doc. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

# Zbirka riješenih zadataka

# iz teorije mjere i integracije

Osijek, 2014.

**D. Jankov Maširević – Zbirka riješenih zadataka iz teorije mjere i integracije.**

**Izdavač:** Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku

**Recenzenti:** Doc.dr.sc. Krešimir Burazin
Prof.dr.sc. Tibor Poganj

**Lektor:** Marina Tomić, prof.

**Tehnička obrada:** Doc.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 131004066.

ISBN 978-953-6931-64-4

Udžbenik se objavljuje uz suglasnost Senata Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku pod brojem 8/14.

Udžbenik se tiska uz financijsku potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta.

Na naslovnoj stranici prikazan je graf izmjerive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) := \frac{x}{2}\chi_{\mathbb{N}_0}(x) + (1 + 2\sin x + \cos(3x))\,\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0}(x)$ (vidi zadatak 3.25.).



Tisak: Grafika d.o.o., Osijek

# Sadržaj

# PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka u potpunosti prati gradivo obrađeno u udžbeniku **Mjera i integral** [10] autora prof. dr. sc. Dragana Jukića te omogućava dodatnu pomoć pri pripremanju studenata Odjela za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku za polaganje ispita iz kolegija **Uvod u teoriju mjere** te **Uvod u teoriju integracije**.

Kako bi čitatelj mogao razumjeti zadatke koji se nalaze u ovoj zbirci, trebao bi detaljno proći kroz materiju opisanu u gore spomenutom udžbeniku. Zbirka je podijeljena u sedam poglavlja: Pripremni materijal, Mjera, Izmjerive funkcije, Integracija izmjerivih funkcija, Produkt prostora mjere, Konvergencija izmjerivih funkcija i Dekompozicija mjere, te su na početku svakog poglavlja istaknute osnovne definicije i najvažniji rezultati vezani uz zadatke koji slijede, a koje čitatelj može pronaći u [10], ukoliko nije drugačije navedeno. Određeni su zadaci također preuzeti iz [10], no njihova su rješenja nešto detaljnije raspisana.

Na kraju, zahvaljujem svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ova zbirka tiska i bude što bolja. Posebno se zahvaljujem prof. dr. sc. Draganu Jukiću od kojega sam učila o teoriji mjere i integracije i koji je svojim savjetima i podrškom u velikoj mjeri omogućio nastanak ove zbirke te recenzentima doc. dr. sc. Krešimiru Burazinu i prof. dr. sc. Tiboru Poganju koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama pomogli da mnogi dijelovi teksta budu pregledniji i razumljiviji.

Također ću biti zahvalna svim čitateljima na njihovim primjedbama u vezi s eventualnim pogreškama, nepreciznostima ili nedostacima koje su ostale u ovoj zbirci.

U Osijeku 2014. Dragana Jankov Maširević

# 1. Pripremni materijal

Kako bi bolje razumjeli zadatke koji se nalaze u ovoj zbirci, potrebno je poznavati algebru skupova, pojam prebrojivosti te funkcije i njihova svojstva. Zato će u nastavku najprije biti navedeni osnovni pojmovi te dokazi nekih, intuitivno jasnih tvrdnji, koji će nam pomoći pri rješavanju i boljem razumijevanju daljnjih zadataka.

## 1.1. Osnovno o skupovima

Skup je jedan od osnovnih matematičkih pojmova koji se ne definira, nego je sam po sebi jasan, a označavamo ga velikim slovima $A, B, C, \ldots$.

Skup je određen svojim elementima koje obično označavamo malim slovima. Ako je $x$ element skupa $A$, tada to označavamo s $x \in A$, a ako $x$ nije element skupa $A$, tada pišemo $x \notin A$. Prazan skup je po definiciji skup koji nema niti jednog elementa i označava se s $\emptyset$.

Kažemo da je skup $A$ podskup skupa $B$ i pišemo $A \subseteq B$, ako za svaki $x \in A$ vrijedi da je $x \in B$. Tada još kažemo i da je $B$ nadskup skupa $A$ i pišemo $B \supseteq A$. Ako je $A \subseteq B$ i ako postoji barem jedan element $b \in B$ koji nije u skupu $A$, onda kažemo da je $A$ pravi podskup skupa $B$, tj. da je $B$ pravi nadskup skupa $A$ i pišemo $A \subset B$ ili $B \supset A$. Prazan skup je po definiciji podskup svakog skupa.

Za skupove $A$ i $B$ kažemo da su jednaki ako se sastoje od istih elemenata, tj. ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Ako su skupovi $A$ i $B$ jednaki, pišemo $A = B$.

Skup svih podskupova skupa $A$ nazivamo partitivni skup skupa $A$ i označavamo ga s $2^A$ ili $\mathcal{P}(A)$.

Skup $A$ opisuje se najčešće pomoću nekog svojstva $P$ tako da elementima od $A$ smatramo sve elemente $x$ koji u danim okolnostima dolaze u obzir, a imaju svojstvo $P$. Tada to zapisujemo kao $A = \{x : x \text{ ima svojstvo } P\}$ ili $A = \{x : P(x)\}$ i čitamo *$A$ je skup svih elemenata $x$ takvih da vrijedi svojstvo $P$*. Na taj se način za skupove $A$ i $B$ definiraju sljedeće osnovne operacije:

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\} \quad &&(\text{unija skupova } A \text{ i } B) \\ A \cap B &:= \{x : x \in A \text{ i } x \in B\} \quad &&(\text{presjek skupova } A \text{ i } B) \\ A \backslash B &:= \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\} \quad &&(\text{razlika skupova } A \text{ i } B). \end{aligned}$$

Specijalno, ako je $A \subseteq X$, onda razliku $X \backslash A$ nazivamo komplement skupa $A$ u odnosu na skup $X$ i označavamo s $A^c$. Dakle, $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$. Skup $X$ u odnosu na koji uzimamo komplementiranje naziva se i univerzalni skup.

Simetrična razlika skupova $A$ i $B$, u oznaci $A \Delta B$, je skup

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Ako su $A$ i $B$ neprazni skupovi, onda skup svih uređenih parova $(a, b)$, pri čemu je $a \in A$ i $b \in B$, označavamo s $A \times B$ i nazivamo Kartezijev ili direktni produkt skupova $A$ i $B$. Dakle,

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Unija, presjek i razlika osnovne su operacije među skupovima, koje jednim imenom nazivamo Booleove operacije. Neka su $A, B, C$ podskupovi skupa $X$. Booleove operacije imaju sljedeća svojstva:

1. komutativnost: $A \cap B = B \cap A, \;\; A \cup B = B \cup A$,
2. asocijativnost: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \;\; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
3. idempotentnost: $A \cap A = A, \;\; A \cup A = A$,
4. distributivnost: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \;\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
5. involutivnost: $\big(A^c\big)^c = A$,
6. teoremi A. de Morgana[1]: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Unija i presjek triju ili više skupova definira se slično kao i unija i presjek dvaju skupova. Skup čiji su elementi skupovi nazivamo familija skupova. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija skupova iz skupa $X$. Tada se unija skupova familije $\mathcal{F}$, u oznaci $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$, definira kao najmanji skup koji sadrži sve elemente svih skupova $A$ iz familije $\mathcal{F}$. Dakle, $x \in \bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$ ako i samo ako je $x$ element barem jednog člana $A$ iz familije $\mathcal{F}$. Slično se definira i presjek $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A$ skupova familije $\mathcal{F}$ kao najveći skup sadržan u svakom skupu iz familije $\mathcal{F}$. Uočimo da je $x \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A$ ako i samo ako je $x$ element svakog člana $A$ iz familije $\mathcal{F}$. Teoremi de Morgana vrijede i za familiju skupova, tj.

$$\Big(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A\Big)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A^c, \;\; \Big(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A\Big)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A^c.$$

## Riješeni zadaci

1.1. Zadatak

*Koristeći se definicijama osnovnih skupovnih operacija, pokažite: ako je $X$ univerzalni skup i $A, B \subseteq X$, onda je $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$.*

**Rješenje.** Pretpostavimo suprotno, tj. da je $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) \neq \emptyset$. Dakle, postoji $x \in (A \backslash B) \cap (B \backslash A)$, tj. $x \in A \backslash B$ i $x \in B \backslash A$. Iz posljednjeg slijedi da je $x \in A$ i $x \notin B$, a ujedno i $x \in B$ i $x \notin A$, što daje kontradikciju.

1.2. Zadatak

*Neka je $X$ univerzalni skup i $A, B, C \subseteq X$. Pokažite da vrijedi:*

(a) $A \backslash B = A \cap B^c$,

(b) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$,

[1] Augustus de Morgan (1806.-1871.), britanski matematičar.

(c) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$.

---

**Rješenje.**

(a) Vrijedi:

$$x \in A\backslash B \iff x \in A \text{ i } x \notin B \iff x \in A \text{ i } x \in B^c \iff x \in A \cap B^c.$$

(b) Korištenjem tvrdnje (a) i svojstava Booleovih operacija dobivamo:

$$(A\backslash B)\backslash C = (A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c = A\backslash(B \cup C).$$

(c) Ponovnim korištenjem tvrdnje (a) i svojstava Booleovih operacija dobivamo:

$$A\backslash(B\backslash C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C).$$

1.3. Zadatak

*Neka je $X$ univerzalni skup i $A, B \subseteq X$. Pokažite da vrijedi:*

(a) $(A^c \cup B) \cap A = A \cap B$,

(b) $A \cap (B\backslash A) = \emptyset$,

(c) $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$,

(d) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$,

(e) $A\backslash B = A \triangle (A \cap B)$,

(f) $B \triangle C = A$, *ako je* $C = A \triangle B$.

---

**Rješenje.** Koristeći svojstva Booleovih operacija i zadatak 1.2. (a) dobivamo:

(a) $(A^c \cup B) \cap A = (A^c \cap A) \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A) = A \cap B$.

(b) $A \cap (B\backslash A) = A \cap (B \cap A^c) = (A \cap B) \cap (A \cap A^c) = (A \cap B) \cap \emptyset = \emptyset$.

(c)

$$\begin{aligned} A\backslash(B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= (A\backslash B) \cap (A\backslash C). \end{aligned}$$

(d) $A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (B^c\backslash A^c) \cup (A^c\backslash B^c) = A^c \triangle B^c$.

(e)

$$\begin{aligned} A \triangle (A \cap B) &= [A\backslash(A \cap B)] \cup [(A \cap B)\backslash A] = [A \cap (A^c \cup B^c)] \cup [(A \cap B) \cap A^c] \\ &= [(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \cup \emptyset = \emptyset \cup (A \cap B^c) = A \cap B^c = A\backslash B. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} B\triangle C &= B\triangle(A\triangle B) = B\triangle[(A\backslash B)\cup(B\backslash A)] \\ &= B\backslash[(A\backslash B)\cup(B\backslash A)]\cup[(A\backslash B)\cup(B\backslash A)]\backslash B = (A\cap B)\cup(A\backslash B) = A. \end{aligned}$$

1.4. Zadatak

*Neka su $A, B, C \subseteq X$. Pokažite da je*

(a) $A\backslash(B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

(b) *Koristeći se tvrdnjom* (a) *pokažite da je* $(A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C) = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)\cup(B\backslash C)\cup(C\backslash B)$.

---

**Rješenje.**

(a)

$$\begin{aligned} A\backslash(B\cap C) &= A\cap(B\cap C)^c = A\cap(B^c\cup C^c) = (A\cap B^c)\cup(A\cap C^c) \\ &= (A\backslash B)\cup(A\backslash C). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (A\cup B\cup C)\backslash(A\cap B\cap C) &= (A\cup B\cup C)\cap(A\cap B\cap C)^c \qquad (1.1) \\ &= [A\cap(A\cap B\cap C)^c]\cup[B\cap(A\cap B\cap C)^c]\cup[C\cap(A\cap B\cap C)^c] \\ &= [A\backslash(A\cap B\cap C)]\cup[B\backslash(A\cap B\cap C)]\cup[C\backslash(A\cap B\cap C)] \\ &= [A\backslash(B\cap C)]\cup[B\backslash(A\cap C)]\cup[C\backslash(A\cap B)] \\ &= (A\backslash B)\cup(A\backslash C)\cup(B\backslash A)\cup(B\backslash C)\cup(C\backslash A)\cup(C\backslash B). \end{aligned}$$

Nadalje, možemo uočiti da vrijede sljedeće inkluzije:

$$\begin{aligned} (A\backslash C) &= (A\backslash C)\cap X = (A\cap C^c)\cap(B\cup B^c) = [(A\cap C^c)\cap B]\cup[(A\cap C^c)\cap B^c] \\ &\subseteq (B\backslash C)\cup(A\backslash B), \\ (C\backslash A) &= (C\backslash A)\cap X = (C\cap A^c)\cap(B\cup B^c) = [(C\cap A^c)\cap B]\cup[(C\cap A^c)\cap B^c] \\ &\subseteq (B\backslash A)\cup(C\backslash B), \end{aligned}$$

pa iz jednakosti (1.1) slijedi tražena tvrdnja.

1.5. Zadatak

*Neka su $A, B, N \subseteq X$ takvi da je $B \subseteq N$. Pokažite da vrijedi:*

(a) $A\cup B = (A\cup N)\backslash[(N\backslash B)\backslash A]$,

(b) $A\backslash B = (A\backslash N)\cup(A\cap N\cap B^c)$,

(c) $A\triangle B = (A\backslash N)\cup[N\cap(A\triangle B)]$,

(d) $A\cup B = (A\backslash N)\triangle[N\cap(A\cup B)]$.

---

**Rješenje.**

(a)

$$\begin{aligned}(A\cup N)\setminus[(N\setminus B)\setminus A] &= [(A\cup N)\setminus(N\setminus B)]\cup[(A\cup N)\cap A]\\ &= [((A\cup N)\setminus N)\cup((A\cup N)\cap B)]\cup A\\ &= (A\setminus N)\cup[(A\cap B)\cup(N\cap B)]\cup A\\ &= [(A\setminus N)\cup A]\cup[(A\cap B)\cup B] = A\cup B,\end{aligned}$$

gdje prve dvije jednakosti slijede iz zadatka 1.2. (c), a predzadnja jednakost iz činjenice da je $B\subseteq N$.

(b)

$$\begin{aligned}(A\setminus N)\cup(A\cap N\cap B^c) &= (A\setminus N)\cup[(A\setminus N^c)\cap B^c]\\ &= [(A\setminus N)\cup(A\setminus N^c)]\cap[(A\setminus N)\cup B^c]\\ &= [A\setminus(N\cap N^c)]\cap[(A\cap N^c)\cup B^c] = A\cap[(A\cup B^c)\cap(N^c\cup B^c)]\\ &= A\cap[(A\cup B^c)\cap B^c] = A\cap B^c = A\setminus B,\end{aligned}$$

gdje 3. jednakost slijedi iz zadatka 1.4. (a), a 5. jednakost iz činjenice da je $B\subseteq N$, tj. $N^c\cup B^c = B^c$.

(c)

$$\begin{aligned}(A\setminus N)\cup[N\cap(A\triangle B)] &= (A\setminus N)\cup[N\cap((A\setminus B)\cup(B\setminus A))]\\ &= (A\setminus N)\cup[(N\cap A\cap B^c)\cup(N\cap B\cap A^c)]\\ &= [(A\setminus N)\cup(A\setminus N^c\cap B^c)]\cup(B\setminus A)\\ &= [((A\setminus N)\cup(A\setminus N^c))\cap((A\setminus N)\cup B^c)]\cup(B\setminus A)\\ &= [(A\setminus(N\cap N^c))\cap((A\cup B^c)\cap(N^c\cup B^c))]\cup(B\setminus A)\\ &= [A\cap((A\cup B^c)\cap B^c)]\cup(B\setminus A) = (A\cap B^c)\cup(B\setminus A)\\ &= (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = A\triangle B,\end{aligned}$$

gdje 3. i 6. jednakost slijede iz $B\subseteq N$, a 5. jednakost iz zadatka 1.4. (a).

(d)

$$\begin{aligned}(A\setminus N)\triangle[N\cap(A\cup B)] &= [(A\setminus N)\setminus(N\cap(A\cup B))]\cup[(N\cap(A\cup B))\setminus(A\setminus N)]\\ &= [A\setminus(N\cup(N\cap(A\cup B)))]\cup[((N\cap(A\cup B))\setminus A)\cup(N\cap(A\cup B))\cap N]\\ &= (A\setminus N)\cup[(((N\cap A)\cup(N\cap B))\setminus A)\cup(N\cap(A\cup B))]\\ &= (A\setminus N)\cup[(((N\cap A)\setminus A)\cup((N\cap B)\setminus A))\cup(N\cap(A\cup B))]\\ &= (A\setminus N)\cup(B\setminus A)\cup[(N\cap A)\cup(N\cap B)]\\ &= (A\setminus N)\cup(B\setminus A)\cup[(A\setminus N^c)\cup B]\\ &= [(A\setminus N)\cup(A\setminus N^c)]\cup[(B\setminus A)\cup B]\\ &= [A\setminus(N\cap N^c)]\cup B = (A\setminus\emptyset)\cup B = A\cup B,\end{aligned}$$

gdje 2. jednakost slijedi iz zadatka 1.2. (b) i (c), 5. i 6. jednakost iz $B \subseteq N$, a zadnja jednakost iz zadatka 1.4. (a).

