal{I}$, gdje je $\mathcal{I}$ familija svih d-intervala. Neka je $\mathcal{B}_t := \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} : tB \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$. Pokažite da je $\mathcal{B}_t$ σ-algebra, te uočite da je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, odakle slijedi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}_t) = \mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. To znači da je $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.)

14. Neka je S skup svih brojeva iz segmenta $[0, 1]$ koji u svom decimalnom prikazu sadrže znamenku 7. Dokazati da je S Borelov skup.

    (Uputa: Skup S_n svih brojeva koji na n-tom decimalnom mjestu imaju znamenku 7 glasi

    $$S_n = \bigcup_{k=0}^{10^{n-1}-1} \Big[\frac{k}{10^{n-1}} + \frac{7}{10^n}, \frac{k}{10^{n-1}} + \frac{8}{10^n}\Big).$$

    Svaki skup iz te unije je Borelov, pa su zato S_n i $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ Borelovi skupovi.)

1.2. Mjera na σ-algebri

Prošireni skup realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ (koristi se i oznaka $[-\infty, \infty]$) po definiciji je $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Uređaj $\leq$ se proširuje sa $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ tako da se definira

$$-\infty < x < \infty, \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Zbrajanje i množenje se proširuje sa $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ tako da se definira:

$$\begin{aligned}
& x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, && x \in \mathbb{R} \\
& x + (\infty) = (\infty) + x = \infty, && x \in \mathbb{R} \\
& x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, && x > 0 \\
& x \cdot (\infty) = (\infty) \cdot x = \infty, && x > 0 \\
& x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty, && x < 0 \\
& x \cdot (\infty) = (\infty) \cdot x = -\infty, && x < 0 \\
& \infty + \infty = \infty \\
& (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
& \infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty \\
& \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.
\end{aligned}$$

Zbrojevi $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$ se ne definiraju. U mnogim matematičkim disciplinama ne definiraju se ni produkti $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$ i $0 \cdot (-\infty)$. Međutim, u teoriji mjere pokazalo se korisnim te produkte definirati kao:

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

Od sada pa nadalje treba razlikovati simbol za red $\sum_n a_n$ od simbola za njegovu sumu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicija 1.16. *Neka je X skup, a $\mathcal{A}$ σ-algebra na X.* Mjera na $\mathcal{A}$ *je svako preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

(μ1) *(*nenegativnost*) $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$,*

(μ2) $\mu(\emptyset) = 0$,

(μ3) *(σ-*aditivnost *ili* prebrojiva aditivnost*) Za svaki niz $(A_i, i \in \mathbb{N})$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{1.4}$$

Za $\mu(A)$ kaže se da je mjera skupa *A. Trojka $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zove se* prostor mjere*.*
Kažemo da je mjera μ konačna *ako je $\mu(X) < \infty$.*
*Mjera μ je σ-*konačna *ako postoji niz $(A_i, i \in \mathbb{N})$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ kao i $\mu(A_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$.*

Često se kaže da je μ *mjera na* X ili *mjera na* $(X, \mathcal{A})$.

Primjer 1.17. *Navedimo nekoliko primjera mjere:*

1. *Ako za svaki* $A \in \mathcal{A}$ *stavimo* $\mu(A) = 0$*, dobivamo tzv.* trivijalnu mjeru.

2. *Neka je na skupu* X *zadana* σ*-algebra* $\mathcal{A}$*. Definirajmo funkciju* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *na sljedeći način: Ako je* $A \in \mathcal{A}$ *konačan skup s* n *elemenata, stavimo* $\mu(A) = n$*. U suprotnom, tj. ako je* A *beskonačan skup, stavimo* $\mu(A) = \infty$*. Lako je provjeriti da je* μ *mjera. Ova mjera zove se* mjera prebrojavanja.

3. *Neka je* $\mathcal{A}$ *bilo koja* σ*-algebra na skupu* X*.*

   (a) *Funkcija* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *definirana formulom*

   $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$

   je mjera.

   (b) *Neka je* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *zadana ovako:*

   $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ 1, & \text{ako je } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

   Funkcija μ *nije mjera: Ako su* A_1, A_2 *disjunktni neprazni skupovi iz* $\mathcal{A}$*, onda je* $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$*,* $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$*, pa* μ *nije* σ*-aditivna funkcija.*

   (c) *Neka je* x *bilo koja točka iz skupa* X*. Funkcija* $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *definirana formulom*

   $$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako } x \notin A \end{cases}$$

   je mjera. Mjera δ_x *zove se* jedinična Diracova mjera skoncentrirana u točki x *ili kraće* Diracova delta mjera.

4. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor mjere. Funkcija* $\lambda\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$*,* $\lambda \geq 0$*, je mjera.*

5. *Neka je* X *skup,* $\mathcal{A}$ *bilo koja* σ*-algebra na skupu* X *i* $\lambda : X \to [0, \infty]$ *funkcija. Funkcija* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *zadana formulom*

   $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \sum\limits_{x \in A} \lambda(x), & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$

   je mjera.

   Posebno, za $\lambda = 1$ *dobiva se mjera prebrojavanja, a za* $\lambda := \chi_{\{x\}}$ *dobivamo Diracovu delta mjeru.*

Propozicija 1.18. (Osnovna svojstva mjere) *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor mjere. Mjera* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *ima ova svojstva:*

(i) (monotonost) $(\forall A, B \in \mathcal{A})\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$.
Ako je $\mu(A) < \infty$, *onda je* $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) (σ-subaditivnost) *Za svaki niz* $(A_i, i \in \mathbb{N})$ *skupova iz* $\mathcal{A}$ *vrijedi*

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iii) (neprekidnost na uzlazne nizove) *Za svaki uzlazan niz* $(A_i, i \in \mathbb{N})$ *skupova iz* $\mathcal{A}$ *vrijedi*

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iv) (neprekidnost na silazne nizove) *Neka je* $(A_i, i \in \mathbb{N})$ *silazan niz skupova iz* $\mathcal{A}$. *Ako je* $\mu(A_1) < \infty$, *onda je*

$$\mu\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. (i) Iz $A, B \in \mathcal{A}$ slijedi $B \backslash A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$. Kako je $B = A \cup (B \backslash A)$, $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, zbog σ-aditivnosti i nenegativnosti mjere je

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \ge \mu(A).$$

Ako pretpostavimo da je $\mu(A) < \infty$, onda dobivamo još i $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) Definirajmo pomoćne skupove $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \backslash \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \in \mathcal{A}$, $i \ge 2$. Očito je $B_i \subseteq A_i$, odakle zbog monotonosti mjere dobivamo $\mu(B_i) \le \mu(A_i)$. Skupovi B_i međusobno su disjunktni i $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Iz σ-aditivnosti mjere μ slijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iii) Neka su međusobno disjunktni skupovi B_i definirani na isti način kao u dokazu tvrdnje (ii). Tada, osim što je $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, zbog pretpostavke $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ je $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n$, pa iz σ-aditivnosti mjere μ slijedi $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \mu(A_n)$ i

$$\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iv) Skupovi $A_1 \backslash A_i = A_1 \cap A_i^c \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, tvore uzlazan niz. Pri tome je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \backslash A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \cap A_i^c) = A_1 \bigcap \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\Big) = A_1 \bigcap \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big)^c = A_1 \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Primjenom tvrdnje (iii) dobivamo

$$\mu\Big(A_1 \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n).$$

Zbog $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_n \subseteq A_1$ i $\mu(A_1) < \infty$ prema tvrdnji (i) je $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_1) < \infty$ i posljednja jednakost može se raspisati kao

$$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

odakle slijedi (iv). □

Primjer 1.19. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Ako je $\mu(X) = 1$, kaže se da je μ* vjerojatnosna mjera *ili* vjerojatnost*, a $\mathcal{A}$ se zove σ*-algebra događaja*.*

Neka je X konačan skup, a $\mathcal{A} = 2^X$. Provjerite da je formulom $\mu(A) = \frac{\text{kard}\,(A)}{\text{kard}\,(X)}$ definirana vjerojatnosna mjera $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$.

Spomenimo da se mjera na $(X, \mathcal{B}_X)$, gdje je $\mathcal{B}_X$ Borelova σ-algebra, obično zove Borelova mjera na skup X.

Zadaci.

1. Neka je X bilo koji neprebrojiv skup. Pokažite da je funkcija

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ prebrojiv} \\ \infty, & \text{ako je } A \text{ neprebrojiv} \end{cases} \qquad A \subseteq X$$

   mjera na $(X, 2^X)$.

2. Dokažite da je formulom $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n}\delta_n$, gdje je δ_n Diracova delta funkcija, zadana vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

3. Neka su $p, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \leq p \leq 1$ i $p + q = 1$. Dokazati da je funkcija $\beta_n : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$\beta_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(B), \qquad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

   vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

(Uputa: Diracova delta mjera je vjerojatnosna, tj. $\delta_k(\mathbb{R}) = 1$. Vrijedi:

$$\beta_n(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \beta_n\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_k(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_n(A_j) \end{aligned}$$

$$\beta_n(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot 1 = 1.)$$

4. Neka je μ mjera na $(X, \mathcal{A})$. (a) Dokažite da za sve $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$. (b) Neka je μ konačna mjera. Dokažite da za sve $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ vrijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

(Uputa: (a) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$, $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$, $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, a skupovi $A \cap B$, $A \backslash B$ i $B \backslash A$ su disjunktni. Zato je

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \big[\mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B)\big] + \big[\mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)\big] \\ &= \mu(A \cap B) + \big[\mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)\big] \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B). \end{aligned}$$

(b) Dokaz je lako provesti matematičkom indukcijom po n služeći se rezultatom pod (a).)

5. Neka je μ mjera na $(X, \mathcal{A})$. Dokažite da za svaka dva izmjeriva skupa A i B vrijedi

$$|\mu(A) - \mu(B)| \le \mu(A \Delta B),$$

gdje je $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ simetrična razlika skupova A i B.

(Uputa: Iz $A \subseteq (A \Delta B) \cup B$ slijedi $\mu(A) \le \mu(A \Delta B) + \mu(B)$, a iz $B \subseteq (A \Delta B) \cup A$ slijedi $\mu(B) \le \mu(A \Delta B) + \mu(A)$.)

6. Neka su $\mu_1, \mu_2, \ldots$ mjere na $(X, \mathcal{A})$, a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nenegativni realni brojevi. Dokažite da je formulom $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i \mu_n(A)$ definirana mjera na $\mathcal{A}$.

7. Neka je μ mjera na $(X, \mathcal{A})$ i $E \in \mathcal{A}$. (a) Pokažite da je formulom

$$\mu_{|E}(A) := \mu(A \cap E), \qquad A \in \mathcal{A}$$

definirana nova mjera na $(X, \mathcal{A})$ koja se zove restrikcija mjere μ na skup E. (b) Neka je $\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$. Pokažite da je $(E, \mathcal{A}_E, \mu_{|E})$ prostor mjere.

8. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to Y$ funkcija i $\Sigma = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Familija Σ je σ-algebra (vidi zadatak 5. na str. 8). Neka je $\mu' : \Sigma \to [0, \infty]$ definirana formulom
$$\mu'(B) = \mu(f^{-1}(B)), \qquad B \in \Sigma.$$
Dokazati da je μ' mjera na (Y, Σ). Za mjeru μ' kažemo da je slika mjere μ po funkciji f.

   (Uputa: Iskoristite zadatak 3. na str. 8.)

9. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite: Ako je (A_n) niz skupova iz $\mathcal{A}$ sa svojstvom $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, onda je $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

   Uputa: Neka je $E_1 = A_1$ i $B_1 = \emptyset$. Za svaki $n \geq 2$ definirajte skupove
$$E_n := A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m, \qquad B_n := A_n \cap \Big(\bigcup_{m=1}^{n-1} A_m\Big) = \bigcup_{m=1}^{n-1} (A_n \cap A_m).$$
Tada vrijedi: (i) $A_n = E_n \cup B_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. (ii) Skupovi E_n, $n \in \mathbb{N}$, međusobno su disjunktni. (iii) $\mu(B_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (jer je $\mu(A_n \cap A_m) = 0$, $n \neq m$) i zato je $\mu(A_n) = \mu(E_n)$, $n \geq 1$.

   Očito je $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Neka je $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. S n_0 označimo najmanji prirodan broj takav da je $x \in A_{n_0}$. Tada je $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dakle, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

   Konačno,
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

10. Mjera μ je polukonačna ako za svaki $A \in \mathcal{A}$ za koji je $\mu(A) = \infty$ postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq A$ i $0 < \mu(B) < \infty$. Svaka σ-konačna mjera je i polukonačna. Je li polukonačna mjera μ iz 1. zadatka ?

11. Neka je $(X, 2^X, \mu)$ prostor mjere. Za mjeru μ kažemo da je $0-1$ mjera na X ako je $\mu(2^x) = \{0, 1\}$, $\mu(\{x\}) = 0$ za svaki $x \in X$ i $\mu(X) = 1$. Pokažite da ne postoji $0-1$ mjera na $\mathbb{N}$.

   (Uputa: Kada bi postojala $0-1$ mjera μ na $\mathbb{N}$, onda bi bilo $1 = \mu(\mathbb{N}) = \mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} j\Big) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(\{j\}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} 0 = 0$.)

12. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Definirajte funkciju $\mu^\star : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ formulom
$$\mu^\star(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A} \ \&\ \mu(B) < \infty\}.$$

Dokažite: (a) $\mu^\star$ je mjera. (b) Ako je μ σ-konačna mjera, onda je $\mu^\star = \mu$. (c) Pronađite $\mu^\star$ za mjeru $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiranu formulom

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

(Uputa: (a) Neka je (A_n) niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu(B) < \infty$ i

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \mu(B) + \varepsilon.$$

Tada je (jer su skupovi $B \cap A_n$, $n \in \mathbb{N}$, međusobno disjunktni, $B \cap A_n \subseteq A_n$ i $\mu(B \cap A_n) < \infty$)

$$\begin{aligned} \mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &\le \mu(B) + \varepsilon = \mu\Big(B \cap \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\Big) + \varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)\Big) + \varepsilon \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap A_n) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle zbog proizvoljnosti broja ε slijedi $\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n)$. Dokaz obratne nejednakosti: Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ i za sve $j = 1, \dots, n$ postoji $B_j \in \mathcal{A}$ takav da je $B_j \subseteq A_j$, $\mu(B_j) < \infty$ i $\mu^\star(A_j) < \mu(B_j) + \varepsilon/2^j$. Zato je

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{A}, \quad \bigcup_{j=1}^{n} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \& \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) < \infty.$$

Sada dobivamo

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \ge \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \ge \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A_j) - \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi $\mu^\star\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \ge \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A_j)$. Graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo obratnu nejednakost.
(b) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Treba pokazati da je $\mu^\star(A) = \mu(A)$. Očito, ako je $A \in \mathcal{A}$ i $\mu(A) < \infty$ onda iz definicije od $\mu^\star$ slijedi $\mu^\star(A) = \mu(A)$. Preostaje razmotriti slučaj $\mu(A) = \infty$. Zbog σ-konačnosti mjere μ postoji niz (A_n) skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga je $\mu(A \cap A_n) < \infty$, što povlači $\mu^\star(A \cap A_n) = \mu(A \cap A_n)$. Sada, kako su μ i $\mu^\star$ mjere, dobivamo

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &= \mu^\star(A \cap X) = \mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) = \mu(A). \end{aligned}$$

(c) $\mu^\star(A) = 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.)

13. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite: (a) Ako je $A, B \in \mathcal{A}$ i $\mu(A\Delta B) = 0$, onda je $\mu(A) = \mu(B)$. (b) Definirajte relaciju $\sim$ stavljajući $A \sim B$ ako je $\mu(A\Delta B) = 0$. Pokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$. (c) Pretpostavimo da je $\mu(X) < \infty$ i definirajmo funkciju $\bar{d} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ formulom

$$\bar{d}(A, B) = \mu(A\Delta B), \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

Pokažite da je $\bar{d}$ pseudometrika na $\mathcal{A}$, tj. da ima svojstva: $\bar{d}(A, B) \geq 0$, $A = B \Rightarrow \bar{d}(A, B) = 0$, $\bar{d}(A, B) = \bar{d}(B, A)$ i $\bar{d}(A, B) \leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B)$. (d) Neka je $\mathcal{A}/\sim$ skup svih klasa ekvivalencije. Definirajte

$$d([A], [B]) := \bar{d}(A, B) = \mu(A\Delta B), \qquad [A], [B] \in \mathcal{A}/\sim .$$

Pokažite da je d metrika na $\mathcal{A}/\sim$.

(Uputa: (a) Pogledajte rješenje 2. zadatka sa str. 64.)

14. Pokazati da tvrdnja propozicije 1.18.(iv) općenito ne vrijedi ako je $\mu(A_1) = \infty$.

(Uputa: *Primjer 1.*: Neka je μ mjera prebrojavanja na skupu $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$. Definirajte skupove $A_n = 2^n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je (A_n) silazan niz skupova, $A := \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$, $0 = \mu(A) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty$.
Primjer 2.: Neka je $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, a μ neka bude mjera prebrojavanja. Skupovi oblika (n, ∞), $n \in \mathbb{N}$, tvore silazan niz. Očito je $\bigcap_{n=1}^\infty (n, \infty) = \emptyset$ i $\mu((n, \infty)) = \infty$ za svaki n. Zato vrijedi

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty (n, \infty)\Big) \neq \lim_{n\to\infty} \mu((n, \infty)) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty. \,)$$

15. Neka je (A_n) niz izmjerivih skupova iz prostora mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dokazati:

(a) $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=n}^\infty A_m\Big) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.

(b) Pretpostavimo da je $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) < \infty$. Tada je

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty A_m\Big) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

(c) Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$. Tada je

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty A_m\Big) = 0.$$

Ova je tvrdnja poznata kao Borel-Cantellijeva[3] lema.

[3]Francesco Paolo Cantelli (1875 - 1966), talijanski matematičar.

(Uputa: (a) Neka je $B_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Tada je (B_n) uzlazan niz skupova i $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Zato je $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$. (b) Neka je $C_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Niz (C_n) je silazan i $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Zato je $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \limsup_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)$. (c) Iz pretpostavke $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ slijedi $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) = 0$. $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) = 0$.)

1.3. Vanjska mjera

Definicija 1.20. *Neka je X skup, a 2^X njegov partitivni skup.* Vanjska mjera *na skupu X je svaka funkcija $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ s ovim svojstvima:*

($\mu^\star 1$) $\mu^\star(\emptyset) = 0$,

($\mu^\star 2$) *(*monotonost*)* $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$,

($\mu^\star 3$) *(*σ-subaditivnost*) Za svaki niz $(A_i, i \in \mathbb{N})$ skupova iz X vrijedi*

$$\mu^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i).$$

Zamijetite da će mjera biti ujedno i vanjska mjera onda i samo onda ako je ta mjera definirana na cijelom partitivnom skupu 2^X. Nadalje, vanjska mjera općenito nije i mjera. Evo primjera:

Primjer 1.21. *Neka je funkcija $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ zadana formulom*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ 1, & \text{ako je } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Lako je provjeriti da je $\mu^\star$ vanjska mjera. Međutim, $\mu^\star$ nije σ-aditivna funkcija (Uputa: Vidi primjer 1.17.b) pa nije ni mjera.

Primjer 1.22. *Neka je X skup a $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ ovako definirana funkcija:*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je skup } A \text{ prebrojiv} \\ 1, & \text{ako skup } A \text{ nije prebrojiv.} \end{cases}$$

Tada je $\mu^\star$ vanjska mjera.

U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$, kojoj ćemo posvetiti posebnu pažnju. Prvo uvedimo neke pojmove.

Neka je X skup, $\mathcal{A}$ σ-algebra na X i $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mjera. Ako je skup $B \subseteq X$ izmjeriv, tj. $B \in \mathcal{A}$, onda je

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Drugim riječima, izmjeriv skup B razbija svaki drugi izmjeriv skup A na dva disjunktna izmjeriva skupa $A \cap B$ i $A \cap B^c$ čije se mjere zbrajaju na željeni način.

Vanjska mjera $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ nema to svojstvo. Preciznije, ako je $B \subseteq X$, tj. $B \in 2^X$, zbog σ-subaditivnosti vanjske mjere je

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X \tag{1.5}$$

s time što se može pojaviti stroga nejednakost kao što je to slučaj za vanjske mjere definirane u primjerima 1.21. i 1.22. Zato uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.23. *Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X. Za skup $B \subseteq X$ kažemo da je* $\mu^\star$-izmjeriv *ako je*

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X.$$

Iz definicije slijedi da su $\emptyset$ i X $\mu^\star$-izmjerivi. Nadalje, ako je skup B $\mu^\star$-izmjeriv, onda je i B^c $\mu^\star$-izmjeriv skup.

Zbog nejednakosti (1.5), da bi se dokazalo da je skup $B \subseteq X$ $\mu^\star$-izmjeriv, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X. \tag{1.6}$$

Ako je $\mu^\star(A) = \infty$, onda je očito ispunjena nejednakost (1.6). Dakle, skup B će biti $\mu^\star$-izmjeriv ako nejednakost (1.6) vrijedi za svaki $A \subseteq X$ takav da je $\mu^\star(A) < \infty$.

Propozicija 1.24. *Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X. Ako je $\mu^\star(B) = 0$ ili $\mu^\star(B^c) = 0$, onda je B $\mu^\star$-izmjeriv skup.*

Dokaz. Dovoljno je provjeriti da za svaki $A \subseteq X$ vrijedi

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c).$$

Tvrdnja slijedi iz monotonosti vanjske mjere: $\mu^\star(B) = 0$ povlači $\mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c) \leq \mu^\star(B) + \mu^\star(A) = \mu^\star(A)$. Slično, ako je $\mu^\star(B^c) = 0$, dobivamo $\mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c) \leq \mu^\star(A) + \mu^\star(B^c) = \mu^\star(A)$. $\square$

Sljedeći Carathéodoryjev[4] teorem ključan je za konstrukciju mnogih mjera.

Teorem 1.25. (Carathéodory) *Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X. Sa $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ označimo familiju svih $\mu^\star$-izmjerivih podskupova od X. Tada vrijedi:*

(a) *$\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je σ-algebra na skupu X,*

(b) *Restrikcija funkcije $\mu^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je mjera.*

[4] Constantin Carathéodory (1873-1950), njemački matematičar grčkog porijekla.

Dokaz. Već smo zaključili da $\emptyset$ i X pripadaju skupu $\mathcal{M}_{\mu^\star}$, te da je komplement $\mu^\star$-izmjerivog skupa također $\mu^\star$-izmjeriv.

(a) Preostaje pokazati zatvorenost familije $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ na formiranje prebrojive unije. Dokaz provodimo u tri koraka: (i) pokazat ćemo da je presjek dva $\mu^\star$-izmjeriva skupa također $\mu^\star$-izmjeriv skup, (ii) pokazat ćemo da je prebrojiva unija međusobno disjunktnih $\mu^\star$-izmjerivih skupova također $\mu^\star$-izmjeriv skup, (iii) pokazat ćemo kako se prebrojivu uniju $\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ od $\mu^\star$-izmjerivih skupova B_i (ne nužno disjunktnih) može zapisati u obliku prebrojive unije nekih novih međusobno disjunktnih $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Time će dokaz teorema biti završen.

(i) Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Zbog zatvorenosti familije $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ na komplementiranje, dovoljno je pokazati da je $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Neka je $A \subseteq X$ bilo koji podskup. Zbog $\mu^\star$-izmjerivosti skupa B_1 je

$$\begin{aligned}\mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\ &= \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_1^c \cap B_2).\end{aligned}$$

Sada redom pomoću te jednakosti, identiteta $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$, pretpostavke $B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ i na kraju pretpostavke $B_1 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) &= \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_1^c \cap B_2) \\ &\quad + \mu^\star(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\ &= \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_1^c) \\ &= \mu^\star(A).\end{aligned}$$

(ii) Neka je $(B_i, i \in \mathbb{N})$ niz međusobno disjunktnih $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Prvo ćemo matematičkom indukcijom po n pokazati da za svaki $A \subseteq X$ vrijedi

$$\mu^\star(A) = \sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^n B_i^c\big)\Big). \tag{1.7}$$

Tvrdnja je točna za $n = 1$ jer je skup B_1 $\mu^\star$-izmjeriv. Korak indukcije: Koristeći $\mu^\star$-izmjerivost skupa B_{n+1} i međusobnu disjunktnost skupova B_i posljednji sumand iz gornje jednakosti možemo raspisati kao

$$\begin{aligned}\mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^n B_i^c\big)\Big) &= \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^n B_i^c\big) \cap B_{n+1}\Big) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^n B_i^c\big) \cap B_{n+1}^c\Big) \\ &= \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n B_i\big)^c \cap B_{n+1}\Big) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i^c\big)\Big) \\ &= \mu^\star\Big(A \cap B_{n+1}\Big) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i^c\big)\Big).\end{aligned}$$

Time je dokazana jednakost (1.7).

Zbog $A \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n} B_i^c\big) \supseteq A \cap \big(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c\big) = A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big)^c$ i monotonosti vanjske mjere $\mu^\star$ iz (1.7) dobivamo

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c\Big),$$

odakle prvo prijelazom na limes $n \to \infty$ slijedi

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c\Big). \tag{1.8}$$

Sada koristeći svojstvo σ-subaditivnosti vanjske mjere $\mu^\star$ nalazimo

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c\Big)\\ &\geq \mu^\star\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\Big) + \mu^\star\Big(A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)^c\Big)\\ &\geq \mu^\star(A).\end{aligned}$$

Time je dokazana $\mu^\star$-izmjerivost skupa $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

(iii) Neka je $(B_i, i \in \mathbb{N})$ bilo koji niz $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Definirajmo nove skupove $C_1 := B_1$, $C_i := B_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} B_k$, $i \geq 2$. Skupovi C_i međusobno su disjunktni i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Kako je

$$C_i = B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k = B_i \cap \big(\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k\big)^c = B_i \cap \big(\bigcap_{k=1}^{i-1} B_k^c\big),$$

te kako se prema (i) presjecanjem konačno mnogo $\mu^\star$-izmjerivih skupova opet dobiva $\mu^\star$-izmjeriv skup, skupovi C_i su $\mu^\star$-izmjerivi. Prema (ii) skup $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ je $\mu^\star$-izmjeriv.

(b) Treba provjeriti σ-aditivnost restrikcija funkcije $\mu^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu^\star}$. U tu svrhu neka je $(B_i, i \in \mathbb{N})$ niz međusobno disjunktnih iz $\mathcal{M}_{\mu^\star}$. Ako u (1.8) zamijenimo A sa $\cup_{i=1}^{\infty} B_i$, dobivamo

$$\mu^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(B_i) + 0.$$

Suprotna nejednakost slijedi iz σ-subaditivnosti vanjske mjere $\mu^\star$. $\square$

Konstrukcija vanjske mjere. Sada ćemo pokazati kako se pomoću Carathéodoryjeva teorema (teorem 1.25.) mogu konstruirati razni prostori mjere. Krenimo redom. Prvo ćemo definirati neke pojmove i dokazati jednu propoziciju.

Definicija 1.26. *Neka je X neprazan skup. Familiju $\mathcal{C}$ podskupova od X zovemo* σ-pokrivač od X *ako ona ima sljedeća dva svojstva:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$,

(ii) Postoji niz (C_i) članova iz $\mathcal{C}$ takav da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

Propozicija 1.27. *Neka je $\mathcal{C}$ neki σ-pokrivač nepraznog skupa X, a $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ bilo koja skupovna funkcija sa svojstvom $\tau(\emptyset) = 0$.*

Funkcija $\mu_\tau^\star : 2^X \to [0, \infty]$ definirana formulom

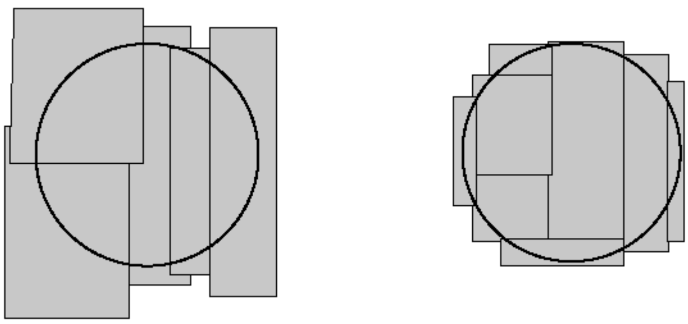
$$\mu_\tau^\star(A) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C} \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \Big\}$$

je vanjska mjera.

Uočimo da je neprazan skup čiji se infimum traži u gornjoj definicijskoj formuli. To slijedi iz definicije σ-pokrivača.

Skupovnu funkciju τ iz propozicije 1.27. zovemo proto-mjera.

Ideja vanjske mjere definirane pomoću proto-mjere ilustrirana je na slici 3.



Slika 3. Na ovoj slici σ-pokrivač $\mathcal{C}$ je skup svih pravokutnika iz $\mathbb{R}^2$, a τ proto-mjera koja pravokutniku pridružuje njegovu površinu. Na lijevoj strani slike krug je prekriven s pet, a na desnoj s osam pravokutnika. Prekrivanje s desne strane daje bolju aproksimaciju površine kruga.

U dokazu propozicije 1.27. koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema 1.28. (vidi npr. [6]) *Neka je $(x_{i,k}, (i,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N})$ bilo koji niz nenegativnih realnih brojeva, a $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bilo koja bijekcija. Red $\sum_n x_{s(n)}$ konvergira onda i samo onda ako konvergiraju svi redovi $\sum_k x_{i,k}$, $i \in \mathbb{N}$, te ako je i red $\sum_i \big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{i,k} \big)$ konvergentan. Pri tome je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{s(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{i,k} \big).$$

Dokaz propozicije 1.27. Za prazan skup imamo $\emptyset \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset$, odakle iz definicije funkcije $\mu_\tau^\star$ dobivamo $\mu_\tau^\star(\emptyset) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = 0$. Kako je očito $\mu_\tau^\star \geq 0$, dobivamo $\mu_\tau^\star(\emptyset) = 0$.

Nadalje, $\mu_\tau^\star$ je monotona funkcija, tj.

$$(\forall A, B \subseteq X) \quad A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^\star(A) \leq \mu_\tau^\star(B).$$

To je stoga jer je svaki pokrivač skupa B ujedno i pokrivač skupa A.

Preostaje pokazati da je $\mu_\tau^\star$ σ-subaditivna funkcija. Neka je (A_i) niz podskupova od X. Treba pokazati da je

$$\mu_\tau^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i).$$

Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) = \infty$, onda sigurno vrijedi tražena nejednakost. Zato nadalje pretpostavimo da je $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) < \infty$. Tada je ujedno i $\mu_\tau^\star(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema definiciji broja $\mu_\tau^\star(A_i)$, postoji niz skupova $(C_{i,k}, k \in \mathbb{N})$ iz $\mathcal{C}$ takav da je $A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,k}$, da red $\sum_k \tau(C_{i,k})$ konvergira i da za njegovu sumu vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k}) < \mu_\tau^\star(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{1.9}$$

Očito je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,k}.$$

Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$, pa skupova $C_{i,k}$, $(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ima prebrojivo mnogo. Neka je $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bilo koja bijekcija. Pomoću te bijekcije niz skupova $((C_{i,k}), (i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ može se preindeksirati u novi niz $\big((C_{s(n)}), n \in \mathbb{N}\big)$. Pri tome je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{s(n)}.$$

Nadalje, prema lemi 1.28. red $\sum_n \tau(C_{s(n)})$ konvergira onda i samo onda ako konvergiraju svi redovi $\sum_k \tau(C_{i,k})$, $i \in \mathbb{N}$, kao i odgovarajući red suma $\sum_i \big(\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k})\big)$. Pri tome je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_{s(n)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k})\Big). \tag{1.10}$$

Kako redovi $\sum_k \tau(C_{i,k})$, $i \in \mathbb{N}$, konvergiraju, preostaje zaključiti da konvergira i red $\sum_i \sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k})$. To slijedi iz (1.9) primjenom poredbenog kriterija.

Iz (1.9) i (1.10) dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_{s(n)}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\mu_\tau^\star(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) + \varepsilon,$$

odakle iz definicije funkcije $\mu_\tau^\star$ slijedi

$$\mu_\tau^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ je $\mu_\tau^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i)$. Time smo dokazali da je $\mu_\tau^\star$ vanjska mjera. □

Prema Carathéodoryjevom teoremu (teorem 1.25.) $\mathcal{M}_{\mu_\tau^\star}$ je σ-algebra, a restrikcija vanjske mjere $\mu_\tau^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu_\tau^\star}$ je mjera. Na taj način možemo konstruirati mnoge mjere.

Zadaci.

1. Neka je X bilo koji neprebrojiv skup, te $\mu^\star, \nu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjske mjere definirane formulama:

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ prebrojiv} \\ 1, & A \text{ neprebrojiv}, \end{cases} \qquad \nu^\star(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ prebrojiv} \\ \infty, & A \text{ neprebrojiv}. \end{cases}$$

   Dokažite: (a) Skup $A \subseteq X$ je $\mu^\star$-izmjeriv onda i samo onda ako je A ili A^c prebrojiv. (b) Svaki skup $A \subseteq X$ je $\nu^\star$-izmjeriv.

   (Uputa: Općenito, ako je skup vanjske mjere 0, onda su on i njegov komplement izmjerivi (propozicija 1.24.). (a) Neka je jedan od skupova A i A^c prebrojiv. Tada je $\mu^\star(A) = 0$ ili $\mu^\star(A^c) = 0$, pa je A $\mu^\star$-izmjeriv. Ako ni jedan od skupova A i A^c nije prebrojiv, onda je $\mu^\star(A) = \mu^\star(A^c) = 1$. Sada za $B = X$ dobivamo $1 = \mu^\star(B) < 2 = \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)$. To po definiciji znači da A nije $\mu^\star$-izmjeriv. (b) Neka je B bilo koji podskup od X. Ako je B prebrojiv, onda su prebrojivi i skupovi $B \cap A$ i $B \cap A^c$. Zato je $\nu^\star(B) = \nu^\star(B \cap A) = \nu^\star(B \cap A^c) = 0$, odakle dobivamo

$$(\star) \qquad \nu^\star(B) = \nu^\star(B \cap A) + \nu^\star(B \cap A^c).$$

   Ako je B neprebrojiv, onda barem jedan od skupova $B \cap A$ ili $B \cap A^c$ mora biti neprebrojiv, pa stoga opet imamo jednakost $(\star)$.)

2. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, a $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera definirana formulom

$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \quad \& \quad B \in \mathcal{A}\}.$$

   (a) Dokažite da se infimum postiže. (b) Skup $A \in \mathcal{A}$ je $\mu^\star$-izmjeriv i $\mu^\star(A) = \mu(A)$. Dokažite!

(Uputa: (a) Prema definiciji infimuma postoji niz (B_n) izmjerivih skupova takav da je $A \subseteq B_n$ i $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu^\star(A)$. Neka je $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. Pokažimo da je $\mu(B) = \mu^\star(A)$: Iz $A \subseteq B$ slijedi $\mu^\star(A) \leq \mu(B)$. Nadalje, iz $B \subseteq B_n$ slijedi $\mu(B) \leq \mu(B_n)$, odakle prijelazom na limes dobivamo $\mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu^\star(A)$. Dakle, $\mu(B) = \mu^\star(A)$. (b) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Po definiciji je $\mu^\star(A) \leq \mu(A)$. Nadalje, za svaki $B \in \mathcal{A}$ takav da je $A \subseteq B$ imamo $\mu(A) \leq \mu(B)$. Uzimanjem infimuma po svim takvim skupovima B dobivamo $\mu(A) \leq \mu^\star(A)$. Dakle, $\mu(A) = \mu^\star(A)$. Pokažimo da je A $\mu^\star$-izmjeriv. U tu svrhu dovoljno je pokazati da za svaki $B \subseteq X$, $\mu^\star(B) < \infty$, vrijedi $\mu^\star(B) \geq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)$. Neka je $B^\star \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq B^\star$ i $\mu^\star(B) = \mu(B^\star)$. Prema (a) takav skup $B^\star$ postoji. Sada imamo

$$\begin{aligned} \mu^\star(B) &= \mu(B^\star) = \mu(B^\star \cap A) + \mu(B^\star \cap A^c) \geq \mu^\star(B^\star \cap A) + \mu^\star(B^\star \cap A^c) \\ &\geq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c) \end{aligned}$$

Prva nejednakost je posljedica toga što je $\mu \geq \mu^\star$ za svaki izmjeriv skup, a druga vrijedi zbog monotonosti vanjske mjere.)

3. Na skupu $\mathbb{N}$ vanjska mjera $\mu^\star$ definirana je formulom:

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{ako } A \text{ ima } n \text{ elemenata} \\ 1, & A \text{ beskonačan.} \end{cases}$$

Pronađite sve $\mu^\star$-izmjerive skupove.

(Uputa: Po definiciji, skup $A \subseteq \mathbb{N}$ je $\mu^\star$-izmjeriv ako je $\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)$ za svaki $B \subseteq \mathbb{N}$. Za $B = \mathbb{N}$ treba biti $(\star)$ $1 = \mu^\star(A) + \mu^\star(A^c)$. Jedan od skupova A ili A^c je beskonačan, tj. $\mu^\star(A) = 1$ ili $\mu^\star(A^c) = 1$. Sada je pomoću $(\star)$ lako ustanoviti da su jedino $\mathbb{N}$ i $\emptyset$ $\mu^\star$-izmjerivi skupovi.)

4. Neka je $\mu^\star$ aditivna vanjska mjera na X, tj. $\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B)$ za svaka dva disjunktna skupa $A, B \subseteq X$. Dokažite da je $\mu^\star$ mjera.

(Uputa: Neka su $A, B \subseteq X$. Skupovi $A \cap B$ i $A \cap B^c$ su disjunktni i zato po pretpostavci imamo $\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c)$. To znači da je $\mu^\star$-izmjeriv svaki skup $B \subseteq X$. Prema Carathéodoryjevu teoremu $\mu^\star$ je mjera.)

5. Neka je $\mu^\star$ vanjska mjera na X. Dokažite da za svaka dva podskupa A i B od X vrijedi

$$|\mu^\star(A) - \mu^\star(B)| \leq \mu^\star(A \Delta B).$$

(Uputa: Postupite kao kod zadatka 5. sa str. 14.)

6. Neka je $\mu^\star$ vanjska mjera na X i $A \subseteq X$ $\mu^\star$-neizmjeriv podskup od X takav da je $\mu^\star(A) < \infty$. Pokažite da postoji skup $S \subseteq A$ takav da je $\mu^\star(S) > 0$ i da S nema $\mu^\star$-izmjerivih podskupova pozitivne mjere.

(Uputa: Neka je $\alpha := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B\ \mu^\star\text{-izmjeriv}\}$. Po definiciji supremuma, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mu^\star$-izmjeriv podskup B_n od A takav da je

($\star$) $\mu(B_n) > \alpha - 1/n$. Za svaki takav B_n je $\mu(B_n) = \mu^\star(B_n) \le \mu^\star(A) < \infty$. Skup $B := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ je $\mu^\star$-izmjeriv, $B \subseteq A$ i ($\star\star$) $\mu(B) \le \alpha$. Zbog $B_n \subseteq B$ je $\mu(B_n) \le \mu(B)$, pa pomoću ($\star$) i ($\star\star$) dobivamo $\mu(B) = \alpha$. Neka je $S = A \backslash B$. Kako $A = B \cup (A \backslash B)$ nije $\mu^\star$-izmjeriv, a B je $\mu^\star$-izmjeriv, skup $S = A \backslash B$ nije $\mu^\star$-izmjeriv. Zato je $\mu^\star(S) > 0$ (propozicija 1.24.). Nadalje, pretpostavimo da je T $\mu^\star$-izmjeriv podskup od S. Tada je $B \cup T$ $\mu^\star$-izmjeriv podskup od A. Zbog $B \cap T = \emptyset$ je $\alpha \ge \mu(B \cup T) = \mu(B) + \mu(T) = \alpha + \mu(T)$, odakle slijedi $\mu(T) = 0$.)

7. Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X, a $E, F \subseteq X$. Dokazati: (a) Ako je $\mu^\star(E) = 0$, onda je $\mu^\star(E \cup F) = \mu^\star(F)$. (b) Ako je $E \subseteq F$, $\mu^\star(F \backslash E) = 0$ i ako je E $\mu^\star$-izmjeriv, onda je F također μ-izmjeriv skup i vrijedi $\mu^\star(F) = \mu^\star(E)$. (c) Ako je $\mu^\star(E \Delta F) = 0$, onda je $\mu^\star(E) = \mu^\star(F) = 0$.

   (Uputa: (a) $\mu^\star(E \cup F) \le \mu^\star(E) + \mu^\star(F)$, $F \subseteq E \cup F \Rightarrow \mu^\star(F) \le \mu^\star(E \cup F)$. (b) Skup $F \backslash E$ je $\mu^\star$-izmjeriv (propozicija 1.24.). Skup $F = E \cup (F \backslash E)$ je unija dva $\mu^\star$-izmjeriva skupa pa je i sam $\mu^\star$-izmjeriv. Nadalje, monotonost vanjske mjere daje $\mu^\star(E) \le \mu^\star(F) \le \mu^\star(E) + \mu^\star(F \backslash E) = \mu^\star(E)$. (c) $E \backslash F$, $F \backslash E \subseteq \Delta \Rightarrow \mu^\star(E \backslash F) = \mu^\star(F \backslash E) = 0$. Sada imamo $\mu^\star(E) = \mu^\star\big((E \cap F) \cup E \backslash F\big) \le \mu^\star(E \cap F) + \mu^\star(E \backslash F) = \mu^\star(E \cap F) \le \mu^\star(F)$. Slično se pokaže da je $\mu^\star(F) \le \mu^\star(E)$.)

8. Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X, $A \subseteq X$ i (E_n) niz $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Pokazati da je $\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (A \cap E_n)\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu^\star(A \cap E_n)$.

   (Uputa: Stavite $E := E_1$, $B := A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)$. Skup E_1 je $\mu^\star$-izmjeriv, pa koristeći B kao test-skup dobivamo $\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap E_1) + \mu^\star(B \cap E_1^c)$, tj.

   $$\mu^\star\Big(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)\Big) = \mu^\star(A \cap E_1) + \mu^\star\Big(A \cap (E_2 \cup \ldots \cup E_n)\Big).$$

   Ako ovaj način zaključivanja ponovimo $n-1$ puta tako da u i-tom koraku za $\mu^\star$-izmjeriv skup uzimamo E_i, a za test-skup $A \cap (E_i \cup \ldots \cup E_n)$, dobivamo $\mu^\star\Big(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap E_i)$. Sada zbog $A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n E_i\big) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\big)$ imamo

   $$\sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap E_i) = \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n E_i\big)\Big) \le \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\big)\Big),$$

   odakle slijedi $\sum_{i=1}^\infty \mu^\star(A \cap E_i) \le \mu^\star\big(\bigcup_{i=1}^\infty (A \cap E_i)\big)$.)

9. Neka se σ-pokrivač $\mathcal{C}$ neprebrojivog skupa X sastoji od $\emptyset$, cijelog skupa X i svih jednočlanih podskupova od X. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ na sljedeći način: $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(\{x\}) = 0$ i $\tau(X) = 1$. Nadalje, neka je $\mu_\tau^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera iz propozicije 1.27. Dokažite da je $\mu_\tau^\star = \mu^\star$, gdje je $\mu^\star$ vanjska mjera iz 1. zadatka.