## 1.2. Osnovno o funkcijama

U ovom poglavlju navedeni su neki ne tako često korišteni pojmovi vezani uz funkcije koji će nam biti potrebni u nastavku, dok je sama definicija funkcije (kao i pojmovi injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti koji uz nju najčešće idu) izostavljena zbog svoje učestale upotrebe u matematičkoj literaturi, a s kojom su se studenti imali prilike sresti još u osnovnoj i srednjoj školi. U nastavku su također, kroz zadatke, dokazana neka osnovna svojstva funkcija koja će nam biti potrebna za razumijevanje daljnjih zadataka.

1.1. Definicija

*Za svaki niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *funkcija* $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ *definiraju se funkcije* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n, \liminf_n f_n : X \to [-\infty, \infty]$ *formulama:*

$$\begin{aligned}
&\sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\},\ x \in X\\
&\inf_n f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\},\ x \in X\\
&\limsup_n f_n(x) = \inf\big\{\sup\{f_k(x) : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\big\},\ x \in X\\
&\liminf_n f_n(x) = \sup\big\{\inf\{f_k(x) : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\big\},\ x \in X.
\end{aligned}$$

*Dakle,* $\limsup_n f_n(x)$ *je* limes superior *(najveća točka gomilanja) niza* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, *a* $\liminf_n f_n(x)$ *je* limes inferior *(najmanja točka gomilanja) niza* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

---

Primijetimo da je uvijek $\liminf_n f_n \leq \limsup_n f_n$. Može se pokazati da je $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$ ako i samo ako postoji $\lim_n f_n(x)$ i tada vrijedi $\lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$. Dakle, domena funkcije $\lim_n f_n$ je skup $\{x \in X : \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$.

Navedimo još jednu važnu jednakost (vidi [17, str. 63]) koja će nam biti potrebna u nastavku:

$$\liminf_n f_n(x) = -\limsup_n(-f_n(x)). \tag{1.2}$$

Važno je istaknuti da limes superior i limes inferior možemo definirati i za proizvoljan niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vidi [16, str. 16]) i to na sljedeći način:

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k,\ \limsup_n A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k. \tag{1.3}$$

U teoriji mjere i integracije od osobitog je značaja karakteristična funkcija, stoga navodimo njezinu definiciju.

1.2. Definicija

*Neka je* $B \subseteq X$. *Karakteristična funkcija* $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ *skupa* $B$ *definira se na sljedeći način:*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in B\\ 0, & \text{ako } x \notin B. \end{cases} \tag{1.4}$$

## Riješeni zadaci

1.6. Zadatak

*Neka su $X, Y \neq \emptyset$ i $f : X \to Y$ preslikavanje. Dokažite da za sve podskupove $A$ i $B$ od $X$ vrijedi*

$$A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B),$$

*dok obrat općenito ne vrijedi.*

**Rješenje.** Neka je $A \subseteq B$ i $y \in f(A)$ proizvoljan element. Tada postoji $b \in B$ tako da je $f(b) = y$, tj. $y \in f(B)$, iz čega slijedi $f(A) \subseteq f(B)$.
Kako bi pokazali da obrat općenito ne vrijedi, konstruirat ćemo kontraprimjer. Neka je $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3\}$ i $f : X \to Y$ preslikavanje definirano s $f(a) := 3$, $a \in X$. Sada za $A = \{1\}$ i $B = \{2\}$ dobivamo $f(A) = \{3\} = f(B)$, ali ne vrijedi $A \subseteq B$.

1.7. Zadatak

*Neka su $X, Y \neq \emptyset$ i $f : X \to Y$ preslikavanje. Dokažite sljedeće tvrdnje:*

(a) *Za sve podskupove $A$ i $B$ od $X$ vrijedi*

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B),$$

*dok obratna inkluzija općenito ne vrijedi.*

(b) *Za sve podskupove $A$ i $B$ od $X$ vrijedi*

$$f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B),$$

*dok obratna inkluzija općenito ne vrijedi.*

(c) *Za sve podskupove $A$ i $B$ od $X$ vrijedi da je*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

**Rješenje.**

(a) Iz zadatka 1.6. slijedi da je $f(A \cap B) \subseteq f(A)$ i $f(A \cap B) \subseteq f(B)$, što daje traženu tvrdnju.
Kako bi pokazali da obratna inkluzija općenito ne vrijedi, promotrimo isti primjer kao u zadatku 1.6. Kako je $A \cap B = \emptyset$, slijedi da je $f(A \cap B) = \emptyset$, dok je $f(A) \cap f(B) = \{3\}$.

(b) Neka je $y \in f(A) \backslash f(B)$. Tada postoji $x \in A$ takav da $x \notin B$ i $y = f(x)$, tj. $y \in f(A \backslash B)$. Dakle, $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$.
Kako bi pokazali da obratna inkluzija općenito ne vrijedi, uzmimo da je $X = [0, 2]$, $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ i neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(c) := c$, $c \in X$. Funkcija $f$ nije injekcija te slijedi $f(A) = f(B) = \{c\} = f(A \backslash B)$, ali $f(A) \backslash f(B) = \emptyset$.

(c) Neka je $y \in Y$. Ako je $y \in f(A \cup B)$, onda postoji element $x \in A \cup B$ takav da je $f(x) = y$. To je ekvivalentno s tvrdnjom da postoji element $x \in A$ takav da je $f(x) = y$ ili postoji element $x \in B$ takav da je $f(x) = y$, tj. $y \in f(A)$ ili $y \in f(B)$, što je ekvivalentno s $y \in f(A) \cup f(B)$.

1.8. ZADATAK
*Dokažite: funkcija $f : X \to Y$ je injekcija ako i samo ako vrijedi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, za sve $A, B \subseteq X$.*

---

**Rješenje.**

$\Longrightarrow$ Iz zadatka 1.7. (a) slijedi da je $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Pokažimo da vrijedi i obratna inkluzija ako se radi o funkciji $f$ koja je injekcija. Ako je $y \in f(A) \cap f(B)$, slijedi da je $y = f(a)$ i $y = f(b)$ za neke $a \in A$, $b \in B$. Dakle, $f(a) = y = f(b)$, pa iz injektivnosti funkcije $f$ slijedi da je $a = b \in A \cap B$ i $y \in f(A \cap B)$, što daje traženu inkluziju.

$\Longleftarrow$ Neka su $x, x' \in X$ takvi da je $f(x) = f(x')$ i neka su definirani skupovi $A := \{x\}$ i $B := \{x'\}$. Tada je $\emptyset \neq f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\} \cap \{x'\})$, što je moguće jedino u slučaju $\{x\} \cap \{x'\} \neq \emptyset$, tj. ako je $x = x'$. Dakle, funkcija $f$ je injekcija.

1.9. ZADATAK
*Dokažite: funkcija $f$ je injekcija ako i samo ako vrijedi $f(X \backslash A) = f(X) \backslash A$ za svaki $A \subseteq X$.*

---

**Rješenje.**

$\Longrightarrow$ Pretpostavimo da je funkcija $f$ injekcija. Pokažimo najprije da $f(x) \notin f(A)$ ako i samo ako $x \notin A$. Zaista, ako $f(x) \notin f(A)$, onda $x \notin A$; ako $x \notin A$, a $f(x) \in f(A)$, onda postoji $a \in A$ takav da je $f(a) = f(x) \in f(A)$. Kako je funkcija $f$ injekcija, slijedi da je $x = a \in A$, što daje kontradikciju. Dakle,

$$\begin{aligned} f(X) \backslash f(A) &= \{y \in Y : \, y = f(x), \, f(x) \notin f(A)\} = \{y \in Y : \, y = f(x), \, x \notin A\} \\ &= f(X \backslash A). \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Neka je $f(x) = f(x')$ i pretpostavimo da je $x \neq x'$. Tada je $f(x) \in f(X \backslash \{x'\}) = f(X) \backslash f(\{x'\})$, što je u kontradikciji s $f(x) \in f(\{x'\})$. Dakle, funkcija $f$ je injekcija.

1.10. ZADATAK
*Neka je $f : X \to Y$ funkcija, $A \subseteq Y$,*

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : \, f(x) \in A\},$$

*te $\{A_i, \, i \in I\}$ familija podskupova od $Y$. Dokažite sljedeće tvrdnje:*

(a) $f^{-1}(B \backslash A) = f^{-1}(B) \backslash f^{-1}(A)$, *za $A \subseteq B \subseteq Y$,*

(b) $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$,

(c) $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

---

**Rješenje.**

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B\backslash A) &\iff f(x) \in B\backslash A \iff f(x) \in B \text{ i } f(x) \notin A \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \text{ i } x \notin f^{-1}(A) \iff x \in f^{-1}(B)\backslash f^{-1}(A). \end{aligned}$$

(b) Vrijedi

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) &\iff f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i_0 \in I \text{ t.d. } f(x) \in A_{i_0} \\ &\iff \exists i_0 \in I \text{ t.d. } x \in f^{-1}(A_{i_0}) \iff x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

(c) Tražena jednakost slijedi iz

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) &\iff f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I \;\; f(x) \in A_i \\ &\iff \forall i \in I \;\; x \in f^{-1}(A_i) \iff x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i). \end{aligned}$$

1.3. PRIMJEDBA
*Primijetimo da iz tvrdnje* (a) *prethodnog zadatka slijedi da je* $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$.

---

1.11. ZADATAK
*Dokažite da za funkciju* $f : X \to Y$ *i proizvoljan skup* $A \subseteq X$ *vrijedi*

(a) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$,

(b) $f\big(f^{-1}(A)\big) \subseteq A$,

*dok odgovarajuće jednakosti općenito ne vrijede.*

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $x \in A$. Tada je $y = f(x) \in f(A)$, tj. $x \in f^{-1}(f(A))$. Dakle, vrijedi inkluzija $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
Kako bi pokazali da jednakost općenito ne vrijedi, konstruirajmo kontraprimjer. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) := x^2$ te neka je $A = [0, \infty)$. Slijedi da je $f(A) = [0, \infty) = A$, što očito nije jednako $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A) = \mathbb{R}$.

(b) Neka je $y \in f\left(f^{-1}(A)\right)$. Tada je $y = f(x)$ za neki $x \in f^{-1}(A)$, tj. $y = f(x) \in A$, iz čega slijedi da je $f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A$.
Nadalje, neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponovno definirana s $f(x) := x^2$ te neka je $A = \mathbb{R}$. Slijedi da je $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$, dok je $f\left(f^{-1}(A)\right) = f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$, iz čega slijedi da jednakost $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$ općenito ne vrijedi.

1.12. Zadatak
*Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. Dokažite:*

(a) *Funkcija $f$ je injekcija ako i samo ako za proizvoljan skup $A \subseteq X$ vrijedi $f^{-1}(f(A)) = A$.*

(b) *Funkcija $f$ je surjekcija ako i samo ako za proizvoljan skup $A \subseteq X$ vrijedi $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$.*

---

**Rješenje.**

(a) $\Longrightarrow$ Kako bi dokazali traženu jednakost dovoljno je dokazati da vrijede dvije inkluzije, od kojih je jedna dokazana u zadatku 1.11. (a). Pretpostavimo da je funkcija $f$ injekcija i neka je $x \in f^{-1}(f(A))$. Tada je $f(x) \in f(A)$, pa postoji $x_1 \in A$ takav da je $f(x_1) = f(x)$. Iz injektivnosti funkcije $f$ slijedi da je $x = x_1$, tj. $x \in A$, čime je dokazana i druga inkluzija.
$\Longleftarrow$ Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$ te neka je $A = \{x_1\}$. Tada je $f(A) = f(\{x_1\})$, pa iz $f(x_1) = f(x_2)$ slijedi $x_2 \in f^{-1}(f(A))$. Prema pretpostavci je $f^{-1}(f(A)) = A$, iz čega slijedi da je $x_2 \in A = \{x_1\}$, tj. $x_1 = x_2$. Dakle, funkcija $f$ je injekcija.

(b) $\Longrightarrow$ Primijetimo da je inkluzija $f\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq A$ već dokazana u zadatku 1.11. (b). U svrhu dokazivanja suprotne inkluzije pretpostavimo da je funkcija $f$ surjekcija i neka je $y \in A$. Iz surjektivnosti funkcije $f$ slijedi da postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$, što povlači da je $x \in f^{-1}(A)$. Tada je $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(A)\right)$.
$\Longleftarrow$ Odaberimo proizvoljan $y \in Y$. Trebamo pokazati da postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Neka je $A = \{y\}$. Prema pretpostavci zadatka slijedi da je $f\left(f^{-1}(A)\right) = A = \{y\}$, pa je $y \in f\left(f^{-1}(A)\right)$. Iz prethodnog razmatranja slijedi da postoji $x \in f^{-1}(A) \subseteq X$ takav da je $f(x) = y$.

1.13. Zadatak
*Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz podskupova od $X$. Dokažite da za svaki $x \in X$ vrijedi*

$$\liminf_n \chi_{A_n}(x) = \chi_{\liminf_n A_n}(x) \quad i$$
$$\limsup_n \chi_{A_n}(x) = \chi_{\limsup_n A_n}(x).$$

---

**Rješenje.** Najprije primijetimo da vrijedi $\chi_{\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_k}$ i $\chi_{\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_k}$, gdje prva jednakost slijedi iz

$$\begin{aligned}\chi_{\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k}(x) = 1 &\iff x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \iff x \in A_k,\, \forall k \in \mathbb{N} \iff \chi_{A_k}(x) = 1,\, \forall k \in \mathbb{N} \\ &\iff \inf_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_k}(x) = 1,\end{aligned}$$

a druga iz

$$\begin{aligned}\chi_{\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k}(x) = 1 &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \iff \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } x \in A_{k_0} \\ &\iff \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } \chi_{A_{k_0}}(x) = 1 \iff \sup_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_k}(x) = 1.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\chi_{\liminf_n A_n} &= \chi_{\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} A_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\cap_{k\geq n} A_k} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \chi_{A_k} = \liminf_n \chi_{A_n}, \\ \chi_{\limsup_n A_n} &= \chi_{\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \chi_{\cup_{k\geq n} A_k} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \chi_{A_k} = \limsup_n \chi_{A_n}.\end{aligned}$$

1.14. ZADATAK

*Dokažite da za sve $A, B \subseteq X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(a) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$,

(b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$,

(c) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$,

(d) $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \min\{\chi_A + \chi_B, 1\}$,

(e) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}$,

(f) $\alpha\chi_A + \beta\chi_B = \alpha\chi_{A\setminus B} + (\alpha + \beta)\chi_{A\cap B} + \beta\chi_{B\setminus A}$,

(g) $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B$,

(h) $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\Delta B}$.

---

**Rješenje.** Koristeći se definicijom karakteristične funkcije (1.4) možemo dokazati tražene tvrdnje, i to na sljedeći način:

(a) Kako je $X = A \cup A^c$ i $A \cap A^c = \emptyset$, za svaki $x \in X$ imamo dvije mogućnosti: $x \in A$ ili $x \in A^c$, a u oba slučaja vidimo da navedena jednakost vrijedi.

(b) – (h) Možemo promatrati četiri slučaja: $x \in A$, $x \in B$; $x \in A$, $x \notin B$; $x \notin A$, $x \in B$; $x \notin A$, $x \notin B$, a u svakom od njih lako možemo zaključiti da vrijede navedene jednakosti.

1.15. Zadatak
*Neka je $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dokažite da vrijedi jednakost*

$$\chi_A = 1 - \chi_{A^c} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \cdots (1 - \chi_{A_n}).$$

---

**Rješenje.** Korištenjem tvrdnji (a) i (b) zadatka 1.14. dobivamo:

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= 1 - \chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_{A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c}(x) \\ &= 1 - \chi_{A_1^c}(x) \cdots \chi_{A_n^c}(x) \\ &= 1 - (1 - \chi_{A_1}(x)) \cdots (1 - \chi_{A_n}(x)).\end{aligned}$$

1.16. Zadatak
*Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih podskupova od $X$. Pokažite da tada vrijedi*

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}.$$

---

**Rješenje.** Neka je $x \in X$ proizvoljan element. Možemo promatrati dva slučaja:

- Ako je $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onda je $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) = 1$. Kako su skupovi $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ međusobno disjunktni, postoji jedinstveni $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_n$. Tada je $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = 1$ i tražena jednakost vrijedi.
- Ako $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onda je $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}(x) = 0$ i vrijedi da $x \notin A_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = 0$.

## 1.3. Prebrojivi skupovi

Skupove koji imaju konačan broj elemenata možemo intuitivno uspoređivati te tako jednostavno odgovoriti na pitanje koji skup ima više elemenata od drugog. Na primjer, ako su dani skupovi $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ i $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, jednostavnim prebrojavanjem elemenata svakog od danih skupova možemo zaključiti da skup $B$ ima više elemenata. No ako na isto pitanje trebamo odgovoriti, na primjer, za skupove $A = \mathbb{N}$ i $B = 2\mathbb{N} - 1$, potrebno je poznavati pojam ekvipotentnosti skupova.

1.4. Definicija

*Kažemo da je skup $A$* ekvipotentan *skupu $B$ i pišemo $A \sim B$ ako postoji bar jedna bijekcija $f : A \to B$.*

---

Može se pokazati da je ekvipotentnost skupova jedna relacija ekvivalencije, tj. vrijede sljedeća svojstva: (a) refleksivnost: $A \sim A$, (b) simetričnost: Ako je $A \sim B$, onda je $B \sim A$, (c) tranzitivnost: Ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, onda je $A \sim C$. Klasa ekvivalencije naziva se kardinalni broj. Za ekvipotentne skupove kaže se još da su ekvivalentni, jednakobrojni ili da imaju isti kardinalni broj.

Kardinalni broj skupa $A$ označava se s $k(A)$.

1.5. Definicija ([13, definicija 3.1.3., str. 73])

*Kažemo da skup $A$ ima kardinalni broj manji ili jednak od kardinalnog broja skupa $B$, tj. $k(A) \leq k(B)$ ako i samo ako postoji $B' \subseteq B$ takav da je $k(A) = k(B')$.*

---

Kažemo da je skup $A$ konačan ako je prazan ili postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je skup $A$ ekvipotentan sa skupom $\{1, \dots, n\}$. U tom se slučaju kardinalni broj konačnog skupa $A$ naziva još i *broj elemenata od $A$* i označavamo ga s $k(A) = n$ za $A \sim \{1, \dots, n\}$, odnosno s $k(A) = 0$ za $A = \emptyset$.

Uočimo da se na konačnim skupovima definicija 1.5. poklapa s uređajem na skupu prirodnih brojeva.

Za skup $A$ kažemo da je beskonačan ako nije konačan. Skupovi koji su ekvipotentni sa skupom $\mathbb{N}$ nazivaju se prebrojivi. Njihov kardinalni broj označava se s $\aleph_0$. Uočimo da je, u smislu definicije 1.5., za svaki $n \in \mathbb{N}$ $n \leq \aleph_0$. Konačne i prebrojive skupove nazivamo zajedničkim imenom diskretni skupovi.

1.6. Primjedba

*U nastavku ćemo koristiti oznaku $\mathbb{N}_a$ za skup koji se sastoji od prvih $a$ prirodnih brojeva, tj. $\mathbb{N}_a = \{1, 2, \dots, a\}$. Izuzetak je oznaka $\mathbb{N}_0$ s kojom ćemo, uobičajeno, označavati skup koji se sastoji od skupa prirodnih brojeva i nule, tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

---

## Riješeni zadaci

1.17. Zadatak

*Pokažite da su sljedeći skupovi ekvipotentni:*

(a) $A = \{2, 6, 19\}$ *i* $B = \{4, 172, 2265\}$,

(b) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ *i* $B = \{-1, -2, -3, \dots\}$,

(c) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ *i* $B = \{1, 3, 5, \dots\}$,

(d) $A = [c, d]$ *i* $B = [a, b]$,

(e) $\mathbb{Z}$ *i* $\mathbb{N}_0$.

**Rješenje.**

(a) *Funkcija* $f : \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right) \to \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, \infty\right)$, *definirana s* $f(x) := P_2(x) = ax^2 + bx + c$, *je bijekcija. Rješavanjem sustava od tri jednadžbe* $f(2) = 4$, $f(6) = 172$, $f(19) = 2265$ *s tri nepoznanice* $a, b$ *i* $c$ *dobivamo da je tražena bijekcija* $f_{|A} : A \to B$, $f(x) = 7x^2 - 14x + 4$.

(b) *Lako je uočiti da bijekciju* $f : A \to B$ *možemo definirati s* $f(x) := -x$.

(c) *Funkcija* $f : A \to B$, *definirana s* $f(x) := 2x - 1$, *je bijekcija.*

(d) *Bijekciju* $f : A \to B$ *možemo konstruirati koristeći se jednadžbom pravca kroz dvije točke:* $f(x) = \dfrac{b-a}{d-c}(x - c) + a$.

(e) *Ako je funkcija* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ *definirana s*

$$f(x) := \begin{cases} -2x, & \text{ako je } x < 0 \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \\ 2x - 1, & \text{ako je } x > 0, \end{cases}$$

*možemo uočiti da je ona bijekcija, pa je* $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}_0$.

---

1.18. Zadatak

*Dokažite da za svaki neprazan podskup* $A \subseteq \mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$ *postoji prirodan broj* $k$ *takav da je* $k \le m$ *i* $k(A) = k$.

---

**Rješenje.** Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije po $m \in \mathbb{N}$, imajući na umu da je $A \neq \emptyset$. Za $m = 1$, iz $A \subseteq \mathbb{N}_1 = \{1\}$ slijedi da je $A = \{1\}$, te je $k(A) = m = 1$. Nadalje, pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $m \in \mathbb{N}$, tj. da za svaki $A \subseteq \mathbb{N}_m$ postoji $k \in \mathbb{N}$, $k \le m$ takav da je $k(A) = k$. Dokažimo da tvrdnja vrijedi za

$A \subseteq \mathbb{N}_{m+1}$. Ako je $A \subseteq \mathbb{N}_m$, tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije. Promotrimo slučaj kada je $m+1 \in A$. Tada je $A \backslash \{m+1\} \subseteq \mathbb{N}_m$ te prema pretpostavci indukcije postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \leq m$ i $k(A \backslash \{m+1\}) = k$, odnosno postoji bijekcija $f : A \backslash \{m+1\} \to \mathbb{N}_k$. Nadalje, funkcija $g : A \to \mathbb{N}_{k+1}$, takva da je $g(\{m+1\}) := k+1$ i $g_{|A \backslash \{m+1\}} = f$, je također bijekcija te stoga vrijedi da je $k(A) = k+1 \leq m+1$.

1.19. Zadatak

*Neka su $A$ i $B$ proizvoljni podskupovi skupa $X \neq \emptyset$. Dokažite da je tada $k(A) \leq k(B)$ ako i samo ako postoji injektivno preslikavanje $f : A \to B$.*

---

**Rješenje.**

$\Longrightarrow$ Neka je $k(A) \leq k(B)$. Prema definiciji 1.5. postoji $B' \subseteq B$, takav da je $k(A) = k(B')$, tj. skupovi $A$ i $B'$ su ekvipotentni pa postoji bijekcija $g : A \to B'$. Neka je $i : B' \to B$, $i(x) = x$ inkluzija. Svaka je inkluzija injektivno preslikavanje, pa je i $f = i \circ g : A \to B$ injektivno preslikavanje.

$\Longleftarrow$ Neka je $f : A \to B$ injekcija. Promotrimo skup $f(A) \subseteq B$. Tada je preslikavanje $f_{|f(A)} : A \to f(A)$ očito surjekcija, tj. ono je i bijekcija. Dakle, skupovi $A$ i $B' = f(A)$ su ekvipotentni i pri tome je $B' \subseteq B$, pa slijedi da je $k(A) \leq k(B.)$

1.20. Zadatak

*Dokažite da svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup.*

---

**Rješenje.** Neka je $X$ beskonačan skup. Postoji $x_1 \in X$ jer $X$ nije prazan skup. Nadalje, kako je $X$ beskonačan skup, vrijedi da je $X \backslash \{x_1\} \neq \emptyset$ pa postoji $x_2 \in X \backslash \{x_1\}$. Pretpostavimo da smo na prethodno opisani način pronašli elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Tada ponovno, zbog pretpostavke da je $X$ beskonačan skup, postoji $x_{n+1} \in X \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Na taj smo način formirali skup $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subseteq X$. Ako definiramo preslikavanje $f : \mathbb{N} \to A$, s $f(n) := x_n$, slijedi da je $f$ bijekcija, pa je $A$ traženi prebrojiv skup.

# 2. Mjera

## 2.1. $\sigma$-algebra

2.1. DEFINICIJA
*Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa $X$ nazivamo $\sigma$-*algebra *na skupu $X$ ako ona ima sljedeća svojstva:*

($\sigma$1) $X \in \mathcal{A}$,

($\sigma$2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

($\sigma$3) *unija prebrojivo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

*Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je* izmjeriv prostor. *Svaki element od $\mathcal{A}$ naziva se* izmjeriv skup.

---

2.2. PRIMJEDBA
*Neka je $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra na skupu $X$. Kako je $\emptyset = X^c$, svojstvo ($\sigma$2) povlači $\emptyset \in \mathcal{A}$ i govori nam da uvjet ($\sigma$1) iz definicije $\sigma$-algebre možemo zamijeniti uvjetom*

$(\sigma1)'$ $\emptyset \in \mathcal{A}$.
Dakle, definicija $\sigma$-algebre je ekvivalentna definiciji u kojoj umjesto ($\sigma$1) imamo $(\sigma1)'$.

*Nadalje, također zbog ($\sigma$2), umjesto svojstva ($\sigma$3) iz definicije 2.1. može se zahtijevati da familija $\mathcal{A}$ bude zatvorena na prebrojive presjeke:*

$(\sigma3)'$ Presjek prebrojivo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

*Ako se u definiciji 2.1. umjesto uvjeta ($\sigma$3) zahtijeva da $\mathcal{A}$ bude zatvorena na formiranje konačnih unija, dobiva se definicija* algebre skupova *na skupu $X$. Očito je svaka $\sigma$-algebra ujedno i algebra, dok obrat ne vrijedi.*

---

2.3. PROPOZICIJA
*Neka je $(\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ bilo koja familija $\sigma$-algebri na skupu $X$. Tada je $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ također $\sigma$-algebra na skupu $X$.*

---

Pomoću propozicije 2.3. lako je dokazati sljedeći korolar koji je koristan alat za konstrukciju $\sigma$-algebri.

2.4. Korolar

*Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa $X$. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$$

*najmanja $\sigma$-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je* $\sigma$-algebra generirana s $\mathcal{F}$.

---

Korisno je poznavati i definiciju topologije na skupu $X$ kako bi u nastavku mogli definirati takozvanu Borelovu $\sigma$–algebru.

2.5. Definicija

Topološki prostor *je par $(X,\mathcal{U})$ gdje je $X$ neprazan skup, a $\mathcal{U}$ familija podskupova od $X$ sa svojstvima:*

(a) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,

(b) *unija svake familije skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$,*

(c) *presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$.*

*Familija $\mathcal{U}$ naziva se* topološka struktura *ili* topologija*, a njezine članove nazivamo* otvorenim skupovima.

---

2.6. Definicija

*Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Za $\sigma$-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$ kaže se da je* Borelova $\sigma$-algebra *na skupu $X$ i najčešće se označava s $\mathcal{B}(X,\mathcal{U})$, $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}_X$. Članovi od $\mathcal{B}(X)$ zovu se* Borelovi skupovi. *U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Borelova $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$.*

---

2.7. Teorem

*Borelova $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirana je sa svakom od sljedećih familija:*

(a) $\mathcal{F}_1 := \{F \subseteq \mathbb{R} : F \text{ zatvoren}\}$,

(b) $\mathcal{F}_2 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\mathcal{F}_3 := \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\mathcal{F}_4 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,

(e) $\mathcal{F}_5 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,

(f) $\mathcal{F}_6 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,

(g) $\mathcal{F}_7 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,

(h) $\mathcal{F}_8 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,

(i) $\mathcal{F}_9 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

---

2.8. Primjedba

*U nastavku ćemo Borelovu $\sigma$-algebru na nekom skupu realnih brojeva $A$ označavati s $\mathcal{B}(A)$. Prema zadatku 2.3. slijedi da je to zaista $\sigma$-algebra.*

---

2.9. Teorem

*Borelovu $\sigma$-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generira svaka od sljedećih familija:*

(a) *familija svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$,*

(b) *familija svih zatvorenih poluprostora u $\mathbb{R}^d$ oblika*

$$\mathbb{R}^{i-1} \times (-\infty, b] \times \mathbb{R}^{d-i}, \quad b \in \mathbb{R},$$

(c) *familija svih pravokutnika u $\mathbb{R}^d$ oblika*

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_d, b_d].$$

---

U nastavku će nam biti potreban i pojam monotone klase koji navodimo u sljedećoj definiciji.

2.10. Definicija

*Familija $\mathfrak{M}$ podskupova od $X$ naziva se* monotona klasa *na skupu $X$ ako ima sljedeća dva svojstva:*

(a) *za svaki niz rastućih skupova iz $\mathfrak{M}$ i njihova je unija član od $\mathfrak{M}$,*

(b) *za svaki niz padajućih skupova iz $\mathfrak{M}$ i njihov je presjek član od $\mathfrak{M}$.*

---

2.11. Teorem

*Familija $\mathcal{A}$ podskupova od $X$ je $\sigma$-algebra na $X$ ako i samo ako je $\mathcal{A}$ algebra i monotona klasa.*

---

## Riješeni zadaci

---

2.1. Zadatak

*Neka je $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra na skupu $X$. Dokažite:*

(a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$,

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$.

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $A\backslash B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$, iz svojstava $\sigma$–algebre ($\sigma 2$) i ($\sigma 3$) slijedi da je i $A\backslash B \in \mathcal{A}$.

(b) Prema dokazanoj tvrdnji (a) slijedi $A\backslash B, B\backslash A \in \mathcal{A}$, pa je prema svojstvu ($\sigma 3$) i $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \in \mathcal{A}$.

2.2. Zadatak

*Neka je $\Omega = \{5, 6, 7, 8\}$. Poznato je da su* trivijalne $\sigma$–algebre *na danom skupu $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{A}_2 = 2^\Omega$. Nađite barem dvije $\sigma$–algebre na skupu $\Omega$ koje nisu trivijalne.*

---

**Rješenje.** Za konstrukciju $\sigma$–algebri na danom skupu, koje nisu trivijalne, dovoljno je zadovoljiti svojstva ($\sigma_1$)–($\sigma_3$) koja mora ispunjavati svaka $\sigma$–algebra. Na primjer, netrivijalne $\sigma$–algebre na skupu $\Omega$ su $\mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \Omega, \{6\}, \{5, 7, 8\}\}$ i $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$.

2.3. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $B \subseteq X$ bilo koji neprazan podskup od $X$. Dokažite da je tada*

$$\mathcal{A}_B := \{B \cap A : A \in \mathcal{A}\}$$

*$\sigma$-algebra na skupu $B$, koju nazivamo* restrikcija $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$ na skup $B$.

---

**Rješenje.** Ispitajmo zadovoljava li familija $\mathcal{A}_B$ tri osnovna svojstva $\sigma$–algebre:

($\sigma 1$) Familija $\mathcal{A}$ je $\sigma$–algebra na $X$, pa je $X \in \mathcal{A}$. Kako je $B = B \cap X$, očito je $B \in \mathcal{A}_B$.

($\sigma 2$) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Tada je $A^c \in \mathcal{A}$ i $B \cap A \in \mathcal{A}_B$. Odmah slijedi da je

$$(B \cap A)^c = B\backslash A = B \cap A^c \in \mathcal{A}_B,$$

pri čemu se komplementiranje uzima u odnosu na skup $B$.

($\sigma 3$) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz skupova iz $\mathcal{A}$. Slijedi da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A},\ B \cap A_n \in \mathcal{A}_B,\ n \in \mathbb{N},$$

pa je i

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) = B \cap \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in \mathcal{A}_B.$$

2.4. Zadatak

*Neka je $f : X \to X'$ funkcija, a $\mathcal{A}'$ neka $\sigma$-algebra na $X'$. Dokažite da je*

$$f^{-1}(\mathcal{A}') = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$$

*$\sigma$-algebra na $X$.*

---

**Rješenje.**

($\sigma$1) Kako je $\emptyset \in \mathcal{A}'$, slijedi
$$\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{A}').$$

($\sigma$2) Neka je $A \in f^{-1}(\mathcal{A}')$. Tada postoji $A' \in \mathcal{A}'$ takav da je $A = f^{-1}(A')$. Kako je $\mathcal{A}'$ $\sigma$–algebra, zbog $A' \in \mathcal{A}'$, prema svojstvu ($\sigma$2) slijedi da je $A'^c \in \mathcal{A}'$. Sada je $A^c = \big(f^{-1}(A')\big)^c = f^{-1}(A'^c) \in f^{-1}(\mathcal{A}')$.