(Uputa: Ako je skup $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ konačan, zapišimo ga kao prebrojivu uniju $A = \left(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}\emptyset\right)$. Tada je $0 \le \mu_\tau^\star(A) \le \sum_{i=1}^{n}\tau(\{a_i\}) + \sum_{i=n+1}^{\infty}\tau(\emptyset) = 0$, odakle slijedi $\mu_\tau^\star(A) = 0$. Ako je skup $A \subseteq X$ prebrojiv, možemo ga zapisati kao prebrojivu uniju $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}$ njegovih članova. Opet se dobiva $\mu_\tau^\star(A) = 0$. Sada pretpostavimo da je $A \subseteq X$ neprebrojiv. Ako je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i \in \mathcal{C}$, tj. ako je A pokriven s prebrojivo mnogo skupova iz $\mathcal{C}$, onda barem jedan C_i mora biti jednak skupu X. Bez smanjenja općenitosti, neka je $C_1 = X$. Tada je $1 = \tau(C_1) \le \sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i)$, odakle iz definicije vanjske mjere $\mu_\tau^\star$ (kao infimuma) slijedi $1 \le \mu_\tau^\star(A)$. Nadalje, kako je $A \subseteq X$, to je $\mu_\tau^\star(A) \le \tau(X) = 1$. Time smo pokazali da je $\mu_\tau^\star(A) = 1$ za svaki neprebrojiv skup $A \subseteq X$.)

1.4. Dynkinove klase i π-sistemi

Mnoge σ-algebre generirane su nekom familijom podskupova. Jedna te ista σ-algebra može se generirati pomoću različitih familija; uglavnom se koriste σ-pokrivači (vidi npr. teorem 1.10.). Isto tako, jedna te ista mjera na σ-algebri može se konstruirati pomoću različitih σ-pokrivača. Dynkinove klase snažan su alat pomoću kojega se često može utvrditi jednakost mjera.

Za motivaciju, pretpostavimo da su definirane dvije mjere $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ na σ-algebri $\mathcal{A}$ podskupova od X, takve da je $\mu(X) = \nu(X)$. Zanima nas kada će one biti jednake, tj. kada će biti $\mu(A) = \nu(A)$, $A \in \mathcal{A}$.

Sad ćemo potražiti nužne uvjete za jednakost mjera. U tu svrhu, radi jednostavnosti pretpostavimo da su μ, ν dvije konačne mjere (tj. da je $\mu(X), \nu(X) < \infty$) takve da je $\mu(X) = \nu(X)$. Neka je

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Koristeći se pretpostavkom konačnosti tih mjera, lako je pokazati da familija $\mathcal{E}$ ima sljedeća svojstva:

(d1) $X \in \mathcal{E}$,

(d2) $(A, B \in \mathcal{E} \quad \& \quad B \subseteq A) \Longrightarrow A \backslash B \in \mathcal{E}$,

(d3) Ako je (A_n) uzlazan niz skupova iz $\mathcal{E}$, onda je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$.

Za provjeru svojstva (d3) iskoristite propoziciju 1.18.(iii).

Definicija 1.29. *Neka je X skup. Familija $\mathcal{E}$ podskupova od X sa svojstvima* (d1)-d(3) *zove se d-*sistem *ili* Dynkinova[5] klasa na skupu X.

Navedimo odmah i sljedeću definiciju:

Definicija 1.30. *Neka je X skup. Familiju podskupova od X koja je zatvorena na konačne presjeke zovemo π-*sistem na skupu X.

[5] Eugene Borisovich Dynkin (1924.-), ruski matematičar.

Svaka algebra na X je π-sistem na X. Svaka σ-algebra na X je d-sistem i π-sistem na X. Obratno ne vrijedi, kao što nam ilustrira sljedeći primjer:

Primjer 1.31. *Neka je $X = \{1, 2, \ldots, 2k-1, 2k\}$. Lako je provjeriti da je*

$$\mathcal{E} = \{A \subseteq X : |A| \text{ je paran broj } \}$$

d-sistem na X, ali nije σ-algebra. Zaista, familija D nije zatvorena na prebrojive unije: Neka su $A, B \in \mathcal{E}$. Ako je $|A \cap B|$ nula ili paran broj, onda je $|A \cup B|$ paran broj pa je $A \cup B \in \mathcal{E}$. Ako je $|A \cap B|$ neparan broj, onda je $|A \cup B|$ neparan broj pa $A \cup B \notin \mathcal{E}$. Evo jednostavnog primjera: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \notin \mathcal{E}$.

Primjer 1.32. *Navedimo nekliko važnih primjera π-sistema:*

1. *Sljedeće familije su π-sistemi na $\mathbb{R}$:*
   $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$, $\mathcal{E}_2 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$,
   $\mathcal{E}_3 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$, $\mathcal{E}_4 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \le b\}$.

   Uočite da je i njihova unija $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$ također π-sistem na $\mathbb{R}$.

2. *Sljedeće familije su π-sistemi na $\mathbb{R}^d$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \big\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1, \ldots, d\big\} \\
\mathcal{E}_2 &= \big\{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_d, b_d] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1, \ldots, d\big\} \\
\mathcal{E}_3 &= \big\{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_d, b_d) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1, \ldots, d\big\} \\
\mathcal{E}_4 &= \big\{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1, \ldots, d\big\}.
\end{aligned}$$

   Njihova unija $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$ također je π-sistem na $\mathbb{R}^d$.

Lako je pokazati da je presjek proizvoljno mnogo d-sistema [π-sistema] na skupu X opet d-sistem [π-sistem] na X. Neka je $\mathcal{E}$ bilo koja familija podskupova od X. Presjek svih d-sistema [π-sistema] na X koji sadrže $\mathcal{E}$ je najmanji d-sistem [π-sistem] na X koji sadrži $\mathcal{E}$, označavamo ga s $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [odnosno s $\Pi(\mathcal{E})$] i zovemo d-sistem generiran s $\mathcal{E}$ [π-sistem generiran s $\mathcal{E}$].

Propozicija 1.33. *Neka je $\mathcal{E}$ bilo koji π-sistem na X. Tada je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ algebra na skupu X.*

Dokaz. Kao prvo, $X \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ po definiciji d-sistema. Nadalje, ako je $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, onda je $A^c = X \backslash A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ prema svojstvu (d2). Preostaje pokazati da je familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ zatvorena na konačne presjeke. U tu svrhu prvo definirajmo familiju

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \{A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : A \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ za svaki } E \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Kako je $\mathcal{E}$ π-sistem i $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, to je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Sada ćemo dokazati jednakost

$$\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Kako je $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, treba dokazati inkluziju $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Familija $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ je d-sistem na X:

(d1) Kako je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, to je $X \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$,

(d2) Neka su $A, B \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$, $B \subseteq A$. Tada je $A \cap E, B \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ za svaki $E \in \mathcal{E}$. Kako je $B \cap E \subseteq A \cap E$ te kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ d-sistem, to je $(A \cap E) \backslash (B \cap E) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Iz jednakosti $(A \backslash B) \cap E = (A \cap E) \backslash (B \cap E) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ i definicije familije $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ slijedi $A \backslash B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(d3) Pretpostavimo da je (A_n) uzlazan niz skupova iz $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Treba pokazati da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Neka je $E \in \mathcal{E}$. Tada je $(A_n \cap E)$ uzlazan niz skupova iz $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ je d-sistem pa je $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Tvrdnja slijedi iz jednakosti $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)$.

Familija $\mathcal{E}$ je zatvorena na konačne presjeke i sadržana je u familiji $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ najmanji d-sistem koji sadrži $\mathcal{E}$, to je $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Time smo dokazali jednakost $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$.

Sada ćemo definirati drugu familiju:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{D}} := \{B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ za svaki } A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}.$$

Uočimo da je familija $\mathcal{D}_{\mathcal{D}}$ zatvorena na konačne presjeke. Može se pokazati da je $\mathcal{D}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. To će značiti da je familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ zatvorena na konačne presjeke i time će biti kompletiran dokaz da je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ algebra na X.

Kako dokazati jednakost $\mathcal{D}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$? Dovoljno je oponašati prethodni dokaz za $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Prvo treba pokazati da je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{D}}$: Neka je $E \in \mathcal{E}$. Zbog $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$, $A \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ za svaki $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, što po definiciji skupa $\mathcal{D}_{\mathcal{D}}$ povlači $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{D}}$. Nastavljajući s oponašanjem dokaza za $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ dobiva se $\mathcal{D}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. □

Teorem 1.34. *Neka je $\mathcal{E}$ bilo koji π-sistem na X. Tada je $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$, tj. σ-algebra generirana π-sistemom $\mathcal{E}$ jednaka je d-sistemu generiranim s $\mathcal{E}$.*

Dokaz. Svaka σ-algebra je d-sistem, pa je zato $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Preostaje pokazati suprotnu inkluziju $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Prema propoziciji 1.33. $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ je algebra na X. Kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ istovremeno i d-sistem, familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ je zatvorena na formiranje prebrojivih unija uzlaznih skupova. Zato je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ujedno i σ-algebra (propozicija 1.13.). Kako je $\sigma(\mathcal{E})$ najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{E}$, dobivamo $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. □

Sljedeći korolar može biti od velike koristi kada se želi pokazati da se neke dvije mjere podudaraju na σ-algebri.

Korolar 1.35. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu X i neka su $\mu, \nu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ dvije mjere na σ-algebri $\sigma(\mathcal{A})$, takve da je*

$$\mu(A) = \nu(A), \qquad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{1.11}$$

Ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uvjeta:

(a) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, ili

(b) Postoji uzlazan niz (A_n) skupova iz $\mathcal{A}$ sa svojstvom

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \qquad \& \qquad \mu(A_n), \nu(A_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.12}$$

onda je $\mu = \nu$.

Dokaz. (a) Kako je algebra $\mathcal{A}$ ujedno i π-sistem na X, prema teoremu 1.34. je $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Neka je

$$\mathcal{E} := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu(E) = \nu(E)\}.$$

Iz pretpostavke $\mu_{|\mathcal{A}} = \nu_{|\mathcal{A}}$ slijedi $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Kao što znamo iz uvodnog razmatranja, familija $\mathcal{E}$ je d-sistem na X i zato je $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$. Dakle, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$, odakle slijedi $\mu_{|\sigma(\mathcal{A})} = \nu_{|\sigma(\mathcal{A})}$.

(b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo pomoćne mjere μ_n, ν_n na $(X, \sigma(\mathcal{A}))$:

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap A_n), \quad \nu_n(A) := \nu(A \cap A_n), \qquad A \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Zbog pretpostavki (1.11) i (1.12) je

$$\begin{aligned} &\mu_n(A) = \nu_n(A), \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}, \\ &\mu_n(X) = \mu(A_n) = \nu(A_n) = \nu_n(X) < \infty. \end{aligned}$$

Prema (a) je $\mu_n = \nu_n$, tj.

$$\mu_n(A) = \nu_n(A), \qquad \forall A \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Neka je $A \in \sigma(\mathcal{A})$. Kako je

$$A = A \cap X = A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n),$$

te kako je $(A \cap A_n)$ uzlazan niz skupova iz $\sigma(\mathcal{A})$, primjenom tvrdnje (iii) iz propozicije 1.18. dobivamo

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n) \Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap A_n) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n) \Big) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Dakle, $\mu(A) = \nu(A)$, za svaki $A \in \sigma(\mathcal{A})$. □

U konkretnom slučaju nije jednostavno provjeriti da se dvije mjere podudaraju na algebri. Srećom, u prethodnom korolaru algebra $\mathcal{A}$ može se zamijeniti s π-sistemom. O tome nam govori sljedeći korolar:

Korolar 1.36. *Neka je zadan π-sistem $\mathcal{C}$ na skupu X i neka su $\mu, \nu : \sigma(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ dvije mjere na σ-algebri $\sigma(\mathcal{C})$, takve da je*

$$\mu(C) = \nu(C), \qquad \forall\, C \in \mathcal{C}. \tag{1.13}$$

Ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uvjeta:

(a) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$*, ili*

(b) Postoji uzlazan niz (C_n) *skupova iz* $\mathcal{C}$ *sa svojstvom*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_i \qquad \& \qquad \mu(C_n), \nu(C_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

onda je $\mu = \nu$.

Dokaz. Dovoljno je oponašati dokaz korolara 1.35.

(a) Familija

$$\mathcal{E} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \mu(A) = \nu(A)\}$$

je d-sistem na X. Po pretpostavci je π-sistem $\mathcal{C}$ sadržan u d-sistemu $\mathcal{E}$, tj. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$. Zato je $\mathcal{D}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E}$. S druge strane, prema teoremu 1.34. je $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C})$. Dakle, $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E}$, odakle dobivamo tvrdnju.

(b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiraju se mjere $\mu_n, \nu_n : \sigma(\mathcal{C}) \to [0, \infty]$ formulama:

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap C_n), \quad \nu_n(A) := \nu(A \cap C_n), \qquad A \in \sigma(\mathcal{C}).$$

Zbog pretpostavki (1.13) i (1.14) je

$$\begin{aligned} &\mu_n(C) = \nu_n(C), \qquad \forall\, C \in \mathcal{C}, \\ &\mu_n(X) = \mu(C_n) = \nu(C_n) = \nu_n(X) < \infty. \end{aligned}$$

Sada prema (a) dobivamo $\mu_n = \nu_n$.

Neka je $A \in \sigma(\mathcal{C})$. Kako je

$$A = A \cap X = A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n)$$

te kako je $(A \cap C_n)$ uzlazan niz skupova iz $\sigma(\mathcal{C})$, primjenom tvrdnje (iii) iz propozicije 1.18. dobivamo

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap C_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap C_n) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n)\Big) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Dakle, $\mu(A) = \nu(A)$, za svaki $A \in \sigma(\mathcal{C})$. $\square$

Primjenu korolara 1.36. ilustrirat ćemo poslije. Pomoću njega ćemo dokazati da je npr. Lebesgueova mjera jedina mjera na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ koja svakom d-intervalu pridružuje njegov volumen (propozicija 1.51.). Često ćemo ga koristiti kako bi pokazali da se neke dvije mjere podudaraju na σ-algebri (vidi npr. teorem 1.76.). Nadalje, taj nam korolar može poslužiti da se pokaže kako se jedna te ista mjera na σ-algebri može konstruirati pomoću različitih σ-pokrivača.

1.5. Lebesgueova vanjska mjera

Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$. Ovu vanjsku mjeru najjednostavnije je definirati pomoću propozicije 1.27. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika (a,b), $a \leq b$. Kako je prazan skup $\emptyset = (a,a) \in \mathcal{C}$, te kako se može pisati $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(-i,i)$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ ovako:

$$\tau((a,b)) := b - a, \qquad a \leq b.$$

Očito je $\tau(\emptyset) = \tau((a,a)) = 0$.

Neka je A podskup od $\mathbb{R}$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(C_i, i \in \mathbb{N})$, $C_i \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup A, tj.

$$\mathcal{C}_A := \Big\{((a_i,b_i), i \in \mathbb{N}) : a_i \leq b_i \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\Big\}.$$

Funkciju $\lambda^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ definiranu formulom

$$\lambda^\star(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i,b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\Big\}$$

zovemo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$.

Propozicija 1.37. *Lebesgueova vanjska mjera $\lambda^\star$ je vanjska mjera.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.27. □

Primjedba 1.38. *Uočimo da je svaki jednočlani skup $\{a\}$ sadržan u uniji otvorenih intervala oblika $\big(a - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, a + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\big)$, $i \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, čiji zbroj duljina iznosi $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. Zato je $0 \leq \lambda^\star(\{a\}) \leq \varepsilon$, odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi*

$$\lambda^\star(\{a\}) = 0.$$

Propozicija 1.39. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Tada je*

(i) $\lambda^\star([a,b]) = b - a$,

(ii) $\lambda^\star([a,b)) = b - a$,

(iii) $\lambda^\star((a,b]) = b - a$,

(iv) $\lambda^\star((a,b)) = b - a$.

Dokaz. (i) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Otvoreni intervali $(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})$, $(b, b + \frac{\varepsilon}{2^i})$, $i \in \mathbb{N}$, prekrivaju segment $[a,b]$, tj.

$$[a,b] \subset \Big(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\bigcup_{i=1}^{\infty}(b, b + \frac{\varepsilon}{2^i}),$$

a zbroj njihovih duljina iznosi

$$b - a + \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = b - a + 2\varepsilon.$$

Zato je

$$\lambda^\star([a,b]) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \Big\} \le b - a + 2\varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobivamo $\lambda^\star([a,b]) \le b - a$. Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratna nejednakost, što će za posljedicu imati $\lambda^\star([a,b]) = b-a$. Neka je $((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ bilo koji niz omeđenih otvorenih intervala koji pokrivaju segment $[a, b]$. Segment $[a, b]$ je kompaktan skup pa otvoreni pokrivač $((a_i, b_i), i \in \mathbb{N})$ ima konačan potpokrivač. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $[a,b] \subseteq \cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$. Pomoću jednakosti

$$[a,b] = [a,b] \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i) \Big) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big([a,b] \cap (a_i, b_i) \Big)$$

lako je matematičkom indukcijom po n pokazati da je $b - a \le \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, pa je stoga $b - a \le \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Dakle, za svaki niz $((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ vrijedi

$$b - a \le \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i),$$

odakle dobivamo

$$b - a \le \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \Big\} = \lambda^\star([a,b]).$$

Time je dokazana tvrdnja (i).

(ii) Kako je $[a, b) \subset [a, b]$, monotonost funkcije $\lambda^\star$ i (i) povlače

$$\lambda^\star([a,b)) \le \lambda^\star([a,b]) = b - a.$$

Preostaje pokazati da je $\lambda^\star([a,b)) \ge b-a$. U tu svrhu neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj takav da je $a < b - \varepsilon$. Tada je $[a, b-\varepsilon] \subset [a,b)$, pa zbog monotonosti funkcije $\lambda^\star$ imamo $\lambda^\star([a, b-\varepsilon]) \le \lambda^\star([a,b))$. Nadalje, prema (i) je $\lambda^\star([a, b-\varepsilon]) = b - a - \varepsilon$. Dakle, za svaki dovoljno malen $\varepsilon > 0$ vrijedi $b - a - \varepsilon \le \lambda^\star([a,b))$, odakle slijedi $b - a \le \lambda^\star([a,b))$.

(iii) i (iv) Postupa se slično kao pod (ii). □

Definicija 1.40. *Za skup $B \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* izmjeriv u smislu Lebesguea *ili da je* Lebesgueov skup *ako je on $\lambda^\star$-izmjeriv. Sa $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ označavamo familiju svih podskupova od $\mathbb{R}$ izmjerivih u smislu Lebesguea.*

Prema teoremu 1.25. familija $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}$.

Propozicija 1.41. *Svaki Borelov skup na* $\mathbb{R}$ *izmjeriv je u smislu Lebesguea, tj.* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^\star}$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je svaki Borelov skup oblika $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, izmjeriv u smislu Lebesguea, tj. $(-\infty, b] \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$. To će implicirati $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^\star}$, jer je Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ najmanja σ-algebra koja sadrži intervale oblika $(-\infty, b]$ (teorem 1.10.).

Pokažimo da je skup $B = (-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, izmjeriv u smislu Lebesguea. U tu svrhu dovoljno je pokazati da za svaki skup $A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^\star(A) < \infty$, vrijedi

$$\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap B^c).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada postoji niz otvorenih intervala $\big((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}\big)$ takvih da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$ i

$$\sum_{i=1}^\infty (b_i - a_i) < \lambda^\star(A) + \varepsilon. \tag{1.15}$$

Kako je

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i) \cap B \qquad \& \qquad A \cap B^c \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i) \cap B^c,$$

monotonost i σ-subaditivnost vanjske mjere $\lambda^\star$ povlače

$$\lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap B^c) \leq \sum_{i=1}^\infty \big[\lambda^\star((a_i, b_i) \cap B) + \lambda^\star((a_i, b_i) \cap B^c)\big]. \tag{1.16}$$

Javlja se samo jedna od sljedećih situacija (Napravite slike!):

a) $(a_i, b_i) \subseteq B = (-\infty, b]$, $(a_i, b_i) \cap B^c = \emptyset$,

b) $(a_i, b_i) \subseteq B^c = (b, \infty)$, $(a_i, b_i) \cap B = \emptyset$, ili

c) $(a_i, b_i) \cap B = (a_i, b]$, $(a_i, b_i) \cap B^c = (b, b_i)$.

Prema propoziciji 1.39., u sva tri slučaja je

$$\lambda^\star((a_i, b_i) \cap B) + \lambda^\star((a_i, b_i) \cap B^c) = b_i - a_i.$$

Sada iz (1.16) i (1.15) dobivamo

$$\lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap B^c) \leq \sum_{i=1}^\infty (b_i - a_i) < \lambda^\star(A) + \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap B^c) \leq \lambda^\star(A).$$

$\square$

Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$. Prisjetimo se da d-intervalima na $\mathbb{R}^d$ zovemo skupove oblika

$$I = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d,$$

gdje su $T_1, \ldots, T_d$ 1-intervali oblika (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b)$. Uočite da d-interval može biti otvoren skup, zatvoren skup ili niti otvoren niti zatvoren. Volumen d-intervala $I = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d$ definira se kao produkt duljina 1-intervala $T_1, \ldots, T_d$ i označava se s $\mathrm{vol}\,(I)$. Uočite da je

$$\mathrm{vol}\,(I) = \prod_{i=1}^{d} \lambda(T_i),$$

gdje je λ Lebesqueova mjera na $\mathbb{R}$.

Sada ćemo opet upotrijebiti konstrukciju opisanu propozicijom 1.27. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih d-intervala na $\mathbb{R}^d$. Kako je prazan skup $\emptyset \in \mathcal{C}$ (uočite da je npr. $\emptyset = (a, a) \times (-1, 1) \times (-1, 1) \times \ldots \times (-1, 1)$) te kako se cijeli skup $\mathbb{R}^d$ može zapisati kao $\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-i, i) \times (-i, i) \times \ldots \times (-i, i)$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}^d$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ ovako:

$$\tau(I) := \mathrm{vol}(I), \qquad I \in \mathcal{C}.$$

Očito je $\tau(\emptyset) = 0$.

Neka je A podskup od $\mathbb{R}^d$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(I_i, i \in \mathbb{N})$ omeđenih otvorenih d-intervala koji pokrivaju skup A, tj. takvih da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Funkciju $\lambda_d^\star : 2^{\mathbb{R}^d} \to [0, \infty]$ definiranu formulom

$$\lambda_d^\star(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A \right\}$$

zovemo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$.

Propozicija 1.42. *Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ je vanjska mjera.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.27. $\square$

Radi jednostavnosti ponekad ćemo funkciju $\lambda_d^\star$ kraće označavati s $\lambda^\star$. Pri tome će iz konteksta biti jasno da se radi o Lebesgueovoj vanjskoj mjeri na $\mathbb{R}^d$, a ne o Lebesgueovoj vanjskoj mjeri na $\mathbb{R}$.

Sada ćemo navesti neke rezultate koji su analogoni odgovarajućih rezultata za Lebesgueovu vanjsku mjeru na $\mathbb{R}$. Stoga čitatelju prepuštamo da kod dokaza tih tvrdnji samostalno provede sve tehničke detalje.

Primjedba 1.43. *Svaka točka* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *sadržana je u uniji otvorenih d-intervala oblika*

$$\Big(x_1 - \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{(\sqrt[d]{2})^{i+1}}, x_1 + \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{(\sqrt[d]{2})^{i+1}}\Big) \times \ldots \times \Big(x_d - \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{(\sqrt[d]{2})^{i+1}}, x_d + \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{(\sqrt[d]{2})^{i+1}}\Big),$$

$i \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, *čiji zbroj volumena iznosi* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. *Zato je* $0 \le \lambda_d^\star(\{\boldsymbol{x}\}) \le \varepsilon$, *odakle zbog proizvoljnosti broja* $\varepsilon > 0$ *slijedi*

$$\lambda_d^\star(\{\boldsymbol{x}\}) = 0.$$

Sljedeća je tvrdnja analogon propozicije 1.39.

Propozicija 1.44. *Neka je* I *bilo koji d-interval na* $\mathbb{R}^d$. *Tada je* $\lambda_d^\star(I) = \mathrm{vol}\,(I)$.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati samo u slučaju kada je I kompaktan d-interval oblika

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]. \tag{1.17}$$

U svim preostalim slučajevima (kada I nije kompakt) dovoljno je modificirati odgovarajuće dijelove dokaza propozicije 1.39., što prepuštamo čitatelju.

Neka je I kompaktan d-interval oblika (1.17). Za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ otvoreni d-interval

$$\Big(a_1 - \frac{\varepsilon}{2}, b_1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \times \ldots \times \Big(a_d - \frac{\varepsilon}{2}, b_d + \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

zajedno s otvorenim d-intervalima

$$\Big(b_1, b_1 + \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{(\sqrt[d]{2})^i}\Big) \times \ldots \times \Big(b_d, b_d + \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{(\sqrt[d]{2})^i}\Big), \quad i \in \mathbb{N},$$

pokriva skup I. Zbroj volumena svih tih otvorenih d-intervala iznosi

$$\prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k + \varepsilon) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k + \varepsilon) + \varepsilon$$

i zato je

$$\lambda_d^\star(I) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_I\Big\} \le \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k + \varepsilon) + \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobivamo

$$\lambda_d^\star(I) \le \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k) = \mathrm{vol}\,(I).$$

Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratna nejednakost, što će za posljedicu imati $\lambda_d^\star(I) = \mathrm{vol}\,(I)$. Neka je $(I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_I$ bilo koji niz omeđenih otvorenih d-intervala koji pokrivaju skup I. Skup I je kompaktan pa otvoreni pokrivač $(I_i, i \in \mathbb{N})$ ima konačan potpokrivač. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $I \subseteq \cup_{i=1}^n I_i$. Tada je $\mathrm{vol}\,(I) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{vol}\,(I_i)$, pa stoga pogotovo vrijedi

$$\mathrm{vol}\,(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i),$$

odakle dobivamo $\mathrm{vol}\,(I) \leq \inf\Big\{ \sum_{i=1}^\infty \mathrm{vol}\, I_i : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_I \Big\} = \lambda_d^\star(I)$. □

Definicija 1.45. *Za skup $B \subseteq \mathbb{R}^d$ kažemo da je* izmjeriv u smislu Lebesguea *ili da je* Lebesgueov skup *ako je on $\lambda_d^\star$-izmjeriv. Sa $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ označavamo familiju svih podskupova od $\mathbb{R}^d$ izmjerivih u smislu Lebesguea.*

Prema teoremu 1.25. familija $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}^d$.

Propozicija 1.46. *Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}^d$ izmjeriv je u smislu Lebesguea, tj. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$.*

Dokaz. Prema teoremu 1.12. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ najmanja je σ-algebra koja sadrži familiju svih poluprostora u $\mathbb{R}^d$ oblika

$$\mathbb{R}^{i-1} \times \langle -\infty, b] \times \mathbb{R}^{d-i}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Zato je dovoljno pokazati da je svaki takav poluprostor izmjeriv u smislu Lebesguea, tj. da on pripada familiji $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$, što će implicirati $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. Taj dio dokaza prepuštamo čitatelju, uz napomenu da je u tu svrhu dovoljno modificirati dokaz propozicije 1.41. □

Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ u potpunosti je određena svojim vrijednostima na otvorenim skupovima. Preciznije, vrijedi:

Propozicija 1.47. *Neka je $d \geq 1$. Za svaki podskup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ vrijedi:*

$$\lambda_d^\star(A) = \inf\{\lambda_d^\star(U) : \ U \textit{ je otvoren skup i } A \subseteq U\}.$$

Dokaz. Kako monotonost od λ povlači

$$\lambda_d^\star(A) \leq \inf\{\lambda_d^\star(U) : \ U \text{ je otvoren skup i } A \subseteq U\},$$

preostaje dokazati suprotnu nejednakost.

Ako je $\lambda_d^\star(A) = \infty$, onda očito vrijedi suprotna nejednakost. Zato nadalje pretpostavljamo da je $\lambda_d^\star(A) < \infty$. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Tada postoji niz $(I_i, i \in \mathbb{N})$ otvorenih d-intervala takvih da je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \& \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) < \lambda_d^\star(A) + \varepsilon.$$

Skup $U_0 := \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ je otvoren. Monotonost od $\lambda_d^\star$ i propozicija 1.44. povlače

$$\lambda_d^\star(U_0) = \lambda_d^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_d^\star(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) < \lambda_d^\star(A) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ je $\lambda_d^\star(U_0) \leq \lambda_d^\star(A)$, odakle slijedi

$$\inf\{\lambda_d^\star(U) :\ U \text{ je otvoren skup i } A \subseteq U\} \leq \lambda_d^\star(U_0) \leq \lambda_d^\star(A).$$

□

Propozicija 1.48. *Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ je* invarijantna na translacije, *tj.*

$$\lambda_d^\star(A + x) = \lambda_d^\star(A), \qquad A \subseteq \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d.$$

Nadalje, skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je Lebesgueov onda i samo onda ako je skup $A + x$, $x \in \mathbb{R}^d$ Lebesgueov.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz definicije Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ i činjenice da je volumen d-intervala invarijantan na translacije. Malo detaljnije: Neka je $(I_i, i \in \mathbb{R}^d)$ bilo koji niz otvorenih d-intervala sa svojstvom $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Tada otvoreni d-intervali $I_i + x$, $i \in \mathbb{N}$, pokrivaju skup $A + x$, tj. $A + x \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_i + x)$. Zbog invarijantnosti volumena na translacije je $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i + x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i)$. Prema definiciji Lebesgueove vanjske mjere je $\lambda_d^\star(A+x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i)$. Dakle, za svaki niz $(I_i, i \in \mathbb{R}^d)$ otvorenih d-intervala koji pokrivaju skup A vrijedi $\lambda_d^\star(A + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i)$, što povlači $\lambda_d^\star(A + x) \leq \lambda_d^\star(A)$. Slično se pokaže da vrijedi $\lambda_d^\star(A) \leq \lambda_d^\star(A + x)$.

Posljednja tvrdnja slijedi iz prve tvrdnje i činjenice da operacije presjecanja i translacije međusobno „komutiraju", tj. $(C \cap D) + x = (C + x) \cap (D + x)$, za sve $C, D \subseteq \mathbb{R}^d$ i za svaki $x \in \mathbb{R}^d$. Neka je A izmjeriv skup u smislu Lebesguea. Po definiciji tada je

$$\lambda^\star(B) = \lambda^\star(B \cap A) + \lambda^\star(B \cap A^c), \qquad \forall B \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Ako umjesto B stavimo $B - x$ dobivamo

$$\lambda^\star(B - x) = \lambda^\star((B - x) \cap A) + \lambda^\star((B - x) \cap A^c), \qquad \forall B \subseteq \mathbb{R}^d,$$

što zbog invarijantnosti Lebesgueove vanjske mjere na translacije možemo pisati kao

$$\lambda^\star(B) = \lambda^\star\big(((B - x) \cap A) + x\big) + \lambda^\star\big(((B - x) \cap A^c) + x\big), \qquad \forall B \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{1.18}$$

Iskoristimo li činjenicu da operacije presjecanja i translacije "komutiraju", te očitu jednakost $A^c + x = (A + x)^c$, dobivamo

$$\big((B-x) \cap A\big)+x = B \cap (A + x), \quad \big((B - x) \cap A^c\big) + x = B \cap (A^c+x) = B \cap (A + x)^c,$$

pa (1.18) prelazi u

$$\lambda^\star(B) = \lambda^\star(B \cap (A + x)) + \lambda^\star(B \cap (A + x)^c), \qquad \forall B \subseteq \mathbb{R}^d.$$

To znači da je skup $A + x$ izmjeriv u smislu Lebesguea. □

Prema propoziciji 1.46. je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. Prirodno se postavljaju sljedeća dva pitanja: (1) Je li $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star} \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, tj. je li svaki Lebesgueov skup ujedno i Borelov? (2) Je li svaki podskup od $\mathbb{R}^d$ izmjeriv u smislu Lebesguea? Odgovor je negativan na prvo pitanje (vidi teorem 2.12.). I na drugo pitanje odgovor je negativan, kao što ilustrira sljedeći primjer.

Primjer 1.49. *Na segmentu $[0,1]$ definirajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ na sljedeći način: $x \sim y$ ako je $x - y \in \mathbb{Q}$. Lako je provjeriti da se radi o relaciji ekvivalencije:*

refleksivnost: $x \sim x$, jer $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$.

simetričnost: $x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \sim x$.

tranzitivnost: $(x \sim y \,\&\, y \sim z) \Rightarrow (x - y \in \mathbb{Q} \,\&\, y - z \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim z$.

Relacijom $\sim$ segment $[0,1]$ raspada se na disjunktne klase. Neka je $A \subseteq [0,1]$ skup koji sadrži točno jedan element iz svake klase ekvivalencije. Zermelov aksiom izbora nam osigurava egzistenciju skupa A.

Skup $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ je prebrojiv. Svrstajmo njegove članove u niz $(q_i, i \in \mathbb{N})$, a zatim definirajmo skupove

$$A_i := A + q_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo sljedeće tvrdnje:

(a) Skupovi A_i, $i \in \mathbb{N}$, međusobno su disjunktni.

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq [-1,2]$.

(c) $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Krenimo redom:
(a) Ako je $x \in A_i \cap A_j = (A + q_i) \cap (A + q_j) \neq \emptyset$, onda postoje brojevi $a, a' \in A$ takvi da je $x = a + q_i = a' + q_j$. Tada bismo imali $a - a' = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$, što bi povlačilo $a \sim a'$. Kako skup A sadrži samo jednu točku iz svake klase ekvivalencije, to bi povlačilo $a = a'$. Zato je $q_i = q_j$, što povlači $i = j$, pa su skupovi A_i, $i \in \mathbb{N}$, zaista disjunktni.

(b) Kako je $A \subseteq [0,1]$, $q_i \in [-1,1]$, to je $A_i = A + q_i \subseteq [-1,2]$, pa je onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq [-1,2]$.

(c) Za svaki $x \in [0,1]$ postoji točno jedan $a \in A$ takav da je $x - a = q \in \mathbb{Q}$. Očito je $q \in [-1,1]$ jer $x, a \in [0,1]$. Zato je $q = q_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$, pa je $x = a + q_i \in A + q_i = A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dakle, $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Zbog invarijantnosti Lebesgueove vanjske mjere na translacije (propozicija 1.48.) vrijedi

$$\lambda^\star(A_i) = \lambda^\star(A), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Pomoću monotonosti i σ-subaditivnosti vanjske mjere $\lambda^\star$ iz tvrdnje (c) dobivamo

$$1 = \lambda^\star([0,1]) \leq \lambda^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^\star(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^\star(A),$$

odakle slijedi $\lambda^\star(A) > 0$.

Sada ćemo pokazati da skup A nije Lebesgueov, tj. $A \notin \mathcal{M}_{\lambda^\star}$. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$. Tada pomoću propozicije 1.48. dobivamo $A_i = A + q_i \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$, $i \in \mathbb{N}$. Restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda^\star$ na σ-algebru $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ je mjera (vidi teorem 1.25.). Iskoristimo li tu činjenicu, pomoću tvrdnje (b) dobivamo

$$3 = \lambda^\star([-1,2]) \geq \lambda^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^\star(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^\star(A),$$

odakle slijedi $\lambda^\star(A) = 0$. To je u suprotnosti s već dokazanom nejednakošću $\lambda^\star(A) > 0$. Dakle, skup A nije Lebesgueov.

1.6. Lebesgueova mjera

Restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na skup $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ je mjera (teorem 1.25.), označavamo je s λ_d (ili kraće samo λ) i zovemo Lebesgueova mjera. Uobičajeno je i restrikciju Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ također zvati Lebesgueova mjera i označavati je s λ_d (ili kraće samo λ). Pri tome iz konteksta treba biti jasno radi li se o Lebesgueovoj mjeri na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star})$ ili o Lebesgueovoj mjeri na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.

Propozicija 1.50. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$ izmjeriv u smislu Lebesguea. Tada vrijedi:*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\}$$

Dokaz. Kako monotonost od λ povlači

$$\lambda(A) \geq \sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\},$$

preostaje dokazati suprotnu nejednakost. U tu svrhu definirajmo kompaktne skupove

$$B_i := [-i,i]^d = [-i,i] \times \ldots \times [-i,i], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \mathbb{R}^d$ i $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_i \subset B_{i+1} \subset \ldots$, što povlači

$$A = A \cap \mathbb{R}^d = A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$$

i

$$A \cap B_1 \subset A \cap B_2 \subset \ldots \subset A \cap B_i \subset A \cap B_{i+1} \subset \ldots$$

Borelovi skupovi B_i, $i \in \mathbb{N}$, izmjerivi su po Lebesgueu (propozicija 1.46.), a skup A izmjeriv je po pretpostavci. Kako familija svih izmjerivih skupova (po Lebesgueu) tvori σ-algebru (vidi teorem 1.25.), svi skupovi $A \cap B_i$, $i \in \mathbb{N}$, izmjerivi su po Lebesgueu. Zato prema tvrdnji (iii) propozicije 1.18. vrijedi

$$\lambda(A) = \lim_{i\to\infty} \lambda(A \cap B_i) = \sup\{\lambda(A \cap B_i) : i \in \mathbb{N}\}. \tag{1.19}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog (1.19) postoji prirodan broj i_0 takav da je

$$\lambda(A) < \lambda(A \cap B_{i_0}) + \varepsilon. \tag{1.20}$$

Primjenom propozicije 1.47. na skup $B_{i_0} \cap A^c$ nalazimo da postoji otvoren skup U_0 takav da je

$$B_{i_0} \cap A^c \subseteq U_0 \quad \& \quad \lambda(U_0) < \lambda(B_{i_0} \cap A^c) + \varepsilon.$$

Zato, iskoristimo li činjenicu da je skup B_{i_0} izmjeriv i svojstvo monotonosti od λ, dobivamo

$$\begin{aligned}\lambda(B_{i_0}) &= \lambda(B_{i_0} \cap A) + \lambda(B_{i_0} \cap A^c) > \lambda(B_{i_0} \cap A) + \lambda(U_0) - \varepsilon \\ &\geq \lambda(B_{i_0} \cap A) + \lambda(B_{i_0} \cap U_0) - \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.21}$$

S druge strane, kako zbog izmjerivosti skupa B_{i_0} vrijedi

$$\lambda(B_{i_0}) = \lambda(B_{i_0} \cap U_0) + \lambda(B_{i_0} \cap U_0^c),$$

nejednakost (1.21) povlači

$$\lambda(B_{i_0} \cap U_0^c) \geq \lambda(B_{i_0} \cap A) - \varepsilon,$$

odakle pomoću (1.20) dobivamo

$$\lambda(B_{i_0} \cap U_0^c) \geq \lambda(A) - 2\varepsilon. \tag{1.22}$$

Skup $K_0 := B_{i_0} \cap U_0^c$ očito je kompaktan. Nadalje, kako iz $B_{i_0} \cap A^c \subseteq U_0$ slijedi $U_0^c \subseteq B_{i_0}^c \cup A$, to je $K_0 \subseteq B_{i_0} \cap A \subseteq A$. Zbog (1.22) vrijedi

$$\sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\} \geq \lambda(A) - 2\varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\} \geq \lambda(A).$$

□

Propozicija 1.51. *Lebesgueova mjera λ jedina je mjera na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ koja svakom d-intervalu pridružuje njegov volumen.*

Dokaz. Lebesgueova mjera ima traženo svojstvo (propozicija 1.44.). Neka je μ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ koja svakom d-intervalu pridružuje njegov volumen. Treba pokazati da je $\mu = \lambda$, tj. da je $\mu(A) = \lambda(A)$ za svaki $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. U tu svrhu iskoristit ćemo korolar 1.36.

Familija $\mathcal{C}$ svih d-intervala oblika

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_d, b_d], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, d$$

je π-sistem na $\mathbb{R}^d$. Pri tome je $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ (teorem 1.12.). Po pretpostavci je

$$\mu(C) = \lambda(C), \qquad \forall C \in \mathcal{C}.$$

Neka je $C_n := (-n, n] \times (-n, n] \times \ldots \times (-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Niz (C_n) je uzlazan niz skupova iz $\mathcal{C}$ i vrijedi

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \qquad \mu(C_n) = \lambda(C_n) < \infty.$$

Prema korolaru 1.36. je $\mu = \lambda$ na $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ □

Zadaci.

1. Izračunajte Lebesgueovu mjeru skupova: (a) $(0,5) \cap \mathbb{Q}$. (b) $[0,5]$. (c) $\{2\}$. (d) $(0,5] \backslash \mathbb{Q}$. (e) $\big((7,15) \cup (8,16)\big) \cap \mathbb{R}$. (f) $(2,10] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$. (g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \big[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\big]$. (h) $\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \big[9^n, 9^n + \frac{1}{3^n}\big) \backslash \mathbb{Q}\Big) \cap [81, 82]$. (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \big[3, 3 + \frac{1}{n}\big]$.

   (Rješenje: (a) 0. (b) 5. (c) 0. (d) 5. (e) 9. (f) 8. (g) 1/9. Segmenti $\big[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\big]$ su disjunktni. Koristite formulu za sumu geometrijskog reda. (h) 1/9. (i) $\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \big[3, 3 + \frac{1}{n}\big]\Big) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. (a) Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ y-os. Dokažite da je $\lambda(A) = 0$, gdje je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^2$. (b) Formulirajte i dokažite analognu tvrdnju za $\mathbb{R}^n$.

   (Uputa: Neka je $\varepsilon > 0$, a $A_n := \big[-\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n}\big) \times [-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 4\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Uz oznaku $C_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ imamo $\lambda(A) \leq 4C_0\varepsilon$. Napravite granični prijelaz $\varepsilon \to 0$.)

3. Neka je p pravac u ravnini zadan jednadžbom $y = ax + b$, $a \neq 0$. Dokažite da je p Lebesgueov skup mjere nula.

   (Uputa: Neka je $p_k := p \cap ([k, k+1] \times \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $p \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} p_k$, dovoljno je pokazati da je $\lambda(p_k) = 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajte ekvidistantnu razdiobu $x_i = k + \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, segmenta $[k, k+1]$. Ako je $a > 0$, onda je $p_k \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [ax_{i-1} + b, ax_i + b]$, a za $a < 0$ je $p_k \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [ax_i + b, ax_{i-1} + b]$. U oba slučaja je $\lambda(p_k) \leq \sum_{i=1}^{n} |a|(x_i - x_{i-1})^2 = |a|/n$, odakle graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo $\lambda(p_k) = 0$.)

4. (a) Neka je U neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{R}^n$). Pokažite da je $\lambda(U) > 0$. (b) Konstruirajte otvoren i neomeđen skup u $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{R}^n$) sa strogo pozitivnom

i konačnom Lebesgueovom mjerom. (c) Konstruirajte otvoren, neomeđen i putovima povezan skup u $\mathbb{R}^2$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom. (d) Postoji li otvoren, neomeđen i putovima povezan skup u $\mathbb{R}$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom ?

(Uputa: Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$. (a) U skup U može se upisati interval, a njegova Lebesgueova mjera veća je od 0. (b) Neka je (ε_n) niz pozitivnih brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, npr. $\varepsilon_n = 1/2^n$. Definirajte otvorene skupove $U_n = (n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, i stavite $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Koristeći σ-subaditivnost mjere λ dobiva se

$$\lambda(U) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

Zbog (a) je $\lambda(U) > 0$. (c) Neka su $V_n = \big(-2^{-n}, 2^{-n}\big) \times (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, otvoreni skupovi. Stavite $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Dalje postupite kao u zadatku 2(a). Skup V je otvoren i neomeđen, a geometrijski je jasno da je povezan putovima. (d) Ne. Ako je neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ neomeđen i povezan, onda on sadrži interval oblika $(-\infty, a)$ ili (b, ∞) čija Lebesgueova mjera iznosi $+\infty$.)

5. Neka je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ i $t > 0$ realan broj. Dokažite da je $\lambda(tA) = t^d\lambda(A)$ za svaki Borelov skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

   (Uputa: Skup tA je Borelov (zadatak 13. na str. 9). Definirajmo novu mjeru $\mu(A) := \lambda(tA)$. Mjere μ i $t^p\lambda$ podudaraju se na $\mathcal{I}$. Kako je $\mathcal{I}$ algebra (i π-sistem), prema korolaru 1.35. (korolaru 1.36.) te se mjere podudaraju na $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.)

6. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgueov skup mjere $\lambda(A) > 0$. (a) Pokažite da za svaki $\alpha \in (0,1)$ postoji otvoreni interval I_α takav da je $\lambda(A \cap I_\alpha) \geq \alpha\lambda(I_\alpha)$. (b) Pokažite da skup $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ sadrži otvoren interval oblika $(-a, a)$, $a > 0$.

   (Uputa: (a) Prema definiciji Lebesgueove mjere, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz otvorenih intervala (I_n) takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon$. Neka je $\varepsilon < \beta\lambda(A)$, $\beta > 0$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\beta)\lambda(A) \leq (1+\beta)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n)$$

   Iz ove nejednakosti slijedi da postoji barem jedan n takav da je $\lambda(I_n) \leq (1+\beta)\lambda(A \cap I_n)$, tj. $\frac{1}{1+\beta}\lambda(I_n) \leq \lambda(A \cap I_n)$. Za $\beta = \frac{1}{\alpha} - 1$ dobivamo tvrdnju. (b) Prema (a) postoji interval $I = (a, b)$ takav da je $\frac{3}{4}\lambda(I) \leq \lambda(A \cap I)$. Neka je $F := A \cap I$ i $l := \lambda(I) = b - a$. Prvo ćemo pokazati da je $[0, l/2) \subset F - F$: Za $x \in [0, l/2)$ vrijedi

$$F \cup (F + x) \subset I \cup (I + x) \subset (a, b + x).$$

Kada bi bilo $x \notin F - F$, zbog $F \cap (F + x) = \emptyset$ bilo bi

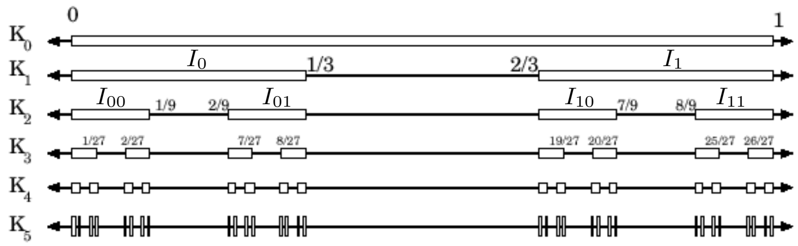
$$2\lambda(F) = \lambda(F) + \lambda(F + x) = \lambda(F \cup (F + x)) \leq b + x - a = l + x < \frac{3}{2}l,$$

što bi povlačilo $\lambda(F) < \frac{3}{4}l$, tj. $\lambda(A \cap I) < \frac{3}{4}\lambda(I)$. Dakle, pokazali smo da je $[0, l/2) \subset F - F$, odakle očito slijedi $(-l/2, l/2) \subset F - F \subset A - A$.)

1.7. Cantorov skup

Cantorov[6] trijadski skup je neprebrojiv kompaktan skup $K \subset [0,1]$ Lebesgueove mjere $\lambda(K) = 0$. Ima izuzetno važnu ulogu u teoriji skupova i analizi.

Konstrukciju Cantorova skupa K započinjemo s jediničnim segmentom $K_0 := [0,1]$. Segment K_0 podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dobivamo skup $K_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Sada konstrukciju nastavljamo indukcijom po n. Skup K_n, $n \geq 2$, dobiva se iz skupa K_{n-1} tako da svaki segment od K_{n-1} podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval (vidi sliku 4).



Slika 4. Prvih pet koraka konstrukcije Cantorovog skupa.

Cantorov skup K definira se kao presjek

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Skup K je neprazan jer rubne točke svakog podsegmenta od K_n pripadaju skupu K. Očito je K omeđen i zatvoren skup, pa je i kompaktan.

Uočimo da je K_n unija od 2^n disjunktnih segmenata duljine $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. To ima za posljedicu sljedeće:

(a) Cantorov skup K nema unutrašnjih točaka, tj. $\operatorname{Int} K = \emptyset$.

(b) Cantorov skup K je potpuno nepovezan, tj. za svake dvije točke $x, y \in K$ postoji točka $z \notin K$ koja leži između x i y.

(c) Cantorov skup je Lebesgueov skup mjere $\lambda(K) = 0$.

[6] Georg Cantor (1845-1918), njemački matematičar.

Dokažimo te tvrdnje:
(a)-(b) Dovoljno je pokazati da se u skup K ne može upisati interval. Zaista, kada bi neki interval bio sadržan u skupu K, onda bi on bio sadržan u svim skupovima K_n, $n \in \mathbb{N}$. To je nemoguće jer se u skup K_n može upisati interval duljine najviše $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Dakle, $\operatorname{Int} K = \emptyset$.

(c) Uočimo da su svi skupovi K_n, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgueovi skupovi mjere $\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Zato je i skup K kao njihov presjek također Lebesgueov skup. Prema tvrdnji (iv) propozicije 1.18. njegova Lebesgueova mjera iznosi

$$\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Sada ćemo pokazati da je Cantorov skup neprebrojiv. Dokaz ove tvrdnje može se izostaviti kod prvog čitanja.

Prije samog dokaza tvrdnje vratimo se na konstrukciju Cantorova skupa K. Izbacivanjem srednjeg intervala iz skupa K_0 dobivamo dva podsegmenta: lijevi I_0 i desni I_1 (vidi sliku 4). Očito je

$$K_1 = \bigcup_{i_1 \in \{0,1\}} I_{i_1} = I_0 \cup I_1.$$

U sljedećem koraku ($n = 2$) iz skupova I_0, I_1 izbaci se njihov srednji interval. Izbacivanjem srednjeg intervala iz I_0 dobivamo dva podsegmenta: lijevi I_{00} i desni I_{01}; dok izbacivanjem srednjeg intervala iz I_1 dobivamo lijevi I_{10} i desni I_{11} podsegment. Uočimo da je

$$K_2 = \bigcup_{i_1, i_2 \in \{0,1\}} I_{i_1 i_2} = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}.$$

Daljnju numeraciju nastavljamo indukcijom po n. Za $n > 2$, podijelimo skup $I_{i_1 \ldots i_{n-1}}$, $i_k \in \{0,1\}$, na tri jednaka podsegmenta, a zatim izbacimo srednji interval. Dobiveni lijevi podsegment označavamo s $I_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}$, a desni s $I_{i_1 \ldots i_{n-1} 1}$. Lako je provjeriti da vrijedi

$$K_n = \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}} I_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Za svaki beskonačan niz $(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$, $i_k \in \{0,1\}$, može se promatrati silazan niz segmenata

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots .$$

Kako se radi o silaznom nizu nepraznih zatvorenih skupova, presjek svih članova ovog niza je neprazan (vidi Dodatak). Nadalje, budući da za dijametre vrijedi

$$\operatorname{diam}(I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = \frac{1}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

presjek $I_{i_1} \cap I_{i_1 i_2} \cap \ldots$ sadrži jednu jedinu točku. Očito, skup svih tako dobivenih točaka je Cantorov skup K.

Neka $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označava skup svih beskonačnih nizova s članovima iz skupa $\{0,1\}$. Ako svakom takvom nizu $(i_1,\ldots,i_k,\ldots)$ iz $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ pridružimo jedinu točku iz presjeka $I_{i_1} \cap I_{i_1 i_2} \cap \ldots$, dobivamo bijekciju između skupa $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i Cantorova skupa K. Zato je

$$\operatorname{kard}(K) = \operatorname{kard}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0},$$

gdje je $\aleph_0$ oznaka za kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ (slovo alef $\aleph$ početno je slovo hebrejskog alfabeta). Kako je $\operatorname{kard}\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ (vidi [6]), Cantorov skup K je neprebrojiv.

Na kraju, napomenimo kako se može pokazati da je spomenuta bijekcija zadana formulom

$$(i_1,\ldots,i_k,\ldots) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i_k}{3^k}.$$

Cantorova funkcija. U teoriji mjere Cantorova funkcija često se koristi kao primjer (ili kontraprimjer). Zbog boljeg razumijevanja kako se ona definira, napravit ćemo dvije različite konstrukcije ove funkcije.

Prvo ćemo se prisjetiti konstrukcije Cantorova skupa. Skup K_n, $n \geq 0$, sastoji se od 2^n disjunktnih segmenata (vidi sliku 5). Neka J_n^k označava slijeva k-ti interval koji ne pripada skupu K_n. Takvih intervala ukupno ima $2^n - 1$. Zaista, neka je l_n broj takvih intervala. Očito je $l_0 = 0$, $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 7$ (vidi sliku 4). U n-tom koraku konstrukcije Cantorova skupa svaki od 2^{n-1} podsegmenta skupa K_{n-1} daje jedan interval koji se izbacuje. Zato je $l_n = 2^{n-1} + l_{n-1}$, odakle teleskopiranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
l_n &= 2^{n-1} + l_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + l_{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + l_{n-3} = \ldots \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + l_{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^1 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Nakon n-tog koraka konstrukcije izbačeni su međusobno disjunktni intervali

$$J_n^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$

i zato je

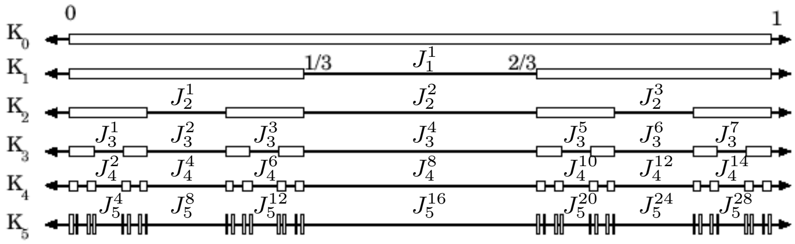
$$K_n^c = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_n^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da s lijeve strane od J_n^k ima k podsegmenata skupa K_n. Zato u sljedećem koraku konstrukcije svaki od tih podsegmenata daje po jedan interval (smješten lijevo od J_n^k) koji će se izbaciti. To znači da će nakon $(n+1)$-vog koraka konstrukcije interval J_n^k postati (brojano slijeva) $(2k)$-ti po redu interval koji ne pripada skupu K_{n+1}. Tako smo pokazali da vrijedi

$$J_n^k = J_{n+1}^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots 2^n - 1,$$

odakle iteriranjem dobivamo

$$J_n^k = J_{n+m}^{2^m k}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \dots 2^n - 1. \tag{1.23}$$



Slika 5. Konstrukcija Cantorove funkcije.

Sada ćemo pokazati kako se konstruira Cantorova funkcija $c : [0,1] \to \mathbb{R}$. U svrhu boljeg razumijevanja to ćemo napraviti na dva različita načina.

Prvi način konstrukcije Cantorove funkcije. Uočimo da je

$$K^c = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_n^k\Big),$$

a zatim definirajmo funkciju $h : K^c \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{k}{2^n}, \qquad x \in J_n^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \dots 2^n - 1. \tag{1.24}$$

Prvo treba pokazati da je s (1.24) dobro definirano pridruživanje, tj. da će se za svaka dva skupa J_n^k, J_r^s koja sadrže x dobiti ista vrijednost $s/2^r = k/2^n$. Zaista, bez smanjenja općenitosti, neka je $r = n + m$. Tada iz (1.23) dobivamo $s = 2^m k$, odakle slijedi $s/2^r = (2^m k)/(2^{n+m}) = k/2^n$.

Pokažimo da je h monotono rastuća funkcija na K^c. Neka su $x, y \in K^c$ takvi da je $x < y$. Kako je $K^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c$, postoji dovoljno velik prirodan broj n takav da je $x, y \in K_n^c$. Nadalje, kako je $K_n^c = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_n^k$, postoje prirodni brojevi k_1 i k_2, $1 \le k_1, k_2 \le 2^n - 1$, takvi da je $x \in J_n^{k_1}$, $y \in J_n^{k_2}$. Broj x nalazi se lijevo od y pa je zato $k_1 \le k_2$ (Brojevi k_1 i k_2 govore nam koji su slijeva po redu intervali $J_n^{k_1}$ i $J_n^{k_2}$). Sada iz (1.24) dobivamo $h(x) = k_1/n \le k_2/n = h(y)$. Time smo pokazali da h monotono raste.

Cantorova funkcija $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ definira se formulom:

$$c(0) = 0, \quad c(1) = 1, \quad c(x) = \begin{cases} h(x), & \text{ako je } x \in K^c \\ \sup\{h(t) : t \in K^c, t \le x\}, & \text{ako je } x \in K \cap (0,1). \end{cases}$$

Ona je monotono rastuća i uniformno neprekidna na $[0,1]$.

Sada ćemo pokazati da je Cantorova funkcija uniformno neprekidna na segmentu $[0,1]$, tj. da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|c(x) - c(y)| < \varepsilon \qquad \text{za sve } x, y \in [0,1] \text{ za koje je } |x - y| < \delta. \tag{1.25}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prvo odaberimo prirodan broj n_0 takav da je $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$, a zatim za $\delta > 0$ uzmimo bilo koji realan broj takav da je $\delta < \frac{1}{3^{n_0}}$. Pokažimo da za tako odabran $\delta > 0$ vrijedi (1.25).

Dokaz ćemo provesti na „n_0-toj razini", tj. koristeći konstrukciju skupa K_{n_0}. U tu svrhu, prisjetimo se da skup K_{n_0} ima 2^{n_0} podsegmenata jednake duljine $1/3^{n_0}$. Između tih podsegmenata nalaze se intervali $J^s_{n_0}$, $1 \le s \le 2^{n_0} - 1$. Duljina svakog intervala $J^s_{n_0}$ iznosi najmanje $1/3^{n_0}$.

Neka su $x, y \in [0,1]$, bilo koje dvije točke takve da je $|x - y| < \delta$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $x < y$ i pokažimo da vrijedi (1.25).

(a) Slučaj $x = 0$. Tada je $y = |0 - y| < \delta < \frac{1}{3^{n_0}}$, a $c(0) = 0$. Odaberimo bilo koju točku $y' \in J^1_{n_0} = \left(\frac{1}{3^{n_0}}, \frac{2}{3^{n_0}}\right)$. Dakle, imamo

$$0 = x < y < y' \qquad \& \qquad h(y') = \frac{1}{2^{n_0}}. \tag{1.26}$$

Pomoću tih nejednakosti i činjenice da funkcija $h : K^c \to \mathbb{R}$ monotono raste lako je pokazati da vrijedi

$$0 = c(0) < c(y) \le h(y'), \tag{1.27}$$

odakle se dobiva željena nejednakost $|c(y) - c(0)| \le h(y') = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Zaista, ako je $y \in K^c$, zbog nejednakosti (1.26) je $0 < h(y) \le h(y')$. Kako je $c(y) = h(y)$, imamo nejednakosti (1.27). Ako je pak $y \in K$, zbog (1.26) je

$$0 = c(0) < c(y) = \sup\{h(t) : t \in K^c, t \le y\} \le h(y').$$

(b) Slučaj $y = 1$. Tada je $c(y) = 1$, a zbog $|1 - x| < \delta < \frac{1}{3^{n_0}}$ je $1 - \frac{1}{3^{n_0}} < x$. Odaberimo bilo koju točku $x' \in J^{2^{n_0}-1}_{n_0} = \left(1 - \frac{2}{3^{n_0}}, 1 - \frac{1}{3^{n_0}}\right)$. Tada je

$$x' < x < y = 1 \quad \& \qquad h(x') = \frac{2^{n_0} - 1}{2^{n_0}}. \tag{1.28}$$

Pokažimo da vrijedi

$$h(x') \le c(x) < c(y) = 1, \tag{1.29}$$

odakle će slijediti $|c(y) - c(x)| \le 1 - h(x') = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Ako je $x \in K^c$, onda je $c(x) = h(x)$. Nadalje, zbog (1.28) je $h(x') \le h(x) < 1$. Ako je pak $x \in K$, onda je

$$h(x') \le \sup\{h(t) : t \in K^c, t \le x\} = c(x) < h(y) = 1.$$

(c) Slučaj $x > 0$, $y < 1$.

Ako je $[x, y] \cap K_{n_0} = \emptyset$, onda postoji interval $J^{k_0}_{n_0}$, $1 \le k_0 \le 2^{n_0} - 1$, koji sadrži cijeli segment $[x, y]$. Zato je

$$|c(x) - c(y)| = |h(x) - h(y)| = |\frac{k_0}{2^{n_0}} - \frac{k_0}{2^{n_0}}| = 0. \tag{1.30}$$

Sada pretpostavimo da je $[x,y]\cap K_{n_0}\neq\emptyset$. Kako je $|x-y|<\delta<\frac{1}{3^{n_0}}$ te kako se između svaka dva podsegmenta od K_{n_0} nalazi najmanje jedan interval $J^s_{n_0}$ $(1\leq s\leq 2^{n_0}-1)$ duljine barem $\frac{1}{3^{n_0}}$, segment $[x,y]$ siječe samo jedan podsegment od K_{n_0}. Neka je taj jedinstveni podsegment okružen intervalima $J^{k_0}_{n_0}$ i $J^{k_0+1}_{n_0}$.

Neka su $x'\in J^{k_0}_{n_0}$ i $x'\in J^{k_0+1}_{n_0}$, bilo koje dvije točke takve da je $x'<x$ i $y<y'$. Zatim odaberimo neku točku $z\in K^c$ takvu da je $x<z<y$. Kako je $\operatorname{int}K=\emptyset$, takva točka z postoji. Dakle, imamo

$$x'<x<z<y<y' \qquad \& \qquad h(x')=\frac{k_0}{2^{n_0}},\ h(y')=\frac{k_0+1}{2^{n_0}}. \tag{1.31}$$

Sada ćemo pokazati da je

$$h(x')\leq c(x)\leq c(y)\leq h(y'), \tag{1.32}$$

odakle će slijediti

$$|c(y)-c(x)|\leq h(y')-h(x')=\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon.$$

U tu svrhu iskoristit ćemo nejednakost (1.31) i činjenicu da funkcija h monotono raste: Ako su $x,y\in K^c$, onda je $c(x)=h(x)$ i $c(y)=h(y)$. Nadalje, zbog (1.31) je $h(x')\leq h(x)\leq h(y)\leq h(y')$, odakle slijedi (1.32). Sada pretpostavimo da je $x\in K$, a $y\in K^c$. Tada je $c(y)=h(y)$, a zbog (1.31) je

$$h(x')\leq c(x)=\sup\{h(t):t\in K^c,t\leq x\}\leq h(y)\leq h(y'),$$

odakle slijedi (1.32). Konačno, ako su $x,y\in K$, zbog (1.31) je

$$\begin{aligned}h(x')&\leq c(x)=\sup\{h(t):t\in K^c,t\leq x\}\leq h(z)\\&\leq\sup\{h(t):t\in K^c,t\leq y\}=c(y)\leq h(y').\end{aligned}$$

Time smo kompletirali dokaz uniformne neprekidnosti Cantorove funkcije. Osim toga, jednostavno je uočiti da iz (1.27), (1.29), (1.30) i (1.32) slijedi da je Cantorova funkcija monotono rastuća.

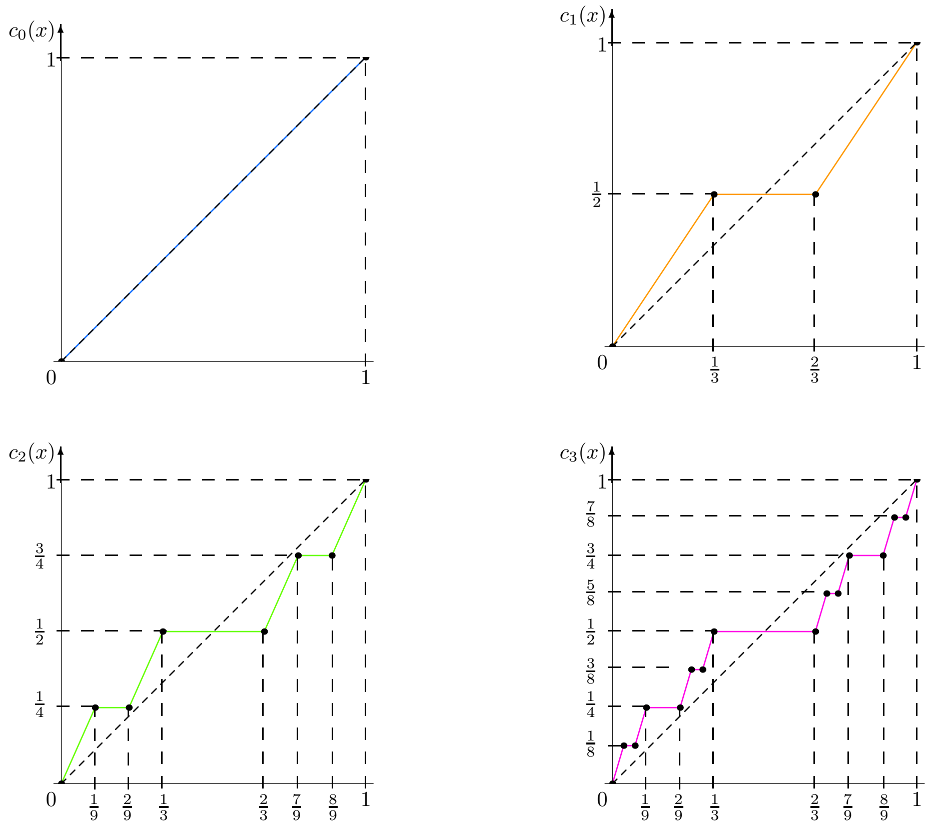
Drugi način konstrukcije Cantorove funkcije. Cantorova funkcija $c:[0,1]\to\mathbb{R}$ može se dobiti kao limes niza (c_n) rastućih i neprekidnih po dijelovima linearnih funkcija $c_n:[0,1]\to\mathbb{R}$. Konstrukciju započinjemo s funkcijom $c_0:[0,1]\to\mathbb{R}$, $c_0(x)=x$. Funkciju $c_1:[0,1]\to\mathbb{R}$ dobivamo tako da c_0 „izravnamo" nad segmentom $\left[\frac13,\frac23\right]$ na način prikazan na slici 5. Sada funkciju c_1 „izravnavamo" nad segmentima $\left[\frac19,\frac29\right]$ i $\left[\frac79,\frac89\right]$ na način prikazan na slici 6. Dobiva se funkcija $c_2:[0,1]\to\mathbb{R}$. Nastavljajući taj postupak „izravnavanja" dobiva se niz (c_n) rastućih i neprekidnih po dijelovima linearnih funkcija $c_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ sa sljedećim očiglednim svojstvima:

(i) Svaka funkcija $c_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ po dijelovima je linearna, rastuća i neprekidna. Pri tome je $c_n(0)=1$, $c_n(1)=1$.

(ii) „Ravni dio" funkcije c_n sadrži „ravni dio" funkcije c_{n_1}.

(iii) Za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi

$$|c_n(x) - c_{n-1}(x)| \le \frac{1}{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.33}$$



Slika 6. Konstrukcija Cantorove funkcije pomoću niza funkcija.

Pomoću (1.33) lako se dobiva sljedeća uniformna ocjena:

$$|c_{n+m}(x) - c_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \qquad \text{za svaki } x \in [0,1] \text{ i za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{1.34}$$

Zaista, jednostavnim računom dobivamo:

$$\begin{aligned} |c_{n+m}(x) - c_n(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{m} \big[c_{n+k}(x) - c_{n+k-1}(x)\big]\Big| \le \sum_{k=1}^{m} \big|c_{n+k}(x) - c_{n+k-1}(x)\big| \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Nejednakost (1.34) govori nam da je niz $\big(c_n(x)\big)$ Cauchyjev, pa je on i konvergentan. Cantorova funkcija $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ definira se formulom

$$c(x) := \lim_{n\to\infty} c_n(x), \qquad x \in [0,1].$$

Zbog uniformne ocjene (1.34) niz neprekidnih funkcija $\big(c_n(x)\big)$ uniformno konvergira prema funkciji c. Zato je c neprekidna funkcija.

Zadaci.

1. Neka je $0.a_1a_2a_3\ldots$ ternarni prikaz realnog broja $x \in [0,1]$, tj.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0,1,2\}.$$

(a) Pokažite da se Cantorov skup K podudara sa skupom svih realnih brojeva iz segmenta $[0,1]$ koji u svom ternarnom prikazu nemaju broj 1, tj.

$$K = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0,2\} \text{ za svaki } n \Big\}.$$

(b) Iskoristite (a) i pokažite da je K neprebrojiv skup.

(Uputa: (a) Ako je $x \in K_1$, onda je $x \in [0,1/3]$ ili je $x \in [2/3,1]$. U oba slučaja postoji $a_1 \in \{0,2\}$ takav da je

$$0.a_1 0000\ldots \le x \le 0.a_1 2222\ldots$$

Sada se indukcijom lako pokaže da za svaki $x \in K_n$ postoje jednoznačno određeni brojevi $a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}$ takvi da je

$$0.a_1a_2\ldots a_n 0000\ldots \le x \le 0.a_1a_2\ldots a_n 2222\ldots$$

Zato, ako je $x \in K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, onda se x može zapisati u obliku $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0,1,2\}$.

Obratno, neka je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0,1,2\}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} \le x \le \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^k},$$

odakle slijedi $x \in K_k$.

(b) Definirajte preslikavanje $h : K \to [0,1]$ na sljedeći način: Za $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0,1,2\}$, stavite $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$. Preslikavanje h nije injekcija (npr. $h(1/3) = h(2/3)$), ali je surjekcija. To znači da je neki podskup od K ekvipotentan sa $[0,1]$, pa K nije prebrojiv.

1.8. Lebesgue-Stieltjesova mjera na $\mathbb{R}$

Za definciju ove mjere upotrijebit ćemo konstrukciju opisanu propozicijom 1.27. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika $(a,b]$, $a \leq b$. Kako je prazan skup $\emptyset = (a,a] \in \mathcal{C}$ te kako se može pisati $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(-i,i]$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}$.

Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija, tj. ima svojstvo da je u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ limes zdesna $F(x_0+) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 < x}} F(x) = F(x_0)$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ ovako:

$$\tau((a,b]) := F(b) - F(a), \qquad a \leq b.$$

Očito je $\tau(\emptyset) = \tau((a,a]) = 0$.

Neka je A podskup od $\mathbb{R}$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(C_i, i \in \mathbb{N})$, $C_i \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup A, tj.

$$\mathcal{C}_A := \Big\{((a_i,b_i], i \in \mathbb{N}) : a_i \leq b_i \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i]\Big\}.$$

Funkciju $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ definiranu formulom

$$\mu_F^\star(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\big[F(b_i) - F(a_i)\big] : ((a_i,b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\Big\}$$

zovemo Lebesgue-Stieltjesova[7] vanjska mjera na $\mathbb{R}$ inducirana funkcijom F.

Primjedba 1.52. *Zbog monotonosti funkcija F u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ ima limes slijeva $F(x_0-) := \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)$ i vrijedi*

$$F(x_0-) \leq F(x_0) = F(x_0+).$$

Jednakost se javlja onda i samo onda ako je F neprekidna u točki x_0.

Propozicija 1.53.

$$\mu_F^\star(\{a\}) = F(a) - F(a-), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Kako je

$$\{a\} \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cup (a,a] \cup (a,a] \cup \ldots$$

za svaki $\varepsilon > 0$, zbog definicije od $\mu_F^\star$ je $\mu_F^\star(\{a\}) \leq F(a+\varepsilon) - F(a-\varepsilon)$, odakle prijelazom na limes $\varepsilon \to 0$ dobivamo $\mu_F^\star(\{a\}) \leq F(a) - F(a-)$.

Preostaje dokazati suprotnu nejednakost: $\mu_F^\star(\{a\}) \geq F(a) - F(a-)$.

[7] Thomas-Jan Stieltjes (1856-1894), nizozemski astronom i matematičar.

(a) U slučaj $F(a) = F(a-)$ suprotna nejednakost je posljedica nenegativnosti od $\mu_F^\star$.

(b) Slučaj $F(a) \neq F(a-)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji infimuma postoji niz intervala $(a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, takvih da je $\{a\} \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i]$ i

$$\sum_{i=1}^\infty [F(b_i) - F(a_i)] < \mu_F^\star(\{a\}) + \varepsilon.$$

Bez smanjenja općenitosti, neka je $a \in (a_1, b_1]$. Odaberimo strogo rastući niz (x_n) takav da je $a_1 < x_n < a$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tada je $(x_n, a] \subseteq (a_1, a] \subseteq (a_1, b_1]$, pa zbog monotonosti od F imamo $F(a) - F(x_n) \leq F(b_1) - F(a_1)$. Dakle

$$F(a) - F(x_n) \leq F(b_1) - F(a_1) \leq \sum_{i=1}^\infty [F(b_i) - F(a_i)] < \mu_F^\star(\{a\}) + \varepsilon,$$

odakle je

$$F(a) - F(a-) = \lim_{x_n \to a} [F(a) - F(x_n)] \leq \mu_F^\star(\{a\}) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ je $F(a) - F(a-) \leq \mu_F^\star(\{a\})$. □

Propozicija 1.54. *Funkcija $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ je vanjska mjera.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.27. □

Propozicija 1.55. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Tada je*

(i) $\mu_F^\star([a, b]) = F(b) - F(a-)$,

(ii) $\mu_F^\star([a, b)) = F(b-) - F(a-)$,

(iii) $\mu_F^\star((a, b]) = F(b) - F(a)$,

(iv) $\mu_F^\star((a, b)) = F(b-) - F(a)$.

Korisno je imati na umu sljedeće mnemotehničko pravilo: Ako je rubna točka uključena u interval, približavamo joj se izvana; ako nije uključena u interval, približavamo joj se iznutra.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Odaberimo neki strogo rastući niz realnih brojeva (b_n), takav da je $a < b_1$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b + \varepsilon$. Tada je

$$[a, b] \subset (a - \varepsilon, b_1] \bigcup \Big(\bigcup_{i=2}^\infty (b_{i-1}, b_i] \Big).$$

Kako je

$$\begin{aligned} &F(b_1) - F(a - \varepsilon) + \sum_{i=2}^\infty \big[F(b_i) - F(b_{i-1})\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} \big[F(b_n) - F(a - \varepsilon)\big] = F(b + \varepsilon -) - F(a - \varepsilon), \end{aligned}$$

iz definicije vanjske mjere $\mu_F^\star$ slijedi

$$\mu_F^\star([a,b]) \le F(b+\varepsilon-) - F(a-\varepsilon).$$

Zbog neprekidnosti zdesna funkcije F u točki $b+\varepsilon$ vrijedi $F(b+\varepsilon-) \le F(b+\varepsilon)$. Zato je $\mu_F^\star([a,b]) \le F(b+\varepsilon) - F(a-\varepsilon)$, odakle prijelazom na limes $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, dobivamo $\mu_F^\star([a,b]) \le F(b) - F(a-)$

Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratna nejednakost, što će za posljedicu imati $\mu_F^\star([a,b]) = F(b) - F(a-)$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Nadalje, neka je $((a_i,b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ bilo koji niz zdesna zatvorenih intervala koji pokrivaju segment $[a,b]$. Funkcija F je neprekidna zdesna u svakoj točki b_i, $i \in \mathbb{N}$, pa zato postoje brojevi $\delta_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{1.35}$$

Segment $[a,b]$ je kompaktan skup i zato otvoreni pokrivač $\big((a_i, b_i + \delta_i), i \in \mathbb{N}\big)$ ima konačan potpokrivač. Bez smanjena općenitosti, pretpostavimo da je

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i + \delta_i).$$

Matematičkom indukcijom po n lako je pokazati da vrijedi

$$F(b) - F(a-) \le \sum_{i=1}^{n} [F(b_i + \delta_i) - F(a_i)],$$

odakle pomoću (1.35) dobivamo

$$F(b) - F(a-) \le \sum_{i=1}^{n} [F(b_i) - F(a_i)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)] + \varepsilon.$$

Kako posljednja nejednakost vrijedi za svaki pokrivač $((a_i,b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, dobivamo

$$F(b) - F(a-) \le \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \big(F(b_i) - F(a_i)\big) : ((a_i,b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \right\} = \mu_F^\star([a,b]) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja ε dobivamo $F(b) - F(a-) \le \mu_F^\star([a,b])$. Time je dokazana tvrdnja (i).

(ii) Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj takav da je $a < b - \varepsilon$. Kako je $[a, b-\varepsilon] \subset [a,b)$, monotonost funkcije $\mu_F^\star$ i (i) povlače

$$\mu_F^\star([a,b)) \ge \mu_F^\star([a, b-\varepsilon]) = F(b-\varepsilon) - F(a-),$$

odakle uzimanjem limesa $\varepsilon \to 0$ dobivamo $\mu_F^\star([a,b)) \ge F(b-) - F(a-)$.

Preostaje pokazati da vrijedi i suprotna nejednakost. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Odaberimo neki strogo rastući niz realnih brojeva (b_n), takav da je $a < b_1$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Tada je

$$[a,b) \subset (a-\varepsilon, b_1] \bigcup \Big(\bigcup_{i=2}^{\infty} (b_{i-1}, b_i] \Big).$$

Kako je

$$\begin{aligned} &F(b_1) - F(a-\varepsilon) + \sum_{i=2}^{\infty} \big[F(b_i) - F(b_{i-1})\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} \big[F(b_n) - F(a-\varepsilon)\big] = F(b-) - F(a-\varepsilon), \end{aligned}$$

iz definicije vanjske mjere $\mu_F^\star$ slijedi $\mu_F^\star([a,b)) \le F(b-) - F(a-\varepsilon)$, odakle prijelazom na limes $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$, dobivamo $\mu_F^\star([a,b)) \le F(b-) - F(a-)$

(iii) i (iv) Postupa se slično kao pod (ii). $\square$

Prema teoremu 1.25. skup $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$ svih $\mu_F^\star$-izmjeriv podskupova od $\mathbb{R}$ je σ-algebra. Restrikciju vanjske mjere $\mu_F^\star$ na σ-algebru $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$ označavat ćemo s μ_F ili $d\mu_F$ i zvati Lebesgue-Stieltjesova mjera inducirana funkcijom F.

Može se pokazati da se za $F(x) = x$ Lebesgue-Stieltjesova mjera podudara s Lebesgueovom mjerom.

Propozicija 1.56. *Neka je μ_F Lebesgue-Stieltjesova mjera na σ-algebri $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$. Vrijedi:*

(i) Mjera μ_F je σ-konačna.

(ii) Mjera μ_F je konačna onda i samo onda ako je funkcija F omeđena.

Dokaz. (i) Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva, takvi da (a_n) strogo pada i divergira prema $-\infty$, da (b_n) strogo raste i divergira prema ∞, te da je $a_1 < b_1$. Tada je $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ i $\mu_F((a_n, b_n] = F(b_n) - F(a_n)$. Dakle, mjera μ_F je σ-konačna.

(ii) Kako je $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ i $((a_n, b_n])$ uzlazan niz izmjerivih skupova, pomoću tvrdnje (iii) iz propozicije 1.18. dobivamo

$$\mu_F(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu_F((a_n, b_n] = \lim_{n\to\infty} \big[F(b_n) - F(a_n)\big],$$

odakle zaključujemo: Ako je F omeđena funkcija, onda je $\lim_{n\to\infty} F(b_n) < \infty$ i $-\infty < \lim_{n\to\infty} F(a_n)$, pa je mjera μ_F konačna. Ako je mjera μ_F konačna, onda je $\lim_{n\to\infty} F(b_n) < \infty$ i $-\infty < \lim_{n\to\infty} F(a_n)$ pa je F omeđena funkcija. $\square$

Propozicija 1.57. *Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}$ je $\mu_F^\star$-izmjeriv, tj. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu_F^\star}$.*

Dokaz. Lako je modificirati dokaz propozicije 1.41. kako bi se pokazalo da je svaki beskonačni interval oblika $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $\mu_F^\star$-izmjeriv, tj. da pripada σ-algebri $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$. Taj dio dokaza prepuštamo čitatelju.

Prema teoremu 1.12. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ najmanja je σ-algebra koja sadrži familiju svih takvih beskonačnih intervala. Zato je $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu_F^\star}$. □

Uočimo da je $\{b\} = \bigcap_{n=1}^\infty (b - \frac{1}{n}, b]$. Primjenom tvrdnje (iv) iz propozicije 1.18. dobivamo

$$\mu_F(\{b\}) = \lim_{n\to\infty} \Big[F(b) - F\Big(b - \frac{1}{n}\Big)\Big] = F(b) - F(b-).$$

Propozicija 1.58. *Lebesgue-Stieltjesova mjera μ_F je jedina mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ koja svakom intervalu $(a, b]$, $a < b$, pridružuje broj $F(b) - F(a)$, tj. $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.*

Dokaz. Uz potrebne modifikacije dokaz se svodi na dokaz propozicije 1.51. □

Zadaci.

1. Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < -1 \\ 1 + x, & \text{ako je } -1 \le x < 0 \\ 2 + x^2, & \text{ako je } 0 \le x < 2 \\ 9, & \text{ako je } x \ge 2. \end{cases}$$

Izračunati mjeru μ_F sljedećih skupova: (a) $\{2\}$. (b) $[-1/2, 3)$. (c) $(-1, 0] \cup (1, 2)$. (d) $[0, 1/2) \cup (1, 2]$. (e) $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

(Rješenje: (a) $\mu(\{2\}) = 3$. (b) $\mu([-1/2, 3)) = 7\frac{1}{2}$. (c) $\mu((-1, 0] \cup (1, 2)) = 5$. (d) $\mu([0, 1/2) \cup (1, 2]) = 7\frac{1}{4}$. (e) $\mu(\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}) = 7\frac{1}{4}$. Uputa: $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} = \bigcup_{n=1}^\infty (1/2, n) \cup \bigcup_{n=1}^\infty (-n, -1/2)$. Zato je npr. $\mu_F(\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_F(1/2, n)) = \lim_{n\to\infty}[F(n-) - F(1/2)] = 9 - 2\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$.)

1.9. Prostor potpune mjere

Neka je $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mjera na σ-algebri $\mathcal{A}$ podskupova od X. Prisjetimo se da uređenu trojku $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zovemo prostor mjere, a članove od $\mathcal{A}$ izmjerivim skupovima.

Za skup $N \subseteq X$ kažemo da je μ-zanemariv ili kraće zanemariv ako postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Dakle, zanemarivi skupovi su podskupovi izmjerivih skupova mjere nula. Uočite da je svaki skup mjere nula ujedno i zanemariv, te da zanemariv skup ne mora biti izmjeriv. Prazan skup $\emptyset$ je zanemariv.

Neka je $\mathcal{N}_\mu$ skup svih μ-zanemarivih skupova. Ako je $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{A}$, tj. ako σ-algebra $\mathcal{A}$ sadrži sve zanemarive skupove, onda za prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da je prostor potpune mjere ili potpun prostor, a za mjeru μ da je potpuna mjera.

Primjedba 1.59. *Restrikcija vanjske mjere* $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ *na* σ*-algebru* $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ *je mjera (teorem 1.25.). Ta je restrikcija potpuna mjera. Zaista, neka je* $N \subseteq X$ *zanemariv skup. Tada postoji skup* $B \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ *takav da je* $N \subseteq B$ *i* $\mu^\star(B) = 0$*, odakle zbog monotonosti funkcije* $\mu^\star$ *slijedi* $\mu^\star(N) = 0$*. Prema propoziciji 1.24. je* $N \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$*.*

Specijalno, restrikcija Lebesgueove mjere na σ*-algebru Lebesgueovih skupova je potpuna mjera.*

Nažalost, restrikcija Lebesgueove mjere na Borelovu σ*-algebru* $\mathcal{B}(R)$ *nije potpuna mjera (vidi korolar 2.13.).*

Neka je

$$\mathcal{A}_\mu := \{E \cup N : E \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Kako je $E = E \cup \emptyset$, za svaki $E \in \mathcal{A}$ i kako je $\emptyset$ zanemariv, to je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{A}_\mu$ σ-algebra. U tu svrhu trebat će nam sljedeća propozicija.

Propozicija 1.60. *Skup* $A \subseteq X$ *je član familije* $\mathcal{A}_\mu$ *onda i samo onda ako postoje skupovi* $E, F \in \mathcal{A}$ *takvi da je*

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0. \tag{1.36}$$

Dokaz. Neka je $A = E \cup N$, gdje su $E \in \mathcal{A}$ i $N \in \mathcal{N}_\mu$. Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Definiramo li $F := E \cup B \in \mathcal{A}$, dobivamo

$$E \subseteq A = E \cup N \subseteq E \cup B = F.$$

Nadalje, kako je $F \backslash E = B \backslash E \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$, monotonost mjere μ daje $\mu(F \backslash E) \leq \mu(B) = 0$, odakle slijedi $\mu(F \backslash E) = 0$.

Neka su $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da vrijedi (1.36). Pokažimo da je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Iz (1.36) slijedi

$$A = E \cup (A \backslash E) \quad \& \quad A \backslash E \subseteq F \backslash E.$$

Kako je $A \backslash E \subseteq F \backslash E$ i $\mu(F \backslash E) = 0$, skup $A \backslash E$ je zanemariv. □

Propozicija 1.61. *Familija* $\mathcal{A}_\mu$ *je* σ*-algebra.*

Dokaz. Treba pokazati da familija $\mathcal{A}_\mu$ ima svojstva (σ1)-(σ3) iz definicije 1.1.

(σ1) Već smo pokazali da je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$. Specijalno, tada je $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu$.

(σ2) Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Prema propoziciji 1.60. tada postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je $E \subseteq A \subseteq F$ i $\mu(F \backslash E) = 0$. Zato je

$$F^c \subseteq A^c \subseteq E^c, \qquad E^c, F^c \in \mathcal{A}.$$

Kako je $E^c \backslash F^c = E^c \cap F = F \backslash E$, to je $\mu(E^c \backslash F^c) = \mu(F \backslash E) = 0$, pa iz propozicije 1.60. slijedi $A^c \in \mathcal{A}_\mu$.