($\sigma$3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz skupova iz $f^{-1}(\mathcal{A}')$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $A'_n \in \mathcal{A}'$ tako da je $A_n = f^{-1}(A'_n)$. Sada, zbog svojstva ($\sigma$3) koje zadovoljava $\sigma$–algebra $\mathcal{A}'$, vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \in \mathcal{A}'$, pa koristeći zadatak 1.10. možemo zaključiti
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(A'_n\right) = f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\Big) \in f^{-1}(\mathcal{A}').$$

2.5. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $f : X \to Y$ funkcija. Dokažite da je*
$$\Sigma := \{B \subseteq Y :\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$
*jedna $\sigma$-algebra na $Y$.*

---

**Rješenje.**

($\sigma$1) Kako je prazan skup podskup svakog skupa i $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$, to je $\emptyset \in \Sigma$.

($\sigma$2) Neka je $A \in \Sigma$, tj. $A \subseteq Y$ i $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.
Kako je familija $\mathcal{A}$ $\sigma$–algebra, slijedi da je
$$f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c \in \mathcal{A},$$
pa je $A^c \in \Sigma$.

($\sigma$3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz skupova iz $\Sigma$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$A_n \subseteq Y,\ f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}.$$
Prema svojstvu ($\sigma$3) $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$ i zadatku 1.10. vrijedi
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A},$$
pa je $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$, čime je dokazano svojstvo ($\sigma$3).

## 2.6. Zadatak

*Neka je* $\mathcal{A} = \sigma(\{[0, a] \cup \{2\} : a \in [0, 1]\})$ *σ–algebra na* $\Omega = [0, 1] \cup \{2\}$.

(a) *Dokažite da je* $(a, b) \in \mathcal{A}$ *za* $0 \leq a < b \leq 1$ *te koristeći tu tvrdnju dokažite da je*

$$\Sigma = \{A \cap [0, 1],\ (A \cap [0, 1]) \cup \{2\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

*σ–algebra na* $\Omega$.

(b) *Dokažite ili opovrgnite:* $\Sigma = \mathcal{A}$.

---

**Rješenje.**

(a) Pokažimo najprije da je $(a, b) \in \mathcal{A}$ za $0 \leq a < b \leq 1$. Kako je

$$[0, b) \cup \{2\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([0, b - 1/n] \cup \{2\}) \in \mathcal{A},$$

tako je i

$$(a, b) = ([0, b) \cup \{2\}) \setminus ([0, a] \cup \{2\}) \in \mathcal{A}.$$

Nadalje, ispitajmo je li familija $\Sigma$ jedna $\sigma$–algebra na $\Omega$. Lako se vidi da je $\Omega \in \Sigma$. Kako bi dokazali zatvorenost na komplementiranje, krenimo od činjenice da za svaki $A \in \Sigma$ postoji $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tako da je $A = B \cap [0, 1]$ ili $A = (B \cap [0, 1]) \cup \{2\}$.
Ako je $A = B \cap [0, 1]$, lako je pokazati da je $A^c = (B^c \cap [0, 1]) \cup \{2\}$, što je očito element familije $\Sigma$ zbog $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Analogno dobivamo i u slučaju kada je $A = (B \cap [0, 1]) \cup \{2\}$. Time je dokazano drugo svojstvo $\sigma$–algebre, dok treće svojstvo slijedi ponovnim promatranjem dvaju mogućih prikaza skupa $A \in \Sigma$.

(b) Na isti način kao u prethodnom slučaju može se pokazati da je

$$\mathcal{G} = \{B \cap (0, 1],\ (B \cap (0, 1]) \cup \{0, 2\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

$\sigma$–algebra. Nadalje, za $a \in [0, 1]$, iz $(0, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ slijedi

$$[0, a] \cup \{2\} = ((0, a] \cap [0, 1]) \cup \{0, 2\} \in \mathcal{G}.$$

Sada je

$$\{[0, a] \cup \{2\} : a \in [0, 1]\} \subseteq \mathcal{G},$$

tj. kako je $\mathcal{G}$ $\sigma$–algebra koja sadrži generirajući skup od $\mathcal{A}$, slijedi da je

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}.$$

Za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi da je

$$B_0 = B \cap (0, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ i } B_1 = B \cup \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

pa su i

$$B_0 = B_0 \cap [0, 1],\ (B \cap (0, 1]) \cup \{0, 2\} = (B_0 \cap [0, 1]) \cup \{2\} \in \Sigma.$$

Dakle, sada je $\mathcal{G} \subseteq \Sigma$ te

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \Sigma.$$

Možemo zaključiti da ne vrijedi jednakost $\mathcal{A} = \Sigma$ jer bi u suprotnom imali

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} = \Sigma,$$

što nije moguće jer je, npr., $\{0\} \in \Sigma$, ali $\{0\} \notin \mathcal{G}$.

2.7. Zadatak
*Neka je $f : X \to Y$ funkcija i $\mathcal{A}$ neka $\sigma$-algebra na skupu $X$. Pokažite primjerom da $f(\mathcal{A}) = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ općenito nije $\sigma$-algebra na $Y$.*

---

**Rješenje.** Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, gdje je $X = \{2, 4, 6, 8\}$ i $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{4, 6, 8\}\}$ te $f : X \to Y$ preslikavanje definirano s $f(a) := 2$ za svaki $a \in X$. Tada je

$$f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{2\}\},$$

pa možemo zaključiti da to nije $\sigma$–algebra na $Y$ uz pretpostavku da je $Y \neq \{2\}$.

2.8. Zadatak
*Neka je $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra na $X$ i $y$ neki element koji ne pripada skupu $X$. Odredite familiju $\mathcal{A}_y$ koja predstavlja najmanju $\sigma$-algebru na $X \cup \{y\}$ koja sadrži familiju $\mathcal{A}$ i jednočlan skup $\{y\}$.*

---

**Rješenje.** Prema uvjetima zadatka mora biti zadovoljeno $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_y$ i $\{y\} \in \mathcal{A}_y$. Također, zbog svojstva zatvorenosti $\sigma$-algebre na prebrojive unije mora vrijediti $\mathcal{A} \cup \{y\} = \{A \cup \{y\} : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{A}_y$. Dakle, tražena familija je

$$\mathcal{A}_y = \mathcal{A} \cup \{A \cup \{y\} : A \in \mathcal{A}\}.$$

Provjerimo još je li ona $\sigma$-algebra.

($\sigma$1) Kako je $\emptyset \in \mathcal{A}$, slijedi da je i $\emptyset \in \mathcal{A}_y$.

($\sigma$2) Neka je $A \in \mathcal{A}_y$. Ako je $A \in \mathcal{A}$, kako je $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra, odmah slijedi da je $A^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_y$. Ako je $A \in \{A \cup \{y\} : A \in \mathcal{A}\}$, onda možemo pisati $A = B \cup \{y\}$, $B \in \mathcal{A}$, pa je, zbog činjenice da komplementiranje uzimamo u odnosu na skup $X \cup \{y\}$, $A^c = B^c \cap \{y\}^c = B^c \cap X = B^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_y$.

($\sigma$3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}_y$. Ako su svi skupovi $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ iz $\mathcal{A}$, onda je jasno i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_y$. Ako je jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ iz familije $\{A \cup \{y\} : A \in \mathcal{A}\}$ (bez smanjenja općenitosti neka je to skup $A_1$), a ostali su iz $\mathcal{A}$, onda $A_1$ možemo zapisati u obliku $A_1 = B_1 \cup \{y\}$, $B_1 \in \mathcal{A}$ i vrijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (B_1 \cup \{y\}) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = \big(B_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n\big) \cup \{y\} \in \mathcal{A}_y$$

jer je očito $B_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Isto vrijedi i ako imamo dva ili više skupova iz $\{A \cup \{y\} : A \in \mathcal{A}\}$, a ostali su skupovi iz $\mathcal{A}$ te ako su svi skupovi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\{A \cup \{y\} : A \in \mathcal{A}\}$.

2.9. ZADATAK
*Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Ispitajte je li topologija $\mathcal{U}$ ujedno i $\sigma$-algebra.*

---

**Rješenje.** Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor gdje je $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ i $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$. Topologija $\mathcal{U}$ nije $\sigma$–algebra jer, na primjer,

$$\{c,d\}^c = \{a,b,e,f\} \notin \mathcal{U}.$$

2.10. ZADATAK
*Neka je $f : X \to Y$ preslikavanje. Pokažite da za svaku familiju $\mathcal{C}$ podskupova od $Y$ vrijedi*

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right).$$

---

**Rješenje.** Vrijedi $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ te, kako je familija $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ prema zadatku 2.4. $\sigma$–algebra, iz prethodne inkluzije slijedi

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Za dokaz obratne inkluzije iskoristimo zadatak 2.5. kako bi iz činjenice da je $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$ $\sigma$–algebra na $X$ zaključili da je

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)\}$$

$\sigma$–algebra na $Y$. Sada je jasno da je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, iz čega slijedi $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{F}$. Nadalje, kako je prema definiciji familije $\mathcal{F}$, $f^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$, to je iz prethodnih razmatranja i

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right).$$

2.12. PRIMJEDBA
*Kako bismo mogli bolje razumjeti zadatak koji slijedi, potrebno je uvesti pojam kompaktnosti. Dakle, topološki prostor $X$ je* kompaktan *ako se u svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora $X$ može upisati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ prostora $X$* (vidi [12, definicija 4., str. 230]). *U nastavku će nam biti potrebna i sljedeća tvrdnja: skup $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je* kompaktan *ako i samo ako je omeđen i zatvoren* (vidi [12, teorem 7., str. 232]).

---

2.11. ZADATAK
*Pokažite da je Borelova $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generirana s familijom $\mathcal{K}^d$ svih kompaktnih skupova iz $\mathbb{R}^d$.*

---

**Rješenje.** Neka je $\mathcal{C}^d$ familija svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$. Prema teoremu 2.9. je

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{C}^d).$$

Iz $\mathcal{K}^d \subseteq \mathcal{C}^d$ slijedi $\sigma(\mathcal{K}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{C}^d)$. S druge strane, ako je $C \in \mathcal{C}^d$, onda je za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup

$$C_n := C \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\| \leq n\}$$

omeđen i zatvoren, pa prema tome i kompaktan, tj. $C_n \in \mathcal{K}^d$.
Po konstrukciji je

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \sigma(\mathcal{K}^d),$$

odakle slijedi da je $\mathcal{C}^d \subseteq \sigma(\mathcal{K}^d)$, tj. i $\sigma(\mathcal{C}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{K}^d)$.

2.12. ZADATAK
*Neka je na skupu realnih brojeva definirana familija $\mathcal{A}$ koja sadrži sve Borelove skupove simetrične u odnosu na ishodište. Pokažite da je $\mathcal{A}$ $\sigma$–algebra.*

---

**Rješenje.** Podsjetimo se najprije da za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je simetričan u odnosu na ishodište, ili, kraće, simetričan, ako vrijedi $x \in A \implies -x \in A$. Dakle, familiju $\mathcal{A}$ možemo zapisati u obliku

$$\mathcal{A} = \{B \cup (-B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

gdje je $-B := \{-b : b \in B\}$.
Očito je $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$ te se lako vidi i da je $\mathcal{A}$ zatvorena na komplementiranje i formiranje prebrojivih unija, pa možemo zaključiti da se radi o $\sigma$–algebri.

2.13. PRIMJEDBA
*U nastavku će nam biti potreban pojam d-intervala na $\mathbb{R}^d$ te ga stoga ovdje uvodimo. Intervale oblika $(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, nazivamo* 1-intervali. *Neka su $I_1, \ldots, I_d$ 1-intervali. Skup oblika $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$ nazivamo* $d$-interval *na $\mathbb{R}^d$.*

---

2.13. ZADATAK
*Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ Borelov skup, $t > 0$ realan broj i $tA = \{ta : a \in A\}$.*

(a) *Dokažite da je familija*

$$\mathcal{A}_t = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

*$\sigma$–algebra na $\mathbb{R}$.*

(b) *Dokažite da je Borelova $\sigma$–algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ jednaka familiji $\mathcal{B}_t := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$.*

---

**Rješenje.**

(a) Prvo svojstvo $\sigma$–algebre odmah slijedi iz definicije familije $\mathcal{A}_t$. Nadalje, ako je $A \in \mathcal{A}_t$, onda su $A$, $tA \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pa slijedi da su i

$$A^c,\ (tA)^c = tA^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

tj. $A^c \in \mathcal{A}_t$.
Kako bi pokazali da je zadovoljeno i treće svojstvo $\sigma$–algebre, uzmimo proizvoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}_t$. Prema definiciji familije $\mathcal{A}_t$ i svojstvu ($\sigma$3) Borelove $\sigma$–algebre slijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} tA_n = t\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

tj. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_t$.

(b) Neka je $\mathcal{I}$ familija svih $d$-intervala. Analogno, kao u slučaju (a), može se pokazati da je

$$\mathcal{B}_t := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$$

$\sigma$-algebra, pa iz

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

slijedi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}_t) = \mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Dakle, $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

### 2.14. Zadatak

*Neka je $S$ skup svih brojeva iz segmenta $[0,1]$ koji u svom decimalnom prikazu sadrže znamenku 7. Dokažite da je $S$ Borelov skup.*

---

**Rješenje.** Označimo sa $S_n$ skup svih brojeva koji na $n$-tom decimalnom mjestu imaju znamenku 7. Sada je

$$\begin{aligned}
S_1 &= [0.7, 0.8) = \Big[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\Big),\\
S_2 &= [0.07, 0.08) \cup [0.17, 0.18) \cup \cdots \cup [0.97, 0.98)\\
&= \Big[\frac{7}{100}, \frac{8}{100}\Big) \cup \Big[\frac{1}{10} + \frac{7}{100}, \frac{1}{10} + \frac{8}{100}\Big) \cup \cdots \cup \Big[\frac{9}{10} + \frac{7}{100}, \frac{9}{10} + \frac{8}{100}\Big)\\
&= \bigcup_{k=0}^{9} \Big[\frac{k}{10} + \frac{7}{10^2}, \frac{k}{10} + \frac{8}{10^2}\Big) = \bigcup_{k=0}^{10^{2-1}-1} \Big[\frac{k}{10} + \frac{7}{10^2}, \frac{k}{10} + \frac{8}{10^2}\Big).
\end{aligned}$$

Nastavljajući taj postupak možemo zaključiti da je

$$S_n = \bigcup_{k=0}^{10^{n-1}-1} \Big[\frac{k}{10^{n-1}} + \frac{7}{10^n}, \frac{k}{10^{n-1}} + \frac{8}{10^n}\Big),$$

a kako je svaki skup iz te unije Borelov, slijedi da su $S_n$ i $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ također Borelovi skupovi.

2.15. ZADATAK
*Neka je $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra na $X$. Za neprazan skup $A \in \mathcal{A}$ kažemo da je* atom *ako niti jedan njegov pravi neprazan podskup ne pripada $\sigma$-algebri $\mathcal{A}$. Neka $\mathcal{A}$ ima $n$ atoma. Dokažite da tada $\mathcal{A}$ ima barem $2^n$ elemenata.*

---

**Rješenje.** Kako bismo riješili postavljeni problem, možemo se zapitati koliko mnogo različitih unija možemo napraviti od $n$ skupova. Jasno je da je taj broj jednak

$$\binom{n}{j}, \; 0 \leq j \leq n,$$

pri čemu je $j$ broj skupova sadržanih u svakoj od unija $\binom{n}{j}$ (to znači, npr., za $j = 0$ imamo da je $\binom{n}{j} = 1$, odnosno imamo samo jedan skup koji sadrži nula elemenata i to je, naravno, prazan skup). Važno je napomenuti da su svi skupovi koje uzimamo u odgovarajuću uniju različiti jer su atomi međusobno disjunktni. Prema prethodnom je razmatranju te binomnoj formuli jasno da imamo

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$$

različitih skupova, dakle $\mathcal{A}$ ima barem $2^n$ elemenata.

2.16. ZADATAK
*Neka je $X = [0,1]$. Pronađite $\sigma$-algebru generiranu sljedećim familijama skupova i odredite atome:*

(a) $\{(0,1/2)\}$,

(b) $\{[0,1/4),(3/4,1]\}$,

(c) $\{[0,3/4],[1/4,1]\}$.

---

**Rješenje.**

(a) $\sigma(\{(0,1/2)\}) = \{\emptyset,[0,1],(0,1/2),\{0\}\cup[1/2,1]\}$.
Atomi: $(0,1/2)$ i $\{0\}\cup[1/2,1]$.

(b) $\sigma(\{[0,1/4),(3/4,1]\}) = \{\emptyset,[0,1],[0,1/4),[1/4,3/4],(3/4,1],[0,3/4],[1/4,1],$ $[0,1/4)\cup(3/4,1]\}$.
Atomi: $[0,1/4)$, $[1/4,3/4]$, $(3/4,1]$.

(c) Familija $\{[0,3/4],[1/4,1]\}$ sadrži skupove koji su komplementi skupova iz familije zadane u slučaju (b), pa je lako zaključiti da dobivamo isto rješenje.

2.17. ZADATAK
*Neka je $X$ dani skup i $\mathcal{E}$ familija podskupova od $X$. Pokažite da je presjek proizvoljno mnogo monotonih klasa $(\mathfrak{M}_i, i \in I)$ koje sadrže familiju $\mathcal{E}$ ponovno monotona klasa.*

**Rješenje.** Neka je
$$\tilde{\mathfrak{M}} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{M}_i, \tag{2.1}$$
$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\tilde{\mathfrak{M}}$ i $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\tilde{\mathfrak{M}}$. Iz (2.1) slijedi da se nizovi skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nalaze u svakoj monotonoj klasi $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$ pa iz zatvorenosti svake od tih familija na unije rastućeg niza skupova i presjeke padajućeg niza skupova slijedi da je
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \tilde{\mathfrak{M}},$$
pa je familija $\tilde{\mathfrak{M}}$ monotona klasa.

2.14. Primjedba

*U prethodnom je zadatku pokazano da je presjek proizvoljne familije monotonih klasa nad istim skupom $X$ također monotona klasa. Za najmanju monotonu klasu koja sadrži familiju $\mathcal{E}$ podskupova od $X$, tj. za presjek svih monotonih klasa koje sadrže familiju $\mathcal{E}$ kažemo da je* monotona klasa generirana s $\mathcal{E}$ *i označavamo ju s $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$.*

---

2.18. Zadatak

*Neka je $\mathcal{E}$ proizvoljna familija podskupova od $X$.*

(a) *Pretpostavimo da je $\emptyset \in \mathcal{E}$ te*
$$E \in \mathcal{E} \Longrightarrow E^c \in \mathcal{E}.$$
*Pokažite da je tada familija*
$$\Sigma := \{B \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}) :\ B^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})\},$$
*gdje je $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ monotona klasa generirana familijom $\mathcal{E}$, $\sigma$–algebra.*

(b) *Pokažite da vrijedi*
$$\mathcal{E} \subset \Sigma \subset \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E}).$$

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $\emptyset \in \mathcal{E}$ i familija $\mathcal{E}$ je zatvorena na komplementiranje, iz definicije familije $\Sigma$ odmah slijedi da ona zadovoljava prva dva svojstva $\sigma$-algebre. Neka je nadalje $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz skupova iz $\Sigma$. Tada je i $A_n^c \in \Sigma$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Treba pokazati da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. U tu svrhu definirajmo rastući niz skupova iz $\Sigma$: $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$ te uočimo da je
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{2.2}$$

S obzirom da je $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ monotona klasa, vrijedi da je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}) \text{ i } \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{E}),$$

pa je zbog (2.2) i

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma,$$

odnosno familija $\Sigma$ je $\sigma$–algebra.

(b) Pokažimo najprije da je $\mathcal{E} \subset \Sigma$: neka je $E \in \mathcal{E}$. Tada je i $E \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$. Nadalje, kako je familija $\mathcal{E}$ zatvorena na komplementiranje, slijedi da je i $E^c \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ za svaki $E \in \mathcal{E}$, odnosno vrijedi

$$\mathcal{E} \subset \Sigma.$$

Inkluzija

$$\Sigma \subset \mathfrak{M}(\mathcal{E})$$

slijedi direktno iz definicije familije $\Sigma$.
Kako je svaka $\sigma$–algebra također i monotona klasa, inkluzija

$$\mathfrak{M}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$$

slijedi iz minimalnosti od $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$.

2.19. Zadatak
*Neka je $\mathcal{A}$ algebra na $X$. Pokažite da je*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$$

*također algebra.*

---

**Rješenje.** Iz $X \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$ slijedi da je $X \in \mathfrak{M}$.
Preostaje pokazati da je monotona klasa $\mathfrak{M}$ zatvorena na komplementiranje i formiranje konačnih unija. Pokažimo najprije zatvorenost na komplementiranje. U tu svrhu najprije definirajmo familiju

$$\mathfrak{M}_1 := \{A \in \mathfrak{M} :\ X \backslash A \in \mathfrak{M}\}.$$

Iz definicije familije $\mathfrak{M}_1$ slijedi da je $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Ako pokažemo da je $\mathfrak{M}_1$ monotona klasa koja sadrži $\mathcal{A}$, onda će zbog činjenice da je $\mathfrak{M}$ najmanja monotona klasa koja sadrži $\mathcal{A}$ vrijediti $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1$, odnosno i $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, što će značiti da je i familija $\mathfrak{M}$ zatvorena na komplementiranje. Za proizvoljan $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$ vrijedi da je $A^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$, iz čega slijedi da familija $\mathfrak{M}_1$ sadrži $\mathcal{A}$. Pokažimo još da je $\mathfrak{M}_1$ monotona klasa.

(a) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz rastućih skupova iz $\mathfrak{M}_1$. Prema definiciji familije $\mathfrak{M}_1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $A_n \in \mathfrak{M}$ i $X\backslash A_n \in \mathfrak{M}$, gdje je $(X\backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova. Kako je familija $\mathfrak{M}$ monotona klasa, slijedi da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ X\backslash\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(X\backslash A_n\big) \in \mathfrak{M},$$

tj. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_1$.

(b) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz padajućih skupova iz $\mathfrak{M}_1$. Iz definicije familije $\mathfrak{M}_1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $A_n \in \mathfrak{M}$ i $X\backslash A_n \in \mathfrak{M}$, gdje je $(X\backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova. Kako je familija $\mathfrak{M}$ monotona klasa, slijedi da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ X\backslash\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(X\backslash A_n\big) \in \mathfrak{M},$$

tj. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_1$, odnosno familija $\mathfrak{M}_1$ je monotona klasa.

Kako bismo pokazali da je monotona klasa $\mathfrak{M}$ zatvorena na formiranje konačnih unija, za proizvoljan $A \in \mathfrak{M}$ definirajmo pomoćnu familiju

$$\mathfrak{M}_2 := \{B \in \mathfrak{M} :\ A \cup B \in \mathfrak{M}\} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Pokažimo najprije da familija $\mathfrak{M}_2$ sadrži $\mathcal{A}$. Neka je $B \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}$. Definirajmo nove skupove $A_1 := A$, $A_2 := A \cup B$ te primijetimo da je $A_1 \subseteq A_2$ i $A_1 \cup A_2 = A \cup B$. Kako je familija $\mathfrak{M}$ monotona klasa, odmah slijedi da je $A \cup B \in \mathfrak{M}$, odnosno i $B \in \mathfrak{M}_2$, čime je dokazana inkluzija $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}_2$. Nadalje, ako pokažemo da je $\mathfrak{M}_2$ monotona klasa, onda će vrijediti $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_2$, tj. i jednakost $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2$, što će značiti da je $\mathfrak{M}$ zatvorena i na konačne unije te je stoga algebra. Dakle, preostaje pokazati da je $\mathfrak{M}_2$ monotona klasa.

(a) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz rastućih skupova iz $\mathfrak{M}_2$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $A_n \in \mathfrak{M}$ i $A \cup A_n \in \mathfrak{M}$, gdje je $(A \cup A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova. Kako je familija $\mathfrak{M}$ monotona klasa, slijedi da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cup A_n) \in \mathfrak{M},$$

tj. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_2$.

(b) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz padajućih skupova iz $\mathfrak{M}_2$. Tada, prema definiciji familije $\mathfrak{M}_2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi da je $A_n \in \mathfrak{M}$ i $A \cup A_n \in \mathfrak{M}$, gdje je $(A \cup A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova. Kako je familija $\mathfrak{M}$ monotona klasa, slijedi da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A \cup A_n) \in \mathfrak{M},$$

tj. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}_2$.

2.20. Zadatak

*Neka je $X$ skup, a $B \subseteq X$. Dokažite: ako je $\mathfrak{M}$ monotona klasa na $X$, onda je*

$$B \cap \mathfrak{M} = \{B \cap M : M \in \mathfrak{M}\}$$

*također monotona klasa.*

---

**Rješenje.**

(a) Za svaki niz rastućih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathfrak{M}$ i njihova je unija član od $\mathfrak{M}$. Za rastući niz skupova $(B \cap A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $B \cap \mathfrak{M}$ vrijedi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) = B \cap \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in B \cap \mathfrak{M}.$$

(b) Za svaki niz padajućih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathfrak{M}$ i njihov je presjek član od $\mathfrak{M}$. $(B \cap A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je padajući niz skupova iz $B \cap \mathfrak{M}$ te vrijedi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) = B \cap \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \in B \cap \mathfrak{M}.$$

Dakle, familija $B \cap \mathfrak{M}$ je monotona klasa.

2.21. Zadatak

*Neka je $A \subseteq X$ i $\mathfrak{M}$ monotona klasa na $X$. Dokažite da je tada familija*

$$\mathcal{L}(A) := \{B \subseteq X : A \cup B,\ A \backslash B,\ B \backslash A \in \mathfrak{M}\}$$

*također monotona klasa na $X$.*

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz rastućih skupova iz $\mathcal{L}(A)$. Tada je
$A \cup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cup A_n) \in \mathfrak{M}$ jer je $(A \cup A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathfrak{M}$;
$A \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A \backslash A_n) \in \mathfrak{M}$ jer je $(A \backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\mathfrak{M}$;
$\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \backslash A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash A) \in \mathfrak{M}$ jer je $(A_n \backslash A)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathfrak{M}$.

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}(A)$.

(b) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz padajućih skupova iz $\mathcal{L}(A)$. Tada je
$A \cup \big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A \cup A_n) \in \mathfrak{M}$ jer je $(A \cup A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\mathfrak{M}$;
$A \backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \backslash A_n) \in \mathfrak{M}$ jer je $(A \backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathfrak{M}$;
$\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \backslash A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash A) \in \mathfrak{M}$ jer je $(A_n \backslash A)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\mathfrak{M}$.

Napokon, slijedi da je i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}(A)$, pa možemo zaključiti da je $\mathcal{L}(A)$ monotona klasa.

## 2.2. Mjera na $\sigma$-algebri

Prije uvođenja pojma mjere na $\sigma$-algebri potrebno je uvesti pojam proširenog skupa realnih brojeva. Prošireni skup realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ (koristi se i oznaka $[-\infty, \infty]$) po definiciji je $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Uređaj $\leq$ proširuje se s $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ tako da se definira

$$-\infty < x < \infty \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Zbrajanje i množenje proširuju se sa $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ tako da se definira:

$$\begin{aligned}
&x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, && x \in \mathbb{R},\\
&x + (\infty) = (\infty) + x = \infty, && x \in \mathbb{R},\\
&x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, && x > 0,\\
&x \cdot (\infty) = (\infty) \cdot x = \infty, && x > 0,\\
&x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty, && x < 0,\\
&x \cdot (\infty) = (\infty) \cdot x = -\infty, && x < 0,\\
&\infty + \infty = \infty,\\
&(-\infty) + (-\infty) = -\infty,\\
&\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty,\\
&\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.
\end{aligned}$$

Zbrojevi $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$ se ne definiraju. U mnogim matematičkim disciplinama ne definiraju se ni produkti $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$ i $0 \cdot (-\infty)$. Međutim, u teoriji mjere pokazalo se korisnim te produkte definirati kao:

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

2.15. Definicija

*Neka je $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra na skupu $X$.* Mjera na $\mathcal{A}$ *je svako preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

($\mu$1) (nenegativnost) $\mu(A) \geq 0$ *za svaki* $A \in \mathcal{A}$,

($\mu$2) $\mu(\emptyset) = 0$,

($\mu$3) ($\sigma$–aditivnost *ili* prebrojiva aditivnost) *Za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

*Za $\mu(A)$ kaže se da je* mjera skupa *$A$, dok se trojka $(X, \mathcal{A}, \mu)$ naziva* prostor mjere. *Kažemo da je mjera $\mu$* konačna *ako je $\mu(X) < \infty$, a da je $\sigma$-*konačna *ako se skup $X$ može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne $\mu$-mjere, tj. ako postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

*Skup $A \in \mathcal{A}$ je* $\sigma$-konačan *s obzirom na mjeru $\mu$ ako se može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne $\mu$-mjere.*

---

2.16. PRIMJEDBA
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Ako je $\mu(X) = 1$, kažemo da je $\mu$* vjerojatnosna mjera *ili* vjerojatnost*, a $\mathcal{A}$ nazivamo* $\sigma$-algebra događaja.
*U tom slučaju prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazivamo* vjerojatnosni prostor.

---

2.17. PROPOZICIJA (OSNOVNA SVOJSTVA MJERE)
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Mjera $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ima sljedeća svojstva:*

(a) (monotonost) $(\forall A, B \in \mathcal{A})\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
*Ako je $\mu(A) < \infty$, onda je $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(b) ($\sigma$-subaditivnost) *Za svaki niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(c) (neprekidnost na rastuće nizove) *Za svaki rastući niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

(d) (neprekidnost na padajuće nizove) *Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\mathcal{A}$. Ako je $\mu(A_1) < \infty$, onda je*
$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

---

## Riješeni zadaci

---

2.22. ZADATAK
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor. Dokažite da je funkcija $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana s*
$$\nu(A) := 0,\ A \in \mathcal{A}$$
*mjera, koju tada nazivamo* trivijalna mjera.

---

**Rješenje.** Iz definicije funkcije $\nu$ odmah vidimo da ona zadovoljava sva tri osnovna svojstva mjere.

2.23. ZADATAK

*Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih realnih brojeva i $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \textit{ako je } A \textit{ prazan skup} \\ \sum_{n\in A} a_n, & \textit{ako je } A \textit{ neprazan skup.} \end{cases}$$

*Pokažite da je $\mu$ mjera.*

---

**Rješenje.** Iz definicije funkcije $\mu$ je jasno da vrijede svojstva $(\mu 1)$ i $(\mu 2)$. Provjerimo vrijedi li i svojstvo $(\mu 3)$. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih podskupova od $\mathbb{N}$. Sada je

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{k\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in A_n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

pa slijedi da je $\mu$ mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$.

2.24. ZADATAK

*Neka je $X$ neprazan skup te $f : X \to [0,\infty]$ funkcija. Nadalje, definirajmo funkciju $\mu : 2^X \to [0,\infty]$ na sljedeći način:*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \textit{ako je } A \textit{ prazan skup} \\ \sum_{x\in A} f(x), & \textit{ako je } A \textit{ neprazan diskretan skup} \\ \infty, & \textit{ako } A \textit{ nije diskretan skup.} \end{cases}$$

*Pokažite da je $\mu$ mjera.*

---

**Rješenje.** Funkcija $\mu$ očito zadovoljava prva dva svojstva mjere te preostaje provjeriti svojstvo $(\mu 3)$. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih podskupova od $X$. Možemo promotriti nekoliko slučajeva:

- Ako je svaki skup $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ diskretan, onda je takav i skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, pa vrijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{x\in\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in A_n} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

- Ako barem jedan skup $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ nije diskretan, onda nije diskretan niti skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, pa je

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

  Uočimo da isto dobivamo i u slučaju kada imamo dva ili više skupova koji nisu diskretni.

2.25. ZADATAK
*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor.*

(a) *Ako je $\sigma$–algebra $\mathcal{A}$ definirana s*

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je diskretan ili je } A^c \text{ diskretan}\},$$

*pokažite da je funkcija $\eta : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$, definirana za svaki $A \in \mathcal{A}$ s*

$$\eta(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ diskretan skup} \\ 1, & \text{ako } A \text{ nije diskretan skup}, \end{cases}$$

*mjera.*

(b) *Ispitajte je li funkcija $\eta$ mjera i na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

---

**Rješenje.**

(a) Ispitajmo zadovoljava li funkcija $\eta$ svojstva mjere:

Iz definicije funkcije $\eta$ odmah slijede svojstva mjere $(\mu 1)$ i $(\mu 2)$.

$(\mu 3)$ Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ familija disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$.