(σ3) Neka je (A_n) niz skupova iz $\mathcal{A}_\mu$. Treba pokazati da je $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}_\mu$. Prema propoziciji 1.60. za svaki n postoje skupovi $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ i $\mu(F_n \backslash E_n) = 0$. Tada je

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty F_n, \qquad \bigcup_{n=1}^\infty E_n, \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{A}.$$

Prema propoziciji 1.60. dovoljno je pokazati da je $\mu\big(\big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\big)\backslash\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big)\big) = 0$. Zaista, kako je $\Big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big)\backslash\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (F_n \backslash E_n)$, primijenimo li prvo svojstvo monotonosti a zatim svojstvo σ-subaditivnosti mjere dobivamo

$$\mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big)\backslash\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big)\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (F_n \backslash E_n)\Big) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(F_n \backslash E_n) = 0.$$

$\square$

Definicija 1.62. *Neka su $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ i $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dva prostora mjere na istom skupu X. Kažemo da je $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$* proširenje *od $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ ako je $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ i $\mu_2(A) = \mu_1(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}_1$.*

Sada ćemo pokazati kako se mjera $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ može na prirodan način proširiti do nove mjere $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$. Krenimo intuitivnim razmišljanjem. Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$ (skup A ne mora pripadati σ-algebri $\mathcal{A}$). Uzmimo bilo koje skupove $E, F \in \mathcal{A}$ takve da je

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0.$$

Uočite da iz $\mu(F \backslash E) = 0$ slijedi $\mu(E) = \mu(F)$. Kako se skup A nalazi u ,,sendviču" skupova E, F iste mjere $\mu(E) = \mu(F)$, te kako se zahtijeva da bude $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$, jasno je da mora vrijediti

$$\tilde{\mu}(A) := \mu(E) = \mu(F) \tag{1.37}$$

ako proširenje $\tilde{\mu}$ postoji. Odmah se postavlja pitanje ovisi li tako definirana ,,mjera" o izboru skupova $E, F \in \mathcal{A}$. Pretpostavimo da su $E_1, F_1 \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$E_1 \subseteq A \subseteq F_1 \quad \& \quad \mu(F_1 \backslash E_1) = 0.$$

Tada je

$$E \subseteq E \cup E_1 \subseteq A \subseteq F \cap F_1 \subseteq F,$$

pa je

$$\mu(E) \le \mu(E \cup E_1) \le \mu(F \cap F_1) \le \mu(F),$$

odakle zbog $\mu(E) = \mu(F)$ dobivamo

$$\mu(E) = \mu(E \cup E_1) = \mu(F \cap F_1) = \mu(F).$$

Na sličan način dobiva se (dovoljno je zamijeniti par E, F s parom E_1, F_1)

$$\mu(E_1) = \mu(E \cup E_1) = \mu(F \cap F_1) = \mu(F_1).$$

Dakle, $\mu(E) = \mu(F) = \mu(E_1) = \mu(F_1)$, što će značiti da naša konstrukcija "mjere" $\tilde{\mu}$ neće ovisiti o izboru para $E, F \in \mathcal{A}$.

Ako je $A \in \mathcal{A}$, stavimo $E = F = A$. Tada je očito $E \subseteq A \subseteq F$ i $\mu(F \backslash E) = 0$, odakle slijedi $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$, tj. $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$. Specijalno je $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

Propozicija 1.63. *Neka je $A = E \cup N$, gdje su $E \in \mathcal{A}$ i $N \in \mathcal{N}_\mu$. Tada je*

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(E).$$

Dokaz. Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Neka je $F := E \cup B$. Tada je

$$E \subset A = E \cup N \subseteq E \cup B = F.$$

Nadalje, kako je $F \backslash E = B \backslash E \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$, monotonost mjere μ daje $\mu(F \backslash E) \leq \mu(B) = 0$, odakle slijedi $\mu(F \backslash E) = 0$. Tvrdnja slijedi iz definicijske formule (1.37). $\square$

Propozicija 1.64. *Neka je funkcija $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ definirana formulom (1.37). Tada vrijedi:*

(a) Funkcija $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ je mjera koja proširuje mjeru $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

(b) $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ je najmanji i jedini prostor potpune mjere koji proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Dokaz. (a) Već smo pokazali da je $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$. Sada ćemo pokazati da je funkcija $\tilde{\mu}$ mjera na $\mathcal{A}_\mu$, tj. da ima svojstva ($\tilde{\mu}$1)-($\tilde{\mu}$3) iz definicije 1.16.

($\tilde{\mu}$1) Očito je $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$, jer je $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$.

($\tilde{\mu}$2) Iz definicijske formule (1.37) slijedi da je $\tilde{\mu}(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}_\mu$.

($\tilde{\mu}$3) Neka je (A_n) niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}_\mu$. Treba pokazati da je

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

Prema propoziciji 1.60. za svaki n postoje skupovi $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$E_n \subseteq A_n \subseteq F_n \quad \& \quad \mu(F_n \backslash E_n) = 0,$$

odakle iz definicijske formule (1.37) slijedi

$$\tilde{\mu}(A_n) = \mu(E_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{A}.$$

U dokazu propozicije 1.61. pokazali smo da je $\mu\big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\big)\backslash\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)\big) = 0$. Kako su po pretpostavci skupovi A_n disjunktni, a $E_n \subseteq A_n$, to su i skupovi E_n disjunktni, pa iz definicijske formule (1.37) dobivamo

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

Time smo pokazali da je $\tilde{\mu}$ mjera.

(b) Kako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ i $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$, prostor mjere $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ je proširenje od $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sada ćemo pokazati da je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ prostor potpune mjere, tj. da je $\tilde{\mu}$ potpuna mjera. Pretpostavimo da je $N \subseteq B$, $B \in \mathcal{A}_\mu$ i $\tilde{\mu}(B) = 0$. Treba pokazati da je $N \in \mathcal{A}_\mu$. Kako je $\tilde{\mu}(B) = 0$, postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je $E \subseteq B \subseteq F$ i $\mu(F\backslash E) = \mu(E) = \mu(F) = 0$. Kako je

$$\emptyset \subseteq N \subseteq F \quad \& \quad \mu(F\backslash\emptyset) = 0,$$

prema definicijskoj formuli (1.37) je $\tilde{\mu}(N) = \mu(\emptyset) = 0$. To znači da je mjera $\tilde{\mu}$ potpuna.

Sada ćemo pokazati da je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ najmanji i jedini prostor potpune mjere koji proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pretpostavimo da je $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ neko drugo proširenje s potpunom mjerom $\hat{\mu}$. Treba pokazati da je $\mathcal{A}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}_{|\mathcal{A}_\mu} = \tilde{\mu}$. Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Zapišimo ga u obliku

$$A = E \cup N, \qquad E \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu.$$

Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, po definiciji postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Kako je $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ proširenje od $(X, \mathcal{A}, \mu)$, te kako je $E, B \in \mathcal{A}$, to je $E, B \in \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}(B) = \mu(B) = 0$. Kako je $\hat{\mu}$ potpuna mjera, to $N \subseteq B$ i $\hat{\mu}(B) = 0$ povlači $N \in \hat{\mathcal{A}}$. Sada iz $E, N \in \hat{\mathcal{A}}$ slijedi $A = E \cup N \in \hat{\mathcal{A}}$. Time je pokazano da je $\mathcal{A}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{A}}$. Nadalje, iz $E \subseteq A = E \cup N \in \hat{\mathcal{A}}$ dobivamo

$$\hat{\mu}(E) \leq \hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(E) + \hat{\mu}(N) = \hat{\mu}(E),$$

odakle slijedi $\hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(E)$. Kako je $E \in \mathcal{A}$, to je $\hat{\mu}(E) = \mu(E)$ pa je $\hat{\mu}(A) = \mu(E)$. S druge strane, prema propoziciji 1.63. je $\tilde{\mu}(A) = \mu(E)$. Tako smo dokazali da je $\hat{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A)$. □

Definicija 1.65. *Prostor* $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ *zove se* upotpunjenje prostora $(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Pri tome za σ-algebru $\mathcal{A}_\mu$ kažemo da je* upotpunjenje σ-algebre $\mathcal{A}$, *a za mjeru* $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ *da je* upotpunjenje mjere $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

Propozicija 1.66. *Prostor* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}, \lambda^\star_{d|\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}})$ *je upotpunjenje od* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \lambda)$*, gdje je* $\lambda = \lambda^\star_{d|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}}$.

Za dokaz ove tvrdnje treba će nam sljedeća lema:

Lema 1.67. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *Lebesgueov skup. Tada postoje Borelovi skupovi* $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ *takvi da je*

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \lambda(F \backslash E) = 0.$$

Dokaz. Neka je A Lebesgueov skup. Tada je ili (a) $\lambda(A) < \infty$ ili (b) $\lambda(A) = \infty$.

(a) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 1.50. postoji kompaktan skup K_n takav da je

$$K_n \subseteq A \quad \& \quad \lambda(A) - \frac{1}{n} < \lambda(K_n).$$

Nadalje, prema propoziciji 1.47. postoji otvoren skup U_n takav da je

$$A \subseteq U_n \quad \& \quad \lambda(U_n) < \lambda(A) + \frac{1}{n}.$$

Kako je $\lambda(A) < \infty$, prema propoziciji 1.18. je

$$\lambda(A \backslash K_n) = \lambda(A) - \lambda(K_n) \quad \& \quad \lambda(U_n \backslash A) = \lambda(U_n) - \lambda(A).$$

Neka je $E := \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, $F := \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Skupovi E i F su Borelovi. Očito je $E \subseteq A \subseteq F$. Nadalje, kako je

$$F \backslash E \subseteq U_n \backslash K_n = (U_n \backslash A) \cup (A \backslash K_n) \quad \& \quad (U_n \backslash A) \cap (A \backslash K_n) = \emptyset,$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\lambda(F \backslash E) &\leq \lambda(U_n \backslash K_n) = \lambda(U_n \backslash A) + \lambda(A \backslash K_n) \\ &= \Big(\lambda(U_n) - \lambda(A)\Big) + \Big(\lambda(A) - \lambda(K_n)\Big) \leq \frac{2}{n},\end{aligned}$$

odakle uzimajući limes $n \to \infty$ dobivamo $\lambda(F \backslash E) = 0$.

(b) Pretpostavimo da je $\lambda(A) = \infty$. Prema lemi 1.11. postoji niz (I_n) međusobno disjunktnih d-intervala takvih da je $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Svaki d-interval I_n je omeđen i Borelov skup. Zato su i skupovi

$$A_n := A \cap I_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

omeđeni, međusobno disjunktni i Borelovi. Zbog omeđenosti je $\lambda(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zato, prema već dokazanoj tvrdnji (a), za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje Borelovi skupovi $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ i $\mu(F_n \backslash E_n) = 0$. Neka je $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, $F := \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Tada je $E \subseteq A \subseteq F$ i $\lambda(F \backslash E) = 0$. (vidi dokaz propozicije 1.61.) $\square$

Dokaz propozicije 1.66. Pretpostavimo da je $(\mathbb{R}^d, \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}, \tilde{\lambda})$ upotpunjenje prostora mjere $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \lambda)$. Treba pokazati da je $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star} = \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}$ i da je $\lambda_d^\star(A) = \tilde{\lambda}(A)$ za svaki $A \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$.

Otprije znamo da je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$.

Prema lemi 1.67. i propoziciji 1.60. je $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}$. Nadalje, prema propoziciji 1.64. je $\tilde{\lambda}(A) = \lambda_d^\star(A)$ za svaki $A \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. Dakle, preostaje pokazati da je $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. Neka je $A \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}$. Tada postoje Borelovi skupovi $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ takvi da je

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \lambda(F \backslash E) = 0.$$

Kako je $A \backslash E \subseteq F \backslash E$ i $\lambda(F \backslash E) = 0$, zbog potpunosti Lebesgueove mjere na $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ (vidi primjedbu 1.59.) je $A \backslash E \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. Konačno, sada iz jednakosti $A = E \cup (A \backslash E)$ slijedi $A \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. □

Primjedba 1.68. *Navedimo bez dokaza da je* $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_F^\star}, \mu^\star_{F|\mathcal{M}_{\mu_F^\star}})$ *upotpunjenje od* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu_F)$, *gdje je* $\mu_F = \mu^\star_{F|\mathcal{B}_\mathbb{R}}$.

Definicija 1.69. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *bilo koji prostor mjere.*

(a) Funkciju $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ *definiranu formulom*

$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B, B \in \mathcal{A}\} \tag{1.38}$$

zovemo vanjska mjera generirana mjerom μ.

(b) Funkciju $\mu_\star : 2^X \to [0, \infty]$ *definiranu formulom*

$$\mu_\star(A) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A, C \in \mathcal{A}\} \tag{1.39}$$

zovemo unutarnja mjera generirana mjerom μ.

Očigledno je $\mu^\star(\emptyset) = 0$ i $\mu_\star(\emptyset) = 0$. Zbog monotonosti mjere μ vrijedi:

(i) funkcije $\mu^\star$ i $\mu_\star$ su monotone,

(ii) $\mu_\star(A) \leq \mu(A) \leq \mu^\star(A)$ za svaki $A \subseteq X$,

(iii) $\mu_\star(A) = \mu(A) = \mu^\star(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.

Propozicija 1.70. *Funkcija* $\mu^\star$ *je vanjska mjera.*

Dokaz. Definirajmo: $\mathcal{C} := \mathcal{A}$ i $\tau(C) := \mu(C)$, $C \in \mathcal{C}$. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 1.27. □

Propozicija 1.71. *Funkcija* $\mu_\star : 2^X \to [0, \infty]$ *definirana s (1.39) ima sljedeća svojstva:*

(i) $\mu_\star(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu_\star(A) \leq \mu_\star(B)$,

(iii) Ako su skupovi $A_i \subseteq X$, $i \in \mathbb{N}$, *disjunktni, onda je* $\mu_\star\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu_\star(A_i)$.

Dokaz. Svojstva (i) i (ii) su očigledna.

(iii) Neka je $(A_i, i \in \mathbb{N})$ niz disjunktnih podskupova od X. Ako je za neki $i \in \mathbb{N}$, $\mu_\star(A_i) = \infty$, onda je zbog (ii) pogotovo $\mu_\star\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \infty$, pa vrijedi nejednakost iz (iii). Zato nadalje pretpostavimo da je $\mu_\star(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema definiciji funkcije $\mu_\star$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji skup $C_i \in \mathcal{A}$ takav da je

$$C_i \subseteq A_i \quad \& \quad \mu(C_i) > \mu_\star(A_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{1.40}$$

Neka je $C := \bigcup_{i=1}^\infty C_i \in \mathcal{A}$. Skupovi C_i, $i \in \mathbb{N}$, su disjunktni jer su skupovi A_i disjunktni po pretpostavci. Zato je

$$\mu(C) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty C_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i).$$

Osim toga, kako je $C \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, to je

$$\mu(C) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big).$$

Sada pomoću (1.40) dobivamo

$$\sum_{i=1}^\infty \mu_\star(A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \Big(\mu(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i) + \varepsilon = \mu(C) + \varepsilon \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobivamo nejednakost iz (iii). □

Propozicija 1.72. *Neka je* $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ *upotpunjenje prostora* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *i* $A \subseteq X$ *bilo koji skup sa svojstvom* $\mu^\star(A) < \infty$. *Tada je* $A \in \mathcal{A}_\mu$ *onda i samo onda ako je* $\mu_\star(A) = \mu^\star(A)$.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Tada postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je (vidi propoziciju 1.60.)

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0.$$

Tada je (vidi definiciju 1.69.)

$$\mu(E) \leq \mu_\star(A) \leq \mu^\star(A) \leq \mu(F).$$

Kako je $\mu(E) = \mu(F)$, dobivamo $\mu_\star(A) = \mu^\star(A)$.

Neka je $\mu_\star(A) = \mu^\star(A) < \infty$. Prema propoziciji 1.60. dovoljno je pokazati da postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ sa svojstvom $\mu(F\backslash E) = 0$.

Prvo uočimo da je $\mu(A) < \infty$ jer je $\mu_\star(A) \leq \mu(A) \leq \mu^\star(A)$.

Prema definiciji funkcija $\mu_\star$ i $\mu^\star$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje skupovi $C_n, B_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$C_n \subseteq A \subseteq B_n, \qquad \mu_\star(A) - \frac{1}{n} < \mu(C_n), \quad \mu(B_n) < \mu^\star(A) + \frac{1}{n},$$

što zahvaljujući pretpostavci $\mu_\star(A) = \mu^\star(A)$ za naše potrebe zapisati kao

$$C_n \subseteq A \subseteq B_n, \qquad \mu^\star(A) - \frac{1}{n} < \mu(C_n), \quad \mu(B_n) < \mu_\star(A) + \frac{1}{n}. \tag{1.41}$$

Kako je $\mu(A) < \infty$, zbog $C_n \subseteq A$ je i $\mu(C_n) < \infty$, pa stoga prema propoziciji 1.18. vrijedi

$$\mu(A\backslash C_n) = \mu(A) - \mu(C_n) \quad \& \quad \mu(B_n\backslash A) = \mu(B_n) - \mu(A).$$

Neka je $E := \bigcup_{n=1}^\infty C_n \in \mathcal{A}$, $F := \bigcap_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{A}$. Očito je $E \subseteq A \subseteq F$. Preostaje pokazati da je $\mu(F\backslash E) = 0$. Kako je

$$F\backslash E \subseteq B_n\backslash C_n = (B_n\backslash A) \cup (A\backslash C_n) \quad \& \quad (B_n\backslash A) \cap (A\backslash C_n) = \emptyset,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \mu(F\backslash E) &\leq \mu(B_n\backslash C_n) = \mu(B_n\backslash A) + \mu(A\backslash C_n) \\ &= \Big(\mu(B_n) - \mu(A)\Big) + \Big(\mu(A) - \mu(C_n)\Big). \end{aligned}$$

Nejednakosti $\mu_\star(A) \leq \mu(A) \leq \mu^\star(A)$ i (1.41) povlače

$$\Big(\mu(B_n) - \mu(A)\Big) + \Big(\mu(A) - \mu(C_n)\Big) \leq \Big(\mu(B_n) - \mu_\star(A)\Big) + \Big(\mu^\star(A) - \mu(C_n)\Big) \leq \frac{2}{n}.$$

Dakle, $\mu(F\backslash E) \leq \frac{2}{n}$, odakle uzimajući limes $n \to \infty$ dobivamo $\mu(F\backslash E) = 0$. □

Zadaci.

1. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokazati da familija $\mathcal{N}_\mu$ svih μ-zanemarivih skupova ima sljedeća svojstva: (a) Ako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, a $M \in \mathcal{A}$ i $M \subseteq N$, onda je $M \in \mathcal{N}_\mu$. (b) Ako je $(N_i, i \in \mathbb{N})$ niz μ-zanemarivih skupova, onda je $\bigcup_{i=1}^\infty N_i$ također μ-zanemariv skup.

2. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor potpune mjere. Dokažite: Ako je $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq X$ i $\mu(A\Delta B) = 0$, onda je $B \in \mathcal{A}$ i $\mu(B) = \mu(A)$.

   (Uputa: Kako je $A\backslash B, B\backslash A \subseteq A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, potpunost prostora i pretpostavka $\mu(A\Delta B) = 0$ povlače $A\backslash B, B\backslash A \in \mathcal{A}$, $\mu(A\backslash B) = \mu(B\backslash A) = 0$. Sada iz $A\cap B = A\backslash(A\backslash B)$ slijedi $A\cap B \in \mathcal{A}$. Zato je $B = (B\backslash A)\cup(A\cap B) \in \mathcal{A}$. Konačno, iz $\mu(B) = \mu(B\backslash A)+\mu(B\cap A) = \mu(B\cap A)$ i $\mu(A) = \mu(A\backslash B)+\mu(B\cap A) = \mu(B \cap A)$ slijedi $\mu(B) = \mu(A)$.)

3. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je lokalno izmjeriv ako je $E \cap A \in \mathcal{A}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\mu(A) < \infty$. Neka je $\bar{\mathcal{A}}$ familija svih lokalno izmjerivih skupova. Očito je $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Ukoliko je $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$, za mjeru μ i prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da su zasićeni. a) Dokazati da je $\bar{\mathcal{A}}$ jedna σ-algebra na X. (b) Pokazati da je svaka σ-konačna mjera zasićena. (c) Neka je μ σ-konačna mjera. Definirajmo funkciju $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ formulom
$$\bar{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ako je } E \in \mathcal{A} \\ \infty, & \text{ako je } E \in \bar{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A}. \end{cases}$$
Dokažite: (c1) $\bar{\mu}$ je mjera na $(X, \bar{\mathcal{A}})$, tj. da prostor $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$. (c2) Ako je mjera μ potpuna, onda je i $\bar{\mu}$ potpuna. (c3) Dokažite da je prostor mjere $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ zasićen.

1.10. Borelova mjera

Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Kao i do sada, s $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}_X$ označavamo Borelovu σ-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$. Za mjeru μ kažemo da je Borelova mjera na X ako je $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, tj. ako je svaki Borelov skup izmjeriv. Za Borelovu mjeru kažemo da je lokalno konačna ako za svaku točku $x \in X$ postoji otvorena okolina $U_x \in \mathcal{U}$ točke x sa svojstvima $x \in U_x$ i $\mu(U_x) < \infty$.

Primjer 1.73. *Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ je lokalno konačna Borelova mjera.*

Lema 1.74. *Neka je μ lokalno konačna Borelova mjera na X. Ako je $K \subseteq X$ kompaktan skup, onda je je $\mu(K) < \infty$.*

Dokaz. Za svaku točku $x \in K$ odaberimo otvorenu okolinu U_x od x takvu da je $\mu(U_x) < \infty$. Tada je $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$. Kako je K kompaktan, postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_n$ takvih da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n Y_{x_i}$, pa je
$$\mu(K) \le \mu\Big(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}\Big) \le \sum_{i=1}^n \mu(U_{x_i}) < \infty.$$
□

Korolar 1.75. *Neka je μ lokalno konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}^d$. Ako je $M \subseteq \mathbb{R}^d$ omeđen skup, onda je je $\mu(M) < \infty$.*

Dokaz. Zatvarač $\mathrm{Cl}\, M$ skupa M je kompaktan, pa imamo $\mu(M) \le \mu(\mathrm{Cl}\, M) < \infty$.
□

Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija. U teoriji vjerojatnosti takva funkcija zove se funkcija distribucije na $\mathbb{R}$. Ovakve funkcije služe za konstrukciju lokalno konačne mjere na $\mathbb{R}$. Naime, ako je zadana lokalno konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}$ onda je, do na aditivnu konstantu, jedinstveno određena funkcija distribucije F i za nju vrijedi
$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & x \ge 0 \\ -\mu((x, 0]), & x < 0 \end{cases} \qquad \& \qquad \mu((a, b]) = F(b) - F(a), \quad a \le b.$$

Obratno, ako je zadana funkcija distribucije F na $\mathbb{R}$ onda postoji jedinstvena lokalno konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}$ takva da je

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad a \leq b.$$

Sve ovo što smo sada rekli nalazi se u sljedeća dva teorema.

Teorem 1.76. *Neka je μ lokalno konačna Borelova mjera na skupu $\mathbb{R}$ i $c_0 \in \mathbb{R}$. Tada postoji jedna jedina rastuća i zdesna neprekidna funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

(a) $F(c_0) = 0$,

(b) $\mu = \mu_F$ *na* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, *gdje* μ_F *označava Lebesgue-Stieltjesovu mjeru induciranu funkcijom* F.

Za bilo koju drugu rastuću i zdesna neprekidnu funkciju $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bit će $\mu = \mu_G$ (na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) onda i samo onda ako se G od F razlikuje za neku konstantu.

Dokaz. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom:

$$F(x) = \begin{cases} \mu((c_0, x]), & \text{ako je } c_0 \leq x \\ -\mu((x, c_0]), & \text{ako je } x < c_0. \end{cases}$$

Funkcija F je realna (korolar 1.75.), a rastuća je zbog monotonosti mjere μ.

Sada ćemo pokazati da je F neprekidna zdesna u svakoj točki. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Odaberimo niz različitih realnih brojeva (x_n) takav da $x_n \downarrow x$. Ako je $c_0 \leq x$, onda je $(c_0, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, silazan niz intervala pa vrijedi (propozicija 1.18.(iv))

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((c_0, x_n]) = \mu((c_0, x]) = F(x).$$

Ako je $x < c_0$, onda postoji prirodan broj n_0 takav da je $x_n < c_0$, $n \geq n_0$. Niz intervala $(c_0, x_n]$, $n \geq n_0$, je silazan pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = -\lim_{n\to\infty} \mu((x_n, c_0]) = -\mu((x, c_0]) = F(x).$$

Time smo pokazali da je F zdesna neprekidna u svakoj točki.

(a) Očigledno je $F(c_0) = 0$.

(b) Pokažimo da je $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Za dokaz te tvrdnje upotrijebit ćemo korolar 1.36. Krenimo redom. Familija

$$\mathcal{C} := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

generira Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tj. $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Osim toga, $\mathcal{C}$ je π-sistem na $\mathbb{R}$ (sadrži sve svoje konačne presjeke). Prvo ćemo pokazati da je $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{C}$. Neka je $(a,b] \in \mathcal{C}$. Po definiciji Lebesgue-Stieltjesove mjere je $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$. S druge strane, iz definiciji funkcije F lako se provjerava da je $F(b) - F(a) = \mu((a,b])$. Dakle,

$$\mu((a,b]) = \mu_F((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \forall\, (a,b] \in \mathcal{C}. \tag{1.42}$$

Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva, takvi da (a_n) strogo pada i divergira prema $-\infty$, da (b_n) strogo raste i divergira prema ∞, te da je $a_1 < b_1$. Tada je

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n].$$

Svi skupovi $C_n := (a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, pripadaju familiji $\mathcal{C}$, tvore uzlazan niz i prema (1.42) vrijedi

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \qquad \& \qquad \mu(C_n) = \mu_F(C_n) = F(b_n) - F(a_n) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.43}$$

Time smo pokazali da su ispunjene sve pretpostavke (a to su (1.42) i (1.43)) za primjenu korolara 1.36., pa je zato $\mu = \mu_F$ na cijeloj σ-algebri $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ako je G neka druga rastuća i zdesna neprekidna funkcija sa svojstvom $\mu_G = \mu(= \mu_F)$ na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, onda je

$$\begin{aligned} G(x) - G(c_0) &= \mu_G((c_0, x]) = \mu_F((c_0, x]) = F(x) - F(c_0), \qquad x \geq c_0 \\ G(c_0) - G(x) &= \mu_G((x, c_0]) = \mu_F((x, c_0]) = F(c_0) - F(x), \qquad x < c_0. \end{aligned}$$

Dakle, F i G se razlikuju za konstantu. Stoga, ako je $G(c_0) = F(c_0)$, onda je $G = F$. □

Teorem 1.77. *Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada postoji jedna jedina lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}$ takva da je*

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a), \qquad a \leq b.$$

Dokaz. Traženo svojstvo ima Lebesgue-Stieltjesova mjera μ_F. Jedinstvenost je pokazana u dokazu teorema 1.76. pod (b.) □

Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere s Borelovom mjerom $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, tj. $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Često je potrebno Borelove skupove aproksimirati s otvorenim ili kompaktnim skupovima. Pri tome se želi da ta aproksimaciju bude dobra u smislu da mjera aproksimirajućeg skupa bude dobra aproksimacija mjere Borelova skupa. Neka je $A \subseteq X$ Borelov skup (tj. $A \in \mathcal{B}(X)$). Ako je K kompaktan skup, a U otvoren skup u X takav da je

$$K \subseteq A \subseteq U,$$

onda je

$$\mu(K) \leq \mu(A) \leq \mu(U),$$

odakle dobivamo

$$\sup\big\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompaktan}\big\} \leq \mu(A) \leq \inf\big\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ otvoren}\big\}.$$

Definicija 1.78. *Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere takav da je $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Za mjeru μ kažemo da je* regularna *ako za svaki Borelov skup B vrijedi:*

(i) *(*regularnost izvana*)* $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subseteq U,\ U \text{ otvoren}\}$,

(ii) *(*regularnost iznutra*)* $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \text{ kompaktan}\}$ *i*

(iii) *(*konačnost na kompaktima*)* $\mu(K) < \infty$ *za svaki kompaktan skup* $K \subseteq X$.

Dakle, mjera μ je regularna ako se svaki Borelov skup može proizvoljno dobro aproksimirati izvana s otvorenim i iznutra s kompaktnim skupom.

Primjer 1.79. *Lebesgueova mjera* $\lambda : \mathcal{M}_{\lambda_d^*} \to [0, \infty]$ *je regularna (propozicija 1.47., propozicija 1.50. i lema 1.74.).*

Može se pokazati da vrijedi (vidi npr. [2, Propozicija 1.5.6, str. 40]):

Teorem 1.80. *Svaka konačna mjera* μ *na* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ *je regularna.*

2. Izmjerive funkcije

U teoriji mjere izmjerive funkcije imaju jednako važnu ulogu kao što je imaju neprekidne funkcije u topologiji. U svrhu boljeg razumijevanje prvo ćemo ponoviti osnovne pojmove o proširenom prostoru realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ (koristi se i oznaka $[-\infty, \infty]$).

2.1. Topologija na $\bar{\mathbb{R}}$

Za bazu topologije na $\bar{\mathbb{R}}$ uzimaju se svi otvoreni skupovi iz $\mathbb{R}$ kao i skupovi oblika

$$(a, \infty] := (a, \infty) \cup \{\infty\} \quad \text{i} \quad [-\infty, b) := \{-\infty\} \cup (-\infty, b).$$

Dakle, ako je neki skup otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$ onda se on može zapisati u jednom od sljedećih oblika:

$$U, \quad U \cup \{-\infty\}, \quad U \cup \{\infty\}, \quad U \cup \{-\infty, \infty\}, \qquad \text{gdje je } U \text{ otvoren u } \mathbb{R}.$$

Propozicija 2.1. *Neka je $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ Borelova σ-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$. Tada je*

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}.$$

Dokaz. (a) Prvo ćemo dokazati inkluziju

$$\big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\} \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}).$$

U tu svrhu dovoljno je pokazati da je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ i da su skupovi $\{-\infty\}, \{\infty\}$ i $\{-\infty, \infty\}$ sadržani u $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}$, a $\overline{\mathcal{U}}$ familija svih otvorenih skupova u $\bar{\mathbb{R}}$. Kako je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\bar{\mathcal{U}})$, to je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Skup $[-\infty, \infty)$ je otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$ i zato je $\{\infty\} = \bar{\mathbb{R}} \backslash [-\infty, \infty) \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Slično se zaključuje da je $\{-\infty\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Zato je i $\{-\infty, \infty\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

(b) Trivijalno je pokazati da je familija $\big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}$ jedna σ-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$. Ta familija sadrži sve otvorene skupove u $\bar{\mathbb{R}}$, tj. $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}$. Zato je

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\overline{\mathcal{U}}) \subseteq \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}.$$

□

2.2. Pojam izmjerive funkcije

Definicija 2.2. *Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ skup i $f : A \to Y$ funkcija. Funkcija f je* izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *ili kraće* $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.*

Teorem 2.3. *Neka su $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ i $(Z, \mathcal{C})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Nadalje, neka je $f : A \to Y$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ izmjeriva funkcija, a $g : B \to Z$ $\mathcal{B} - \mathcal{C}$ izmjeriva funkcija. Ako je $f(A) \subseteq B$, onda je kompozicija $g \circ f : A \to Z$ $\mathcal{A} - \mathcal{C}$ izmjeriva funkcija.*

Dokaz. Za svaki $C \in \mathcal{C}$ je $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big) \in \mathcal{A}$, jer je $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. □

U teoriji integracije zanimat će nas samo one funkcije koje primaju vrijednosti u skupu $\mathbb{R}$ ili $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Pri tome se za $\mathcal{B}$ uzima Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, odnosno $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Definicija 2.4. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $A \subseteq X$ podskup od X.*

Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je $\mathcal{A}$-izmjeriva *ili kraće* izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

Za funkciju $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ kažemo da je $\mathcal{A}$-izmjeriva *ili kraće* izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.*

Ako je $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$, onda za izmjerivu funkciju kažemo da je Borelova *ili* izmjeriva u smislu Borela.

Ako je $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^*})$, onda za izmjerivu funkciju kažemo da je Lebesgueova *ili* izmjeriva u smislu Lebesguea.

Primjer 2.5. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $A \in \mathcal{A}$. Konstantna funkcija $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva. Zaista, pretpostavimo da je $f(x) = y_0$ za svaki $x \in A$. Neka je $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Ako je $y_0 \in B$, onda je $f^{-1}(B) = A \in \mathcal{A}$. Ako $y_0 \notin B$, onda je $f^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{A}$.*

Teorem 2.6. *Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ izmjeriv skup i $f : A \to Y$. Pretpostavimo da je $\mathcal{E}$ familija podskupova od Y takva da je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Funkcija f je $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva onda i samo onda ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.*

Dokaz. Ako je f $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ izmjeriva, onda je očito $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$, pa je pogotovo $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.

Dokažimo obrat. Neka je $\mathcal{S} := \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$. Prvo pokažimo da je $\mathcal{S}$ σ-algebra na Y: (σ1) Kako je $f^{-1}(Y) = A \in \mathcal{A}$, to je $Y \in \mathcal{S}$. (σ2) Neka je $E \in \mathcal{S}$. Tada je $f^{-1}(E^c) = A \backslash f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. ($\sigma$3) Neka je (E_n) niz skupova iz $\mathcal{S}$. Iz jednakosti $f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)$ slijedi $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.

Po pretpostavci je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Kako je $\sigma(\mathcal{E})$ najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{E}$, to je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. □

Korolar 2.7. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ izmjeriv skup i $f : A \to \mathbb{R}$ [ili $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$]. Nadalje, pretpostavimo da je $\mathcal{E}$ familija podskupova od $\mathbb{R}$ [odnosno od $\bar{\mathbb{R}}$] takva da je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E})$ [odnosno $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{E})$]. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.*

Teorem 2.8. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ bilo koji podskup od X i $f : A \to \mathbb{R}$ [ili $\bar{\mathbb{R}}$] funkcija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) f *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

(b) $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ *za svaki otvoren skup* V *u* $\mathbb{R}$ *[odnosno* $\bar{\mathbb{R}}$*].*

(c) $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ *za svaki zatvoren skup* C *u* $\mathbb{R}$ *[odnosno* $\bar{\mathbb{R}}$*].*

Dokaz. Neka je $Y = \mathbb{R}$ [odnosno $\bar{\mathbb{R}}$].

(b) $\Rightarrow$ (c). Y je otvoren skup pa je $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$. Neka je C zatvoren skup u Y. Tada je komplement $Y \backslash C$ otvoren u Y, pa (b) povlači $f^{-1}(Y \backslash C) \in \mathcal{A}$. Iz jednakosti $f^{-1}(C) = A \backslash f^{-1}(Y \backslash C)$ slijedi $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Y je zatvoren skup pa je $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$. Ako je V otvoren skup u Y, onda je komplement $V^c = Y \backslash V$ zatvoren u Y. Tada (c) povlači $f^{-1}(V^c) \in \mathcal{A}$. Zbog jednakosti $f^{-1}(V) = A \backslash f^{-1}(V^c)$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Svaki otvoren skup V iz Y ujedno i Borelov skup, pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Za dokaz ove tvrdnje upotrijebit ćemo korolar 2.7. Neka je $\mathcal{V}$ familija svih otvorenih skupova u Y. Ta familija generira Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}_Y$, tj. $\mathcal{B}_Y = \sigma(\mathcal{V})$. Iz pretpostavke (b) slijedi $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$ i $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ za svaki $V \in \mathcal{V}$. Prema korolaru 2.7. funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva. □

Korolar 2.9. *Neka je* $(X, \mathcal{B}(X))$ *izmjeriv prostor s Borelovom* σ*-algebrom i neka je* $A \in \mathcal{B}(X)$*. Svaka neprekidna funkcija* $f : A \to \mathbb{R}$ *[ili* $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$*] je izmjeriva.*

Dokaz. Neka je $Y = \mathbb{R}$ [odnosno $\bar{\mathbb{R}}$]. Zbog neprekidnosti funkcije f za svaki otvoren skup V u Y postoji otvoren skup U u X takav da je $f^{-1}(V) = A \cap U$. Kako je $U \in \mathcal{B}_X$, a $A \in \mathcal{B}_X$ po pretpostavci, to je i $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}_X$. Tvrdnja slijedi iz teorema 2.8.(b). □

Sljedeći nam teorem govori da se izmjeriva funkcija definirana na izmjerivom skupu može definirati na različite načine, što se često koristi u literaturi (vidi npr. [2, 11]).

Teorem 2.10. *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *izmjeriv skup i* $f : A \to [-\infty, \infty]$*. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) f *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

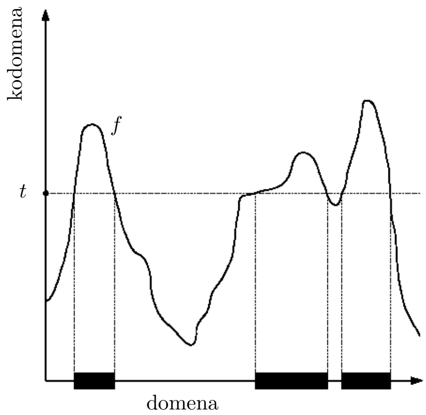
(b) $\{x \in A : f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(c) $\{x \in A : f(x) < t\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(d) $\{x \in A : f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(e) $\{x \in A : f(x) > t\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Na slici 7. ilustrirano je značenje tvrdnje (d) .



Slika 7. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva ako je zatamnjeno područje domene izmjeriv skup za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Ekvivalentnost tvrdnji (b)-(e) slijedi iz jednakosti

$$\begin{aligned}
\big\{x \in A : f(x) < t\big\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in A : f(x) \le t - \frac{1}{n}\Big\} \\
\big\{x \in A : f(x) \ge t\big\} &= A \backslash \big\{x \in A : f(x) < t\big\} \\
\big\{x \in A : f(x) > t\big\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in A : f(x) \ge t + \frac{1}{n}\Big\} \\
\big\{x \in A : f(x) \le t\big\} &= A \backslash \big\{x \in A : f(x) > t\big\}.
\end{aligned}$$

(a) $\Rightarrow$ (b)-(e). Neka je $t \in \mathbb{R}$. Treba pokazati da je $\big\{x \in A : f(x) \le t\big\} \in \mathcal{A}$. Kako je $[-\infty, t] \in \mathbb{B}(\bar{\mathbb{R}})$, izmjerivost od f povlači $f^{-1}([-\infty, t]) \in \mathcal{A}$. Iz jednakosti $f^{-1}([-\infty, t]) = \big\{x \in A : f(x) \le t\big\}$ slijedi $\big\{x \in A : f(x) \le t\big\} \in \mathcal{A}$

(b)-(e) $\Rightarrow$ (a). Prvo ćemo pokazati da je familija

$$\mathcal{S} := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

σ-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$:

(σ1) Kako je $f^{-1}(\bar{\mathbb{R}}) = A \in \mathcal{A}$, slijedi $\bar{\mathbb{R}} \in \mathcal{S}$.

(σ2) Neka je $B \in \mathcal{S}$. Tada je $f^{-1}(B^c) = A \cap \big(f^{-1}(B)\big)^c \in \mathcal{A}$.

(σ3) Neka je (B_n) niz skupova iz $\mathcal{S}$. Iz jednakosti $f^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ slijedi $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$.

Sada ćemo pokazati da σ-algebra S sadrži $\{-\infty\}, \{\infty\}$ i Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: Kako je

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{x \in A : f(x) < -n\big\} \in \mathcal{A}$$
$$f^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{x \in A : f(x) > n\big\} \in \mathcal{A},$$

imamo da je $\{-\infty\}, \{\infty\} \in S$. Nadalje, po pretpostavci familija S sadrži sve intervale oblika $(-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$. Ti intervali generiraju Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (teorem 1.10.). Kako je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ najmanja σ-algebra koja sadrži sve takve intervale, slijedi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq S$.

Prema propoziciji 2.1. svaki Borelov skup $\bar{B} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ može se zapisati kao $\bar{B} = B \cup C$, gdje su $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $C \subseteq \{-\infty, \infty\}$. Kako je $f^{-1}(\bar{B}) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$, a $f^{-1}(B), f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, slijedi $f^{-1}(\bar{B}) \in \mathcal{A}$, tj. skup $f^{-1}(\bar{B})$ je izmjeriv. $\square$

Primjer 2.11. *Sljedeći primjeri ilustriraju važnost teorema 2.10.*

1. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $B \subseteq X$.* Karakteristična funkcija $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ *skupa B, definirana formulom*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x \in B \\ 0, & \textit{ako je } x \notin B, \end{cases}$$

   izmjeriva je onda i samo onda ako je $B \in \mathcal{A}$. Zaista, prema teoremu 2.10. funkcija χ_B je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $\big\{x \in X : \chi_B(x) > t\big\} \in \mathcal{A}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, a to je onda i samo onda ako je $B \in \mathcal{A}$.

2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ segment ili interval (otvoren ili poluotvoren), a $f : I \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija. Tada je $\big\{x \in I : f(x) < t\big\}$, $t \in \mathbb{R}$, Borelov skup (prazan skup, jednočlani skup ili interval). To znači da je f Borelova funkcija.*

3. Stepenasta funkcija *na skupu X je svaka funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ koja prima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.*

   Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ stepenasta funkcija koja prima vrijednosti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pomoću teorema 2.10. lako je provjeriti da će f biti $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $\big\{x \in X : f(x) = \alpha_i\big\} \in \mathcal{A}$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Na str. 39. spomenuli smo da postoji Lebesgueov skup koji nije Borelov. Sada ćemo dokazati tu tvrdnju.

Teorem 2.12. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{M}_{\lambda_d^*}$, *tj. postoji Lebesgueov skup koji nije Borelov.*

Dokaz. Neka je $c : [0,1] \to [0,1]$ Cantorova funkcija (vidi točku 1.7.). Zbog neprekidnosti funkcije c, za svaki $y \in [0,1]$ postoji barem jedan $x \in [0,1]$ takav da je $c(x) = y$. Zato funkciju $g : [0,1] \to [0,1]$ možemo definirati na sljedeći način:

$$g(y) := \inf c^{-1}(y) = \inf \big\{x \in [0,1] : c(x) = y\big\}.$$

Može se pokazati da je $g(y) \in K$, gdje je K Cantorov skup. Koristeći neprekidnost Cantorove funkcije c sada je lako provjeriti da je $c(g(y)) = y$ za svaki $y \in [0,1]$. To znači da je g injekcija. Nadalje, kako c monotono raste, iz jednakosti $c(g(y)) = y$, $y \in [0,1]$, slijedi da i g monotono raste. Zato je g izmjeriva funkcija (vidi primjer 2.11.(2)). Neka je $A \subset [0,1]$ neki skup koji nije Lebesgueov. Takav skup postoji (primjer 1.49.). Neka je $B := g(A)$. Zbog injektivnosti funkcije g je $A = g^{-1}(B)$. Skup B je podskup Cantorova skupa, pa je Lebesgueov. Skup B nije Borelov. Naime, u suprotnom bi prema definiciji izmjerive funkcije imali $A = g^{-1}(B) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, pa bi skup A bio Lebesgueov (propozicija 1.41.), što je kontradikcija. □

Korolar 2.13. *Postoji podskup Cantorova skupa koji nije Borelov skup*

Dokaz. Takav je skup B iz dokaza teorema □

2.3. Svojstva izmjerivih funkcija

Teorem 2.14. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koje dvije $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

$$(a)\ \big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\} \in \mathcal{A},$$
$$(b)\ \big\{x \in A : f(x) \leq g(x)\big\} \in \mathcal{A},$$
$$(c)\ \big\{x \in A : f(x) = g(x)\big\} \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Za dokaz ovih tvrdnji upotrijebit ćemo teorem 2.10.

(a) Prvo treba uočiti da je $f(x) < g(x)$ onda i samo onda ako postoji racionalan broj $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $f(x) < q < g(x)$. Zbog toga je

$$\big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\big\{x \in A : f(x) < q\big\} \cap \big\{x \in A : q < g(x)\big\}\Big),$$

odakle vidimo da se skup $\big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\}$ može prikazati kao prebrojiva unija skupova iz $\mathcal{A}$, pa je $\big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\} \in \mathcal{A}$.

(b) Prema (a) je $\big\{x \in A : g(x) < f(x)\big\} \in \mathcal{A}$. Sada iz jednakosti

$$\big\{x \in A : f(x) \leq g(x)\big\} = A \backslash \big\{x \in A : g(x) < f(x)\big\}$$

slijedi $\big\{x \in A : f(x) \leq g(x)\big\} \in \mathcal{A}$.

(c) Tvrdnja slijedi iz (a), (b) i jednakosti

$$\big\{x \in A : f(x) = g(x)\big\} = \big\{x \in A : f(x) \leq g(x)\big\} \backslash \big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\}.$$

□

Propozicija 2.15. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ i $f : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koja $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Tada je i funkcija αf, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-izmjeriva.*

Dokaz. Ako je $\alpha = 0$, onda je $\alpha f = 0$ konstanta pa je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

Za $\alpha \neq 0$ imamo

$$\big\{x \in A : \alpha f(x) < t\big\} = \Big\{x \in A : f(x) < \frac{t}{\alpha}\Big\}, \qquad \alpha > 0$$
$$\big\{x \in A : \alpha f(x) < t\big\} = \Big\{x \in A : f(x) > \frac{t}{\alpha}\Big\}, \qquad \alpha < 0.$$

Tvrdnja slijedi iz teorema 2.10. □

Neka su $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ dvije funkcije. Iz estetskih razloga funkciju $\max\{f, g\}$ označavamo s $f \vee g$, a funkciju $\min\{f, g\}$ s $f \wedge g$. Dakle, funkcije $f \vee g, f \wedge g : A \to [-\infty, \infty]$ definirane su formulama:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \qquad x \in A.$$

Propozicija 2.16. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koje dvije $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Tada su funkcije $f \vee g$ i $f \wedge g$ izmjerive.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 2.10. i identiteta:

$$\big\{x \in A : (f \vee g)(x) \leq t\big\} = \big\{x \in A : f(x) \leq t\big\} \cap \big\{x \in A : g(x) \leq t\big\}$$
$$\big\{x \in A : (f \wedge g)(x) \leq t\big\} = \big\{x \in A : f(x) \leq t\big\} \cup \big\{x \in A : g(x) \leq t\big\}.$$

□

Za svaki niz (f_n) funkcija $f_n : A \to [-\infty, \infty]$ definiraju se funkcije $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n, \liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ formulama:

$$\sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \qquad x \in A$$
$$\inf_n f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \qquad x \in A$$
$$\limsup_n f_n(x) = \inf\big\{\sup\{f_k(x) : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\big\}, \qquad x \in A$$
$$\liminf_n f_n(x) = \sup\big\{\inf\{f_k(x) : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\big\}, \qquad x \in A.$$

Dakle, $\limsup_n f_n(x)$ je limes superior (najveća točka gomilanja) niza $(f_n(x))$, a $\liminf_n f_n(x)$ je limes inferior (najmanja točka gomilanja) niza $(f_n(x))$ (vidi [6, str. 116]).

Primijetimo da je uvijek $\liminf_n f_n \leq \limsup_n f_n$. Može se pokazati da je $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$ onda i samo onda ako postoji $\lim_n f_n(x)$ i vrijedi $\lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$. Dakle, domena funkcije $\lim_n f_n$ je skup $\{x \in A : \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$.

Propozicija 2.17. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i (f_n) niz $\mathcal{A}$-izmjerivih funkcija $f_n : A \to [-\infty, \infty]$. Tada vrijedi:*

(a) Funkcije $\sup_n f_n, \inf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ *su $\mathcal{A}$-izmjerive,*

(b) Funkcije $\limsup_n f_n, \liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ *su $\mathcal{A}$-izmjerive,*

(c) Skup $A_0 := \{x \in A : \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$ *je izmjeriv. Funkcija* $\lim_n f_n : A_0 \to [-\infty, \infty]$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

Dokaz. (a) Tvrdnja slijedi iz teorema 2.10. i identiteta:

$$\big\{x \in A : \sup_n f_n(x) \le t\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{x \in A : f_n(x) \le t\big\}$$
$$\big\{x \in A : \inf_n f_n(x) \ge t\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{x \in A : f_n(x) \ge t\big\}.$$

(b) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirat ćemo funkcije $g_k, h_k : A \to [-\infty, \infty]$:

$$g_k(x) := \sup\{f_n(x) : n \ge k\}, \quad h_k(x) := \inf\{f_n(x) : n \ge k\}, \qquad x \in A.$$

Prema (a) te su funkcije $\mathcal{A}$-izmjerive. Stoga su, isto prema tvrdnji (a), izmjerive i funkcije $\inf_n g_n, \sup_n h_n$. Sada tvrdnja slijedi iz jednakosti $\limsup_n f_n = \inf_n g_n$ i $\liminf_n f_n = \sup_n h_n$.

(c) Iz tvrdnje (b) i teorema 2.14.(c) slijedi izmjerivost skupa A_0. Sada iz jednakosti

$$\big\{x \in A_0 : \lim_n f_n(x) \le t\big\} = A_0 \cap \big\{x \in A : \limsup_n f_n(x) \le t\big\}$$

slijedi $\mathcal{A}$-izmjerivost funkcije $\lim_n f_n : A_0 \to [-\infty, \infty]$. □

Ako su $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ dvije funkcije, onda zbroj $f+g$ ne mora biti definiran. To je stoga jer nisu definirani zbrojevi $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$. Međutim, ako obje funkcije primaju vrijednosti iz skupa $[0, \infty)$, $(-\infty, \infty]$ ili $[-\infty, \infty)$, onda je definiran zbroj $f + g$. U iskazu sljedeće propozicije ograničavamo se na skup $[0, \infty]$, iako je iz dokaza jasno da će tvrdnja vrijediti ako se za kodomenu funkcija uzme $(-\infty, \infty]$ ili $[-\infty, \infty)$.

Propozicija 2.18. *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f, g : A \to [0, \infty]$ *bilo koje dvije* $\mathcal{A}$*-izmjerive funkcije. Tada je i funkcija* $f + g$ $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti teorem 2.10. Uočimo da je $(f + g)(x) < t$ onda i samo onda ako postoji racionalan broj $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $f(x) < q$ i $g(x) < t - q$. Zbog toga je

$$\big\{x \in A : (f + g)(x) < t\big\} = \bigcup_{q \in Q} \Big[\big\{x \in A : f(x) < q\big\} \cap \big\{x \in A : g(x) < t - q\big\}\Big]. \quad (2.1)$$

Skupovi $\big\{x \in A : f(x) < q\big\}$, $\big\{x \in A : g(x) < t - q\big\}$, $q \in \mathbb{Q}$, su $\mathcal{A}$-izmjerivi (teorem 2.10.), pa je i skup $\big\{x \in A : (f + g)(x) < t\big\}$ kao prebrojiva unija njihovih presjeka također $\mathcal{A}$-izmjeriv. □

Propozicija 2.19. *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *bilo koje dvije realne i* $\mathcal{A}$*-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

(a) Funkcija αf je $\mathcal{A}$-izmjeriva za svaki realan broj α,

(b) Funkcija $f+g$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva,

(c) Funkcija $f-g$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva,

(d) Funkcija $|f|^\alpha$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva za svaki realan broj $\alpha>0$,

(e) Funkcija fg je $\mathcal{A}$-izmjeriva,

(f) Skup $A_0 := \{x\in A : g(x)\neq 0\}$ je izmjeriv. Funkcija $\frac{f}{g} : A_0 \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

Dokaz. (a) Tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 2.15.

(b) f i g su realne funkcije pa se ne javlja problem sa zbrojevima $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty)+\infty$. Zato identitet (2.1) vrijedi za svaki $x\in A$.

(c) Kako je $f-g = f+(-g)$, tvrdnja slijedi iz (a) i (b).

(d) Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\text{za } t\geq 0: \ & \big\{x\in A : |f(x)|^\alpha \leq t\big\} = \big\{x\in A : -t^{1/\alpha} \leq f(x) \leq t^{1/\alpha}\big\} \\
& = \big\{x\in A : -t^{1/\alpha} \leq f(x)\big\} \cap \big\{x\in A : f(x) \leq t^{1/\alpha}\big\} \\
\text{za } t< 0: \ & \big\{x\in A : |f(x)|^\alpha \leq t\big\} = \emptyset
\end{aligned}$$

i zato tvrdnja slijedi iz teorema 2.10.

(e) Ova tvrdnja slijedi iz tvrdnji (a)-(d) i jednakosti $fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)$.

(f) $\mathcal{A}$-izmjerivost skupa A_0 slijedi iz identiteta:

$$A_0 = \{x\in A : g(x)\neq 0\} = \{x\in A : g(x)>0\} \cup \{x\in A : g(x)<0\}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\Big\{x\in A_0 : \frac{f(x)}{g(x)} \leq t\Big\} = & \Big(\big\{x\in A_0 : g(x)>0\big\} \cap \big\{x\in A_0 : f(x) \leq t\cdot g(x)\big\}\Big) \\
& \cup \Big(\big\{x\in A_0 : g(x)<0\big\} \cap \big\{x\in A_0 : f(x) \geq t\cdot g(x)\big\}\Big),
\end{aligned}$$

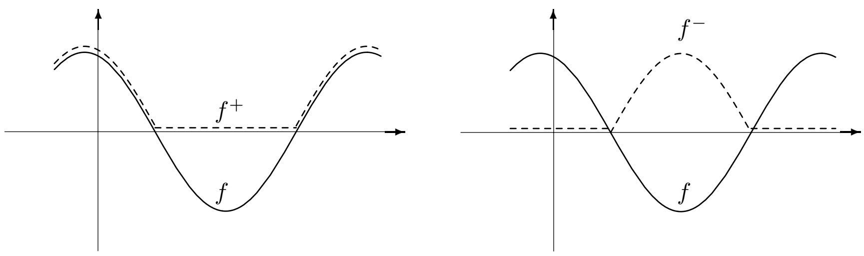
iz (a) i teorema 2.14.(b) slijedi $\mathcal{A}$-izmjerivost funkcije $\frac{f}{g}$. □

Za svaku funkciju $f : A\to[-\infty,\infty]$ definiraju se funkcije $|f|, f^+, f^- : A \to [0,\infty]$ formulama:

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad f^+(x) = \max\{f(x),0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x),0\}, \qquad x\in A.$$

Funkcija f^+ zove se pozitivni dio funkcije f, a f^- zovemo negativni dio funkcije f. Uočite da vrijedi:

$$|f| = f^+ + f^-, \qquad f = f^+ - f^-.$$



Slika 8. Funkcije f, f^+ i f^-.

Propozicija 2.20. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako su funkcije f^+ i f^- $\mathcal{A}$-izmjerive.*

Dokaz. Neka je f $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Kako je $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$, te kako je konstanta $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija, prema propoziciji 2.16. obje funkcije f^+ i f^- su $\mathcal{A}$-izmjerive.

Obratno, pretpostavimo da su f^+ i f^- $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Prema propoziciji 2.15. funkcija $-f^-$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva. Iz jednakosti $f = f^+ + (-f^-)$ lako se zaključi da ni za jedan $x \in A$ zbroj $f^+(x) + (-f^-(x))$ nije nedefiniranog oblika $\infty + (-\infty)$ ili $(-\infty) + \infty$. Zato identitet (2.1) vrijedi za svaki $x \in A$ i daljni dio dokaza je u potpunosti identičan s dokazom propozicije 2.18. $\square$

Propozicija 2.21. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Tada vrijedi:*

(a) Neka je $B \subseteq A$ izmjeriv skup. Ako je funkcija f $\mathcal{A}$-izmjeriva, onda je i restrikcija $f_{|B} : B \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija.

(b) Neka je (B_n) niz skupova iz $\mathcal{A}$ takav da je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ako je izmjeriva svaka restrikcija $f_{|B_n} : B_n \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, onda je izmjeriva i funkcija f.

Dokaz. Tvrdnje slijede iz sljedećih jednakosti:

$$(a)\quad \{x \in B : f_{|B}(x) < t\} = B \cap \{x \in A : f(x) < t\},$$

$$(b)\quad \{x \in A : f(x) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in B_n : f_{|B_n}(x) < t\}.$$

$\square$

2.4. Jednostavne funkcije

U primjeru 2.11. definirali smo stepenastu funkciju i karakterističnu funkciju skupa. Zbog izuzetne važnosti tih pojmova u teoriji integracije, ponovit ćemo definicije.

Stepenasta funkcija na skupu A je svaka funkcija $f : A \to [-\infty, \infty]$ koja prima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.

Neka je $A \subseteq X$ podskup od X. Karakteristična funkcija skupa A je realna funkcija $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako je } x \notin A. \end{cases}$$

Karakteristična funkcija svakog skupa je stepenasta.

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ izmjeriv skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ stepenasta funkcija koja prima vrijednosti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pomoću teorema 2.10. lako je provjeriti da će f biti $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in A : f(x) = \alpha_i\} \in \mathcal{A}$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Konačnu i izmjerivu stepenastu funkciju zovemo jednostavna funkcija. Preciznije:

Definicija 2.22. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$podskup od X i $f : A \to \mathbb{R}$ stepenasta i $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Tada kažemo da je f* jednostavna funkcija s obzirom na izmjeriv prostor $(X, \mathcal{A})$ *ili kraće* jednostavna funkcija.

Svaka jednostavna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ dopušta prikaz u obliku

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \tag{2.2}$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ disjunktni i izmjerivi skupovi takvi da je $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su različiti realni brojevi. To se dobiva za $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = f(A)$ i $A_i = f^{-1}(\alpha_i) = \{x \in A : f(x) = \alpha_i\} \in \mathcal{A}$. Takav prikaz zove se standardni prikaz jednostavne funkcije.

Sljedeći teorem govori nam da su jednostavne funkcije "po točkama guste" u prostoru svih izmjerivih funkcija.

Teorem 2.23. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz (f_n) jednostavnih funkcija $f_n : A \to [0, \infty)$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f(x)$ *za svaki* $x \in A$,

(b) Niz funkcija (f_n) konvergira po točkama prema funkciji f, tj.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

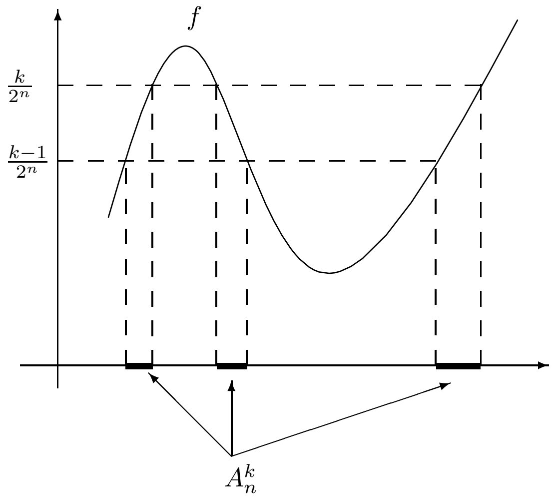
(c) Ako je funkcija f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda niz funkcija (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f na cijelom skupu K.

Dokaz. Za svaki prirodan broj n definirajmo izmjerive skupove

$$A_n^k := f^{-1}\Big(\big(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\big]\Big) = \big\{x \in A : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n}\big\}, \qquad k = 1, 2, \dots, n2^n$$
$$F_n := f^{-1}\big((n, \infty]\big).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ skupovi $A_n^1, A_n^2, \dots, A_n^{n2^n}, F_n$ međusobno su disjunktni, izmjerivi su i njihova unija daje skup $f^{-1}\big((0,\infty]\big)$. Stavimo

$$G := A \backslash f^{-1}\big((0,\infty]\big) = f^{-1}(0).$$



Slika 9. U ovom primjeru skup $A_n^k = \big\{x \in A : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n}\big\}$ je unija tri intervala.

Neka su $f_n : A \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, jednostavne funkcije definirane formulom

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{A_n^k} + n\chi_{F_n}.$$

Uočimo:

1. Ako je $x \in G$, onda je $f(x) = f_n(x) = 0$.
2. Ako je $x \in A_n^k$, onda je
$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n} = f_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$
3. Ako je $x \in F_n$, onda je $f_n(x) = n < f(x)$.

Sada ćemo dokazati tvrdnje teorema:

(a) Pomoću jednakosti

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\Big] = \Big(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big] \cup \Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\Big], \qquad 1 \le k \le n2^n\\ &(n,\infty] = (n,n+1] \cup (n+1,\infty]\end{aligned}$$

dobivamo:
Ako je $x \in A_{n+1}^{2k-1} = f^{-1}\Big(\big(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\big]\Big)$, onda je $x \in A_n^k = f^{-1}\Big(\big(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\big]\Big)$ i zato je $f_n(x) = f_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^n}$.

Ako je $x \in A_{n+1}^{2k} = f^{-1}\Big(\big(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\big]\Big)$, onda je $x \in A_n^k = f^{-1}\Big(\big(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\big]\Big)$ i zato je $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.

Ako je $x \in f^{-1}\big((n+1,\infty]\big)$, onda je $f_n(x) = n < n+1 = f_{n+1}(x)$.

Ako je $x \in f^{-1}\big((n,n+1]\big)$, onda je $f_n(x) = n \le f_{n+1}(x)$.
Time smo dokazali tvrdnju (a).

(b) Ako je $f(x) = \infty$, onda je $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ i zato $f_n(x) = n \to \infty = f(x)$. Ako je $0 \le f(x) < \infty$, onda je $x \in G$ ili postoji dovoljno velik n_0 takav da je $0 < f(x) \le n$ za svaki $n \ge n_0$, pa je zato $x \in A_n^k$ za svaki $n \ge n_0$ i neki $1 \le k \le n2^n$. U oba slučaja je

$$0 \le f(x) - f_n(x) \le \frac{1}{2^n}, \qquad n \ge n_0,$$

odakle slijedi $\lim_{n\to\infty} f_(x) = f(x)$. Time smo dokazali da niz (f_n) konvergira po točkama prema funkciji f.

(c) Ako je f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda postoji dovoljno velik n_0 takav da je $0 \le f(x) \le n_0$ za svaki $x \in K$ i svaki $n \ge n_0$. Zaključujući na potpuno isti način kao pod (b), dobivamo da je

$$0 \le f(x) - f_n(x) \le \frac{1}{2^n}, \qquad x \in K, n \ge n_0,$$

odakle slijedi da niz funkcija (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f na cijelom skupu K. □

Teorem 2.24. *Neka je $(X,\mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty,\infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz (f_n) jednostavnih funkcija $f_n : A \to (-\infty,\infty)$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f(x)$ za svaki $x \in A$,

(b) Niz funkcija (f_n) konvergira po točkama prema funkciji f, tj.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

(c) *Ako je funkcija f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda niz funkcija (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f na cijelom skupu K.*

Dokaz. Dovoljno je modificirati dokaz teorema 2.23. tako da se na samom početku za svaki prirodan broj n dodaju izmjerivi skupovi

$$A_n^{-k} := f^{-1}\Big(\big(\frac{-k}{2^n}, \frac{-k+1}{2^n}\big]\Big) = \big\{x \in A : \frac{-k}{2^n} < f(x) \leq \frac{-k+1}{2^n}\big\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n2^n$$
$$F_{-n} := f^{-1}\big([-\infty, n]\big).$$

Dalje se zaključuje na potpuno isti način. □

Korolar 2.25. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako postoji niz jednostavnih funkcija koji konvergira obično (po točkama) prema funkciji f na cijelom skupu A.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 2.23. i propozicije 2.17. □

2.5. Svojstvo „skoro svuda"

Definicija 2.26. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, a $T \subseteq X$ podskup od X. Ako neka tvrdnja ili svojstvo vrijede za sve $x \in T$ osim za $x \in N$, gdje je $N \subseteq T$ zanemariv skup, onda kažemo da ta tvrdnja ili svojstvo vrijedi μ-*skoro svuda na *T ili μ-*gotovo svuda na *T.*

Ako je iz konteksta jasno na koju mjeru μ i na koji skup T mislimo, onda koristimo kraće nazive: skoro svuda *ili* gotovo svuda.

Za označavanje svojstva koje vrijedi skoro svuda koristi se kratica (s.s.).

Prisjetimo se da je skup $N \subseteq X$ zanemariv ako postoji izmjeriv skup Z (tj. $Z \in \mathcal{A}$) takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Dakle, zanemarivi skupovi su podskupovi izmjerivih skupova mjere nula. Svaki skup mjere nula ujedno je i zanemariv, a zanemariv skup ne mora biti izmjeriv. Ako je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ potpun, onda je svaki zanemariv skup ujedno i izmjeriv (vidi točku 1.9.).

Primjer 2.27. *Sljedeći primjeri ilustriraju upotrebu izraza skoro svuda i kratice (s.s.):*

1. *Za funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ kažemo da su jednake skoro svuda i pišemo $f = g$ (s.s.) ako je skup $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ zanemariv.*

2. *Kažemo da niz (f_n) funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ konvergira skoro svuda prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ i pišemo $\lim_n f_n = f$ (s.s.) ako postoji zanemariv skup $N \subseteq X$ takav da niz $(f_n(x))$ konvergira i da je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svaki $x \in X \setminus N$.*

Teorem 2.28. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od X, $(Y, \mathcal{B})$ izmjeriv prostor i $f : A \to Y$ neka $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $g : A \to Y$ bilo koja druga funkcija takva da je $g = f$ (s.s.). Ako je mjera μ potpuna, onda je funkcija g izmjeriva.*

Dokaz. Skup $N = \{x \in A : g(x) \neq f(x)\}$ je zanemariv pa postoji izmjeriv skup $Z \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Treba pokazati da je $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.

Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada iz jednakosti

$$\begin{aligned} g^{-1}(B) &= \{x \in A : g(x) \in B\} = \{x \in Z^c \cap A : g(x) \in B\} \cup \{x \in Z \cap A : g(x) \in B\} \\ &= \{x \in Z^c \cap A : f(x) \in B\} \cup \{x \in Z \cap A : g(x) \in B\} \\ &= \big(f^{-1}(B) \cap Z^c \cap A\big) \cup \big(g^{-1}(B) \cap Z \cap A\big) \end{aligned}$$

slijedi $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Naime, kako je $g^{-1}(B) \cap Z \cap A \subseteq Z$, zbog potpunosti mjere μ je $g^{-1}(B) \cap Z \cap A \in \mathcal{A}$. Nadalje, zbog $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ izmjerivosti funkcije f imamo $A, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pa je $f^{-1}(B) \cap Z^c \cap A \in \mathcal{A}$. $\square$

Korolar 2.29. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od X i $f : A \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $g : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koja druga funkcija takva da je $g = f$ (s.s.). Ako je mjera μ potpuna, onda je funkcija g izmjeriva.*

Korolar 2.30. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od X i (f_n) niz izmjerivih funkcija $f_n : A \to [-\infty, \infty]$ koji konvergira skoro svuda prema funkciji $f : A \to [-\infty, \infty]$. Ako je mjera μ potpuna, onda je f izmjeriva funkcija.*

Dokaz. Po pretpostavci je $\lim_n f_n = f$ (s.s.) pa je skup

$$N = \{x \in A : \lim_n f_n(x) \text{ ne postoji ili je } \lim_n f_n(x) \neq f(x)\}$$

zanemariv. U svakoj drugoj točki $x \in A \backslash N$ je $f(x) = \lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)$.

Prema propoziciji 2.17. funkcija $\liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ je izmjeriva. Dakle, $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ za svaki $x \in A \backslash N$. Prema teoremu 2.28. funkcija f je izmjeriva. $\square$

Primjedba 2.31. *Tvrdnje korolara 2.29. (stoga i teorema 2.28.) i korolara 2.30. ne moraju vrijediti ako mjera μ nije potpuna. Evo primjera:*

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nepotpun prostor mjere, a N zanemariv skup koji nije izmjeriv. Karakteristična funkcija $\chi_N : X \to \mathbb{R}$ je skoro svuda jednaka nul funkciji $0 : X \to \mathbb{R}$. Nul funkcija je izmjeriva, a χ_N nije. Time je pokazano da ne vrijedi tvrdnja korolara 2.29. Ne vrijedi ni tvrdnja korolara 2.30. jer niz funkcija čija je svaka funkcija jednaka nul funkciji (koja je izmjeriva) konvergira skoro svuda funkciji χ_N koja nije izmjeriva.

Teorem 2.32. *Neka je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ upotpunjenje prostora mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $A \subseteq X$ podskup od X i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija f je $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva onda i samo onda ako postoje $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije $f_0, f_1 : A \to [-\infty, \infty]$ takve da vrijedi:*

(i) $f_0(x) \leq f(x) \leq f_1(x)$ *za svaki* $x \in A$,

(ii) $f_0 = f_1$ μ*-(s.s.).*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da postoje $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije f_0, f_1 sa svojstvima (i) i (ii). Prema (ii) skup $N = \{x \in A : f_0(x) \neq f_1(x)\}$ je μ-zanemariv pa postoji μ-izmjeriv skup $Z \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Tada je i $\tilde{\mu}(Z) = 0$ pa iz (i) i (ii) dobivamo $f = f_0$ $\tilde{\mu}$-(s.s.). Nadalje, zbog $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$, svaka $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija je i $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva (vidi definiciju 2.4.). Dakle, imamo da je f_0 $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva funkcija i $f = f_0$ $\tilde{\mu}$-(s.s.). Prema korolaru 2.29. funkcija f je $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva.

$\Leftarrow$ Neka je f $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva funkcija. Dokaz ćemo provesti u dva koraka: (a) f je jednostavna funkcija, (b) opći slučaj.

(a) Neka je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, gdje su skupovi $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ disjunktni i $\tilde{\mu}$-izmjerivi skupovi, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ realni brojevi. Tada postoje skupovi $C_1, \ldots, C_n \subseteq X$ i $B_1, \ldots, B_n \subseteq X$ takvi da je

$$C_i \subseteq A_i \subseteq B_i \qquad \& \qquad \mu(B_i \backslash C_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Funkcije $f_0, f_1 : A \to (-\infty, \infty)$ definirane formulama $f_0 := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}$ i $f_1 := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}$ imaju svojstva (i) i (ii): Svojstvo (i) je očigledno. Nadalje, skup $N := \cup_{i=1}^n (B_i \backslash C_i)$ je μ-zanemariv i $f_0(x) = f_1(x)$ za svaki $x \in A \backslash N$, pa vrijedi (ii).

(b) Neka je $f_n : A \to (-\infty, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, niz rastućih jednostavnih funkcija koji konvergira funkciji f. Prema teoremu 2.24. takav niz postoji. Prema (a) za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo odabrati $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije $f_{0n}, f_{1n} : A \to (-\infty, \infty)$ takve da vrijedi:

($\star$) $f_{0n}(x) \leq f_n(x) \leq f_{1n}(x)$ za svaki $x \in A$,

($\star\star$) $f_{0n} = f_{1n}$ μ-(s.s.).

Funkcije $f_0 := \limsup_n f_{0n}$ i $f_1 := \liminf_n f_{1n}$ imaju svojstva (i) i (ii). Zaista, iz ($\star$) slijedi

$$f_0(x) \leq \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) \leq f_1(x) \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

Nadalje, kako je prebrojiva unija zanemarivih skupova također zanemariv skup, iz ($\star$) i ($\star\star$) dobivamo

$$f_0(x) = \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = f_1(x) \qquad \text{(s.s.)}.$$

$\square$

Zadaci.

1. Neka je $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$, $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}\}$. Sa $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ označit ćemo σ-algebru generiranu familijom $\mathcal{E}$. Je li funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, izmjeriva?

2. Neka je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ izmjeriv prostor. Dokažite da je izmjeriva svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

   (Uputa: Za svaki $t \in \mathbb{R}$ je $\{n \in \mathbb{N} : f(n) < t\} \subseteq \mathbb{N}$.)

3. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $D \subseteq \mathbb{R}$ gust skup na $\mathbb{R}$. Dokažite da je $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in D$.

   (Uputa: Ako je f izmjeriva, onda je $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in D$ (teorem 2.10.). Obratno, neka je $t \in \mathbb{R}$. Skup D je gust na $\mathbb{R}$ pa zato za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $d_n \in D \cap (t, t + 1/n)$. Kako je

   $$\{x \in X : f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > d_n\} \in \mathcal{A},$$

   funkcija f je izmjeriva.)

4. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ i $\mathcal{E} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Dokažite: (a) Ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$, onda je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tj. f je izmjeriva funkcija. (b) Neka su μ, ν dvije konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ takve da je $\mu(f^{-1}(E)) = \nu(E)$ za svaki $E \in \mathcal{E}$. Tada je $\mu(f^{-1}(B)) = \nu(B)$ za svaki $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

   (Uputa: (a) Kako je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{C})$, tvrdnja slijedi iz korolara 2.7. (b) Familija $\mathcal{E}$ je π-sistem koji generira $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Tvrdnja slijedi iz korolara 1.36.)

5. Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ prostori mjere i $f : X \to Y$ izmjeriva funkcija u paru σ-algebri $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Da li familija svih skupova oblika $f(A)$, $A \in \mathcal{A}$, tvori σ-algebru na Y?

   (Uputa: Općenito ne. Evo primjera: Neka je $X = Y = \mathbb{N}$. Za σ-algebru $\mathcal{A}$ uzmite bilo koju σ-algebru različitu od $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$, a f neka bude konstanta.)

6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Dokažite da je njezina derivacija $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija.

   (Uputa: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $g_n(x) = \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}$ je izmjeriva. Prema tvrdnji (c) propozicije 2.17. tada je izmjeriva i funkcija $\lim_n g_n = f'$.)

7. Dokažite da izmjerivost funkcije $|f|$ općenito ne povlači izmjerivost funkcije f.

   (Uputa: Prema teoremu 2.12. postoji skup $B \subseteq \mathbb{R}$ koji nije Borelov. Neka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glasi $f = \chi_B - \chi_{B^c}$. Funkcija $|f|$ je konstanta ($|f| = 1$) pa je izmjeriva. Međutim, f nije izmjeriva jer $f^{-1}(1) = B$ nije Borelov skup.)

8. Dokazati da za sve $A, B \subseteq X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:
   (a) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$. (b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$. (c) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$. (d) $\alpha\chi_A + \beta\chi_B = \alpha\chi_{A\backslash B} + (\alpha+\beta)\chi_{A\cap B} + \beta\chi_{B\backslash A}$. (e) $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\Delta B}$, gdje je $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ simetrična razlika.

9. Neka je $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Tada je $A^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$. Dokazati:

$$\chi_A = 1 - \chi_{A^c} = 1 - (1-\chi_{A_1})\cdots(1-\chi_{A_n}).$$

   Množenjem faktora na desnoj strani dobiva se

$$\chi_A = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1 \le i_2 \le \ldots i_r \le n} \chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_r}}$$

   (Uputa: Upotrijebite formule iz zadatka 8.)

10. Neka je (A_n) niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Pokazati da je $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.

3. Integracija izmjerivih funkcija

Fundamentalni pojam integrala definira se samo za izmjerive funkcije. Konstrukcija se radi u tri koraka: Prvo se definira integral za nenegativne jednostavne funkcije. Zatim se pojam integrala proširuje na nenegativne izmjerive funkcije. U trećem koraku pravi se proširenje na skup svih izmjerivih funkcija.

3.1. Integral nenegativne jednostavne funkcije

Ako se radi o nenegativnoj elementarnoj funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integral treba zamišljati kao površinu između grafa krivulje i x-osi.

Motivirani time uvodimo općenitu definiciju:

Definicija 3.1. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty)$ jednostavna nenegativna funkcija s prikazom*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{3.1}$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi.

(I) Broj

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \tag{3.2}$$

zove se integral funkcije f s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna *ako je $\int f d\mu < \infty$.*

(II) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \tag{3.3}$$

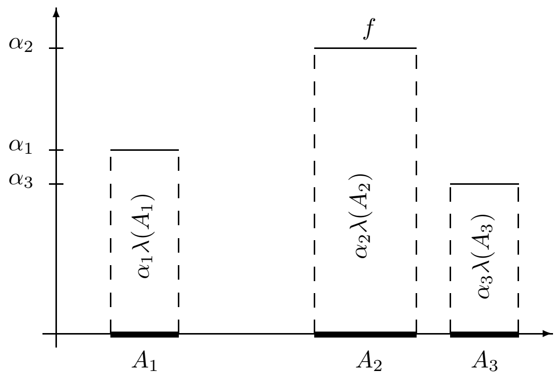
zove se integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f na skupu E.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E *ako je $\int_E f d\mu < \infty$.*

Za integral $\int f d\mu$ se koriste i sljedeće oznake:

$$\int_X f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

Slika 10. ilustrira ideju definicijske formule (3.2).



Slika 10. U ovom primjeru je $f = \alpha_1\chi_{A_1} + \alpha_2\chi_{A_2} + \alpha_3\chi_{A_3}$, gdje su A_1, A_2, A_3 segmenti na $\mathbb{R}$, a mjera μ je Lebesgueova mjera λ na $\mathbb{R}$. Integral $\int f d\lambda = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\lambda(A_i)$ jednak je zbroju površina pravokutnika na slici.

Uočimo sljedeće:

1. Prikaz (3.1) i desna strana od (3.2) neće se promijeniti ako izbacimo članove gdje je $\alpha_i = 0$. Pojasnimo: Ako je $\mu(A_i) = 0$, onda je sve jasno. Ako je $\mu(A_i) = \infty$, po dogovoru (vidi točku 1.2.) je $\alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$.

2. Očito je $0 \leq \int f d\mu \leq \infty$.

3. Očito je $\int f d\mu < \infty$ onda i samo onda ako je $\mu(A_i) < \infty$ za svaki α_i strogo veći od 0. Uzimanjem unije svih takvih skupova A_i vidimo da je $\int f d\mu < \infty$ onda i samo onda ako je $\mu\big(\{x \in X : f(x) > 0\}\big) < \infty$. Drugim riječima, integral je konačan onda i samo onda ako funkcija iščezava izvan nekog skupa konačne mjere.

4. Očito je $\int f d\mu = 0$ onda i samo onda ako je $\mu(A_i) = 0$ za svaki α_i strogo veći od 0. Uzme li se unija svih takvih skupova A_i, vidimo da je $\int f d\mu = 0$ onda i samo onda ako je $\mu\big(\{x \in X : f(x) > 0\}\big) = 0$. Drugim riječima, $\int f d\mu = 0$ onda i samo onda ako funkcija iščezava izvan nekog nul skupa (skupa mjere nula).

Prvo što treba napraviti je pokazati da integral $\int f d\mu$ ne ovisi o izboru prikaza (3.1) (Pomoću disjunktnih izmjerivih skupova i nenegativnih koeficijenata). U tu svrhu pretpostavimo da je $f = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\chi_{B_i}$, gdje su $B_1, \ldots, B_m \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\beta_1, \ldots, \beta_m \geq 0$, neki drugi prikaz od f.

Iz prikaza (3.1) možemo eliminirati one skupove A_i za koje je $\alpha_i = 0$; a iz drugog prikaza možemo eliminirati skupove B_i za koje je $\beta_i = 0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je to već napravljeno u oba prikaza. Tada je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$

$(\equiv \{x \in X : f(x) > 0\})$. Zbog toga, ako je $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, onda je $\alpha_i = \beta_j$. Zahvaljujući tome i σ-aditivnosti mjere μ dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\Big(A_i \bigcap \big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu\Big(B_j \bigcap \big(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\big)\Big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).\end{aligned}$$

Time smo pokazali da integral $\int f d\mu$ ne ovisi o izboru prikaza (3.1). Zato nadalje, kad god je to potrebno, možemo smatrati da se radi o standardnom prikazu (skupovi $A_1, \ldots, A_n$ su disjunktni, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ različiti realni brojevi)

Primjer 3.2. *Neka je $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. Dirichletova[8] funkcija, a za mjeru uzmimo Lebesgueovu mjeru λ.*

(a) Kako je $\int \chi_{\mathbb{Q}}\, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 = 0$, $\chi_{\mathbb{Q}}$ je integrabilna (na $\mathbb{R}$).

(b) Neka je $E \subseteq \mathbb{R}$ bilo koji izmjeriv skup, npr. segment $[a, b]$. Tada je

$$\int_E \chi_{\mathbb{Q}}\, d\lambda = \int \chi_E \chi_{\mathbb{Q}}\, d\lambda = \int \chi_{\mathbb{Q}\cap E}\, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap E) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Dakle, $\chi_{\mathbb{Q}}$ je integrabilna na svakom izmjerivom podskupu $E \subseteq \mathbb{R}$.

Prisjetimo se da $\chi_{\mathbb{Q}}$ nije integrabilna u smislu Riemanna ni na jednom segmentu.

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Skup svih nenegativnih jednostavnih funkcija definiranih na X označavat ćemo sa $\mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ ili kraće sa $\mathcal{F}_+$. Skup $\mathcal{F}_+$ nije vektorski prostor, ali ima sljedeća svojstva:

Propozicija 3.3. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:*

(a) $\alpha f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

(b) $f + g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

(c) $f \leq g \Rightarrow g - f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

(d) $f \vee g,\ f \wedge g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

[8]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 -1869), njemački matematičar.

Dokaz. Tvrdnja (a) je očigledna.

(b) - (d). Neka je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{3.4}$$

gdje su $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi. Slično, neka je

$$g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i}, \tag{3.5}$$

gdje su $B_1, \dots, B_m \in \Sigma$ disjunktni skupovi, a $\beta_1, \dots, \beta_m$ nenegativni realni brojevi. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. Uočimo da je

$$X = X \cap X = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\Big) = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (A_i \cap B_j)$$

i da su skupovi $A_i \cap B_j$ međusobno disjunktni. Nadalje, ako je $x \in A_i \cap B_j$, onda je očito $(f+g)(x) = \alpha_i + \beta_j$, $(g-f)(x) = \beta_j - \alpha_i \geq 0$, $(f \vee g)(x) = \max\{\alpha_i, \beta_j\}$ i $(f \wedge g)(x) = \min\{\alpha_i, \beta_j\}$. Zato je

$$f + g = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
g - f &= \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (\beta_j - \alpha_i) \chi_{A_i \cap B_j} \\
f \vee g &= \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \max\{\alpha_i, \beta_j\} \chi_{A_i \cap B_j} \\
f \wedge g &= \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \min\{\alpha_i, \beta_j\} \chi_{A_i \cap B_j},
\end{aligned}$$

odakle slijede tvrdnje (b) - (d). □

Teorem 3.4. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:*

(a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ *(*homogenost*).*

(b) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *(*aditivnost*).*

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$ *(*monotonost*).*

Dokaz. Neka su f i g zadane s (3.4) i (3.5).

(a) $\int \alpha f d\mu = \int \big(\sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i \chi_{A_i}\big) d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \int f d\mu.$

(b) Zahvaljujući tome što integral ne ovisi o prikazu jednostavne funkcije, možemo uzeti da je $f+g$ zadana s (3.6). Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int (f+g) d\mu &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap (\cup_{j=1}^m B_j)) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j \cap (\cup_{i=1}^n A_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap X) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j \cap X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}$$

(c) Kako je $g - f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ (propozicija 3.3.), to je $\int (g-f) d\mu \ge 0$. Sada pomoću (b) dobivamo: $\int g d\mu = \int (f + (g-f)) d\mu = \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \ge \int f d\mu$. $\square$

Sljedeća lema govori nam kako se jednostavno mogu generirati mjere:

Lema 3.5. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ nenegativna jednostavna funkcija. Funkcija $m : \Sigma \to [0, \infty]$ zadana formulom*

$$m(E) := \int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu, \qquad E \in \Sigma$$

je mjera na Σ.

Dokaz. Neka je f zadana s (3.4). Tada je

$$f\chi_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap E}, \qquad E \in \Sigma.$$

Skupovi $A_i \cap E \in \Sigma$, $i = 1, \dots, n$, međusobno su disjunktni i zato je

$$m(E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E). \tag{3.7}$$

Očito je m nenegativna funkcija i $m(\emptyset) = 0$. Preostaje pokazati da je m σ-aditivna funkcija. Neka je $(E_k, k \in \mathbb{N})$ niz disjunktnih skupova iz Σ. Pomoću (3.7) i σ-

aditivnosti mjere μ dobivamo

$$\begin{aligned} m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\Big(A_i \bigcap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_i \cap E_k)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \end{aligned}$$

□

Teorem 3.6. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, f_n \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, nenegativne jednostavne funkcije sa sljedeća dva svojstva:*

(i) $f_n \leq f_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) (f_n) *konvergira po točkama prema* f, *tj.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \textit{za svaki } x \in X.$$

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Primjenom teorema 3.4. izlazi

$$\int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \ldots \leq \int f d\mu,$$

pa vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Preostaje dokazati obrnutu nejednakost. U tu svrhu dovoljno je dokazati da za svaki $\varepsilon \in [0, 1)$ vrijedi

$$\varepsilon \int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

jer se graničnim prijelazom $\varepsilon \to 1$ dobiva obrnuta nejednakost.

Neka je $\varepsilon \in [0, 1)$. Definirajmo skupove

$$E_n := \{x \in X : \varepsilon f(x) \leq f_n(x)\} \in \Sigma, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Niz (f_n) je monotono rastući, pa je zato (E_n) uzlazan niz skupova. Sada ćemo pokazati da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Za to je dovoljno pokazati da je $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Zaista, kada bi postojao neki $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, onda bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ bilo $f_n(x) < \varepsilon f(x)$, odakle bi se prijelazom na limes $n \to \infty$ dobilo $f(x) \le \varepsilon f(x)$. Zbog $\varepsilon < 1$ to bi značilo da je $f(x) < f(x)$, što je kontradikcija.

Neka je $m : \Sigma \to [0, \infty]$ mjera iz leme 3.5. Primjenom propozicije 1.18.(iii) dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n) = m(X)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \int f\chi_{E_n} d\mu = \int f d\mu. \tag{3.8}$$

Nadalje, iz definicije skupa E_n lako je provjeriti da vrijedi

$$\varepsilon f \chi_{E_n} \le f_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zato je (teorem 3.4.)

$$\varepsilon \int f\chi_{E_n} d\mu \le \int f_n d\mu,$$

odakle graničnim prijelazom $n \to \infty$ i služeći se s (3.8) dobivamo

$$\varepsilon \int f d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

□

Primjedba 3.7. *Teorem 3.6. ne vrijedi ako se izostavi uvjet monotonog rasta niza funkcija (f_n). Evo dva primjera:*

1. *Neka je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$. Definirajmo nenegativne jednostavne funkcije: $f = 0$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, a ipak je $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = 2 \ne 0 = \int f d\lambda$.*

2. *Neka je $X = \mathbb{R}$, a μ Lebesgueova mjera λ. Definirajte: $f = 0$, $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Teorem 3.6. neće vrijediti ako se uvjet monotonog rasta niza funkcija (f_n) zamijeni uvjetom monotonog pada. Zaista, neka je $X = [0, \infty)$, $f_n(x) = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada niz (f_n) monotono pada i konvergira prema $f = 0$, a ipak je $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \infty \ne 0 = \int f d\lambda$.