- Ako su svi skupovi $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ diskretni, onda je i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ diskretan skup, pa vrijedi

$$\eta\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n).$$

- Ako barem jedan skup $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ nije diskretan, npr. za $n = n_0$, onda ni skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_{n_0}$ nije diskretan, pa je

$$\eta\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \eta(A_{n_0}) = 1.$$

Pretpostavimo da postoji jos neki $n_1 \neq n_0$ tako da skupovi $A_{n_0}$ i $A_{n_1}$ nisu diskretni. Kako su $A_{n_0}, A_{n_1} \in \mathcal{A}$, slijedi da su $A_{n_0}^c, A_{n_1}^c \in \mathcal{A}$ diskretni skupovi, pa je i

$$A_{n_0}^c \cup A_{n_1}^c \in \mathcal{A} \text{ diskretan skup.}$$

Dakle, dolazimo do tvrdnje da skup

$$\left(A_{n_0}^c \cup A_{n_1}^c\right)^c = A_{n_0} \cap A_{n_1} = \emptyset$$

nije diskretan, što nije istina. Dakle, postoji najviše jedan indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da skup $A_{n_0}$ nije diskretan i u tom slučaju vrijedi

$$\eta\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1 = \eta(A_{n_0}) = \eta(A_{n_0}) + \sum_{n\neq n_0} \eta(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n).$$

(b) Promotrimo skupove $A = (1, \infty)$, $B = (-\infty, -1)$. Oni su disjunktni i nisu diskretni, a isto vrijedi i za njihove komplemente. Dakle, $\eta(A) = \eta(B) = 1$. S druge strane, skup $A \cup B$ nije diskretan, a isto vrijedi i za njegov komplement $(A \cup B)^c = [-1, 1]$, pa je također i $\eta(A \cup B) = 1$. Dakle, iz

$$\eta(A \cup B) = 1 \neq 2 = \eta(A) + \eta(B)$$

možemo zaključiti da ne vrijedi svojstvo $\sigma$–aditivnosti, tj. funkcija $\eta$ nije mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2.26. ZADATAK

*Neka je $X$ bilo koji neprazan skup. Pokažite da je funkcija $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ definirana s*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ diskretan skup} \\ \infty, & \text{ako } A \text{ nije diskretan skup} \end{cases}$$

*mjera na $(X, 2^X)$.*

---

**Rješenje.** Svojstva $(\mu 1)$ i $(\mu 2)$ slijede direktno iz definicije funkcije $\mu$. Kako bismo pokazali da vrijedi i svojstvo $(\mu 3)$, uzmimo proizvoljan niz disjunktnih skupova $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $2^X$.

- Ako su svi skupovi diskretni, onda je diskretan i skup $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, pa vrijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- Ako barem jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ nije diskretan, onda nije diskretan niti skup $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, pa je

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \infty = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

  Uočimo da isto dobivamo i u slučaju kada imamo dva ili više skupova koji nisu diskretni.

2.27. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $x \in X$ proizvoljna točka te $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ funkcija definirana formulom*

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako } x \notin A. \end{cases} \tag{2.3}$$

*Dokažite da je funkcija $\delta_x$ mjera, koju tada nazivamo* Diracova delta mjera koncentrirana u točki *$x$ ili, kraće,* Diracova delta mjera*. Je li mjera $\delta_x$ konačna?*

---

**Rješenje.** Prva dva svojstva mjere očito vrijede iz definicije funkcije $\delta_x$. Kako bismo dokazali treće svojstvo mjere, uzmimo proizvoljan niz $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Sada imamo dva slučaja:

- Ako je $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onda zbog disjunktnosti skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in A_{n_0}$, pa je $\delta_x(A_{n_0}) = 1$ i $\delta_x(A_n) = 0$, $\forall n \neq n_0$ te vrijedi

$$\delta_x\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 1 = \delta_x(A_{n_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n).$$

- Ako $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, onda $x \notin A_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$\delta_x\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n).$$

Dakle, vrijedi i $\sigma$–aditivnost, pa je funkcija $\delta_x$ mjera. Nadalje, radi se o konačnoj mjeri, jer je

$$\delta_x(X) = 1 < \infty.$$

2.18. Primjedba

*U svrhu rješavanja zadatka koji slijedi navodimo rezultat poznat kao* Tonellijev teorem za sume (vidi [14, str. 30])*:*
*Neka su dani indeksni skupovi $I, J$ i $a : I \times J \to [0, \infty]$. Tada vrijedi*

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}. \tag{2.4}$$

---

2.28. Zadatak

*Neka je $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz mjera na $(X, \mathcal{A})$, a $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih realnih brojeva. Dokažite da je formulom*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(A)$$

*definirana mjera na $\mathcal{A}$.*

---

**Rješenje.** Kako su $\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ mjere te $\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$ nenegativni realni brojevi, vrijedi da je

($\mu$1) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ i

($\mu$2) $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot 0 = 0.$

($\mu 3$) Za proizvoljan niz $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ disjunktnih izmjerivih skupova, koristeći $\sigma$–aditivnost mjere $\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, dobivamo

$$\mu\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_n(A_m)$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(A_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu(A_m),$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz Tonellijevog teorema za sume (vidi primjedbu 2.18.).

Dakle, $\mu$ je mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{A})$.

2.29. Zadatak

*Neka je $\mu$ mjera na $(X, \mathcal{A})$ i $E \in \mathcal{A}$.*

(a) *Pokažite da je formulom*

$$\mu_{|E}(A) := \mu(A \cap E), \qquad A \in \mathcal{A}$$

*definirana nova mjera na $(X, \mathcal{A})$ koju nazivamo* restrikcija mjere $\mu$ na skup $E$*.*

(b) *Neka je $\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$. Pokažite da je $(E, \mathcal{A}_E, \mu_{|E})$ prostor mjere.*

---

**Rješenje.**

(a) Pozivajući se na odgovarajuća svojstva mjere $\mu$ dobivamo
($\mu 1$) $\mu_{|E}(A) = \mu(A \cap E) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$,
($\mu 2$) $\mu_{|E}(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$,
($\mu 3$) za proizvoljan niz disjunktnih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$ dobivamo

$$\mu_{|E}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{|E}(A_n).$$

(b) U zadatku 2.3. pokazano je da je familija $\mathcal{A}_E$ $\sigma$–algebra na skupu $E$. Preostalo je pokazati da je $\mu_{|E}$ mjera na izmjerivom prostoru $(E, \mathcal{A}_E)$. Analogno, kao u dijelu zadatka (a), možemo pokazati da vrijede sljedeća svojstva:
($\mu 1$) za svaki $A \in \mathcal{A}$ je $A \cap E \in \mathcal{A}_E$, pa slijedi

$$\mu_{|E}(A \cap E) = \mu(A \cap E) \geq 0,$$

($\mu 2$) $\mu_{|E}(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$,
($\mu 3$) za proizvoljan niz disjunktnih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$ je $(A_n \cap E)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}_E$ i vrijedi

$$\mu_{|E}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap E\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap E \cap E)\Big)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{|E}(A_n \cap E).$$

2.30. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to Y$ funkcija i $\Sigma = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ $\sigma$–algebra na $Y$ (vidi* zadatak 2.5.). *Dokažite da je funkcija $\mu' : \Sigma \to [0, \infty]$, definirana formulom*

$$\mu'(B) := \mu(f^{-1}(B)), \qquad B \in \Sigma$$

*mjera na $(Y, \Sigma)$. Za mjeru $\mu'$ kažemo da je* slika mjere $\mu$ po funkciji $f$.

---

**Rješenje.** Kako je $\mu$ mjera, vrijedi:

($\mu$1) $\mu'(B) = \mu(f^{-1}(B)) \geq 0$, za svaki $B \in \Sigma$,

($\mu$2) $\mu'(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$,

($\mu$3) za proizvoljan niz disjunktnih skupova $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\Sigma$, koristeći zadatak 1.10. i $\sigma$–aditivnost mjere $\mu$ dobivamo

$$\begin{aligned}\mu'\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\big) &= \mu\big(f^{-1}\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\big)\big) = \mu\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)\big) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(f^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu'(B_n).\end{aligned}$$

2.31. Zadatak

*Dokažite da je funkcija $\mu : \mathcal{B}([0,1]) \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana na izmjerivom prostoru $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ s*

$$\mu(A) := \begin{cases} k(\mathbb{Q} \cap A), & \textit{ako je } k(\mathbb{Q} \cap A) \in \mathbb{N}_0 \\ \infty, & \textit{inače} \end{cases}$$

*mjera.*

---

**Rješenje.** Prva dva svojstva mjere direktno slijede iz definicije funkcije $\mu$. Preostaje dokazati $\sigma$–aditivnost.

Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Možemo promotriti nekoliko slučajeva:

- Ako je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0$, tada je po definiciji funkcije $\mu$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap \mathbb{Q} = \emptyset,$$

odnosno $A_n \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Sada je i $\mu(A_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = 0.$$

- Ako je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = k$ za neki $k \in \mathbb{N}$, onda zbog disjunktnosti skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ postoji $\ell \in \mathbb{N}$, indeksi $i_1, \ldots, i_\ell$ i prirodni brojevi $k_1, \ldots, k_\ell$ takvi da je

$$k(\mathbb{Q} \cap A_{i_1}) = k_1, \ldots, k(\mathbb{Q} \cap A_{i_\ell}) = k_\ell,$$

$k_1 + k_2 + \cdots + k_\ell = k$ i

$$k(\mathbb{Q} \cap A_j) = 0 \text{ za } j \in \mathbb{N} \backslash \{i_1, \ldots, i_\ell\}.$$

Dakle, možemo zaključiti da u nizu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postoji $\ell$ skupova koji sadrže racionalne brojeve (npr. skup $A_{i_m}$ ima točno $k_m$ racionalnih brojeva, $m = 1, \ldots, \ell$), dok ostali skupovi sadrže samo iracionalne brojeve. Sada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\ell} \mu(A_{i_m}) = k = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big).$$

- Neka je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \infty$. Kada bi vrijedilo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

to bi značilo da postoji najviše konačno mnogo skupova $A_n$ koji sadrže konačno mnogo racionalnih brojeva, dok svi ostali skupovi $A_n$ ne sadrže racionalne brojeve. Dakle, skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bi sadržavao samo konačno mnogo racionalnih brojeva, tj. vrijedilo bi

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) < \infty,$$

što je kontradikcija s polaznom pretpostavkom. Stoga, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \infty.$$

### 2.32. Zadatak

*Neka je na izmjerivom prostoru* $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ *funkcija* $\mu : 2^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ *definirana s*

$$\mu(A) := \infty, \qquad A \subseteq \mathbb{N}.$$

*Ispitajte je li* $\mu$ *mjera.*

---

**Rješenje.** Funkcija $\mu$ nije mjera jer, npr., ne vrijedi da je $\mu(\emptyset) = 0$.

2.33. ZADATAK
*Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ diskretan skup i $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva $p_j \in [0,1]$ takvih da je $\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j = 1$. Definirajmo funkciju*

$$\mathcal{P}(A) := \sum_{j:\,\omega_j\in A} p_j = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \delta_{\omega_j}(A),\ A \subseteq \Omega$$

*na izmjerivom prostoru $(\Omega, 2^\Omega)$ gdje je $\delta_{\omega_j}$ Diracova delta mjera. Pokažite da je $(\Omega, 2^\Omega, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor koji tada nazivamo* diskretan vjerojatnosni prostor.

---

**Rješenje.** Prva dva svojstva mjere direktno slijede iz definicije funkcije $\mathcal{P}$ i iz definicije Diracove delta mjere (2.3). U svrhu dokazivanja $\sigma$–aditivnosti uzmimo proizvoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\Omega$. Koristeći $\sigma$–aditivnost Diracove delta mjere dobivamo da je

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \delta_{\omega_j}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{\omega_j}(A_n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \delta_{\omega_j}(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(A_n),\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz Tonellijevog teorema za sume (vidi primjedbu 2.18.). Također vrijedi

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j \delta_{\omega_j}(\Omega) = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j = 1.$$

Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da je $(\Omega, 2^\Omega, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor.

2.34. ZADATAK
*Dokažite da je formulom*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n} \delta_n(A), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

*gdje je $\delta_n$ Diracova delta mjera, zadana vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

---

**Rješenje.** Iz definicije Diracove delta mjere (2.3) slijedi da je

($\mu 1$) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n} \delta_n(A) \geq 0$, za svaki skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

($\mu 2$) $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n} \delta_n(\emptyset) = 0$,

($\mu3$) za niz disjunktnih skupova $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, koristeći $\sigma$–aditivnost Diracove delta mjere dobivamo

$$\mu(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n}\delta_n(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n}\sum_{m\in\mathbb{N}}\delta_n(A_m)$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n}\delta_n(A_m) = \sum_{m\in\mathbb{N}}\mu(A_m),$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz Tonellijevog teorema za sume (vidi primjedbu 2.18.).

Dakle, $\mu$ je mjera. Ispitajmo još je li vjerojatnosna. Zbog $\delta_n(\mathbb{R}) = 1$ dobivamo

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n}\delta_n(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n} = 1,$$

pa možemo zaključiti da se radi o vjerojatnosnoj mjeri. Primijetimo da zadnja jednakost slijedi iz poznate formule za sumu geometrijskog reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \; |q| < 1. \tag{2.5}$$

2.35. ZADATAK

*Neka su $p, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \le p \le 1$ i $p + q = 1$. Dokažite da je za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ funkcija $\beta_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$\beta_n(B) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\delta_k(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

*vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

---

**Rješenje.** Vrijedi:

($\mu1$) $\beta_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\delta_k(B) \ge 0$, za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

($\mu2$) $\beta_n(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\delta_k(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\cdot 0 = 0$,

($\mu3$)

$$\beta_n\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\delta_k\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_k(A_m)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\delta_k(A_m) = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_n(A_m),$$

gdje je $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih, izmjerivih skupova.

Diracova delta mjera je vjerojatnosna, tj. $\delta_k(\mathbb{R}) = 1$, pa je i

$$\begin{aligned}\beta_n(\mathbb{R}) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot 1 \\ &= (p+q)^n = 1.\end{aligned}$$

2.36. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz vjerojatnosnih mjera na njemu. Pokažite da je funkcija $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana s*

$$\mu(A) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(A), \qquad A \in \mathcal{A}$$

*vjerojatnosna mjera.*

---

**Rješenje.** U zadatku 2.28. pokazano je da je funkcija $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ mjera ako je $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz mjera i $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih realnih brojeva. Kako je u našem slučaju

$$\alpha_n = 2^{-n} > 0, \ n \in \mathbb{N},$$

jasno je da je $\mu$ mjera na danom izmjerivom prostoru. Trebamo još pokazati da je vjerojatnosna. Kako su mjere $\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$ vjerojatnosne, vrijedi $\mu_n(X) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je stoga

$$\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2.37. Zadatak

*Neka je $\mu$ mjera na $(X, \mathcal{A})$. Dokažite da za sve $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

---

**Rješenje.** Vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \backslash B), \\ B &= (A \cap B) \cup (B \backslash A), \\ A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \backslash B) \cup (B \backslash A), \end{aligned}$$

pri čemu su skupovi $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ očito međusobno disjunktni. Iz prethodnog razmatranja, koristeći $\sigma$–aditivnost mjere, slijedi

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \big[\mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B)\big] + \big[\mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)\big] \\ &= \mu(A \cap B) + \big[\mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)\big] \\ &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B). \end{aligned}$$

2.38. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s konačnom mjerom $\mu$ i neka su $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi skupova iz $\mathcal{A}$ takvi da je $B_n \subseteq A_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da tada vrijedi*

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) - \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(B_n)) .$$

---

**Rješenje.** Primijetimo da je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(A_n \backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\big) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash B_n).$$

Sada iz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\sigma$–subaditivnosti mjere dobivamo:

$$\begin{aligned}\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) - \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) &= \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\big) \leq \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash B_n)\big) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \backslash B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu(A_n) - \mu(B_n)) ,\end{aligned}$$

gdje prva i posljednja jednakost vrijede jer je mjera $\mu$ konačna.

2.39. Zadatak

*Neka je $\mu$ mjera na $(X, \mathcal{A})$. Dokažite da za svaka dva izmjeriva skupa $A$ i $B$ vrijedi*

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A\Delta B).$$

---

**Rješenje.** Prema svojstvu apsolutne vrijednosti

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y,$$

dovoljno je i nužno pokazati

$$-\mu(A\Delta B) \leq \mu(A) - \mu(B) \leq \mu(A\Delta B).$$

Iz $A \subseteq (A\Delta B) \cup B$, prema monotonosti i $\sigma$–subaditivnosti mjere slijedi

$$\mu(A) \leq \mu(A\Delta B) + \mu(B) \implies \mu(A) - \mu(B) \leq \mu(A\Delta B),$$

a iz $B \subseteq (A\Delta B) \cup A$ dobivamo

$$\mu(B) \leq \mu(A\Delta B) + \mu(A) \implies \mu(A) - \mu(B) \geq -\mu(A\Delta B).$$

2.40. Zadatak

*Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $\mathcal{P}(A_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da tada vrijedi*

$$\mathcal{P}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 1.$$

**Rješenje.** Kako je $\mathcal{P}$ vjerojatnosna mjera, vrijedi da je $\mathcal{P}(X) = 1$, pa je

$$\mathcal{P}(A_n^c) = \mathcal{P}(X \backslash A_n) = 1 - \mathcal{P}(A_n) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći svojstvo $\sigma$–subaditivnosti dobivamo

$$0 \leq \mathcal{P}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(A_n^c) = 0,$$

iz čega slijedi da je $\mathcal{P}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\big) = 0$. Sada je

$$\mathcal{P}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \mathcal{P}\big(X \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\big) = 1 - 0 = 1.$$

2.41. Zadatak

*Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor. Dokažite da za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivih skupova vrijedi:*

$$\textit{ako je } \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) < \infty, \quad \textit{onda je } \mathcal{P}\big(\limsup_n A_n\big) = 0.$$

*Ta je tvrdnja poznata kao* Borel[2] -Cantellijeva[3] lema.

**Rješenje.** Najprije uočimo da je prema (1.3)

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

pa zapravo treba pokazati da je $\mathcal{P}\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = 0$.

Definirajmo padajući niz skupova $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s $B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\mathcal{P}$ vjerojatnosna mjera, odnosno $\mathcal{P}(\Omega) = 1$, prema svojstvu neprekidnosti mjere na padajuće nizove skupova slijedi:

$$\mathcal{P}\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \mathcal{P}\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(B_n). \tag{2.6}$$

S druge strane, ako iskoristimo $\sigma$–subaditivnost mjere $\mathcal{P}$, dobivamo

$$\mathcal{P}(B_n) = \mathcal{P}\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(A_k), \tag{2.7}$$

pri čemu, zbog pretpostavke $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) < \infty$, desna strana nejednakosti teži nuli kada $n \to \infty$. Sada iz (2.6) i (2.7) dobivamo:

$$0 \leq \mathcal{P}\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{P}(A_k) = 0,$$

što daje traženu jednakost.

[2] Émile Borel (1871.-1956.), francuski matematičar.
[3] Francesco Paolo Cantelli (1875.-1966.), talijanski matematičar.

2.42. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$ sa svojstvom $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, dokažite da je tada*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

---

**Rješenje.** Neka je $E_1 = A_1$ i $B_1 = \emptyset$. Za svaki $n \geq 2$ definirajmo skupove

$$E_n := A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m, \qquad B_n := A_n \cap \Big(\bigcup_{m=1}^{n-1} A_m\Big) = \bigcup_{m=1}^{n-1} (A_n \cap A_m).$$

Tada vrijedi:
(a) $E_n \cup B_n = A_n$, $E_n \cap B_n = \emptyset$ za svaki $n \in \mathbb{N}$,
(b) skupovi $E_n$, $n \in \mathbb{N}$, međusobno su disjunktni,
(c) $\mu(B_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, jer je $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ za $n \neq m$, pa je zato i

$$\mu(A_n) = \mu(E_n), \ n \geq 1.$$

Očito je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Neka je $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. S $n_0$ označimo najmanji prirodan broj takav da je $x \in A_{n_0}$. Tada je $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Dakle,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Konačno,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

2.43. ZADATAK

*Kažemo da je mjera $\mu$* polukonačna *ako za svaki $A \in \mathcal{A}$ za koji je $\mu(A) = \infty$ postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq A$ i $0 < \mu(B) < \infty$. Svaka $\sigma$-konačna mjera je i polukonačna. Ispitajte je li mjera $\mu$ iz* zadatka 2.26. *polukonačna.*

---

**Rješenje.** Neka skup $A \subseteq X$ nije diskretan, tj. $\mu(A) = \infty$. Možemo promotriti dva slučaja:

- Neka je $B \subseteq A \subseteq X$ diskretan skup. Tada je $\mu(B) = 0$.
- Ako $B \subseteq A \subseteq X$ nije diskretan skup, onda je $\mu(B) = \infty$.

U oba slučaja možemo zaključiti da mjera $\mu$ nije polukonačna.

2.44. Zadatak
*Neka je $(X, 2^X, \mu)$ prostor mjere. Za mjeru $\mu$ kažemo da je $0-1$* mjera *na $X$ ako je $\mu(2^X) = \{0, 1\}$, $\mu(\{x\}) = 0$ za svaki $x \in X$ i $\mu(X) = 1$. Pokažite da ne postoji $0-1$ mjera na $\mathbb{N}$.*

---

**Rješenje.** Kada bi postojala $0-1$ mjera $\mu$ na $\mathbb{N}$, onda bi bilo

$$1 = \mu(\mathbb{N}) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

Dakle, na skupu prirodnih brojeva ne postoji $0-1$ mjera.

2.45. Zadatak
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Definirajmo funkciju $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ formulom*

$$\nu(A) := \sup\{\mu(B) : \ B \subseteq A, B \in \mathcal{A} \text{ i } \mu(B) < \infty\}.$$

*Dokažite:*

(a) *$\nu$ je mjera,*

(b) *ako je $\mu$ $\sigma$-konačna mjera, onda je $\nu = \mu$.*

(c) *Pronađite $\nu$ za mjeru $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiranu formulom*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

---

**Rješenje.**

(a) Iz definicije funkcije $\nu$ odmah vidimo da ona zadovoljava prva dva svojstva mjere. Preostaje pokazati da vrijedi i $\sigma$–aditivnost. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Po definiciji supremuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, $\mu(B) < \infty$ i

$$\nu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) \leq \mu(B) + \varepsilon.$$

Kako su skupovi $B \cap A_n$, $n \in \mathbb{N}$ međusobno disjunktni te je $B \cap A_n \subseteq A_n$ i $\mu(B \cap A_n) < \infty$, vrijedi:

$$\begin{aligned} \nu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) &\leq \mu(B) + \varepsilon = \mu\Big(B \cap \big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big)\Big) + \varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (B \cap A_n)\Big) + \varepsilon \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu(B \cap A_n) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon$ slijedi $\nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. Dokažimo i obratnu nejednakost: za fiksan $n \in \mathbb{N}$, svaki $\varepsilon > 0$ i za sve $j = 1,\ldots,n$ postoje $B_j \in \mathcal{A}$ takvi da je $B_j \subseteq A_j$, $\mu(B_j) < \infty$ i $\nu(A_j) < \mu(B_j) + \varepsilon/2^j$. Iz

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \text{i} \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) < \infty$$

dobivamo

$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j) - \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi $\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j)$. Graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo obratnu nejednakost.

(b) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Treba pokazati da je $\nu(A) = \mu(A)$. Očito, ako je $A \in \mathcal{A}$ i $\mu(A) < \infty$, onda iz definicije od $\nu$ slijedi $\nu(A) = \mu(A)$. Preostaje razmotriti slučaj $\mu(A) = \infty$. Zbog $\sigma$–konačnosti mjere $\mu$ postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ (bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su oni međusobno disjunktni) takvih da je $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga je $\mu(A \cap A_n) < \infty$, što povlači $\nu(A \cap A_n) = \mu(A \cap A_n)$. Sada, kako su $\mu$ i $\nu$ mjere, dobivamo

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu(A \cap X) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap A_n) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) = \mu\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \mu(A \cap X) = \mu(A).\end{aligned}$$

(c) Ako promotrimo slučajeve kada je $A = \emptyset$ te $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$, iz definicije mjera $\mu$ i $\nu$ u oba slučaja slijedi da je $\nu(A) = 0$.

2.46. Zadatak

*Pokažite da tvrdnja* (d) propozicije 2.17. *općenito ne vrijedi ako je* $\mu(A_1) = \infty$.

---

**Rješenje.** U nastavku navodimo dva primjera koji ilustriraju tvrdnju zadatka.

*Primjer 1.* Neka je $\mu$ mjera prebrojavanja na izmjerivom prostoru $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$. Definirajmo skupove

$$A_n := 2^n\mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova i $\mu(A_1) = \infty$. Ako definiramo skup $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, onda vrijedi da je

$$0 = \mu(A) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty.$$

*Primjer 2.* Neka je $\mu$ mjera prebrojavanja na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Skupovi oblika $A_n = (n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, tvore padajući niz te je ponovno $\mu(A_1) = \infty$. Očito je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(n, \infty) = \emptyset$ i

$$\mu(A_n) = \mu((n, \infty)) = \infty \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N},$$

pa je stoga

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty.$$

2.47. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih skupova. Dokažite:*

(a) $\mu\Big(\liminf_n A_n\Big) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.

(b) *Pretpostavimo da je* $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty$. *Tada je*

$$\mu\Big(\limsup_n A_n\Big) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

---

**Rješenje.**

(a) Najprije uočimo da je prema (1.3) $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Nadalje, neka je $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq A_n$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova i

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

pa je prema neprekidnosti mjere na rastući niz skupova

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \liminf_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

(b) Iz (1.3) slijedi da je $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Neka je $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Niz $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je padajući i

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Sada je po pretpostavci zadatka $\mu(C_1) < \infty$, pa prema neprekidnosti mjere na padajući niz skupova slijedi

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \limsup_n \mu(C_n) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

2.19. PRIMJEDBA

*U zadatku 2.15. upoznali smo se s pojmom atoma kao nepraznog skupa iz neke $\sigma-$algebre koji ne sadrži niti jedan drugi neprazan skup iz iste $\sigma-$algebre. Uočimo da su svi jednočlani izmjerivi skupovi ujedno i atomi. U sljedećem zadatku navodimo nešto drugačiju definiciju atoma u svrhu definiranja neatomske mjere.*

---

2.48. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere i neka su svi jednočlani skupovi $\{x\}$, $x \in X$ izmjerivi, tj.*

$$\{x\} \in \mathcal{A} \text{ za svaki } x \in X.$$

*Točka $x$ naziva se* atom *ako je $\mu(\{x\}) > 0$. Mjeru $\mu$ nazivamo* neatomska *ili* difuzna *ako na danom prostoru mjere nemamo atoma. Navedite primjer mjere koja nije difuzna na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

---

**Rješenje.** Uzmimo, na primjer, Diracovu delta mjeru koncentriranu u točki $x = 0$. Tada je $\delta_0(\{0\}) = 1$, odnosno $\{0\}$ je atom.

2.49. ZADATAK

*Neka je $\mu$ difuzna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{A})$. Pokažite da su svi prebrojivi podskupovi od $X$ ujedno i izmjerivi skupovi mjere nula.*

---

**Rješenje.** Neka je $A \subseteq X$ prebrojiv skup. Tada njegove elemente možemo poredati u niz, odnosno

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Kako su svi $\{a_n\} \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, to je i $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} \in \mathcal{A}$.

Sada, koristeći $\sigma$–aditivnost mjere dobivamo

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(\{a_n\}\right) = 0,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz svojstva difuzne mjere $\mu$ da je $\mu\left(\{x\}\right) = 0$ za svaki $x \in X$.

2.50. ZADATAK

*Pokažite da se svaka vjerojatnosna mjera $\mathcal{P}$ na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ može zapisati u obliku sume $\mu+\nu$, gdje su $\mu, \nu$ mjere na danom izmjerivom prostoru takve da je $\mu$ difuzna mjera, a mjera $\nu$ je oblika*

$$\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n \delta_{x_n},\ \varepsilon_n > 0,\ x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

---

**Rješenje.** Kako je $\mathcal{P}$ vjerojatnosna mjera, vrijedi da je $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 1$. Stoga, pretpostavimo da imamo konačno mnogo atoma $x_1, \ldots, x_n$ na danom prostoru mjere za koje vrijedi $\mathcal{P}(\{x_i\}) \geq \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Kako je

$$\frac{n}{k} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}\left(\{x_i\}\right) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right) = \mathcal{P}\left(\{x_1, \ldots, x_n\}\right) \leq \mathcal{P}(\mathbb{R}) = 1,$$

vrijedi da je $n \leq k$, odnosno imamo najviše $k$ atoma za koje je

$$\mathcal{P}(\{x_i\}) \geq \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Označimo sada sve atome za koje je $\mathcal{P}(\{x\}) \in \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right)$ s $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n(k)}^{(k)}$, pri čemu je $n(k) \leq k$. Kako je

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right) = (0, \infty),$$

slijedi da smo u obzir uzeli sve moguće mjere atoma. Imamo samo konačno mnogo atoma s mjerom u svakom pojedinom intervalu $[1/k, 1/(k-1))$, $k \in \mathbb{N}$, odnosno ukupno prebrojivo mnogo atoma koje možemo poredati u niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Sada možemo definirati funkciju

$$\nu := \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}\left(\{x_i\}\right) \cdot \delta_{x_i}$$

koja je mjera na $\mathbb{R}$ (vidi zadatak 2.33.). Nadalje, za svaki skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\nu(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}\left(\{x_i\}\right) \cdot \delta_{x_i}(A) &= \sum_{i:\, x_i \in A} \mathcal{P}\left(\{x_i\}\right) \\
&= \mathcal{P}\left(A \cap \{x_1, x_2, \ldots\}\right) \leq \mathcal{P}(A),
\end{aligned}$$

odnosno $\mathcal{P}(A) - \nu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nadalje, definirajmo funkciju $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ s $\mu(A) := \mathcal{P}(A) - \nu(A)$. Preostalo je provjeriti svojstva ($\sigma 2$) i ($\sigma 3$) kako bi se uvjerili da je $\mu$ mjera. Vrijedi

$$\mu(\emptyset) = \mathcal{P}(\emptyset) - \nu(\emptyset) = 0.$$

Također, za proizvoljan niz disjunktnih, izmjerivih skupova $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zbog konačnosti mjere $\nu$ ($\nu(\mathbb{R}) \leq \mathcal{P}(\mathbb{R}) = 1$) vrijedi

$$\begin{aligned}
\mu\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big) = \mathcal{P}\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big) - \nu\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(A_n) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) \\
= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathcal{P}(A_n) - \nu(A_n)\right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n),
\end{aligned}$$

čime je dokazano da je funkcija $\mu$ mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

## 2.3. Vanjska mjera

2.20. DEFINICIJA
*Neka je $X$ skup, a $2^X$ njegov partitivni skup.* Vanjska mjera *na skupu $X$ je svaka funkcija $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ s ovim svojstvima:*

($\mu^\star 1$) $\mu^\star(\emptyset) = 0$,

($\mu^\star 2$) (monotonost) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^\star(A) \le \mu^\star(B)$,

($\mu^\star 3$) ($\sigma$–subaditivnost) *za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $X$ vrijedi*

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

---

Primijetite da će mjera ujedno biti i vanjska mjera ako i samo ako je ta mjera definirana na cijelom partitivnom skupu $2^X$ te da vanjska mjera općenito nije i mjera.

2.21. DEFINICIJA
*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu $X$. Za skup $B \subseteq X$ kažemo da je* $\mu^\star$–izmjeriv *ako je*

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X.$$

---

Iz prethodne definicije slijedi da su $\emptyset$ i $X$ $\mu^\star$–izmjerivi skupovi. Nadalje, ako je skup $B$ $\mu^\star$–izmjeriv, onda je i $B^c$ $\mu^\star$–izmjeriv skup.

2.22. PROPOZICIJA
*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu $X$. Ako je $\mu^\star(B) = 0$ ili $\mu^\star(B^c) = 0$, onda je $B$ $\mu^\star$-izmjeriv skup.*

---

2.23. TEOREM (CARATHÉODORY[4])
*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu $X$. S $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ označimo familiju svih $\mu^\star$-izmjerivih podskupova od $X$. Tada vrijedi:*

(a) *$\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je $\sigma$-algebra na skupu $X$,*

(b) *restrikcija funkcije $\mu^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je mjera.*

---

2.24. DEFINICIJA
*Neka je $X$ neprazan skup. Familiju $\mathcal{C}$ podskupova od $X$ nazivamo* $\sigma$-pokrivač od $X$ *ako ona ima sljedeća dva svojstva:*

[4] Constantin Carathéodory (1873.-1950.), njemački matematičar grčkog porijekla.