3.2. Integral nenegativne izmjerive funkcije

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Svaka Σ-izmjeriva nenegativna funkcija $f : X \to [0, \infty]$ može se aproksimirati s nenegativnom jednostavnom funkcijom $g \in \mathcal{F}_+$, $g \le f$ (vidi teorem 2.23.). To nam daje ideju da proširimo integral na skup svih nenegativnih izmjerivih funkcija. Imamo sljedeću definiciju:

Definicija 3.8. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna Σ-izmjeriva funkcija.*

(I) Broj

$$\int f d\mu := \sup\Big\{ \int g d\mu : g \in \mathcal{F}_+,\ g \le f \Big\} \tag{3.9}$$

zove se integral funkcije f s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna *ako je* $\int f d\mu < \infty$.

(II) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu \tag{3.10}$$

zove se integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f na skupu E.

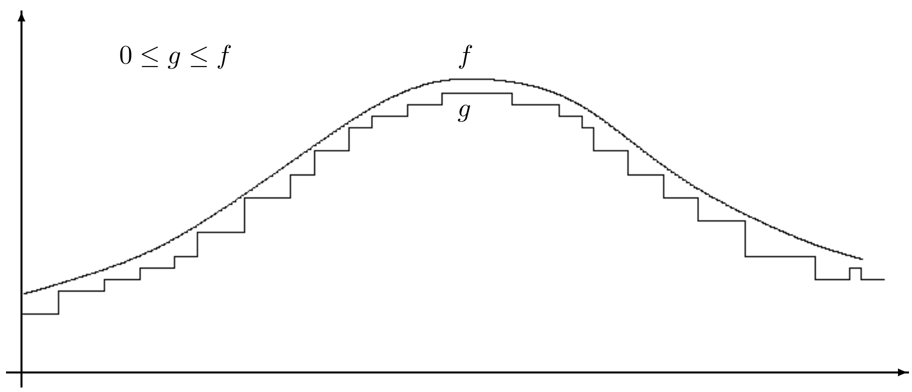
Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E *ako je* $\int_E f d\mu < \infty$.

Za integral $\int f d\mu$ koriste se i sljedeće oznake:

$$\int_X f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

Lako je vidjeti da je ova definicija konzistentna s definicijom 3.1., tj. ako je $f \in \mathcal{F}_+$ jednostavna nenegativna funkcija, onda se vrijednost integrala dobivena po ovoj definiciji podudara s vrijednošću iz definicije 3.1.

Ideja definicijske formule (3.9) ilustrirana je na slici 11.



Slika 11. Nenegativna Σ-izmjeriva funkcija f aproksimirana je s funkcijom $g \in \mathcal{F}_+$. Mjera μ je Lebesgueova mjera λ na $\mathbb{R}$. Integral $\int g d\lambda$ (površina ispod grafa funkcije g) aproksimacija je integrala $\int f d\lambda$.

Definicija 3.8. daje proširenje integrala na skup svih nenegativnih Σ-izmjerivih funkcija.

Uočimo da iz definicije 3.8. slijedi monotonost integrala. Zaista, ako je $f \leq g$, onda je

$$\left\{ \int h d\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \leq f \right\} \subseteq \left\{ \int h d\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \leq g \right\},$$

odakle slijedi

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h d\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int h d\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \leq g \right\} = \int g d\mu.$$

Sada ćemo pokazati da to proširenje ima svojstva iz teorema 3.4. te da se može poopćiti teorem 3.6. Za to nam treba sljedeća propozicija:

Propozicija 3.9. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Ako je (f_n) rastući niz funkcija iz $\mathcal{F}_+$ koji konvergira prema Σ-izmjerivoj funkciji $f : X \to [0, \infty]$, onda je*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Po pretpostavci je $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, pa monotonost integrala povlači

$$0 \leq \int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

To znači da je $\left(\int f_n d\mu \right)$ rastući niz pa zato u $[0, \infty]$ postoji $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. Nadalje, prema definiciji 3.8. je

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Preostaje dokazati obrnutu nejednakost. U tu svrhu dovoljno je dokazati da za svaku funkciju $g \in \mathcal{F}_+$, $g \leq f$, vrijedi

$$\int g d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Neka je $g \in \mathcal{F}_+$ funkcija takva da je $g \leq f$. Tada je $g \wedge f_n \in \mathcal{F}_+$ (propozicija 3.3.), a $(g \wedge f_n)$ je rastući niz funkcija iz $\mathcal{F}_+$. Osim toga je $\lim_{n\to\infty}(g \wedge f_n) = g$. Prema teoremu 3.6. je

$$\int g d\mu = \lim_{n \to \infty} \int (g \wedge f_n) d\mu.$$

Kako je $g \wedge f_n \leq f_n$, monotonost integrala povlači $\int (g \wedge f_n) d\mu \leq \int f_n d\mu$. Dakle, $\int g d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. □

Teorem 3.10. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f, g : X \to [0, \infty]$ nenegativne Σ-izmjerive funkcije i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:*

(a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ *(*homogenost*).*

(b) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *(*aditivnost*).*

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$ *(*monotonost*).*

Dokaz. Monotonost integrala smo već dokazali.

(a) - (b). Odaberimo rastuće nizove (f_n) i (g_n) funkcija iz $\mathcal{F}_+$ takve da je $f = \lim_n f_n$ i $g = \lim_n g_n$. Takvi nizovi postoje (vidi teorem 2.23.). Tada su (αf_n) i $(f_n + g_n)$ rastući nizovi funkcija iz $\mathcal{F}_+$ i pri tome je $\alpha f = \lim_n (\alpha f_n)$, $f + g = \lim_n (f_n + g_n)$. Pomoću propozicije 3.9. te homogenosti i aditivnosti integrala na $\mathcal{F}_+$ (teorem 3.4.) dobivamo

$$\int \alpha f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \alpha f_n d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \alpha \int f d\mu$$
$$\int (f+g) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \Big(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu \Big) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

□

Propozicija 3.11. *Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere,* $f, g : X \to [0, \infty]$ *nenegativne i* Σ*-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

(a) $\int f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ *(s.s.).*

(b) Ako je $f = g$ *(s.s.), onda je* $\int f d\mu = \int g d\mu$*.*

Dokaz. (a) Neka je $\int f d\mu = 0$. Treba pokazati da je $A := \{x \in X : f(x) \neq 0\} \in \Sigma$ zanemariv skup. Kako je $A \in \Sigma$, to znači da treba pokazati da je $\mu(A) = 0$. Definirajmo skupove

$$A_n := \big\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\big\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Iz nejednakosti $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq |f|$ pomoću teorema 3.10.(c) dobivamo

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{A_n} d\mu \leq \int |f| d\mu = 0,$$

odakle slijedi $\mu(A_n) = 0$. Zato je $0 \leq \mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

Obratno, neka je $f = 0$ (s.s.). Odaberimo bilo koji rastući niz (f_n) funkcija iz $\mathcal{F}_+$ koji konvergira prema funkciji f. Tada je očito $f_n = 0$ (s.s.) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato je $\int f_n d\mu = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (vidi 4. komentar neposredno nakon definicije 3.1.). Sada pomoću teorema 3.6. dobivamo $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 0$.

(b) Neka je $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Skup A^c je zanemariv pa zato postoji $B \in \Sigma$ takav da je $A^c \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Neka je $D := B^c \subseteq A$. Tada su $f\chi_D$ i $g\chi_D$ izmjerive funkcije. Očito je $f\chi_D = g\chi_D$. Nadalje $f\chi_B = 0$ (s.s.) i $g\chi_B = 0$

(s.s.). Zato prema (a) imamo $\int f\chi_B d\mu = \int g\chi_B d\mu = 0$. Sada pomoću teorema 3.10. dobivamo

$$\int f d\mu = \int (f\chi_D + f\chi_B) d\mu = \int f\chi_D d\mu = \int g\chi_D d\mu = \int (g\chi_D + g\chi_B) d\mu = \int g d\mu.$$

□

U teoriji integrala od izuzetne je važnosti tzv. Levijev[9] teorem koji nam govori da na skupu svih nenegativnih i izmjerivih funkcija integral i limes rastućeg niza funkcija ,,komutiraju". Pri tome je dopušteno mijenjanje granične funkcije na zanemarivom skupu.

Teorem 3.12. (Levijev teorem o monotonoj konvergenciji) *Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere, a* $f : X \to [0, \infty]$ Σ*-izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je* (f_n) *niz* Σ*-izmjerivih funkcija* $f_n : X \to [0, \infty]$ *sa sljedeća dva svojstva:*

(i) $f_n \leq f_{n+1}$ *(s.s.) za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *(s.s.).*

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u dva koraka.

(a) Pretpostavimo da je $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, te da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.
Po pretpostavci je $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f$, pa monotonost integrala povlači

$$\int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \ldots \leq \int f d\mu.$$

To znači da je $\left(\int f_n d\mu\right)$ rastući niz pa zato postoji $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ i pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Dokaz obratne nejednakosti $\int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ provođen je u dokazu propozicije 3.9.

(b) Skupovi $N_0 := \{x \in X : \lim_n f_n(x) \neq f(x)\} \in \Sigma$ i $N_n := \{x \in X : f_n(x) > f_{n+1}(x)\} \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, su zanemarivi. Zato je i skup $B := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n \in \Sigma$ kao unija zanemarivih skupova također zanemariv. Kako je $B \in \Sigma$, to je $\mu(B) = 0$.

Na skupu $A := B^c$ je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga će na cijelom skupu X biti $f_n\chi_A \leq f_{n+1}\chi_A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} f_n\chi_A = f\chi_A$. Prema (a) je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_A d\mu = \int f\chi_A d\mu.$$

Kako je $f = f\chi_A$ (s.s.) i $f_n = f_n\chi_A$ (s.s.) za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz propozicije 3.11.(b) dobivamo $\int f d\mu = \int f\chi_A d\mu$ i $\int f_n d\mu = \int f_n\chi_A d\mu$, $n \in \mathbb{N}$. □

[9] Beppo Levi (1875 - 1961), talijanski matematičar.

Primjer 3.13. *Neka je $X = [0,1]$, a μ neka bude Lebesgueova mjera λ. Pokazat ćemo da je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2}\, d\lambda = 1.$$

Definirajmo niz funkcija (f_n) formulom:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^2}, \qquad x \in [0,1].$$

Kako je $1 - x^2 \le 1$ za svaki $x \in [0,1]$, niz (f_n) monotono raste:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^2} \le \sqrt[n+1]{1-x^2} = f_{n+1}(x).$$

Nadalje, za svaki $x \in [0,1]$ je

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1-x^2} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in [0,1) \\ 0, & \text{ako je } x = 1 \end{cases} = \chi_{[0,1)}(x).$$

Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2}\, d\lambda = \int \chi_{[0,1)}\, d\lambda = 1.$$

Primjedba 3.14. *Levijev teorem o monotonoj konvergenciji općenito ne vrijedi za Riemannov integral. Evo primjera: Neka je $X = [0,1]$. Poslažimo racionalne brojeve iz skupa $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ u niz $q_1, q_2, q_3, \ldots$. Kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup, to je moguće. Sada definirajmo funkcije $f_n : X \to \mathbb{R}$:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Niz (f_n) monotono raste, $\lim_n f_n = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$. Osim toga, za sve $x \in [0,1]$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $0 \le f_n(x) \le 1$.

Svaka funkcija f_n je R-integrabilna, $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$, ali granična funkcija $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ nije R-integrabilna.

Teorem 3.15. (Levijev teorem za redove) *Neka je (f_n) niz Σ-izmjerivih funkcija $f_n : X \to [0,\infty]$. Ako red $\sum_n f_n$ konvergira, onda je*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Dokaz. Primijenite teorem 3.12. na funkcije $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ (n-ta parcijalna suma reda $\sum_n f_n$) i $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ (suma reda). □

Primjedba 3.16. *Zbog propozicije 3.11.(b) dovoljno je da red $\sum_n f_n$ konvergira skoro svuda.*

Korolar 3.17. *Neka je $f : X \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere (X, Σ, μ). Funkcija $m : \Sigma \to [0, \infty]$ definirana formulom*

$$m(E) := \int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu, \qquad E \in \Sigma$$

je mjera na Σ.

Dokaz. $m(\emptyset) = \int \chi_\emptyset f d\mu = \int 0 d\mu = 0$. Neka su $E_1, E_2, \ldots$ disjunktni podskupovi iz Σ. Tada red $\sum_n \chi_{E_n} f$ konvergira prema funkciji $\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f$. Primjenom teorema 3.15. dobivamo

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) = \int \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int \chi_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty m(E_n).$$

□

Za razliku od Riemannovog integrala, integral po mjeri dobro se ponaša prema graničnom prijelazu. Pri tome se više ne moramo ograničavati na monotono rastuće nizove funkcija, kao što je slučaj u Levijevu teoremu. O tome nam govori sljedeća tzv. Fatouova[10] lema.

Teorem 3.18. (Fatouova lema) *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ i $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije. Ako je $f = \liminf_n f_n$ (s.s.), onda je*

$$\int f d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Neka je $g_n := \inf\{f_k : k \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $g_n : X \to [0, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija (propozicija 2.17.), niz (g_n) je monotono rastući i $g_n \le f_n$. Po pretpostavci je $f = \liminf_n f_n = \lim_n g_n$ (s.s.).

Pomoću teorema 3.12. dobivamo

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Preostaje pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \inf\Big\{\int f_k d\mu : k \ge n\Big\}.$$

Zaista, kako je $g_n = \inf\{f_k : k \ge n\}$, to je $g_n \le f_k$ za svaki $k \ge n$. Sada zbog monotonosti integrala imamo

$$\int g_n d\mu \le \int f_k d\mu, \qquad \forall k \ge n,$$

[10] Pierre Joseph Louis Fatou (1878 - 1929), francuski matematičar

odakle slijedi

$$\int g_n d\mu \leq \inf \Big\{ \int f_k d\mu : k \geq n \Big\}.$$

Zato je

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \Big\{ \int f_k d\mu : k \geq n \Big\} = \liminf_n \int f_n d\mu.$$

□

Primjer 3.19. *Sljedeći primjeri pokazuju nam da se u Fatouovoj lemi može javiti stroga nejednakost:*

(a) Neka je $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. Tada je $\liminf_n f_n = 0$, a $\int f_n d\lambda = 1$.

(b) Ako je $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$, onda je $\int f_n d\lambda = 1$, $\liminf_n f_n = 0$.

Teorem 3.20. (Čebiševljeva[11] nejednakost) *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [0, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $p \in (0, \infty)$ fiksan broj. Za svaki $t > 0$ definirajmo Σ-izmjeriv skup $A_t := \{x \in X : f(x) \geq t\}$. Tada je*

$$\mu(A_t) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \chi_{A_t} d\mu \leq \frac{1}{t^p} \int f^p d\mu. \tag{3.11}$$

Dokaz. Iz nejednakosti $0 \leq t^p \chi_{A_t} \leq f^p \chi_{A_t} \leq f^p$ zahvaljujući monotonosti integrala (teorem 3.10.(c)) dobivamo

$$\int t^p \chi_{A_t} d\mu \leq \int f^p \chi_{A_t} d\mu \leq \int f^p d\mu.$$

Kako je $\int t^p \chi_{A_t} d\mu = t^p \mu(A_t)$, dobiva se tvrdnja teorema. □

Korolar 3.21. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Ako postoji strogo pozitivna i integrabilna funkcija $f : X \to (0, \infty]$, mjera μ je σ-konačna.*

Dokaz. Treba pokazati da postoji niz (A_n) skupova iz Σ takav da je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $A_n := \Big\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\Big\}$, $n \in \mathbb{N}$. Prema Čebiševljevoj nejednakosti imamo $\mu(A_n) \leq n \int f d\mu < \infty$. □

[11] Пафнутий Львович Чебышев (1821-1894), ruski matematičar.

3.3. Integral izmjerive funkcije

Definicija 3.22. *Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere, a* $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ*-izmjeriva funkcija.*

(I) *Ako je barem jedan od brojeva* $\int f^+ d\mu$ *i* $\int f^- d\mu$ *konačan, onda se definira broj*

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \tag{3.12}$$

i zovemo ga integral funkcije f s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f.

Za funkciju f *kažemo da je* integrabilna *ako je* $\int f d\mu$ *konačan.*

(II) *Neka je* $E \in \Sigma$ *izmjeriv skup. Ako je definiran integral* $\int \chi_E f d\mu$*, onda broj*

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu \tag{3.13}$$

zovemo integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f na skupu E.

Za funkciju f *kažemo da je* integrabilna na skupu E *ako je* $\int_E f d\mu < \infty$.

Jednostavno se provjerava da je ova definicija konzistentna s definicijom 3.8.

Uočimo da je funkcija f integrabilna onda i samo onda ako su oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $f^- d\mu$ konačna.

Za integral $\int f d\mu$ se koriste i sljedeće oznake:

$$\int_X f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

Primjedba 3.23. *Neka je* $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ*-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi*

(i) *Integral* $\int f d\mu$ *definiran je onda i samo onda ako postoje* Σ*-izmjerive funkcije* $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ *takve da je* $f = f_1 - f_2$ *i da je barem jedan od integrala* $\int f_1 d\mu$ *i* $\int f_2 d\mu$ *konačan.*

(ii) *Funkcija* f *integrabilna je onda i samo onda ako postoje* Σ*-izmjerive funkcije* $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ *takve da je* $f = f_1 - f_2$ *i da su oba integrala* $\int f_1 d\mu$ *i* $\int f_2 d\mu$ *konačna. Štoviše, pri tome je*

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 \, d\mu. \tag{3.14}$$

Dokaz. *U obje tvrdnje očigledan je smjer* $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ *Neka je* $f = f_1 - f_2$*, gdje su* $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ Σ*-izmjerive funkcije. Iz* $f = f_1 - f_2$ *slijedi* $f^+ \leq f_1$ *i* $f^- \leq f_2$*. Zato je*

$$\int f^+ d\mu \leq \int f_1 d\mu < \infty \qquad \& \qquad \int f^- d\mu \leq \int f_2 \, d\mu < \infty.$$

(i) Po pretpostavci je barem jedan od integrala $\int f_1 d\mu$ i $\int f_2 d\mu$ konačan. Iz gornjih nejednakosti slijedi da je definiran integral $\int f d\mu$.

(ii) Po pretpostavci su konačna oba integrala $\int f_1 d\mu$ i $\int f_2 d\mu$. Iz gornjih nejednakosti slijedi da su konačna oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$. Dakle, f je integrabilna.

Preostaje dokazati (3.14). Iz jednakosti $f = f_1 - f_2 = f^+ - f^-$ slijedi $f_1 + f^- = f^+ + f_2$ (To je očigledno ako su sve vrijednosti $f_1(x), f_2(x), f^+(x)$ i $f^-(x)$ konačne. Pažljivijim promatranjem lako je provjeriti da posljednja jednakost vrijedi i u slučaju kada neki od brojeva $f_1(x), f_2(x), f^+(x)$ ili $f^-(x)$ nije konačan). Iskoristimo li svojstvo aditivnosti integrala (teorem 3.10.) dobivamo

$$\int f_1 d\mu + \int f^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu,$$

odakle zbog konačnosti svih integrala slijedi

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2\, d\mu.$$

Lema 3.24. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Σ-izmjeriva funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ integrabilna je onda i samo onda ako je $\int |f| d\mu < \infty$.*

Dokaz. Kako je $|f| = f^+ + f^-$, imamo $f^+, f^- \leq |f|$. Nadalje, prema teoremu 3.10. je

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \qquad \& \qquad \int f^+ d\mu, \int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu,$$

odakle vidimo da je f integrabilna (oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $f^- d\mu$ su konačna) onda i samo onda ako je $\int |f| d\mu < \infty$. □

Propozicija 3.25. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je f integrabilna, onda vrijedi:*

(a) $f(x) \in \mathbb{R}$ (s.s.). Preciznije, $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) = 0$.

(b) Skup $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ je σ-konačan.

Dokaz. Prema lemi 3.24. je $\int |f| d\mu < \infty$.

(a) Neka je $B := \{x \in X : |f(x)| = \infty\} \in \Sigma$. Treba pokazati da je $\mu(B) = 0$. Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $n\chi_B \leq |f|$, pa monotonost integrala daje $n\mu(B) = \int n\chi_B d\mu \leq \int |f| d\mu$. Dakle,

$$\mu(B) \leq \frac{\int |f| d\mu}{n}$$

odakle se dobiva

$$0 \leq \mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\int |f| d\mu}{n} = 0.$$

(b) Neka je $A := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Treba pokazati da se skup A može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne mjere. Uočimo skupove $A_n := \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Iz nejednakosti $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq |f|$ dobivamo

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{A_n} d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty,$$

odakle slijedi $\mu(A_n) < \infty$. Nadalje, kako je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, skup A je σ-konačan. □

Teorem 3.26. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ dvije Σ-izmjerive funkcije takve da je $f = g$ (s.s.). Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je definiran i integral $\int g d\mu$ i pri tome je*

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Dokaz. Iz $f = g$ (s.s.) slijedi $f^+ = g^+$ (s.s.) i $f^- = g^-$ (s.s.). Prema propoziciji 3.11. imamo $\int f^+ d\mu = \int g^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu = \int g^- d\mu$.

Neka je definiran integral $\int f d\mu$, tj. neka je konačan barem jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$. Tada je konačan barem jedan od integrala $\int g^+ d\mu$ i $\int g^- d\mu$. Dakle, definiran je $\int g d\mu$ i pri tome je $\int f d\mu = \int g d\mu$. □

Teorem 3.27. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $f = 0$ *(s.s.).*

(b) $\int |f| d\mu = 0$.

(c) $\int f \chi_A d\mu = 0$ *za svaki* $A \in \Sigma$.

Dokaz. $(b) \Rightarrow (a)$. Ako je $\int |f| d\mu = 0$, propozicija 3.11. povlači $|f| = 0$ (s.s.), pa je stoga i $f = 0$ (s.s.).

$(a) \Rightarrow (c)$. Ako je $f = 0$ (s.s.), onda je $f\chi_A = 0$ (s.s.) za svaki $A \in \Sigma$, i zato je $\int f\chi_A d\mu = 0$ (teorem 3.26.).

$(c) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo da je $\int f\chi_A d\mu = 0$ za svaki $A \in \Sigma$. Tada za $A = X$ dobivamo $\int f d\mu = 0$.

Neka je $A_0 := f^{-1}([0, \infty]) \in \Sigma$. Tada je po pretpostavci $\int f\chi_{A_0} d\mu = 0$. Kako je $f^+ = f\chi_{A_0}$, imamo $\int f^+ d\mu = \int f\chi_{A_0} d\mu = 0$.

Sada iz jednakosti $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ slijedi $\int f^- d\mu = 0$.

Dakle, $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = 0$. □

Teorem 3.28. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

(a) Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je definiran i integral $\int \alpha f d\mu$ i vrijedi

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu. \tag{3.15}$$

(b) *Ako je f integrabilna, onda je i αf integrabilna funkcija i pri tome vrijedi gornja formula.*

Dokaz. (a) Neka je definiran integral $\int f d\mu$. Tada je $\int f^+ d\mu < \infty$ ili $\int f^- d\mu < \infty$.

Ako je $0 < \alpha < \infty$, onda je $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ i $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Pomoću tih jednakosti i teorema 3.10. dobivamo

$$\begin{aligned} \int (\alpha f)^+ d\mu &= \int \alpha f^+ d\mu = \alpha \int f^+ d\mu \\ \int (\alpha f)^- d\mu &= \int \alpha f^- d\mu = \alpha \int f^- d\mu, \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da barem jedan od integrala $\int (\alpha f)^+ d\mu$ i $\int (\alpha f)^- d\mu$ mora biti konačan. Dakle, definiran je integral $\int \alpha f d\mu$. Nadalje, vrijedi

$$\int \alpha f d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \alpha \Big(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \Big) = \alpha \int f d\mu.$$

Ako je $-\infty < \alpha < 0$, onda je $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ i $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Da bi se dokazala tvrdnja dovoljno je postupiti na isti način kao u slučaju $0 < \alpha < \infty$.

Slučaj $\alpha = 0$ je trivijalan.

Time je dokazano da je definiran integral $\int \alpha f d\mu$ i da vrijedi (3.15).

(b) Ako je f integrabilna funkcija, onda su konačna oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ pa je prema već dokazanoj tvrdnji (a) definiran integral $\int \alpha f d\mu$ i vrijedi jednakost (3.15). Iz (3.15) slijedi integrabilnost funkcije αf. □

Teorem 3.29. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

(a) *Ako su definirana oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ i ako su oni istog predznaka u slučaju da su oba beskonačna, onda je definiran i integral $\int (f+g) d\mu$ i vrijedi*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \tag{3.16}$$

(b) *Ako su f i g integrabilne, onda je i $f + g$ integrabilna funkcija i pri tome vrijedi gornja formula.*

Dokaz. (a) Pažljivim promatranjem dolazi se do zaključka da se uz navedene pretpostavke mora pojaviti jedan od sljedeća dva slučaja:
(i) $\int f^- d\mu < \infty$ i $\int g^- d\mu < \infty$. (ii) $\int f^+ d\mu < \infty$ i $\int g^+ d\mu < \infty$.

(i) Slučaj $\int f^- d\mu < \infty$ i $\int g^- d\mu < \infty$. Neka je

$$B := \{x \in X : f(x) \neq -\infty \ \ \& \ \ g(x) \neq -\infty\}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} B^c &= \{x \in X : f(x) = -\infty\} \cup \{x \in X : g(x) = -\infty\} \\ &= \{x \in X : f^-(x) = \infty\} \cup \{x \in X : g^-(x) = \infty\}. \end{aligned}$$

Primjenom propozicije 3.25.(a) na funkcije f^- i g^- dobivamo

$$\mu\big(\{x \in X : f^-(x) = \infty\}\big) = 0 \qquad \& \qquad \mu\big(\{x \in X : g^-(x) = \infty\}\big) = 0.$$

Zato je $\mu(B^c) = 0$. Definirajmo funkcije $F, G : X \to (-\infty, \infty]$:

$$F := f\chi_B, \quad G := g\chi_B.$$

Prednost funkcija F, G u odnosu na funkcije f, g je ta što je $F + G$ definirana u svakoj točki skupa X, dok to ne mora biti slučaj s funkcijom $f + g$.

Uočimo da zbog $\mu(B^c) = 0$ vrijedi $F + G = f + g$ (s.s.). Zahvaljujući tome, prema teoremu 3.26. dovoljno je pokazati da je definiran integral $\int (F + G) d\mu$ te da je $\int (F + G) d\mu = \int F d\mu + \int G d\mu$.

Iz $F = F^+ - F^- \leq F^+$ i $G = G^+ - G^- \leq G^+$ dobivamo $F + G \leq F^+ + G^+$. Zato je $(F + G)^+ \leq F^+ + G^+$. Pomoću te nejednakosti iz

$$(\star) \qquad (F + G)^+ - (F + G)^- = F + G = (F^+ + G^+) - (F^- + G^-)$$

dobivamo

$$(F + G)^- = (F + G)^+ - (F^+ + G^+) + (F^- + G^-) \leq F^- + G^-,$$

odakle slijedi

$$\int (F + G)^- d\mu \leq \int F^- d\mu + \int G^- d\mu < \infty.$$

Dakle, definiran je integral $\int (F + G) d\mu$.

Iz $(\star)$ slijedi $(F+G)^+ + F^- + G^- = (F+G)^- + F^+ + G^+$, pa pomoću teorema 3.10. dobivamo

$$\int (F + G)^+ d\mu + \int F^- d\mu + \int G^- d\mu = \int (F + G)^- d\mu + \int F^+ d\mu + \int G^+ d\mu.$$

Svi integrali $\int (F + G)^- d\mu$, $\int F^- d\mu$ i $\int G^- d\mu$ su konačni pa iz gornje jednakosti dobivamo

$$\int (F + G) d\mu = \int F^+ d\mu - \int F^- d\mu + \int G^+ d\mu - \int G^- d\mu = \int F d\mu + \int G d\mu.$$

(ii) Slučaj $\int f^+ d\mu < \infty$ i $\int g^+ d\mu < \infty$. Treba postupiti slično kao pod (i).

(b) Neka su f i g integrabilne funkcija. Tada su konačna oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ konačna, pa prema tvrdnji (a) vrijedi (3.16). Pažljivim pregledavanjem dokaza tvrdnje (a) lako je zaključiti da je $f + g$ integrabilna funkcija. □

Teorem 3.30. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjerive funkcije takve da je $f \leq g$. Ako su definirana oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$, onda je*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu. \tag{3.17}$$

Dokaz. Iz $f \leq g = g^+ - g^- \leq g^+$ slijedi $f^+ \leq g^+$.
Slično, iz $-g \leq -f = f^- - f^+ \leq f^-$ slijedi $g^- \leq f^-$.
Zbog toga vrijedi:

$$\int f^+ d\mu \leq \int g^+ d\mu \tag{3.18}$$

$$\int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu. \tag{3.19}$$

Barem jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ mora biti konačan. Isto tako, barem jedan od integrala $\int g^+ d\mu$ i $\int g^- d\mu$ mora biti konačan. To je stoga jer se pretpostavlja da su definirana oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$.

Dakle, ako je $\int g^+ d\mu = \infty$ i $\int f^- d\mu = \infty$, onda mora biti $\int g^- d\mu < \infty$ i $\int f^+ d\mu < \infty$. Tada u (3.17) imamo strogu nejednakost.

Preostaje razmotriti slučaj kada je barem jedan od integrala $\int g^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ konačan.

Ako je $\int f^- d\mu < \infty$, onda iz (3.19) slijedi $\int g^- d\mu < \infty$. Dakle, obje strane nejednakosti (3.19) su konačni brojevi. Zato od (3.18) smijemo oduzeti (3.19). Dobiva se nejednakost (3.17).

Ako je $\int g^+ d\mu < \infty$, onda iz (3.18) slijedi $f^+ d\mu < \infty$. U ovom slučaju prvo (3.19) pomnožimo s -1, a zatim dodamo (3.18). Opet dobivamo nejednakost (3.17). To smijemo napraviti jer se s obje strane nejednakosti (3.18) nalaze konačni brojevi. □

Teorem 3.31. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu. \tag{3.20}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &= \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leq \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu \end{aligned}$$

□

Skup svih funkcija $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrabilnih s obzirom na prostor mjere (X, Σ, μ) označavamo sa $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$. Koristit ćemo još i oznake $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^1(X)$ ili $\mathcal{L}^1(\mu)$. Tako npr. ako je iz konteksta jasno što su skup X i σ-algebra Σ, dovoljno je koristiti oznaku $\mathcal{L}^1(\mu)$ da ne bi bilo zabune o kojoj mjeri se radi.

Kao direktnu posljedicu teorema 3.28., teorema 3.29. i teorema 3.30. dobivamo sljedeći teorem:

Teorem 3.32. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ integrabilne funkcije i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije αf i $f + g$ integrabilne i pri tome vrijedi:*

(a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int d\mu$ *(*homogenost*).*

(b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *(*aditivnost*).*

(c) $f \le g \Rightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu$ *(*monotonost*).*

Dakle, $\mathcal{L}^1$ je realan vektorski prostori, a integral je linearni funkcional.

Teorem 3.33. (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji)
Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije i neka je $g : X \to [0, \infty]$ integrabilna funkcija. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(i) $f = \lim_n f_n$ *(s.s.),*

(ii) Funkcije f_n su dominirane *funkcijom g, tj.*

$$|f_n| \le g \quad \textit{(s.s.) za svaki } n \in \mathbb{N},$$

onda su sve funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne i vrijedi

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{3.21}$$

Dokaz. Što se tiče integrabilnosti funkcija f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, i jednakosti (3.21), zahvaljujući teoremu 3.26., možemo pretpostaviti da je $f = \lim_n f_n$ i $|f_n| \le g$, $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da je tada $|f| = |\lim_n f_n| = \lim_n |f_n| \le g$. Iz tih nejednakosti dobivamo

$$\int |f| d\mu, \int |f_n| d\mu \le \int g d\mu < \infty, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

To znači da su integrabilne sve funkcije f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ (lema 3.24.).

Preostaje dokazati jednakost (3.21). Radi boljeg razumijevanja prvo ćemo se prisjetiti da je uvijek $\liminf_n f_n \le \limsup_n f_n$, te da je $\liminf_n f_n = \limsup_n f_n$ onda i samo onda ako postoji $\lim_n f_n$ i vrijedi $\lim_n f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$. Nadalje, za svaki niz (α_n) realnih brojeva vrijedi $\limsup_n \alpha_n = -\liminf_n(-\alpha_n)$.

Iz $|f_n| \le g$ slijedi $0 \le g + f_n, g - f_n$, odakle pomoću Fatouove leme dobivamo

$$\int g d\mu \pm \int f d\mu \le \liminf_n \int (g \pm f_n) d\mu.$$

Ove nejednakosti možemo zapisati kao

$$\int g d\mu \pm \int f d\mu \le \int g d\mu + \liminf_n \Big(\pm \int f_n d\mu \Big).$$

Integral $\int g d\mu$ je konačan pa smijemo kratiti. Dobivamo

$$\pm \int f d\mu \le \liminf_n \Big(\pm \int f_n d\mu \Big),$$

odnosno

$$\limsup_n \int f_n d\mu \le \int f d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu,$$

odakle slijedi

$$\limsup_n \int f_n d\mu = \int f d\mu = \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Time je dokazana jednakost (3.21). $\square$

Primjer 3.34. *U primjeru 3.13. pokazano je da vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \sqrt[n]{1-x^2} d\lambda = 1,$$

gdje su $X = [0,1]$, a λ Lebesgueova mjera.

Ta se jednakost može dobiti i pomoću Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji. U tu svrhu dovoljno je uočiti da je

$$f_n(x) := \sqrt[n]{1-x^2} \le 1 =: g(x), \qquad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N},$$

i da je funkcija g integrabilna, $\int_{[0,1]} g d\lambda = \int_{[0,1]} 1 d\lambda = 1$.

Primjedba 3.35. *Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji općenito ne vrijedi za Riemannov integral. Za kontraprimjer može se uzeti niz funkcija (f_n) konstruiran u primjedbi 3.14. Taj niz funkcija je dominiran integrabilnom (u smislu Riemanna) funkcijom $g = 1$.*

Teorem 3.36. *Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$, onda vrijedi:*

(a) Red $\sum_n f_n$ konvergira (s.s.).

(b) Ako je $f = \sum_n f_n$ (s.s.), onda je

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. (a) Neka je $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| : X \to [0, \infty]$. Pomoću teorema 3.15. i propozicije 3.11. dobivamo $\int g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$. Zato je $g(x) \in \mathbb{R}$ (s.s.) (propozicija 3.25.(a)), odnosno red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira apsolutno skoro svuda, pa konvergira skoro svuda.

(b) Neka je $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $|s_n| \le g$ (s.s.) i $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ (s.s.). Primjenom teorema 3.33. dobivamo $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu$, odnosno $\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$. $\square$

Zadaci.

1. Neka je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ prostor s mjerom prebrojavanja, tj. $\mu(A)$ je broj elemenata skupa $A \subseteq \mathbb{N}$, i $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Dokažite da je $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

   (Uputa: Ako je $f = \chi_A$, $A \subseteq \mathbb{N}$, onda je $\int \chi_A d\mu = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n)$. Ako je $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$ jednostavna funkcija, onda je

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int \chi_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

   U općem slučaju prvo ćemo definirati funkcije $g_k(n) := \begin{cases} f(n), & \text{ako je } n \leq k \\ 0, & \text{ako je } n > k. \end{cases}$
   Tada je (g_k) rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija, $g_k \leq g_{k+1} \leq f$, i pri tome je $\lim_{k\to\infty} g_k = f$. Čak više, $\int g_k d\mu = \sum_{n=1}^{k} f(n)$. Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).\,)$$

2. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a (f_n) niz nenegativnih, Σ-izmjerivih i monotono opadajućih funkcija koji konvergira prema funkciji $f : X \to [0, \infty]$. Dokažite: (a) Ako je funkcija f_1 integrabilna, onda su sve funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne i pri tome je

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

   (b) Pokažite primjerom da se općenito ne smije izostaviti integrabilnost funkcije f_1.

   (Uputa: (a) Tvrdnja slijedi iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji ako se za majorantu (dominirajuću funkciju) uzme f_1. (b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajte funkciju $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f_n = \chi_{[n,\infty)}$, a za mjeru uzmite Lebesgueovu mjeru λ. Tada je $f = \lim_n f_n = 0$, $\int f_n d\lambda = \infty$, $\int f d\lambda = 0$.)

3. Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ prostor mjere, gdje je $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$, a λ Lebesgueova mjera. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$. Stavimo $f := \lim_n f_n = 0$. Očito je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} [n\lambda((0, 1/n))] = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1,$$

   dok je $\int f d\lambda = \int 0 d\lambda = 0$. Uočite da ovaj rezultat nije u kontradikciji s Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji jer niz funkcija (f_n) nije omeđen (dominiran) s integrabilnom funkcijom.

4. Neka je $f : X \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere (X, Σ, μ). Nadalje, neka je $A_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$, $t > 0$. Dokazati:
(a) $\lim_{t\to\infty} \mu(A_t) = 0$. (b) $\lim_{t\to\infty}(t\mu(A_t)) = 0$.

   (Uputa: (a) Iskoristite Čebiševljevu nejednakost (3.11). (b) Iz (3.11) dobivamo $t\mu(A_t) \leq \int_{A_t} f d\mu = m(A_t)$. Prema korolaru 3.17. m je mjera, a po pretpostavci je $m(\mathbb{R}) < \infty$. Pokažimo da je $\lim_{t\to\infty} m(A_t) = 0$, odakle će sllijediti tvrdnja. Ako je $u > t$, onda je $m(A_u) \leq m(A_t)$, i zato je dovoljno pokazati da je niz $\big(m(A_n)\big)$ konvergira prema 0. Zaista, kako je $E_n \supseteq E_{n+1}$ i $m(E_1) \leq m(\mathbb{R}) < \infty$, prema propoziciji 1.18.(iv) i propoziciji 3.25. je

$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = m(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0.$$

5. Neka je (Ω, Σ, μ) vjerojatnosni prostor, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $f \geq 0$ i $\int f d\mu = 1$. Pokažite da je funkcija $P : \Sigma \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu, \qquad A \in \Sigma,$$

   vjerojatnosna mjera.

   (Uputa: Iskoristite korolar 3.17. Očito je $P(\Omega) = 1$.)

6. Neka je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$. Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int \chi_{(-\infty,x]} f d\mu$, neprekidna na $\mathbb{R}$.

   (Uputa: Pretpostavimo da F nije neprekidna u točki x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoji x_δ takva da je $|x_\delta - x_0| < \delta$ i $\varepsilon \leq |F(x_\delta) - F(x_0)|$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_\delta < x_0$. Tada je

$$F(x_0) = \int \chi_{(-\infty,x_0]} f d\mu = \int \big[\chi_{(-\infty,x_\delta]} + \chi_{(x_\delta,x_0]}\big] f d\mu = F(x_\delta) + \int \chi_{(x_\delta,x_0]} f d\mu$$

   i zato je

$$\varepsilon \leq |F(x_\delta) - F(x_0)| = \Big|\int \chi_{(x_\delta,x_0]} f d\mu\Big| \leq \int \big|\chi_{(x_\delta,x_0]} f\big| d\mu \leq \int \chi_{[x_0-\delta,x_0+\delta]} |f| d\mu.$$

   Specijalno, stavljajući za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ dobivamo

$$(\star) \qquad \varepsilon \leq \int \chi_{[x_0-1/n,x_0+1/n]} |f| d\mu, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Neka je $f_n := \chi_{[x_0-1/n,x_0+1/n]}|f|$, $n \in \mathbb{N}$. Niz funkcija $(|f| - f_n)$ je rastući i (s.s.) konvergira prema $|f|$. Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int |f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (|f| - f_n) d\mu = \int |f| d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

   Dakle, $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 0$. Graničnim prijelazom $n \to \infty$ iz $(\star)$ dobiva se $\varepsilon \leq 0$, što je kontradikcija.)

7. Dokazati da uz pretpostavke teorema 3.33. vrijedi $\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|d\mu=0$. (Uputa: Za svaki $n\in\mathbb{N}$ definirajte funkciju $h_n(x)=\sup\{|f_k(x)-f(x)|:k\geq n\}$. Kao $f_n\to f$, to $h_n\to 0$. Uočite da je $h_{n+1}<h_n$ za svaki n. Kako je $|f_k-f|\leq 2g$, $k\geq n$, to je $h_n\leq 2g$. Stavite $g_n=2g-h_n$, $n\in\mathbb{N}$. Tada je $0\leq g_1\leq g_2\leq\ldots\leq 2g$ i $g_n\to 2g$. Zato $\int g_n d\mu\to\int 2gd\mu$. Teorem o monotonoj konvergenciji povlači $\int h_n d\mu=\int 2gd\mu-\int g_n d\mu\to 0$. Sada iz nejednakosti $\int|f_n-f|d\mu\leq\int h_n d\mu$ slijedi $\int|f_n-f|d\mu\to 0$. Štoviše, iz ovog posljednjeg limesa slijedi i dokaz teorema 3.33. Zaista, $\int|f_n-f|d\mu\to 0\Rightarrow\int(f_n-f)d\mu\to 0$, pa iz $\int f_n d\mu=\int(f_n-f)d\mu+\int fd\mu$ dobivamo $\int f_n d\mu\to\int fd\mu$.)

3.4. Integracija na izmjerivom skupu

Postoje dva prirodna načina kako definirati integrabilnost i integral funkcije f na skupu A. Prvi način je opisan definicijom 3.22.(II), koju ponavljamo:

Neka je (X,Σ,μ) prostor mjere, $f:X\to[-\infty,\infty]$ izmjeriva funkcija i $A\in\Sigma$. Ako je definiran integral $\int f\chi_A d\mu$ onda broj

$$\int_A fd\mu:=\int f\chi_A d\mu$$

zovemo integral funkcije f na skupu A s obzirom na mjeru μ. Funkcija f je integrabilna na skupu $A\in\Sigma$ ako je $\int_A fd\mu$ konačan broj.

Dakle, funkcija f je integrabilna na skupu $A\in\Sigma$ onda i samo onda ako je integrabilna funkcija $f\chi_A:X\to[-\infty,\infty]$.

Prije nego što navedemo drugu ekvivalentnu definiciju uvest ćemo neke pojmove.

Propozicija 3.37. *Neka je (X,Σ) izmjeriv prostor i $A\subseteq X$ bilo koji neprazan podskup od X. Tada je*

$$\Sigma_A:=\{S\cap A:S\in\Sigma\}$$

σ-algebra na skupu A.

Dokaz. Treba pokazati da familija Σ_A ima svojstva (σ1) - (σ3) iz definicije 1.1.
(σ1). Kako je $A=X\cap A$, to je $A\in\Sigma_A$.
(σ2). Neka je $B\in\Sigma_A$. Tada postoji $S\in\Sigma$ takav da je $B=S\cap A$. Treba pokazati da je $A\backslash B\in\Sigma_A$. Zaista, kako je $X\backslash S\in\Sigma$ i $A\backslash B=(X\backslash S)\cap A$, to je $A\backslash B\in\Sigma_A$.
(σ3). Neka je (B_n) niz skupova iz Σ_A. Tada postoji niz skupova (S_n) takav da je $B_n=S_n\cap A$, $n\in\mathbb{N}$. Zato je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n\cap A)=\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n\Big)\cap A.$$

□

Definicija 3.38. *Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor i $A \subseteq X$ neprazan podskup od X. σ-algebru Σ_A iz propozicije 3.37. zovemo* restrikcija σ-algebre Σ na skup A.

Lako se dokaže sljedeća lema:

Lema 3.39. *Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor i $A \in \Sigma$ neprazan skup. Tada je*

$$\Sigma_A = \{S \in \Sigma : S \subseteq A\}.$$

Sljedeća je tvrdnja očigledna.

Propozicija 3.40. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $A \in \Sigma$ neprazan skup. Funkcija $\mu_{|A} : \Sigma_A \to [0, \infty]$ definirana formulom*

$$\mu_{|A}(B) = \mu(B), \qquad B \in \Sigma_A$$

je mjera na (A, Σ_A). Zovemo je restrikcija mjere μ na Σ_A.

Sada ćemo pokazati da se integrabilnost i integral Σ-izmjerive funkcije na skupu $A \in \Sigma$ mogu definirati i na drugi način. Problematiku ćemo smjestiti u prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$. Kao i do sada, s f_A ćemo označavati restrikciju funkcije f na skup A. Dakle, $f_A : A \to [-\infty, \infty]$ je definirana na sljedeći način:

$$f_A(x) = f(x), \qquad x \in A.$$

Lako je pokazati da je funkcija f_A Σ_A-izmjeriva: Neka je $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Funkcija f je Σ-izmjeriva pa je $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Zato je $f_A^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B) \in \Sigma_E$.

Teorem 3.41. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Tada vrijedi:*

(a) Integral $\int_A f d\mu$ funkcije f na skupu A je definiran onda i samo onda ako je definiran integral $\int f_A d\mu_{|A}$ funkcije f_A za prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$.

(b) Ako je definiran integral $\int_A f d\mu$, onda je

$$\int_A f d\mu := \int f_A d\mu_{|A}.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u tri koraka:
(i) Neka je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ nenegativna jednostavna funkcija na skupu X, gdje su $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i α_1, α_n nenegativni realni brojevi. Tada je $f\chi_A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap A}$. Uočimo da je $f_A : A \to [0, \infty]$ zadana istom formulom kao $f\chi_A$, tj. $f_A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap A}$. Kako je $A_i \cap A \in \Sigma_A$, $i = 1, \dots, n$, f_A je nenegativna jednostavna funkcija na skupu A. Tvrdnje teorema slijede iz jednakosti

$$\int f\chi_A d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_{|A}(A_i) = \int f_A d\mu_{|A}.$$

(ii) Neka je $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna Σ-izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz (f_n) nenegativnih jednostavnih funkcija takav da je $f = \lim_n f_n$ (teorem 2.23.) i $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ (teorem 3.12.). Očito da je $(f_n \chi_A)$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija (definiranih na X) koji konvergira prema $f\lambda_A$. Restrikcija $f_{n|A} : A \to [0, \infty]$ je zadana istom formulom kao i $f_n \chi_A$. Osim toga, vrijedi $\lim_n f_{n|A} = f_A$ i $\int f_n \chi_A d\mu = \int f_{n|A} d\mu_{|A}$ (vidi (i)). Zato je

$$\int f\chi_A d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \chi_A d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n|A} d\mu_{|A} = \int f_A d\mu_{|A},$$

odakle slijede tvrdnje teorema.

(iii) Neka je $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Tada je $f^+\chi_A = (f\chi_A)^+$, $f^-\chi_A = (f\chi_A)^-$, $(f_A)^+ = f_A^+$ i $(f_A)^- = f_A^-$. Pomoću (ii) dobivamo

$$\begin{aligned}\int (f\chi_A)^+ d\mu &= \int f^+\chi_A d\mu = \int f_A^+ d\mu_{|A} = \int (f_A)^+ d\mu_{|A}\\ \int (f\chi_A)^- d\mu &= \int f^-\chi_A d\mu = \int f_A^- d\mu_{|A} = \int (f_A)^- d\mu_{|A},\end{aligned}$$

odakle slijede tvrdnje teorema. □

Zahvaljujući teoremu 3.41. imamo sljedeću ekvivalentnu definiciju integrabilnosti i integrala Σ-izmjerive funkcije na skupu $A \in \Sigma$.

Definicija 3.42. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$.*
Ako je definiran integral $\int f_A d\mu_{|A}$ funkcije f_A za prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$ onda broj

$$\int_A f d\mu := \int f_A d\mu_{|A}$$

zovemo integral funkcije f na skupu A s obzirom na mjeru μ.
Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu $A \in \Sigma$ *ako je $\int_A f d\mu$ konačan broj.*

Sljedeći teorem govori nam da je integrabilna funkcija (integrabilna na X) ujedno integrabilna i na svakom izmjerivom skupu.

Teorem 3.43. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Tada vrijedi:*

(a) Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je definiran integral $\int_A f d\mu$ za svaki $A \in \Sigma$.

(b) Ako je f integrabilna (na X), onda je f integrabilna na svakom skupu $A \in \Sigma$.

Dokaz. Na cijelom skupu X je $(f\chi_A)^+ = f^+\chi_A \le f^+$ i $(f\chi_A)^- = f^-\chi_A \le f^-$. Iz tih nejednakosti zaključujemo:

(a) Ako postoji integral $\int f d\mu$, onda je $\int (f\chi_A)^+ d\mu \leq \int f^+ d\mu < \infty$ ili $\int (f\chi_A)^- d\mu \leq \int f^- d\mu < \infty$. To znači da je definiran integral $\int f\chi_A d\mu$, odnosno integral $\int_A f d\mu$. Time smo dokazali tvrdnju (a).

(b) Ako je f integrabilna na X, onda je $\int (f\chi_A)^+ d\mu \leq \int f^+ d\mu < \infty$ i $\int (f\chi_A)^- d\mu \leq \int f^- d\mu < \infty$. To znači da je konačan integral $\int f\chi_A d\mu$, odnosno integral $\int_A f d\mu$. □

Sljedeći teorem nećemo dokazivati.

Teorem 3.44. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda vrijedi:*

(a) $\int_A f d\mu = 0$ *za svaki skup $A \in \Sigma$ za koji je $\mu(A) = 0$.*

(b) Neka je (A_n) niz međusobno disjunktnih skupova iz Σ. Stavimo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada je

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

(c) Neka je (A_n) uzlazan niz skupova iz Σ. Stavimo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada je

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

(d) Neka je (A_n) silazan niz skupova iz Σ. Stavimo $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako je $\left|\int_{A_1} f d\mu\right| < \infty$, onda je

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Na kraju ove točke treba spomenuti da zahvaljujući teoremu 3.41. svi rezultati koji vrijede za integral $\int f d\mu$ funkcije $f : X \to [-\infty, \infty]$ vrijede također i za integral $\int_A f d\mu$ funkcije f na izmjerivom skupu $A \in \Sigma$. To se može vidjeti i tako da se uz male modifikacije ponove odgovarajući dokazi. Za ilustraciju navodimo kako glasi modifikacija Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji.

Teorem 3.45. *Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije i neka je $g : X \to [0, \infty]$ integrabilna funkcija na skupu $A \in \Sigma$. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

(i) $f = \lim_n f_n$ *(s.s.) na skupu A,*

(ii) $|f_n| \leq g$ *(s.s.) na skupu A za svaki $n \in \mathbb{N}$,*

onda su sve funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne na skupu A i vrijedi

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Primjer 3.46. *Koristeći se teoremom o dominiranoj konvergenciji izračunat ćemo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,10]} e^{-nx^4} d\lambda.$$

Neka je $f_n(x) := e^{-nx^4}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \ x \in (0,10] \\ 1, \ x = 0 \end{cases} = 1\chi_{\{0\}} + 0\chi_{(0,10]}.$$

Nadalje, uočimo da je $f_n(x) := e^{-nx^4} \leq 1$ za sve $x \in A = [0,10]$ i $n \in \mathbb{N}$ te da je $1 \in \mathcal{L}([0,10])$, tj. $\int_{[0,10]} 1 d\lambda = 10$. Dakle, ispunjeni su svi uvjeti za primjenu teorema o dominiranoj konvergenciji. Dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,10]} e^{-nx^4} d\lambda = \int_{[0,10]} \big(\lim_{n\to\infty} e^{-nx^4}\big) d\lambda = \int_{[0,10]} (1\chi_{\{0\}} + 0\chi_{(0,10]}) d\lambda = 0.$$

Primjer 3.47. *Koristeći se teoremom o monotonoj konvergenciji izračunat ćemo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,2]} \sqrt[n]{2-x} d\lambda.$$

U ovom slučaju je $A = [1,2]$, $f_n(x) = \sqrt[n]{2-x}$. Prvo treba pokazati da niz (f_n) monotono raste na $[1,2]$: Za svaki $x \in [1,2]$ je $2 - x \leq 1$, pa je zato $\sqrt[n]{2-x} \leq \sqrt[n+1]{2-x}$.

Nadalje, imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [1,2) \\ 0, \ x = 2 \end{cases} = 1\chi_{[1,2)} + 0\chi_{\{2\}}.$$

Prema teoremu o monotonoj konvergenciji imamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,2]} \sqrt[n]{2-x} d\lambda = \int_{[1,2]} \big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2-x}\big) d\lambda = \int_{[1,2]} (1\chi_{[1,2)} + 0\chi_{\{2\}}) d\lambda = 1.$$

Zadaci.

1. Izračunajte: (a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{\cos x} d\lambda$. (b) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} e^{-\frac{n^4}{6}x} d\lambda$.

   (Uputa: Upotrijebite teorem o dominiranoj konvergenciji. (a) $f_n(x) := \sqrt[n]{\cos x}$, $|f_n(x)| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in [0,\pi]$, $\lim_n f_n = \chi_{[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]}$. (b) $f_n(x) := e^{-\frac{n^4}{6}x} \to \chi_{\{0\}}$, $|f_n(x)| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in [0,1]$.

2. Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ [1/x], & \text{inače}, \end{cases}$$

gdje $[t]$ označava cjelobrojni dio od t. Dokažite: (a) f je izmjeriva. (b) $\int f d\lambda = \infty$.

(Uputa: Neka je $g = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{(1/(n+1),1/n]}$. Uočite da je $f(x) \neq g(x) \Leftrightarrow x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, Dakle, $f = g$ (s.s.) na $[0,1]$ jer je skup $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ -zanemariv. (a) g je izmjeriva funkcija, a Lebesgueova mjera λ je potpuna. Zato tvrdnja slijedi iz teorema 2.28. (b) Prema propoziciji 3.11. je $\int_{[0,1]} f d\lambda = \int_{[0,1]} g d\lambda$. Pomoću teorema 3.15. dobivamo

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \int_{[0,1]} g d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int n\chi_{(1/(n+1),1/n]} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty. \Big)$$

3.5. Riemannov integral

Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji je osnovni teorem integralnog računa. Sada ćemo pomoću toga teorema pokazati da je Lebesgueov integral proširenje Riemannovog integrala, tj. da je svaka R-integrabilna funkcija (integrabilna u smislu Riemanna) ujedno integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral podudara s Riemannovim integralom.

Riemannov integral se definira samo za omeđene funkcije definirane na segmentu. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \text{za svaki } x \in [a,b].$$

Prisjetimo se osnovnih stvari o Riemannovom integralu. Rastav ili dekompozicija D segmenta $[a,b]$ je svaki konačan skup točaka $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$ koji sadrži par $\{a,b\}$. Nadalje ćemo smatrati da je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Dijametar rastava D definira se kao broj $|D| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$. Sa $\mathcal{D}([a,b])$ ili kraće $\mathcal{D}$ označavat ćemo skup svih rastava segmenta $[a,b]$. Ako je $D_1 \subseteq D_2$, onda kažemo da rastav D_2 profinjuje rastav D_1. Uočimo da $D_1 \cup D_2$ profinjuje D_1 i D_2.

Svakom rastavu $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a,b]$ pripadaju tzv. donja Darbouxova[12] suma $s(f;D)$ i gornja Darbouxova suma $S(f;D)$:

$$s(f;D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$S(f;D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

[12]Gaston Darboux (1842 - 1917), francuski matematičar.

i beskonačno mnogo tzv. integralnih suma:

$$\sigma(f; D, \tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}),$$

gdje su $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$ proizvoljno odabrani. Očito je

$$m(b-a) \leq s(f; D) \leq \sigma(f; D, \tau_1, \dots, \tau_n) \leq S(f; D) \leq M(b-a). \tag{3.22}$$

Ako je $D_1 \subseteq D_2$, onda je (vidi [5, 7])

$$s(f; D_1) \leq s(f; D_2) \qquad \& \qquad S(f; D_2) \leq S(f; D_1).$$

Za bilo koja dva rastava D_1 i D_2 je očito $D_1, D_2 \subseteq D_1 \cup D_2$. Pomoću (3.22) i gornjih nejednakosti dobivamo

$$s(f; D_1) \leq s(f; D_1 \cup D_2) \leq S(f; D_1 \cup D_2) \leq S(f; D_2). \tag{3.23}$$

To znači da je skup $\{s(f; D) : D \in \mathcal{D}\}$ omeđen odozgor sa svakom gornjom Darbouxovom sumom, a skup $\{S(f; D) : D \in \mathcal{D}\}$ je omeđen odozdol sa svakom donjom Darbouxovom sumom. Zato postoje tzv. donji Riemannov integral $I_\star$ i gornji Riemannov integral $I^\star$ funkcije f:

$$I_\star := \sup\{s(f; D) : D \in \mathcal{D}\}, \qquad I^\star := \inf\{s(f; D) : D \in \mathcal{D}\}$$

i pri tome je uvijek $I_\star \leq I^\star$. Funkcija f je R-integrabilna ili integrabilna u smislu Riemanna ako je $I_\star = I^\star$. Ako je funkcija f R-integrabilna, onda se broj $I := I^\star = I_\star$ zove Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava se još sa $\int_a^b f(x)dx$.

Dokaz sljedećeg teorema i korolara može se naći u [7, str. 86].

Teorem 3.48. (Darboux) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki rastav D segmenta $[a, b]$ vrijedi*

$$|D| < \delta \Longrightarrow I_\star - s(f; D) < \varepsilon \qquad \& \qquad S(f; D) - I^\star < \varepsilon.$$

Korolar 3.49. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Neka je (D_n) niz rastava $D_n = \{x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nr_n}\}$ segmenta $[a, b]$ takav da je $\lim_{n\to\infty} |D_n| = 0$. Tada vrijedi:*

(a) $\lim_{n\to\infty} s(f; D_n) = I_\star$.

(b) $\lim_{n\to\infty} S(f; D_n) = I^\star$.

(c) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda je $\lim_{n\to\infty} \sigma(f; D_n, \tau_{n1}, \dots, \tau_{nr_n}) = I$ *za svaki izbor točaka $\tau_{ni} \in [x_{ni-1}, x_{ni}]$*

Sada ćemo dokazati tzv. Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost:

Teorem 3.50. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.*

(a) Funkcija f je R-integrabilna onda i samo onda ako je ona neprekidna skoro svuda na $[a,b]$.

(b) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda je ona integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral $\int_{[a,b]} f d\lambda$ podudara s Riemannovim integralom $\int_a^b f(x)dx$.

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo rastav D_n segmenta $[a,b]$ s diobenim točkama

$$x_{ni} = a + \frac{b-a}{2^n} i, \qquad i = 1, \dots, 2^n.$$

Tada za niz rastava (D_n) vrijedi:

$$D_n \subseteq D_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \& \qquad \lim_{n\to\infty} |D_n| = 0.$$

Definirajmo nizove (h_n) i (g_n) jednostavnih funkcija na $[a,b]$ na sljedeći način:

$$h_n := \sum_{i=1}^{2^n} m_{ni}\chi_{[x_{ni-1},x_{ni})} + f(b)\chi_{\{b\}}, \qquad m_{ni} = \inf\{f(x) : x \in [x_{ni-1}, x_{ni}]$$
$$g_n := \sum_{i=1}^{2^n} M_{ni}\chi_{[x_{ni-1},x_{ni})} + f(b)\chi_{\{b\}}, \qquad M_{ni} = \sup\{f(x) : x \in [x_{ni-1}, x_{ni}].$$

Odmah se vidi da niz (h_n) raste, a niz (g_n) pada i da je

$$h_n \le f \le g_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.24}$$

Nadalje, imamo

$$\int_{[a,b]} h_n d\lambda = \sum_{i=1}^{2^n} m_{ni}(x_{ni} - x_{ni-1}) = s(f; D_n)$$
$$\int_{[a,b]} g_n d\lambda = \sum_{i=1}^{2^n} M_{ni}(x_{ni} - x_{ni-1}) = S(f; D_n).$$

Zbog (3.24) postoje funkcije $h := \lim_n f_n$ i $h := \lim_n h_n$ i vrijedi

$$h \le f \le g. \tag{3.25}$$

Funkcije h i g su λ-izmjerive (propozicija 2.17.(c)).

Kako je f omeđena, postoji konstanta K takva da je

$$|h_n|, |g_n| \le K, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Konstanta K je Lebesgue-integrabilna funkcija na $[a,b]$, $\int_{[a,b]} K d\lambda = K(b-a)$, pa iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji (teorem 3.33.) slijedi da su h i g integrabilne u smislu Lebesguea i da vrijedi

$$\int_{[a,b]} h d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} s(f;D_n)$$
$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} S(f;D_n).$$

Kako je (korolar 3.49.)

$$\lim_{n\to\infty} s(f;D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f;D_n) = \int_a^b f(x)dx,$$

imamo

$$\int_{[a,b]} h d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} s(f;D_n) = I_\star \tag{3.26}$$
$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} S(f;D_n) = I^\star. \tag{3.27}$$

Stoga je

$$\int_{[a,b]} (g-h) d\lambda = I^\star - I_\star. \tag{3.28}$$

To znači da je funkcija f R-integrabilna onda i samo onda ako je $\int_{[a,b]}(g-h)d\lambda = 0$.
Pokažimo da je funkcija f R-integrabilna onda i samo onda ako je

$$h = g \ (s.s.) \text{ na } [a,b]. \tag{3.29}$$

Ako je f R-integrabilna, onda je $I^\star = I_\star$, pa (3.28) povlači $\int_{[a,b]}(g-h)d\lambda = 0$. Kako je $g-h = |g-h|$, prema teoremu 3.27. je $g = h$ (s.s.) na $[a,b]$. Obratno, ako vrijedi (3.29), prema teoremu 3.26. je $\int_{[a,b]} h d\lambda = \int_{[a,b]} g d\lambda$, pa iz (3.28) dobivamo $I_\star = I^\star$.

(b) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda vrijedi (3.29). Zbog (3.25) je $h = f$ (s.s.) na $[a,b]$. Prema teoremu 3.26. funkcija f je integrabilna u smislu Lebesguea i pri tome je $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} h d\lambda$. Zbog (3.26) je $\int_{[a,b]} f d\lambda = I_\star = \int_a^b f(x)dx$.

(a) Prvo ćemo pokazati da za svaku točku

$$x_0 \in [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \quad \text{vrijedi} \quad h(x_0) = g(x_0)$$

onda i samo onda ako je funkcija f neprekidna u točki x_0.

Pretpostavimo da za $x_0 \in [a,b] \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ vrijedi $h(x_0) = g(x_0)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $h(x_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x_0)$ i $g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_0)$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon$. Neka je $x_0 \in (x_{n,i-1}, x_{ni})$. Tada je je $h_n(x_0) = m_{ni}$, $g_n(x_0) = M_{ni}$, a za svaki $x \in (x_{n,i-1}, x_{ni})$ je $m_{ni} \le f(x) \le M_{ni}$. Zato za svaki $x \in (x_{n,i-1}, x_{ni})$ dobivamo

$$|f(x) - f(x_0)| \le M_{ni} - m_{ni} = g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon,$$

što znači da je f neprekidna u točki x_0.

Obratno, pretpostavimo da je f neprekidna u točki $x_0 \in [a,b] \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbog $\lim_{n\to\infty} |D_n| = 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|D_n| < \delta$ za svaki $n \ge n_0$. Neka je $n \ge n_0$. Tada postoji jedinstveni indeks i takav da je $x_0 \in (x_{n,i-1}, x_{ni})$. Nadalje, za svaki $x \in (x_{n,i-1}, x_{ni})$ vrijedi $|x - x_0| \le x_{ni} - x_{n,i-1} \le |D_n| < \delta$, pa je zato $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dakle,

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za svaki } x \in (x_{n,i-1}, x_{ni}),$$

odakle slijedi

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le m_{ni} = h_n(x_0) \le g_n(x_0) = M_{ni} \le f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zato je $g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon$. Time smo pokazali da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon$. To znači da je $\lim_{n\to\infty} \big(g_n(x_0) - h_n(x_0)\big) = 0$, tj. $g(x_0) = h(x_0)$.

Ako je f R-integrabilna, onda je $h = g$ (s.s.) na $[a,b]$. To znači da postoji zanemariv skup $N_0 \subset [a,b]$ takav da je $h(x) = g(x)$ za svaki $x \in [a,b] \backslash N_0$. Neka je $N = N_0 \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big)$. Skup N kao prebrojiva unija zanemarivih skupova također je zanemariv. Za svaki $x \in [a,b] \backslash N$ je $h(x) = g(x)$, pa je f neprekidna u točki x.

Ako je f skoro svuda neprekidna na $[a,b]$, onda postoji zanemariv skup $N_0 \subset [a,b]$ takav da je f neprekidna na skupu $[a,b] \backslash N_0$. Neka je $N = N_0 \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\Big)$. Pokažimo da je $h(x) = g(x)$ za svaki $x \in [a,b] \backslash N$, što će povlačiti da je $h = g$ (s.s.) na $[a,b]$, pa će f biti R-integrabilna funkcija. Zaista, ako je $x \in [a,b] \backslash N$, onda je f neprekidna u točki x i zato je $h(x) = g(x)$. □

Teorem 3.50. koristan je alat za računanje Lebesgueova integrala. Ilustracije radi, pretpostavimo da treba izračunati Lebesgueov integral $\int f d\lambda$ funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Ako je f R-integrabilna na nizu segmenata $([a_n, b_n])$, gdje $a_n \to -\infty$ i $b_n \to \infty$, definirajmo funkcije $f_n = \chi_{[a_n,b_n]} f : R \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $f_n \to f$ pa pomoću teorema o monotonoj konvergeniciji dobivamo

$$\int f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[a_n,b_n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Pri tome, za računanje Riemannova integrala $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ možemo koristiti poznate tehnike (parcijalna integracija, integracija supstitucijom, itd.).

Primjer 3.51. *Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \textit{ako je } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Tada je $f = \sin$ (s.s.), jer skup $\mathbb{Q}$ je λ-zanemariv. Prema teoremu 3.50. f je R-integrabilna i $\int_0^1 f(x)dx = \int_{[0,1]} f d\lambda = \int_{[0,1]} \sin d\lambda$. Posljednja jednakost je zbog toga što je $f = \sin$ skoro svuda. Ponovnom primjenom teorema 3.50. dobivamo $\int_{[0,1]} \sin x d\lambda = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1$. Dakle, $\int_0^1 f(x)dx = 1 - \cos 1$.

Primjer 3.52. *Izračunajmo: (a) $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda$, (b) $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda$.*
(a) Neka je $X = [1,\infty)$, $f : X \to [0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dobivamo

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[1,n]} \frac{1}{x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{1}{x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

Kako je $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda = \infty$, funkcija f nije integrabilna (u smislu Lebesguea) na $[1,\infty)$.

(b) $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \chi_{[1,n]} \frac{1}{x^2} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Dakle, funkcija $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ je integrabilna na $[1,\infty)$.

Zadaci.

1. Pokažite da je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \end{cases}$$

   R-integrabilna funkcija i izračunajte $\int_0^1 f(x)dx$.

   (Uputa: Lako je pokazati da f ima prekid u svakoj racionalnoj točki. Pokažimo da je f neprekidna u svakoj iracionalnoj točki: Neka je $\varepsilon > 0$. Za iracionalan x_0 postoji konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ takvih da je $1/q \geq \varepsilon$. Odaberite dovoljno malen $\delta > 0$ takav da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ne sadrži ni jedan takav racionalan broj. Time ćete pokazati da je f neprekidna u x_0. Skup $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ je zanemariv, pa je f integrabilna u smislu Riemanna. Kako je $f = 0$ (s.s.), to je $\int_0^1 f(x)dx = 0$.)

2. Izračunajte: (a) $\int_{(0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda$. (b) $\int_{(0,1]} \frac{1}{x} d\lambda$.

   (Uputa: $f_n := \chi_{(1/n,1]} f \to f$ na $(0,1]$, gdje je f podintegralna funkcija.)

3. Dokazati da su funkcije (a) $f(x) = e^{-x^\alpha}$, $\alpha > 0$, (b) $g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, integrabilne na $A = [0, \infty)$ u smislu Lebesguea.

   (Uputa: Prema Lebesgueovu teoremu o dominiranoj konvergenciji dovoljno je konstruirati dominirajuću integrabilnu funkciju na A. (a) Ako je $0 \le x < 1$, onda je $e^{-x^\alpha} \le 1$. Kako je $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 e^{-x^\alpha}\right) = 0$, postoji $M > 0$ takav da je $e^{-x^\alpha} \le M\frac{1}{x^2}$ za svaki $x \in [1, \infty)$. Zato je $f(x) \le 1\chi_{[0,1)} + \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)}$. Kako je $\int 1\chi_{[0,1)} d\lambda = 1 < \infty$ i $\int \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)} d\lambda < \infty$ (primjer 3.52.(b)), konstruirana dominirajuća funkcija je integrabilna na A. (b) Postupite kao pod (a) i pokažite da postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|g| \le 1\chi_{[0,1)} + \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)}$.)

4. Izračunajte limese sljedećih Riemannovih integrala:
   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$. (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dx$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)} dx$.

   (Uputa: (a) Neka je $f_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le e^x$. Tada je $\lim_{n\to\infty} f_n = e^x$, $f_n\chi_{[0,n]}e^{-2x}$ konvergira prema e^{-x} i $f_n\chi_{[0,n]}e^{-2x} \le e^{-x}$. Pomoću teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{[0,n]}e^{-2x} d\lambda = \int_{[0,\infty)} e^{-x} d\lambda.$$

   S druge strane, pomoću teorema o monotonoj kovergenciji dobivamo

$$\int_{[0,\infty)} e^{-x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x} dx = 1.$$

   (b) $f_n = (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} \le 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji dobiva se $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dx = 0$.

   (c) Neka je $X = (0, \infty)$. Definirajmo funkcije $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, formulom $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)}$. Kako je $|\sin(x^{-1}e^x)| \le 1$ za svaki $x \in X$, to je

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ako je } x = 1 \\ 0, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

   Neka je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}, & \text{ako je } 0 < x \le 1 \\ x^{-2}, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

   Funkcija g je integrabilna na X, $\int_0^\infty g(x)dx = 7/3 < \infty$.

   Neka je $n \ge 2$. Ako je $x > 1$, onda iz nejednakosti

$$1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x) \ge x^n > x^2$$

slijedi $f_n(x) \leq g(x)$ za svaki $x \in X$ i za svaki $n \geq 2$. Ako je $0 < x \leq 1$, onda je

$$1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x) > 1 - \frac{|\sin(x^{-1}e^x)|}{4n} \geq 1 - \frac{1}{4n} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dakle, na skupu X je $|f_n| = f_n \leq g$ za svaki $n \geq 2$. Sada pomoću Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)} dx = \int_0^\infty f dx = 1.$$

5. Izračunajte $\int_0^\infty e^{-[x]}dx$, gdje je $[x]$ najveće cijelo od x.

   (Uputa: Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji lako se pokaže da je $\int_0^\infty e^{-[x]}dx = \int_{[0,\infty)} e^{-[x]}d\lambda$. Neka je $f(x) = e^{-[x]}$. Definirajmo funkcije $f_n := e^{-n}\chi_{[n-1,n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$. Sada pomoću korolara 3.36. dobivamo

$$\int_{[0,\infty)} e^{-[x]}d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int e^{-n}\chi_{[n-1,n)} = \sum_{n=1}^\infty e^{-n} = \frac{e}{e-1}.$$

   Dakle, $\int_0^\infty e^{-[x]}dx = \frac{e}{e-1}$.)

6. Dokažite jednakost:

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

   (Uputa: Razvijanjem u red dobivamo $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n$, pa je zato

$$\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=0}^\infty (n+1)x^n \ln^2 x.$$

   Funkcije $f_n := (n+1)x^n \ln^2 x$, $n \in \mathbb{N}$ su R-integrabilne. Primjenom korolara 3.36. dobivamo

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \sum_{n=0}^\infty (n+1) \int_0^1 x^n \ln^2 x dx.$$

   Pokažite parcijalnom integracijom da je $\int_0^1 x^n \ln^2 x dx = \frac{2}{(n+1)^3}$. Na kraju, iskoristite dobro poznatu jednakost $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

3.6. Konveksne funkcije i nejednakosti

Neka je $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ interval. Prisjetimo se da je realna funkcija $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ **konveksna** ako je

$$\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \qquad \forall\lambda \in [0,1].$$

To znači da se nad svakim segmentom $[x,y]$ graf konveksne funkcije φ nalazi iznad sekante koja prolazi točkama $(x,\varphi(x))$ i $(y,\varphi(y))$.

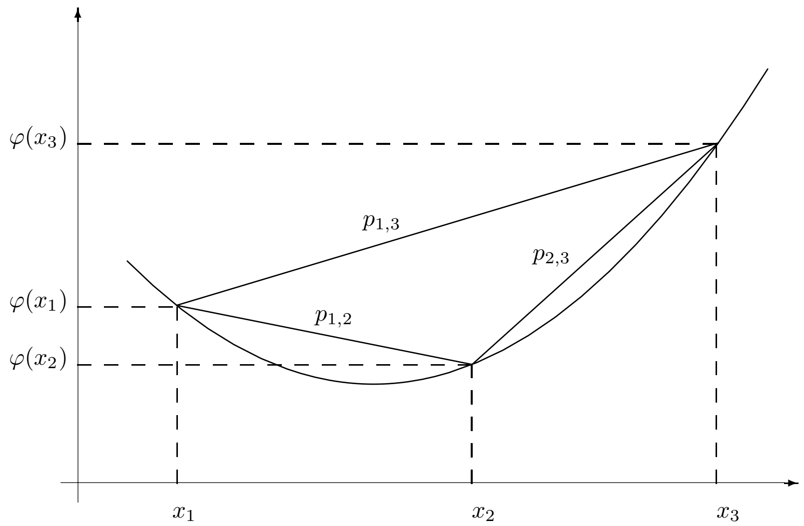
Iz definicije slijedi

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}, \qquad x_1 < x_2 < x_3. \tag{3.30}$$

Zaista, neka je $\lambda = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. Tada je $1-\lambda = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ i $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$, pa iz definicije dobivamo $\varphi(x_2) \leq (1-\lambda)\varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_3)$. Zato je

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq \lambda\big(\varphi(x_3) - \varphi(x_1)\big) \qquad \& \qquad \varphi(x_2) - \varphi(x_3) \leq (1-\lambda)\big(\varphi(x_1) - \varphi(x_3)\big).$$

Prva nejednakost daje $\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1}$, a druga daje $\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$.



Slika 12. Kvocijenti iz (3.30) su koeficijenti smjera pravaca $p_{1,2}, p_{1,3}$ i $p_{2,3}$.

Pomoću (3.30) može se pokazati da je konveksna funkcija $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ neprekidna na (a,b).

Lema 3.53. *Neka je (a,b) interval, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $z \in (a,b)$. Tada postoji $B \in \mathbb{R}$ takav da je*

$$\varphi(y) \geq \varphi(z) + B(y-z), \qquad y \in (a,b).$$

Dokaz. Neka je $z \in (a, b)$. Za sve $x_1 \in (a, z)$ i $x_3 \in (z, b)$, prema (3.30) vrijedi

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(x_1)}{z - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(z)}{x_3 - z}.$$

Neka je

$$B := \sup\Big\{\frac{\varphi(z) - \varphi(x_1)}{z - x_1} : x_1 \in (a, z)\Big\}.$$

Tada je

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(x_1)}{z - x_1} \leq B, \qquad \text{za svaki } x_1 \in (a, z) \tag{3.31}$$

$$B \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(z)}{x_3 - z}, \qquad \text{za svaki } x_3 \in (z, b). \tag{3.32}$$

Ako je $y < z$, iz (3.31) za $x_1 = y$ dobivamo $\varphi(y) \geq \varphi(z) + B(y - z)$. Ako je $z < y$, iz (3.32) za $x_3 = y$ dobivamo $\varphi(y) \geq \varphi(z) + B(y - z)$. □

Sada ćemo dokazati Jensenovu[13] nejednakost:

Teorem 3.54. (Jensenova nejednakost) *Neka je $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, gdje je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Nadalje, neka je μ mjera na (X, Σ) takva da je $\mu(X) = 1$ i $f : X \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Ako je $f(x) \in (a, b)$ za svaki $x \in X$, onda je*

$$\varphi\Big(\int f d\mu\Big) \leq \int (\varphi \circ f) d\mu.$$

Dokaz. Neka je $z = \int f d\mu$. Kako je $a < f < b$, imamo

$$a = a\mu(X) < \int f d\mu < b\mu(X) = b.$$

Dakle, $z \in (a, b)$. Prema lemi 3.53. postoji $B \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi\Big(\int f d\mu\Big) + B(f(x) - \int f d\mu) =: R(x), \qquad \forall x \in X. \tag{3.33}$$

Funkcija φ je neprekidna pa je i izmjeriva (korolar 2.9.). Prema teoremu 2.3. kompozicija $\varphi \circ f$ je izmjeriva funkcija.

Lako je pokazati da je funkcija R integrabilna, pa je zato $\int R^- d\mu < \infty$ i $\int R^+ \int d\mu < \infty$. Nadalje, iz $\varphi \circ f \geq R$ slijedi $(\varphi \circ f)^- \leq R^-$ (vidi dokaz teorema 3.30.), pa monotonost integrala (teorem 3.10.(c)) povlači $\int (\varphi \circ f)^- d\mu \leq \int R^- d\mu < \infty$. To znači da je definiran integral $\int (\varphi \circ f) d\mu$ (kao konačan broj ili $+\infty$). Budući da su definirana oba integrala $\int R d\mu$ i $\int (\varphi \circ f) d\mu$, pomoću teorema 3.30. iz nejednakosti (3.33) dobivamo $\int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi(\int f d\mu)$ □

Prije nego što ilustriramo primjenu Jensenove nejednakosti navodimo sljedeću definiciju:

---
[13] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 - 1925), danski matematičar.

Definicija 3.55. *(vidi [8]) Neka su $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $p = (p_1, \dots, p_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i neka je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Tada se definira:*

Aritmetička sredina $A_n(x;p)$ *brojeva* $x_1, \dots, x_n$ *s težinama* $p_1, \dots, p_n$ *je broj*

$$A_n(x;p) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n.$$

Geometrijska sredina $G_n(x;p)$ *brojeva* $x_1, \dots, x_n$ *s težinama* $p_1, \dots, p_n$ *je broj*

$$G_n(x;p) = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}.$$

Harmonijska sredina $H_n(x;p)$ *brojeva* $x_1, \dots, x_n$ *s težinama* $p_1, \dots, p_n$ *je broj*

$$H_n(x;p) = \frac{1}{\frac{p_1}{x_1} + \ldots + \frac{p_n}{x_n}}.$$

Kvadratna sredina $K_n(x;p)$ *brojeva* $x_1, \dots, x_n$ *s težinama* $p_1, \dots, p_n$ *je broj*

$$K_n(x;p) = \sqrt{p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_n^2}.$$

Primjer 3.56. *Sada ćemo dokazati tzv.* K-A-G-H nejednakosti*:*

$$K_n(x;p) \geq A_n(x;p) \geq G_n(x;p) \geq H_n(x;p). \tag{3.34}$$

Neka su $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $p = (p_1, \dots, p_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i neka je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Neka je $X = \{1, \dots, n\}$. Definirajmo mjeru $\mu : X \to [0, \infty)$ formulom

$$\mu(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}.$$

Nadalje, neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(i) = \ln x_i$, $i = 1, \dots, n$. Tada je $\int f d\mu = \sum_{i=1}^n p_i \ln x_i$. Ako za konveksnu funkciju uzmemo $\varphi(x) = e^x$, pomoću Jensenove nejednakosti dobivamo

$$\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i} \leq \int (\varphi \circ f) d\mu = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Time smo pokazali A-G nejednakost: $A_n(x;p) \geq G_n(x;p)$.

Primjenom A-G nejednakosti na brojeve $1/x_1, \dots, 1/x_n$ dobiva se:

$$\frac{p_1}{x_1} + \ldots + \frac{p_n}{x_n} \geq \frac{1}{x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}},$$

odakle slijedi G-H nejednakost: $G_n(x;p) \geq H_n(x;p)$.

Do sada smo dokazali sljedeće nejednakosti: $A_n(x;p) \geq G_n(x;p) \geq H_n(x;p)$. *Zamjenom* $p_i \to \frac{p_i x_i}{\sum_{k=1}^n p_k x_k}$, $i = 1, \ldots, n$, *iz nejednakosti* $A_n(x;p) \geq H_n(x;p)$ *dobivamo*

$$\frac{p_1 x_1^2}{\sum_{k=1}^n p_k x_k} + \ldots + \frac{p_n x_n^2}{\sum_{k=1}^n p_k x_k} \geq \frac{1}{\frac{p_1}{\sum_{k=1}^n p_k x_k} + \ldots + \frac{p_n}{\sum_{k=1}^n p_k x_k}},$$

odakle slijedi $K_n(x;p) \geq A_n(x;p)$.

Može se pokazati da se u (3.34) javljaju jednakosti onda i samo onda ako je $x_1 = \ldots = x_n$.

Primjer 3.57. *Neka su* x, y *bilo koja dva pozitivna realna broja,* $p > 1$ *realan broj i* $q := \frac{p}{p-1} > 1$. *Tada je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Kaže se da su* p *i* q konjugirani eksponenti. *Za* $x_1 = x^p, x_2 = y^q$ *i* $p_1 = \frac{1}{p}, p_2 = \frac{1}{q}$ *iz A-G nejednakosti (3.34) dobivamo* $(x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, *tj.*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{3.35}$$

Gornja jednakost, koja očito vrijedi i u slučaju ako je $x = 0$ *ili* $y = 0$, *poznata je pod nazivom* Youngova[14] nejednakost.

Teorem 3.58. *(***Hölderova[15] nejednakost***) Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere, a* $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ *izmjerive funkcije. Ako su* p *i* q *konjugirani eksponenti i* $1 < p < \infty$, *onda vrijedi:*

$$\int |fg| d\mu \leq \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q d\mu \Big)^{1/q}. \tag{3.36}$$

Dokaz. Kao prvo, funkcije $|f|^p : X \to [0, \infty]$ i $|g|^p : X \to [0, \infty]$ su izmjerive (propozicija 2.19.(d)). Neka je

$$A := \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p}, \quad B := \Big(\int |g|^q d\mu \Big)^{1/q}.$$

Ako je $A = \infty$ ili $B = \infty$, onda očito vrijedi nejednakost (3.36). Ako je $A = 0$, onda je $f = 0$ (s.s.), što povlači $|fg| = 0$ (s.s.). Tada je $\int |fg| d\mu = 0$ (propozicija 3.11.) pa očito vrijedi nejednakost (3.36). Slično se pokaže da nejednakost (3.36) vrijedi ako je $B = 0$.

Preostaje razmotriti slučaj $0 < A, B < \infty$. Stavimo

$$F := \frac{|f|}{A}, \quad G := \frac{|g|}{B}.$$

Tada je

$$\int F^p d\mu = \int G^p d\mu = 1.$$

[14]William Henry Young (1863 - 1942), engleski matematičar.
[15]Otto Hölder (1859 - 1937), njemački matematičar.

Prema (3.35) vrijedi

$$FG \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q,$$

odakle integriranjem dobivamo $\int FGd\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Množenjem ove nejednakost s AB dobivamo (3.36). □

Za $p = q = 2$ nejednakost (3.36) poznata je pod nazivom Schwarzova[16] nejednakost.

Primjer 3.59. *Neka su $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ bilo koje dvije n-torke realnih brojeva i neka su p, q realni brojevi takvi da je $1 < p < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pokažimo da tada vrijedi tzv. diskretna Hölderova nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{1/q}. \tag{3.37}$$

Neka je $X = \{1, \dots, n\}$. Definirajmo mjeru $\mu : X \to [0, \infty)$ formulom

$$\mu(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = \frac{k}{n}.$$

Nadalje, neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ definirane formulama

$$f(i) = x_i, \ g(i) = y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Tada je $\int |fg|d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$, $\int |f|^p d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ i $\int |g|^q d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$. Sada je lako pokazati da iz (3.36) slijedi (3.37).

Teorem 3.60. *(**Nejednakost Minkowskog**[17]) Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ izmjerive funkcije. Ako je $1 \leq p < \infty$, onda vrijedi:*

$$\Big(\int |f + g|^p d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p d\mu\Big)^{1/p}. \tag{3.38}$$

Dokaz. Ako je $\int |f + g|^p d\mu = 0$, $\int |f|^p d\mu = \infty$ ili $\int |g|^p d\mu = \infty$, onda očito vrijedi nejednakost (3.38).

Neka je nadalje $\int |f + g|^p d\mu > 0$, $\int |f|^p d\mu < \infty$ i $\int |g|^p d\mu < \infty$. Za $p = 1$ tvrdnja je očigledna. Neka je zato nadalje $p > 1$.

Zbog konveksnosti funkcije $x \to |x|^p$, $p > 1$, vrijedi

$$\Big(\frac{|f| + |g|}{2}\Big)^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p,$$

odakle zbog monotonost integrala dobivamo

$$\int (|f| + |g|)^p d\mu \leq 2^{p-1} \int |f|^p d\mu + 2^{p-1} \int |g|^p d\mu < \infty.$$

[16] Karl Hermann Schwarz (1843 -1921), njemački matematičar.
[17] Hermann Minkowski (1864 - 1909), njemački matematičar i fizičar.

Sada ćemo primjeniti Hölderovu nejednakost na oba sumanda s desne strane jednakosti

$$(|f| + |g|)^p = |f|(|f| + |g|)^{p-1} + |g|(|f| + |g|)^{p-1}.$$

Dobivamo

$$\int |f|(|f| + |g|)^{p-1} d\mu \leq \Big(\int |f|^p\Big)^{1/p}\Big(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}$$
$$\int |g|(|f| + |g|)^{p-1} d\mu \leq \Big(\int |g|^p\Big)^{1/p}\Big(\int (|f| + |g|)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

Zbrojimo li te nejednakosti i uzmemo li u obzir da je $(p-1)q = p$, imamo

$$\int (|f| + |g|)^p d\mu \leq \Big(\int (|f| + |g|)^p\Big)^{1/q}\Big[\Big(\int |f|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p\Big)^{1/p}\Big]$$

Podijelimo li gornju nejednakost s $\Big(\int (|f| + |g|)^p\Big)^{1/q} > 0$ i uzmemo li u obzir da je $1 - 1/q = 1/p$, dobivamo (3.38). □

Primjer 3.61. *Neka su $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ bilo koje dvije n-torke realnih brojeva i neka je $1 \leq p < \infty$. Tada vrijedi tzv. diskretna nejednakost Minkowskog:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{3.39}$$

Neka je $X = \{1, \dots, n\}$, a $\mu : X \to [0, \infty)$ mjera zadana formulom

$$\mu(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = \frac{k}{n}.$$

Definirajmo funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$:

$$f(i) = x_i,\ g(i) = y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Tada je $\int |f + g|^p d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p$, $\int |f|^p d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ i $\int |g|^q d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$. Iz (3.38) se lako dobiva (3.39).

Zadaci.

1. Pokazati da je funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna onda i samo onda ako je za svaku točku $c \in (a, b)$ funkcija $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}$ rastuća na $(a, b)\backslash\{c\}$.
(Uputa: Iskoristite nejednakosti (3.30).)

2. (a) Neka je φ konveksna na (a, b), a Ψ konveksna i rastuća na $\varphi((a, b))$. Pokazati da je kompozicija $\Psi \circ \varphi$ konveksna na (a, b). (b) Neka je $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ strogo pozitivna funkcija. Dokažite: Ako je $\log \varphi$ konveksna funkcija, onda je φ konveksna funkcija.
(Uputa: (a) Upotrijebite definiciju konveksne funkcije. (b) Slijedi iz (a).)

3. Neka je f izmjeriva funkcija na X, μ mjera i

$$\varphi(p) = \int |f|^p d\mu = \|f\|_p^p, \qquad 0 < p < \infty.$$

Neka je $E := \{p : \varphi(p) < \infty\}$.
(a) Neka su $p_1, p_2 \in E$, $p_1 < p_2$. Pokazati da je $[p_1, p_2] \subseteq E$. (b) Pokazati da je funkcija $\log \varphi$ konveksna na interioru skupa E. (c) Neka je $0 < r < p < s$. Pokazati da je $\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$, što implicira $L^r \cap L^s \subseteq L^p$.

(Uputa: (a) Svaki $p \in (p_1, p_2)$ se može zapisati kao $p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$, $\lambda = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \in (0,1)$. Tada je $|f|^{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2} \leq \lambda |f|^{p_1} + (1-\lambda)|f|^{p_2}$, jer je eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, $a > 0$, konveksna. Sada se zahvaljujući monotonosti integrala lako dobije tvrdnja. (b) Dovoljno je pokazati da je φ konveksna funkcija (vidi prethodni zadatak), što je lako pokazati pomoću nejednakosti navedene u uputama pod (a). (c) Iskoristite nejednakost navedenu u uputama pod (a).)

4. Neka je μ vjerojatnosna mjera na X, a $f, g : X \to [0, \infty]$ izmjerive funkcije takve da je $fg \geq 1$ (s.s.). Pokazati da je $\int f d\mu \int g d\mu \geq 1$.
(Uputa: Očito je $\int f d\mu \geq 0$ i $\int g d\mu \geq 0$. Pretpostavimo da su oba integrala konačna, jer u suprotnom dokaz je trivijalan. Prvo iskoritite nejednakost $1 = \mu(X) = \int 1 d\mu \leq \int f^{1/2} g^{1/2} d\mu$, a zatim primjenite Schwarzovu nejednakost na funkcije $f^{1/2}$ i $g^{1/2}$.)

5. (Obratna Hölderova nejednakost) Neka je $p \in (0,1)$ $(q = \frac{p}{p-1} < 0)$. Dokažite: Ako je $f \in Ł^p$ i $0 < \int |g|^q d\mu < \infty$, onda vrijedi

$$\int |fg| d\mu \geq \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q d\mu\Big)^{1/q}.$$

(Uputa: Primijenite Hölderovu nejednakost na funkcije $|g|^{-p}$ i $|fg|^p$ i konjugirane eksponente $P = 1/p$ i $Q = 1/(1-p)$.)

6. (Obratna Minkowskijeva nejednakost) Neka je $p \in (0,1)$. Ako su $f, g \in L^p$, onda vrijedi

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leq \| \, |f| + |g| \, \|_p.$$

(Uputa: Primijenite obratnu Hölderovu nejednakost.)

3.7. Prostor $L^p(X, \Sigma, \mu)$

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $p \in [1, \infty)$. Sa $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ označavamo skup svih Σ-izmjerivih funkcija $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sa svojstvom da je funkcija $|f|^p$ integrabilna. Ponekad ćemo koristiti neku od sljedećih kraćih oznaka: $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^p(X)$ ili $\mathcal{L}^p(\mu)$. Tako npr. ako je iz konteksta jasno što su skup X i σ-algebra Σ, zadovoljit će nas kraća oznaka $\mathcal{L}^p(\mu)$ s kojom ističemo samo mjeru μ.

Propozicija 3.62. *$\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ je realan vektorski prostor.*

Dokaz. Neka su $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije $|f|^p$ i $|g|^p$ integrabilne. Iz

$$
\begin{aligned}
|\alpha f|^p &= |\alpha|^p |f|^p \\
|f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)
\end{aligned}
$$

slijedi integrabilnost funkcija $|\alpha f|^p$ i $|f+g|^p$ (teorem 3.10.). Dakle, $\alpha f, f+g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$. □

Prisjetimo se definicije norme. Neka je X bilo koji realan vektorski prostor. Norma je svako preslikavanje $X \to \mathbb{R}$ koje vektoru $x \in X$ pridružuje realan broj $\|x\|$, tako da za sve $x, y \in X$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(N1) $\|x\| \geq 0$ (pozitivna semidefinitnost)

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivna definitnost)

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogenost).

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trokuta).

Normiran vektorski prostor je vektorski prostor snabdjeven normom.

Propozicija 3.63. *Preslikavanje $\| \ \|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, definirano formulom*

$$
\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}
$$

ima svojstva (N1), (N3) i (N4) norme. Osim toga je

$$
\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ (s.s.)
$$

Dokaz. Svojstva (N1) i (N3) su očigledna. Svojstvo (N4) predstavlja nejednakost Minkowskog, koja vrijedi za $1 \leq p < \infty$. Da je $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (s.s.) slijedi iz teorema 3.27. □

Da bi se dobio normiran vektorski prostor, u $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ uvodi se relacija ekvivalencije $\sim$. Po definiciji je $f \sim g$ ako je $f = g$ (s.s.). Sa $[f]$ označavat ćemo klasu ekvivalencije koja sadrži funkciju f, a s $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ili kraće L^p skup svih klasa. Struktura vektorskog prostora $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ prenosi se na $L^p(X, \Sigma, \mu)$ tako da se definira:

$$
\begin{aligned}
[f] + [g] &= [f + g] \\
\alpha [f] &= [\alpha f].
\end{aligned}
$$

Lako je pokazati da rezultat definiranih operacija ne ovisi o izboru predstavnika klase. Konačno, u vektorskom prostoru L^p definira se norma formulom

$$
\|[f]\|_p = \|f\|_p.
$$

Formulom

$$d([f],[g]) = \|[f]-[g]\|_p$$

definira se udaljenost u L^p. Dakle, (L^p, d) je metrički prostor.

Radi jednostavnosti nadalje ćemo cijelu klasu $[f]$ označavati kraće sa f. Iz konteksta će biti jasno mislimo li na funkciju ili na klasu.

Prisjetimo se da je metrički prostor (T, d) potpun ako svaki Cauchyjev niz (t_n) iz T konvergira prema nekoj točki t_0 iz T. Potpun normiran vektorski prostor se zove Banachov[18] prostor.

Teorem 3.64. ([9, Teorem 3.11, str. 67]) *L^p, $1 \le p < \infty$, je potpun metrički prostor.*

Zadaci.

1. (a) Neka je $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ zadana formulom $f = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$. Dokazati da je $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, ali $f \notin \mathcal{L}^2(\lambda)$. (b) Neka je $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$. Dokažite da je $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ i $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda)$.

   (Uputa: (a) Definirajmo funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ za $x \neq 0$. Tada je $\tilde{f} = f$ (s.s.), pa je zato

   $$\int f d\lambda = \int \tilde{f} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2,$$

   $$\int f^2 d\lambda = \int \tilde{f}^2 d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1]} \frac{1}{x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

   (b) Postupite slično.)

2. Postoji niz funkcija iz L^p koji konvergira obično, ali ne konvergira u L^p: Neka je $f_n = n^2\chi_{(0,1/n)}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija definiranih na $\mathbb{R}$ s Lebesgueovom mjerom λ. Dokažite: (a) $\lim_n f_n = 0$. (b) $f_n \in L^p$, $p \ge 1$. (c) $\lim_n \|f_n\|_p = \infty$, $p \ge 1$.

3. Postoji niz funkcija u $L^{p_1} \cap L^{p_2}$, $0 \le p_1, p_2 < \infty$, koji konvergira u L^{p_1}, ali ne konvergira u L^{p_2}: Neka je $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(n,2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lim_n f_n = 0$. Uzmemo li Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$, dobivamo $\|f_n\|_p = n^{-1+1/p}$. Ako je $p > 1$, onda je $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0$, pa $f_n \to 0$ u L^p. Ako je $p = 1$, onda je $\|f_n\| = 1$, pa $f_n \nrightarrow 0$ u L^1.

4. Neka niz (f_n) izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ konvergira prema $f : X \to \mathbb{R}$. Ako postoji funkcija $g \in L^p$ takva da je $|f_n| \le |g|$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0$.

[18] Stefan Banach (1892 - 1945), poljski matematičar.

(Uputa: $|f_n - f|^p \le \big(|f_n| + |g|\big)^p \le \big(2\max\{|f_n|,|g|\}\big)^p = 2^p|g|^p$, $|g|^p$ je integrabilna i $\lim_{n\to\infty}|f_n - f|^p = 0$. Tvrdnja slijedi iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergeniji.)

5. Neka je $\mu(X) < \infty$ i $0 < p < q < \infty$. Dokažite da je $L^q(X,\Sigma,\mu) \subseteq L^p(X,\Sigma,\mu)$ te da je $\|f\|_p \le \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$ za svaku funkciju $f \in L^q(X,\Sigma,\mu)$.
(Uputa: Neka je $P = \frac{q-p}{q}$ i $Q = \frac{p}{q}$. Tada je $p = 0\cdot P + q\cdot Q$. Kako je $P + Q = 1$, to su $1/P$ i $1/Q$ konjugirani eksponenti. Primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $|f|^{0\cdot P}$ i $|f|^{q\cdot Q}$ te konjugirane eksponente $1/P$ i $1/Q$ dobiva se nejednakost
$$\begin{aligned}\int |f|^p d\mu &= \int |f|^{0\cdot P}|f|^{q\cdot Q}d\mu \le \Big(\int |f|^{\frac{0\cdot P}{P}}d\mu\Big)^P\Big(\int |f|^{\frac{q\cdot Q}{Q}}d\mu\Big)^Q \\ &= \Big(\int 1 d\mu\Big)^P\Big(\int |f|^q d\mu\Big)^Q = \mu(X)^P\Big(\int |f|^q d\mu\Big)^Q,\end{aligned}$$
pomoću koje je lako dokazati tvrdnje.)

6. Neka je $0 < p < q < r < \infty$. Tada je $0 < \frac{1}{r} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} < \infty$ i $\frac{1}{q} = t\frac{1}{p} + (1-t)\frac{1}{r}$, gdje je $t = \frac{1/p-1/q}{1/p-1/r}$. Neka je $f \in L^p(X,\Sigma,\mu) \cap L^r(X,\Sigma,\mu)$. Dokažite da je $f \in L^q(X,\Sigma,\mu)$ te da je $\|f\|_q \le |f|_p^{1-t}\|f\|_r^t$.
(Uputa: Već smo pokazali da je $f \in L^q(X,\Sigma,\mu)$ (str. 130., zadatak 3.). Sada ćemo dokaz napraviti na drugi način te usput dobiti i traženu nejednakost. Neka je $P = \frac{r-q}{r-p} \in (0,1)$ i $Q = 1 - P$. Tada je $q = Pp + Qr$. Primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $|f|^{Pp}$ i $|f|^{Qr}$ te konjugirane eksponente $1/P$ i $1/Q$ dobiva se
$$\int |f|^q d\mu = \int |f|^{Pp}|f|^{Qr}d\mu \le \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^P\Big(\int |f|^r d\mu\Big)^Q.$$
Integral $\int |f|^q d\mu$ je konačan jer su konačna oba integrala $\int |f|^p d\mu$ i $\int |f|^r d\mu$. Dakle, $f \in L^q(X,\Sigma,\mu)$. Iz gornje nejednakosti elementarnim računom slijedi $\|f\|_q \le |f|_p^{1-t}\|f\|_r^t$.)

7. Neka je $1 \le p < r < \infty$, a $Z = L^p(X,\Sigma,\mu) \cap L^r(X,\Sigma,\mu)$. Dokazati da je $\|\ \| : Z \to \mathbb{R}$, definirana formulom $\|f\| := \|f\|_p + \|f\|_r$, norma na Z i da je $(Z, \|\cdot\|)$ Banachov prostor.
(Uputa: Nejednakost trokuta slijedi iz nejednakosti Minkowskog. Koristite teorem 3.64.)

8. Neka je $1 \le p < r < \infty$. Definirajmo $W = L^p + L^r = \{g + h : g \in L^p, h \in L^r\}$. Dokazati da je formulom $\|f\| := \inf\{\|g\|_p + \|h\|_r : g \in L^p, h \in L^r, f = g + h\}$ zadana norma na W i da je $(W, \|\cdot\|)$ Banachov prostor.
(Uputa: Koristite prethodni zadatak.)

9. Neka je (Ω,Σ,μ) vjerojatnosni prostor. U teoriji vjerojatnosti izmjeriva funkcija $X : \Sigma \to \mathbb{R}$ zove se **slučajna varijabla**. Nadalje, integral (ako je definiran) $E(X) := \int X d\mu$ zove se **očekivanje slučajne varijable** X. Ako je $X \in$

$\mathcal{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, onda se $V(X) := E(X^2) - E(X)^2$ zove varijanca slučajne varijable X. Dokazati: (a) $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu) \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. (b) Dokazati $P(\{|X| \geq \sqrt{4n}\}) \leq \frac{1}{4n}\big(V(X) + E^2(X)\big)$, gdje je $\{|X| \geq \sqrt{4n}\} = \{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq \sqrt{4n}\}$.

(Uputa: (a) Vidi zadatak 5. (b) Pomoću Čebiševljeve nejednakosti (3.11) za $p = 2$ dobiva se $P(\{|X| \geq \sqrt{4n}\}) \leq \frac{1}{4n}E(X^2)$.)

4. Produkt prostora mjere

4.1. Produkt izmjerivih prostora

Radi jednostavnosti ovdje se ograničavamo na produkt dvaju izmjerivih prostora. Koristit ćemo uobičajenu oznaku $A \times B$ za Kartezijev (ili direktni) produkt skupova A i B. Dakle, $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Definicija 4.1. *Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori. Njihov* produkt *je izmjeriv prostor $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, gdje je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tzv.* produktna σ-algebra *definirana s*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

Članove familije $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ zovemo izmjerivim pravokutnicima. Dakle, produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je generirana familijom izmjerivih pravokutnika. Očito je $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jedan π-sistem na $X \times Y$.

Propozicija 4.2. *Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori.*

(a) Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je generirana familijom ,,cilindara”

$$\mathcal{C} = \{A \times Y : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \times B : B \in \mathcal{B}\}.$$

(b) Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanja σ-algebra na $X \times Y$ sa svojstvom da su izmjerive obje projekcije

$$\pi_1 : X \times Y \to X, \quad \pi_1(x, y) = x$$
$$\pi_2 : X \times Y \to Y, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Dokaz. (a) Očito je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, odakle slijedi $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Preostaje dokazati da je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Neka je $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Iz identiteta

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(\mathcal{C})$$

slijedi $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Zato je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$.

(b) Neka su $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Kako je

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y, \quad \pi_2^{-1}(B) = X \times B, \tag{4.1}$$

iz (a) slijedi $\pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ i $\pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. To znači da je π_1 izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{A})$, a π_2 u paru σ-algebri $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Nadalje, iz (4.1) vidimo da svaka druga σ-algebra na $X \times Y$ sa svojstvom da su obje projekcije izmjerive mora sadržavati cilindre. Prema (a) $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanja σ-algebra s tim svojstvom. □

Teorem 4.3. *Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori takvi da je $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ i $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. Ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

(i) Postoji niz (E_n) *skupova iz* $\mathcal{E}$ *takav da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$,

(ii) Postoji niz (F_n) *skupova iz* $\mathcal{F}$ *takav da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = Y$,

onda je

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}).$$

Dokaz. Iz $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ slijedi $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Neka je $E \in \mathcal{E}$. Pomoću jednakosti $\pi_1^{-1}(E) = E \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \times F_n)$ zaključujemo da je $\pi_1^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. Postupajući slično dobivamo da je $\pi_2^{-1}(F) \in \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Sada pomoću teorema 2.6. dobivamo da je projekcija π_1 izmjeriva u paru σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ i $\mathcal{A}$, a π_2 je izmjeriva u paru σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ i $\mathcal{B}$. Konačno, prema tvrdnji (b) propozicije 4.2. je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. □

Primjer 4.4. *Borelova* σ*-algebra* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *generirana je familijom* $\mathcal{E} = \{(a, b] : a \leq b\}$ *(teorem 1.10.), a* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ *s familijom* $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ *(teorem 1.12.). Zato je*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

Neka je $E \subseteq X \times Y$. Za svaku točku $(x, y) \in X \times Y$ definiraju se prerezi

$$\begin{array}{ll} (x\text{-prerez skupa } E) & E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \\ (y\text{-prerez skupa } E) & E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}. \end{array}$$

Neka je funkcija f definirana na Kartezijevom produktu $X \times Y$. Za svaku točku $(x, y) \in X \times Y$ definiraju se funkcije f_x i f^y formulama

$$\begin{aligned} f_x(y) &= f(x, y), \qquad y \in Y \\ f^y(x) &= f(x, y), \qquad x \in X. \end{aligned}$$

Dakle, f_x je restrikcija funkcije na prerez $\{(x, y) : y \in Y\}$, a f^y je restrikcija na prerez $\{(x, y) : x \in X\}$.

Lema 4.5. *Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori i* $(x, y) \in X \times Y$. *Tada vrijedi:*

(a) Ako je $E \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, *onda je* $E_x \in \mathcal{B}$ *i* $E^y \in \mathcal{A}$.

(b) Ako je $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ *bilo koja* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-izmjeriva funkcija, onda je* f_x $\mathcal{B}$*-izmjeriva a* f_y *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva funkcija.*

Dokaz. (a) Pokažimo da je $E_x \in \mathcal{B}$. Uočimo da je u tu svrhu dovoljno pokazati da familija

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X \times Y : F_x \in \mathcal{B}\}$$

sadrži σ-algebru $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Familija $\mathcal{F}$ je σ-algebra na skupu $X \times Y$. Zaista, očito je $X \times Y \in \mathcal{F}$. Nadalje, pomoću identiteta $(F^c)_x = (F_x)^c$ i $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n)_x$ lako je zaključiti da je familija $\mathcal{F}$ zatvorena na komplementiranje i na prebrojive unije.

Sada ćemo pokazati da familija $\mathcal{F}$ sadrži sve izmjerive pravokutnike, tj. $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Neka je $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Tada je $(A \times B)_x = B \in \mathcal{B}$ ili je $(A \times B)_x = \emptyset \in \mathcal{B}$. Dakle, $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Kako je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, zbog $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$.

Na sličan način može se pokazati da je $E^y \in \mathcal{A}$.

(b) Prvo uočimo da za svaki $B \in \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}}$ vrijedi

$$(f_x)^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)_x \qquad \& \qquad (f^y)^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)^y.$$

Nadalje, po pretpostavci je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Sada iz (a) slijedi $\left(f^{-1}(B)\right)_x \in \mathcal{B}$ i $\left(f^{-1}(B)\right)^y \in \mathcal{A}$. Dakle, za svaki $B \in \mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}}$ je $(f_x)^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ i $(f^y)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. □

4.2. Produktna mjera

Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere. Pokazat ćemo da postoji jedinstvena mjera $\mu \otimes \nu$ na produktu $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, takva da je

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

Za dokaz ove tvrdnje trebat će nam sljedeća lema:

Lema 4.6. *Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dva prostora σ-konačne mjere i $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Tada vrijedi:*

(a) Funkcija $x \mapsto \nu(E_x)$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

(b) Funkcija $y \mapsto \mu(E^y)$ je $\mathcal{B}$-izmjeriva.

Dokaz. Kao prvo, prema lemi 4.5. je $E_x \in \mathcal{B}$ i $E^y \in \mathcal{A}$ i stoga su funkcije $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ dobro definirane.

(a) Dokaz ćemo provesti u dva koraka: (i) slučaj kada je mjera ν konačna. (ii) slučaj kada je ν σ-konačna mjera.

(i) Neka je

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \text{ funkcija } x \mapsto \nu(F_x) \text{ je } \mathcal{A}\text{-izmjeriva}\} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Dovoljno je pokazati da je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Prvo ćemo pokazati da je $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Neka je $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Tada je

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{ako je } x \in A \\ \emptyset, & \text{ako } x \notin A, \end{cases}$$

odakle dobivamo $\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\chi_A(x)$. Karakteristična funkcija χ_A je izmjeriva, pa je zato $A \times B \in \mathcal{F}$.

Uočimo:

1. Ako su $E, F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ takvi da je $E \subseteq F$, onda je

$$\nu((F \backslash E)_x) = \nu(F_x) - \nu(E_x).$$

2. Ako je (E_n) uzlazan niz skupova iz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, onda je

$$\nu\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \big)_x \Big) = \lim_{n \to \infty} \nu((E_n)_x).$$

Drugim riječima, familija $\mathcal{F}$ je d-sistem (zatvorena je na prave razlike i na unije uzlaznih skupova). Nadalje, familija $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ je π-sistem (zatvorena je na konačne presjeke). Prema teoremu 1.34. je

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

Kako d-sistem $\mathcal{F}$ sadrži π-sistem $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, a po definiciji je $\mathcal{D}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ najmanji d-sistem koji sadrži $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, to je $\mathcal{D}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$. Dakle, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

(ii) Mjera ν je σ-konačna. Tada postoji niz (Y_n) disjunktnih skupova iz $\mathcal{B}$ takav da je $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ i $\nu(Y_n) < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo konačnu mjeru ν_n na $\mathcal{B}$ formulom $\nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$. Skupovi Y_n, $n \in \mathbb{N}$, su međusobno disjunktni pa je zato

$$\nu(E_x) = \nu(E_x \cap Y) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_x \cap Y_n) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_x \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x).$$

Prema (i) sve funkcije $x \mapsto \nu_n(E_x)$, $n \in \mathbb{N}$, su $\mathcal{A}$-izmjerive. Prema propoziciji 2.19. izmjerive su funkcije $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \nu_k(E_x)$, $n \in \mathbb{N}$. Sada iz propozicije 2.17. slijedi da je $\mathcal{A}$-izmjeriva i funkcija

$$x \mapsto \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \nu_k(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x) = \nu(E_x).$$

(b) Postupa se kao pod (a). □

Teorem 4.7. *Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostori σ-konačne mjere. Tada postoji jedinstvena mjera $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ takva da je*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}. \tag{4.2}$$

Nadalje, za svaki $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y). \tag{4.3}$$

Definicija 4.8. *Mjeru $\mu \otimes \nu$ iz teorema 4.7. zovemo* produktna mjera *ili* produkt mjera *μ i ν.*

Dokaz teorema 4.7. Neka je $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Prema lemi 4.6. funkcije $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ su izmjerive. Zato na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ možemo definirati skupovne funkcije $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ formulama:

$$(\mu \otimes \nu)_1(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y), \qquad (\mu \otimes \nu)_2(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x). \tag{4.4}$$

Pokažimo da su $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ mjere na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dovoljno je napraviti dokaz za skupovnu funkciju $(\mu \otimes \nu)_1$, jer za funkciju $(\mu \otimes \nu)_2$ dokaz je analogan. Očito je $(\mu \otimes \nu)_1(\emptyset) = 0$. Neka je (E_n) niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Stavimo $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Ako je $y \in Y$, onda je (E_n^y) niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ i pri tome je $E^y = \bigcup_{n=1}^\infty E_n^y$. Zato je $\mu(E^y) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n^y)$. Pomoću Levijeva teorema za redove (teorem 3.15.) dobivamo

$$(\mu \otimes \nu)_1(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^\infty \int_Y \mu(E_n^y)\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^\infty (\mu \otimes \nu)_1(E_n),$$

što znači da je $(\mu \otimes \nu)_1$ prebrojivo aditivna funkcija. Time smo pokazali da je $(\mu \otimes \nu)_1$ mjera na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Kao što smo već spomenuli, na sličan način se može pokazati da je i $(\mu \otimes \nu)_2$ mjera na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

U dokazu leme 4.5. pokazali smo da je $\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\chi_A(x)$. Slično se može pokazati da je $\mu((A \times B)^y) = \mu(A)\chi_B(y)$. Pomoću tih jednakosti lako je pokazati da za sve $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ vrijedi

$$(\mu \otimes \nu)_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \otimes \nu)_2(A \times B). \tag{4.5}$$

Prema tome, mjere $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ podudaraju se na π-sistemu $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Kako je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, prema korolaru 1.36. mjere $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ su jednake na cijeloj σ-algebri $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Neka je $\mu \otimes \nu := (\mu \otimes \nu)_1 = (\mu \otimes \nu)_2$. Iz (4.4) i (4.5) dobivamo (4.2) i (4.3). □

Korolar 4.9. *Neka je λ_1 Lebesgueova mjera na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, a λ_2 Lebesgueova mjera na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. Tada je $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$.*

Dokaz. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ generirana je familijom $\mathcal{E} = \{(a, b] : a \le b\}$ (teorem 1.10.), a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ s familijom $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (teorem 1.12.). Prema teoremu 4.3. je

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

Mjere λ_2 i $\lambda_1 \otimes \lambda_1$ se podudaraju na π-sistemu $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Naime, svakom pravokutniku $(a, b] \times (c, d] \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ istu vrijednost $(b-a)(d-c)$ pridružuju obje mjere λ_2 i $\lambda_1 \otimes \lambda_1$. Prema korolaru 1.36. je $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$ na cijeloj σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$. □

4.3. Fubinijev teorem

Sljedeća dva teorema govore nam kako se integral po produktnoj mjeri može svesti na dva uzastopna integrala po mjerama faktora.

Teorem 4.10. (L. Tonelli[19]) *Neka su $(X,\mathcal{A},\mu)$ i $(Y,\mathcal{B},\nu)$ prostori σ-konačne mjere, a $f : X\times Y \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:*

(a) Funkcija $x\mapsto \int_Y f_x d\nu$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

(b) Funkcija $y\mapsto \int_X f^y d\mu$ je $\mathcal{B}$-izmjeriva.

(c)

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \Big(\int_X f^y d\mu\Big) d\nu(y) = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu\Big) d\mu(x). \tag{4.6}$$

Dokaz. Dokaz ćemo razbiti na tri dijela.

(i) Pretpostavimo da je f karakteristična funkcija skupa $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Tada je $f_x = \chi_{E_x}$, a $f^y = \chi_{E^y}$, odakle slijedi $\int_Y f_x d\nu = \nu(E_x)$ i $\int_X f^y d\mu = \mu(E^y)$. Sada tvrdnje (a) - (c) slijede iz leme 4.6. i teorema 4.7.

(ii) Zahvaljujući aditivnosti i homogenosti integrala sada je lako provjeriti da tvrdnje (a) - (c) vrijede za nenegativnu jednostavnu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-izmjerivu funkciju.

(iii) Konačno, neka je f bilo koja nenegativna $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-izmjeriva funkcija. Prema teoremu 2.23. tada postoji rastući niz (f_n) jednostavnih, nenegativnih i $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-izmjerivih funkcija koji konvergira (po točkama) prema funkciji f. Prema (i) za svaki $n\in\mathbb{N}$ funkcija $x\mapsto\int_Y (f_n)_x d\nu$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva, $y\mapsto \int_X (f_n)^y d\mu$ je $\mathcal{B}$-izmjeriva i vrijedi

$$(\star)\qquad \int_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \Big(\int_X (f_n)^y d\mu\Big) d\nu(y) = \int_X \Big(\int_Y (f_n)_x d\nu\Big) d\mu(x).$$

Kako je $\lim_n f_n = f$, to je $\lim_n (f_n)_x = f_x$ i $\lim_n (f_n)^y = f^y$. Nadalje, niz (f_n) je rastući pa su stoga rastući i nizovi $((f_n)_x)$ i $((f_n)^y)$. Prema teoremu o monotonoj konvergenicji (teorem 3.12.) je

$$\int_Y f_x d\nu = \lim_{n\to\infty}\int_Y (f_n)_x d\nu, \qquad \int_X f^y d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X (f_n)^y d\mu,$$

pa tvrdnje (a) i (b) slijede iz propozicije 2.17.

Zahvaljujući tome što su (f_n), $\Big(\int_X (f_n)^y d\mu\Big)$ i $\Big(\int_Y (f_n)_x d\nu\Big)$ monotono rastući nizovi izmjerivih funkcija koji redom konvergiraju prema izmjerivim funkcijama f, $\int_X f^y d\mu$ i $\int_Y f_x d\nu$, graničnim prijelazom $n\to\infty$ u $(\star)$ i pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo jednakosti (4.6). $\square$

Uočimo da jednakosti (4.6) vrijede za svaku nenegativnu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-izmjerivu funkciju f, bez obzira je li ona integrabilna ili nije; uzastopni integrali su jednaki, tj. redosljed integracije može se zamijeniti. Zahvaljujući lemi 3.24. ta nam činjenica može poslužiti za ispitivanje integrabilnost funkcije f (ne nužno nenegativne) s obzirom na produktnu mjeru $\mu\otimes\nu$. Evo primjera:

[19]Leonida Tonelli (1885 - 1946), talijanski matematičar.

Primjer 4.11. *Neka je* $X \times Y = [0, M] \times [0, \infty)$. *Pokažimo da je funkcija* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *zadana formulom*

$$f(x, y) = e^{-xy} \sin x$$

integrabilna s obzirom na Lebesgueova mjeru λ_2 *na* $[0, M] \times [0, \infty)$.

Kao prvo, prema korolaru 4.9. je $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$, *gdje je* λ *Lebesueova mjera na* $\mathbb{R}$. *Nadalje, funkcija* f *je neprekidna pa je stoga i* $\lambda \otimes \lambda$*-izmjeriva (teorem 2.8.). Pokazat ćemo da je*

$$\int_{[0,\infty)\times[0,M]} |f(x, y)| d(\lambda \otimes \lambda) < \infty,$$

odakle će prema lemi 3.24. slijediti integrabilnost funkcije f.

Pomoću nejednakosti

$$|f(x, y)| = |xe^{-xy}| \Big|\frac{\sin x}{x}\Big| \leq xe^{-xy} =: g(x, y), \qquad (x, y) \in [0, M] \times [0, \infty),$$

monotonosti integrala i Tonellijeva teorema dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{[0,M]\times[0,\infty)} |f(x, y)| d(\lambda \otimes \lambda) &\leq \int_{[0,M]\times[0,\infty)} g(x, y) d(\lambda \otimes \lambda) \\
&= \int_{[0,M]} \Big(\int_{[0,\infty)} g(x, y) d\lambda(y) \Big) d\lambda(x) = \int_0^M \Big(\int_0^\infty xe^{-xy} dy \Big) dx \\
&= \int_0^M 1 dx = M < \infty.
\end{aligned}$$

Kod ovog računa koristili smo činjenicu da su podintegralne funkcije Riemann-integrabilne, zbog čega su odgovarajući Lebesgueovi integrali jednaki Riemannovim integralima.

Teorem 4.12. (Fubinijev teorem[20]) *Neka su* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *prostori* σ*-konačne mjere, a* $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ *funkcija koja je* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-izmjeriva i integrabilna s obzirom na produktnu mjeru* $\mu \otimes \nu$. *Tada vrijedi:*

(a1) Postoji skup $N_X \subseteq X$ *mjere nula,* $\mu(N_X) = 0$, *sa svojstvom da je za svaki* $x \in X \backslash N_X$ *funkcija* f_x *integrabilna s obzirom na mjeru* ν.

(a2) Funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ *definirana formulom*

$$g(x) = \begin{cases} \int_Y f_x d\nu, & \text{ako je } x \in X \backslash N_X \\ 0, & \text{ako je } x \in N_X \end{cases}$$

je integrabilna s obzirom na mjeru μ.

[20]Ghirin Guido Fubini (1879 - 1943), talijanski matematičar.

(b1) Postoji skup $N_Y \subseteq Y$ mjere nula, $\nu(N_Y) = 0$, sa svojstvom da je za svaki $y \in Y \backslash N_Y$ funkcija f^y integrabilna s obzirom na mjeru μ.

(b2) Funkcija $h : Y \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$h(y) = \begin{cases} \int_X f^y d\mu, & \textit{ako je } y \in Y \backslash N_Y \\ 0, & \textit{ako je } y \in N_Y \end{cases}$$

je integrabilna s obzirom na mjeru ν.

(c)

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \Big(\int_X f^y d\mu \Big) d\nu(y) = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu \Big) d\mu(x). \tag{4.7}$$

Dokaz. Prema lemi 4.5. funkcija f_x je $\mathcal{B}$-izmjeriva. Zato su prema propoziciji 2.20. $\mathcal{B}$-izmjerive obje funkcije $(f_x)^+$ i $(f_x)^-$. Uočimo da je

$$(f_x)^+ = (f^+)_x, \qquad (f_x)^- = (f^-)_x. \tag{4.8}$$

Nadalje, po pretpostavci je f integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\mu \otimes \nu$. To znači da je $\int_{X \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) < \infty$ i $\int_{X \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu) < \infty$. Prema teoremu 4.10. funkcije $x \mapsto \int_Y (f_x)^+ d\nu$ i $x \mapsto \int_Y (f_x)^- d\nu$ su $\mathcal{A}$-izmjerive i vrijedi

$$\int_X \Big(\int_Y (f_x)^+ d\nu \Big) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) < \infty$$
$$\int_X \Big(\int_Y (f_x)^- d\nu \Big) d\mu(x) = \int_{X \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu) < \infty.$$

Iz ovih nejednakosti slijedi da su funkcije $x \mapsto \int_Y (f_x)^+ d\nu$ i $x \mapsto \int_Y (f_x)^- d\nu$ integrabilne s obzirom na mjeru μ, pa zbog toga prema propoziciji 3.25. postoji skup $N_X \subseteq X$ μ-mjere nula sa svojstvom da su te funkcije konačne na $X \backslash N_X$, tj. integrali $\int_Y (f^+)_x d\nu$ i $\int_Y (f^-)_x d\nu$ su konačni za svaki $x \in X \backslash N_X$. To znači da je za svaki $x \in X \backslash N_X$ funkcija f_x integrabilna s obzirom na mjeru ν, što je tvrdnja (a1).

Sada ćemo dokazati tvrdnju (a2). Kako su funkcije $x \mapsto \int_Y (f_x)^+ d\nu$ i $x \mapsto \int_Y (f_x)^- d\nu$ integrabilne s obzirom na mjeru μ, integrabilna je i njihova razlika

$$G(x) = \int_Y (f_x)^+ d\nu - \int_Y (f_x)^- d\nu = \int_Y f_x d\nu.$$

Kako je $G = g$ (s.s.), prema teoremu 3.26. funkcija g je integrabilna (s obzirom na mjeru μ) i pri tome je

$$\int_X g d\mu = \int_X G d\mu = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu \Big) d\mu. \tag{4.9}$$

Pomoću teorema 4.10., (4.8), teorema 3.26. i (4.9) dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) &= \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu)\\ &= \int_X \Big(\int_Y (f^+)_x d\nu\Big) d\mu(x) - \int_X \Big(\int_Y (f^-)_x d\nu\Big) d\mu(x)\\ &= \int_X \Big(\int_Y (f_x)^+ d\nu\Big) d\mu(x) - \int_X \Big(\int_Y (f_x)^- d\nu\Big) d\mu(x)\\ &= \int_X G(x) d\mu = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu\Big) d\mu.\end{aligned}$$

Na sličan način se mogu dokazati tvrdnje (b1) i (b2) te jednakost

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \Big(\int_X f^y d\mu\Big) d\nu.$$

. □

Primjer 4.13. *Neka je* $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x < \infty, 0 < y < 1\}$ *i* $f : A \to \mathbb{R}$ *funkcija zadana formulom*

$$f(x,y) = y\sin x\, e^{-xy}.$$

Pokažimo da je f *integrabilna na* A *s obzirom na produktnu mjeru* $\lambda\otimes\lambda$*, te da se primjenom Fubinijeva teorema dobiva*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big)dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Kao prvo, funkcija f *je* $\mathcal{B}_\mathbb{R}\otimes\mathcal{B}_\mathbb{R}$*-izmjeriva: Kako je* f *neprekidna, ona je* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$*-izmjeriva. Tvrdnja slijedi iz jednakosti* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_\mathbb{R}\otimes\mathcal{B}_\mathbb{R}$*.*

Uočimo da je $|f(x,y)| \le g(x,y)$*, gdje je* $g(x,y) = ye^{-xy}$*. Funkcija* g *je neprekidna, pa je* $\mathcal{B}_\mathbb{R}\otimes\mathcal{B}_\mathbb{R}$*-izmjeriva. Pomoću monotonosti integrala i Tonellijeva teorema dobivamo*

$$\begin{aligned}\int_A |f(x,y)| d(\lambda\otimes\lambda) \le \int_A g(x,y) d(\lambda\otimes\lambda) &= \int_0^1 \Big(\int_0^\infty ye^{-xy} dx\Big) dy\\ &= \int_0^1 1 dy = 1.\end{aligned}$$

Dakle, f *je integrabilna na* A *s obzirom na mjeru* $\lambda\otimes\lambda$*. Kod gornjeg računa smo iskoristili činjenicu da su podintegralne funkcije Riemann-integrabilne, zbog čega su odgovarajući Lebesgueovi integrali jednaki Riemannovim integralima. Nadalje, druga jednakost lako se dobiva parcijalnom integracijom.*

Prema Fubinijevom teoremu je

$$\int_A f(x,y) d(\lambda\otimes\lambda) = \int_0^1 \Big(\int_0^\infty y\sin x\, e^{-xy} dx\Big) dy = \int_0^\infty \Big(\int_0^1 y\sin x\, e^{-xy} dy\Big) dx.$$

Parcijalnom integracijom dobiva se:

$$\int_0^\infty y \sin x \, e^{-xy} dx = \frac{y}{y^2+1}, \qquad \int_0^1 y \sin x \, e^{-xy} dy = \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big).$$

Zato je

$$\int_0^1 \frac{y}{y^2+1} dy = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big) dx,$$

tj.

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big) dx.$$

Primjer 4.14. *Neka je $X = Y = [0,1]$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ova funkcija je neomeđena u okolini nule pa nije Riemann-integrabilna. Sada ćemo pokazati da ona nije integrabilna niti s obzirom na Lebesgueova mjeru λ_2 na $[0,1]\times[0,1]$.

Za prvi uzastopni integral iz (4.6) dobivamo:

$$\int_Y \Big(\int_X f(x,y) d\lambda(x)\Big) d\lambda(y) = \int_Y \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\Big) d\lambda(y) = \int_Y \Big(-\frac{1}{1+y^2}\Big) d\lambda(y)$$
$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Zamjenom redoslijeda integracije dobiva se $\int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\lambda(y)\Big) d\lambda(x) = \frac{\pi}{4}$. Dakle, $\int_Y \Big(\int_X f(x,y)d\lambda(x)\Big) d\lambda(y) \neq \int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\lambda(y)\Big) d\lambda(x)$ i prema tome funkcija f nije integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$.

Zadaci.

1. Neka su $(X,\mathcal{A},\mu)$ i $(Y,\mathcal{B},\nu)$ dva prostora σ-konačnih mjera takvi da je $\mathcal{A} \neq 2^X$ i da $\mathcal{B}$ ima neprazan skup mjere nula. Dokažite da produkt $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ nije prostor potpune mjere. Specijalno, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_2)$, gdje je λ_2 Lebesgueova mjera na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, nije potpun prostor.

   (Uputa: Neka je $Z \in 2^X \setminus \mathcal{A}$, a $N \in \mathcal{B}$ neprazan skup ν-mjere nula, $\nu(N) = 0$. Prema teoremu 4.7. tada je $(\mu\otimes\nu)(X\times N) = 0$. Kako je $Z \times N \subseteq X \times N$, skup $Z\times N$ je $(\mu\otimes\nu)$-zanemariv.

   Neka je $y \in N$. Tada je $Z = (Z\times N)^y$. Ako je produkt $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ potpun, onda je $Z\times N \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Tada bi iz leme 4.5. slijedilo da je $Z = (Z\times N)^y \in \mathcal{A}$, što je kontradikcija. Dakle, produkt $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ nije prostor potpune mjere.)

2. Neka je λ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, μ mjera prebrojavanja na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ karakteristična funkcija skupa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Pokažite da je

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) \Big) d\mu(y).$$

   Zašto to nije u kontradikciji s Tonellijevim teoremom?

   (Uputa: Računanjem dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{x\}} d\mu(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda = \infty,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) d\lambda(x) \Big) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu = 0.$$

   Mjera μ nije σ-konačna. To je razlog što nemamo kontradikciju s Tonellijevim teoremom.)

3. Neka je $0 < a < b$. Dokažite:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b/a).$$

   (Uputa: Neka je $f : [0, \infty) \times [a, b] \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x, y) = e^{-xy}$. Funkcija f je nenegativna i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-izmjeriva (jer je neprekidna). Prema Tonellijevom teoremu je

$$\int_0^\infty \Big(\int_a^b f(x,y) dy \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_0^\infty f(x,y) dx \Big) dy,$$

   tj. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln(b/a)$.)

4. Izračunajte $\int_{[0,3]\times[-1,2]} x^2 y \, dx dy$.

5. Dokažite jednakost:

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

   (Uputa: Kako je $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$, pomoću Fubinijeva teorema dobivamo

$$\int_0^M \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^M \Big(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dy \Big) dx = \int_0^\infty \Big(\int_0^M e^{-xy} \sin x \, dx \Big) dy$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{1 + y^2} (1 - y e^{-My} \sin M - e^{-My} \cos M) dy,$$

   odakle se graničnim prijelazom $M \to \infty$ dobiva tražena jednakost. Integrabilnost funkcije $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$ pokazana je u primjeru 4.11.)

Literatura

[1] N. Antonić, B. Vrdoljak, Mjera i integracija, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[2] D.L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[3] B. K. Driver, *Analysis Tools with Examples*, `http://math.ucsd.edu/ driver/DRIVER/book.htm.`

[4] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[5] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[6] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, I dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[7] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, II dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[8] J. Pečarić, *Nejednakosti*, HMD, Zagreb, 1994.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[10] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[11] H.J. Wilcox, D.L. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1994.

Indeks