(a) $\emptyset \in \mathcal{C}$,

(b) *postoji niz* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *članova iz* $\mathcal{C}$ *takav da je* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

---

2.25. PROPOZICIJA

*Neka je* $\mathcal{C}$ *neki* $\sigma$*-pokrivač nepraznog skupa* $X$*, dok je* $\tau : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ *bilo koja funkcija sa svojstvom* $\tau(\emptyset) = 0$*. Definirajmo funkciju* $\mu_\tau^\star : 2^X \to [0,\infty]$ *formulom*

$$\mu_\tau^\star(A) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\tau(C_n) :\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,\ C_n \in \mathcal{C},\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

*Funkcija* $\mu_\tau^\star$ *je vanjska mjera.*

---

## Riješeni zadaci

---

2.51. ZADATAK

*Neka su* $\mu^\star, \nu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ *vanjske mjere na skupu* $X$*. Dokažite da je tada i funkcija* $\tau^\star : 2^X \to [0,\infty]$*, definirana s*

$$\tau^\star(A) := \max\{\mu^\star(A), \nu^\star(A)\}$$

*vanjska mjera.*

---

**Rješenje.** Ispitajmo zadovoljava li funkcija $\tau^\star$ osnovna svojstva vanjske mjere:

($\mu^\star 1$) $\tau^\star(\emptyset) = \max\{\mu^\star(\emptyset), \nu^\star(\emptyset)\} = 0.$

($\mu^\star 2$) Neka je $A \subseteq B \subseteq X$. Sada je, zbog

$$\mu^\star(A) \le \mu^\star(B) \quad \& \quad \nu^\star(A) \le \nu^\star(B),$$

$$\tau^\star(A) = \max\{\mu^\star(A), \nu^\star(A)\} \le \max\{\mu^\star(B), \nu^\star(B)\} = \tau^\star(B).$$

($\mu^\star 3$) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz podskupova od $X$. Tada je

$$\begin{aligned}
\tau^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= \max\left\{\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big), \nu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\right\} \\
&\le \max\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(A_n), \sum_{n=1}^{\infty}\nu^\star(A_n)\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty}\max\{\mu^\star(A_n), \nu^\star(A_n)\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tau^\star(A_n).
\end{aligned}$$

2.52. ZADATAK
*Na skupu* $2^{\mathbb{N}}$ *definirana je funkcija* $\mu^\star : 2^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ *formulom*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{1+n^2}, & \textit{ako } A \textit{ ima } n \textit{ elemenata, } n \in \mathbb{N}_0 \\ 1, & \textit{ako je } A \textit{ beskonačan skup.} \end{cases}$$

*Pokažite da je* $\mu^\star$ *vanjska mjera.*

---

**Rješenje.** Iz definicije funkcije $\mu^\star$ vidimo da vrijedi prvo svojstvo vanjske mjere.

($\mu^\star 2$) Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}$ takvi da je $A \subseteq B$. Definirajmo pomoćnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s $f(n) := 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$. Lako je pokazati da je ta funkcija monotono rastuća te da je $f(n) \geq \dfrac{1}{2}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

- Ako su $A$ i $B$ konačni skupovi, zbog monotonog rasta funkcije $f$ slijedi
$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(B).$$
- Ako je $A$ konačan i $B$ beskonačan skup, vrijedi
$$\mu^\star(A) \leq 1 = \mu^\star(B).$$
- Ako su $A$ i $B$ beskonačni skupovi, vrijedi jednakost
$$\mu^\star(A) = \mu^\star(B) = 1.$$

($\mu^\star 3$) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz podskupova od $\mathbb{N}$.

- Ako su svi skupovi prazni, vrijedi
$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n) = 0.$$
- Ako je samo jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ neprazan, konačan skup (pretpostavimo da je to skup $A_k$ od $k$ elemenata), a ostali su skupovi prazni, tada je
$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n) = \frac{k^2}{1+k^2}.$$
- Nadalje, kako za svaki neprazan konačan skup $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, od $n$ elemenata vrijedi da je $\mu^\star(A_n) \geq \frac{1}{2}$, ako su samo dva skupa neprazna i konačna, a ostali su prazni, vrijedi
$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

  Lako se pokaže da tvrdnja vrijedi i u slučaju kada imamo $n \geq 3$ nepraznih, konačnih skupova, a ostali su skupovi prazni.

- Ako je barem jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ beskonačan, onda je i unija $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ beskonačan skup, pa je

$$\mu^\star\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n),$$

čime je dokazano i treće svojstvo vanjske mjere.

2.53. Zadatak
*Dokažite da je funkcija $\mu^\star : 2^{\mathbb{N}} \to [0, \infty]$ definirana s*

$$\mu^\star(A) := \begin{cases} 0, & \textit{ako je } A = \emptyset \\ 1, & \textit{ako je } A \textit{ diskretan skup} \\ \infty, & \textit{ako je } A \textit{ neprebrojiv skup} \end{cases}$$

*vanjska mjera.*

---

**Rješenje.** Prvo svojstvo vanjske mjere slijedi iz definicije funkcije $\mu^\star$.

($\mu^\star$2) Neka su $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ neprazni skupovi, jer u suprotnom monotonost direktno slijedi.

- Ako je $B$ diskretan skup, onda je i $A$ diskretan i vrijedi

$$\mu^\star(A) = 1 = \mu^\star(B).$$

- Ako je $B$ neprebrojiv, a $A$ diskretan skup, vrijedi

$$\mu^\star(A) = 1 < \infty = \mu^\star(B).$$

- Ako su i $A$ i $B$ neprebrojivi skupovi, tada je

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(B) = \infty.$$

($\mu^\star$3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz podskupova od $\mathbb{N}$. Pretpostavimo da je barem jedan skup neprazan, jer u suprotnom odmah slijedi $\sigma$–subaditivnost.

- Ako je samo jedan skup $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ diskretan neprazan (a ostali su prazni), onda je i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ diskretan neprazan skup, pa vrijedi

$$\mu^\star\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

Također, ako su dva ili više skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ diskretni neprazni (a ostali su prazni), onda je i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ diskretan neprazan skup, pa vrijedi

$$\mu^\star\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = 1 \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

- Ako je barem jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ neprebrojiv, onda je i skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ neprebrojiv, pa vrijedi

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n).$$

Isto dobivamo i u slučaju kada imamo dva ili više skupova koji su neprebrojivi.

2.54. Zadatak
*Neka je $X$ bilo koji neprebrojiv skup te $\mu^\star, \nu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjske mjere definirane formulama:*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ diskretan} \\ 1, & \text{u suprotnom,} \end{cases} \qquad \nu^\star(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ diskretan} \\ \infty, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

*Dokažite:*

(a) *Skup $A \subseteq X$ je $\mu^\star$–izmjeriv ako i samo ako je $A$ ili $A^c$ diskretan skup.*

(b) *Svaki skup $A \subseteq X$ je $\nu^\star$–izmjeriv.*

---

**Rješenje.** Općenito, ako je skup vanjske mjere nula, onda su, prema propoziciji 2.22., on i njegov komplement izmjerivi.

(a) Neka je jedan od skupova $A$ ili $A^c$ diskretan. Tada je $\mu^\star(A) = 0$ ili $\mu^\star(A^c) = 0$, pa je $A$ $\mu^\star$–izmjeriv.
Pokažimo da vrijedi i obrat, uz pomoć kontrapozicije. Ako niti jedan od skupova $A$ i $A^c$ nije diskretan, onda je $\mu^\star(A) = \mu^\star(A^c) = 1$. Kada bi skup $A$ bio $\mu^\star$–izmjeriv, prema definiciji 2.21. bi vrijedilo

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c), \qquad \forall B \subseteq X.$$

No, za $B = X$ dobivamo

$$1 = \mu^\star(X) < 2 = \mu^\star(X \cap A) + \mu^\star(X \cap A^c),$$

iz čega slijedi da $A$ nije $\mu^\star$-izmjeriv skup.

(b) Neka je $B$ bilo koji podskup od $X$. Ako je $B$ diskretan, onda su diskretni i skupovi $B \cap A$ i $B \cap A^c$. Zato je

$$\nu^\star(B) = \nu^\star(B \cap A) = \nu^\star(B \cap A^c) = 0,$$

odakle dobivamo

$$\nu^\star(B) = \nu^\star(B \cap A) + \nu^\star(B \cap A^c).$$

Ako $B$ nije diskretan skup, onda barem jedan od skupova $B \cap A$ ili $B \cap A^c$ nije diskretan, pa stoga ponovno vrijedi gornja jednakost.

2.55. Zadatak

*Neka je $X$ bilo koji neprebrojiv skup, $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera i $F, G \subseteq X$ disjunktni, $\mu^\star$–izmjerivi skupovi. Dokažite da tada vrijedi*

$$\mu^\star\left(A \cap (G \cup F)\right) = \mu^\star(A \cap G) + \mu^\star(A \cap F),\ \forall A \subseteq X.$$

---

**Rješenje.** Ako iskoristimo $\mu^\star$–izmjerivost skupa $G \subseteq X$ te za test–skup odaberemo $A \cap (G \cup F) \subseteq X$, iz definicije 2.21. odmah slijedi tražena jednakost.

2.56. Zadatak

*Neka je $X$ bilo koji neprebrojiv skup, $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera i $A \subseteq X$ tako da je $\mu^\star(A) = 0$. Dokažite da je tada*

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cup A) = \mu^\star(B \cap A^c),\ B \subseteq X.$$

---

**Rješenje.** Iz svojstava monotonosti i $\sigma$–subaditivnosti vanjske mjere te iz uvjeta $\mu^\star(A) = 0$ slijedi:

$$\mu^\star(B) \leq \mu^\star(B \cup A) \leq \mu^\star(B) + \mu^\star(A) = \mu^\star(B),$$

odnosno

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cup A). \tag{2.8}$$

Nadalje, iz

$$\begin{aligned}\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap X) = \mu^\star\left(B \cap (A \cup A^c)\right) &\leq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)\\ \leq \mu^\star(A) + \mu^\star(B \cap A^c) &= \mu^\star(B \cap A^c) \leq \mu^\star(B)\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap A^c), \tag{2.9}$$

pa iz (2.8) i (2.9) dobivamo traženu jednakost.

2.57. Zadatak

*Neka je $X$ bilo koji neprebrojiv skup, $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera i $A$ $\mu^\star$–izmjeriv podskup od $X$. Dokažite da tada vrijedi*

$$\mu^\star(A \cup B) + \mu^\star(A \cap B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B),\ B \subseteq X.$$

---

**Rješenje.** Neka je $B \subseteq X$ proizvoljan skup. Kako je $A \subseteq X$ $\mu^\star$–izmjeriv skup, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}&\mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c) = \mu^\star(B), &(2.10)\\ &\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B \cap A^c),\end{aligned}$$

iz kojih zbrajanjem dobivamo

$$\mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c) + \mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(B) + \mu^\star(A) + \mu^\star(B \cap A^c).$$

Nadalje, oduzimanjem $\mu^\star(B \cap A^c)$ s obiju strana prethodne jednakosti, uz pretpostavku $\mu^\star(B \cap A^c) < \infty$, dobivamo traženu tvrdnju. Ako je $\mu^\star(B \cap A^c) = \infty$, iz jednakosti (2.10) slijedi da je i

$$\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(B) = \infty,$$

iz čega ponovno slijedi tražena tvrdnja.

2.58. Zadatak
*Neka je $X$ bilo koji neprebrojiv skup i $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera. Dokažite da je skup $A \subseteq X$ $\mu^\star$–izmjeriv ako i samo ako postoje $\mu^\star$–izmjerivi skupovi $E, F \subseteq X$, takvi da je $A \subseteq E$, $A^c \subseteq F$ i $\mu^\star(E \cap F) = 0$.*

---

**Rješenje.** Neka je $A \subseteq X$ $\mu^\star$–izmjeriv skup. Tada je i skup $A^c \subseteq X$ $\mu^\star$–izmjeriv, pa uz odabir skupova $E = A$ i $F = A^c$ slijedi tražena tvrdnja.
Obratno, pretpostavimo da su $E, F \subseteq X$ skupovi s traženim svojstvom. Tada je $F^c \subseteq A \subseteq E$, pa je lako uočiti da vrijedi $A = F^c \cup (A \cap F)$. Iz

$$0 \leq \mu^\star(A \cap F) \leq \mu^\star(E \cap F) = 0$$

i propozicije 2.22. slijedi da je skup $A \cap F$ $\mu^\star$–izmjeriv. Sada je i skup $A$ $\mu^\star$–izmjeriv, kao unija $\mu^\star$–izmjerivih skupova.

2.59. Zadatak
*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu $X$ te $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova od $X$ za koji vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Dokažite da je tada skup*

$$E := \{x \in X : x \in A_n \text{ za beskonačno mnogo } n \in \mathbb{N}\}$$

*vanjske mjere nula.*

---

**Rješenje.** Prema uvjetima zadatka, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz podskupova od $X$ za koji vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Neka je

$$E_n := \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i,\ n \in \mathbb{N}$$

te primijetimo da je $E \subseteq E_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada je

$$0 \leq \mu^\star(E) \leq \mu^\star(E_n) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu^\star(A_i),$$

pa prelaskom na limes $n \to \infty$ dobivamo da je $\mu^\star(E) = 0$.

2.26. Primjedba
*Uočite vezu između prethodnog zadatka i Borel–Cantellijeve leme dokazane u zadatku 2.41.*

---

2.60. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, a $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera definirana formulom*

$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \quad i \quad B \in \mathcal{A}\}.$$

(a) *Dokažite da se infimum $\mu^\star(A)$ postiže na nekom nadskupu $B$ skupa $A$.*

(b) *Dokažite da je skup $A \in \mathcal{A}$ $\mu^\star$–izmjeriv i da vrijedi $\mu^\star(A) = \mu(A)$.*

---

**Rješenje.**

(a) Prema definiciji infimuma postoji niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivih skupova takav da je $A \subseteq B_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu^\star(A)$. Neka je

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}.$$

Pokažimo da je $\mu(B) = \mu^\star(A)$. Iz $A \subseteq B$ slijedi $\mu^\star(A) \leq \mu(B)$. Nadalje, iz $B \subseteq B_n$ slijedi $\mu(B) \leq \mu(B_n)$, odakle prijelazom na limes dobivamo

$$\mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu^\star(A).$$

Dakle, $\mu(B) = \mu^\star(A)$.

(b) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Po definiciji je $\mu^\star(A) \leq \mu(A)$. Nadalje, za svaki $B \in \mathcal{A}$, takav da je $A \subseteq B$, imamo $\mu(A) \leq \mu(B)$. Uzimanjem infimuma po svim takvim skupovima $B$ dobivamo $\mu(A) \leq \mu^\star(A)$. Dakle, $\mu(A) = \mu^\star(A)$. Pokažimo da je $A$ $\mu^\star$–izmjeriv. U tu svrhu dovoljno je pokazati da za svaki $B \subseteq X$, $\mu^\star(B) < \infty$ vrijedi

$$\mu^\star(B) \geq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c).$$

Neka je $B^\star \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq B^\star$ i $\mu^\star(B) = \mu(B^\star)$. Prema (a) takav skup $B^\star$ postoji. Sada imamo

$$\begin{aligned}\mu^\star(B) = \mu(B^\star) &= \mu(B^\star \cap A) + \mu(B^\star \cap A^c) \geq \mu^\star(B^\star \cap A) + \mu^\star(B^\star \cap A^c)\\ &\geq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c),\end{aligned}$$

pri čemu je prva nejednakost posljedica toga što je $\mu \geq \mu^\star$ za svaki izmjeriv skup, a druga vrijedi zbog monotonosti vanjske mjere.

2.61. Zadatak

*Na skupu $\mathbb{N}$ vanjska mjera $\mu^\star$ definirana je formulom:*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{ako } A \text{ ima } n \text{ elemenata} \\ 1, & \text{ako je } A \text{ beskonačan skup.} \end{cases}$$

*Pronađite sve $\mu^\star$–izmjerive skupove.*

---

**Rješenje.** Po definiciji 2.21., skup $A \subseteq \mathbb{N}$ je $\mu^\star$–izmjeriv ako je

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c) \text{ za svaki } B \subseteq \mathbb{N}.$$

Kako je barem jedan od skupova $A$ ili $A^c$ beskonačan, tj. $\mu^\star(A) = 1$ ili $\mu^\star(A^c) = 1$, a iz gornje jednakosti za $B = \mathbb{N}$ slijedi da je

$$1 = \mu^\star(A) + \mu^\star(A^c),$$

možemo zaključiti da su $\mathbb{N}$ i $\emptyset$ jedini $\mu^\star$–izmjerivi skupovi.

2.62. Zadatak
*Neka je $\mu^\star$* aditivna vanjska mjera *na $X$, tj.*

$$\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B)$$

*za svaka dva disjunktna skupa $A, B \subseteq X$. Dokažite da je $\mu^\star$ mjera.*

---

**Rješenje.** Neka su $A, B \subseteq X$. Skupovi $A \cap B$ i $A \cap B^c$ su disjunktni te je $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, pa prema uvjetima zadatka vrijedi

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c).$$

To znači da je svaki skup $B \subseteq X$ $\mu^\star$–izmjeriv. Prema Carathéodoryjevu teoremu $\mu^\star$ je mjera.

2.63. Zadatak
*Neka je $\mu^\star$ vanjska mjera na $X$. Dokažite da za svaka dva podskupa $A$ i $B$ od $X$ vrijedi*

$$|\mu^\star(A) - \mu^\star(B)| \leq \mu^\star(A \Delta B).$$

---

**Rješenje.** Zadatak se može riješiti na isti način kao zadatak 2.39.

2.64. Zadatak
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera takva da je $\mu^\star_{|\mathcal{M}_{\mu^\star}} = \mu$, gdje je $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ skup svih $\mu^\star$-izmjerivih podskupova od $X$ i $A \subseteq X$ skup koji nije $\mu^\star$–izmjeriv i za koga vrijedi da je $\mu^\star(A) < \infty$. Pokažite da postoji skup $S \subseteq A$ takav da je $\mu^\star(S) > 0$ i da $S$ nema $\mu^\star$-izmjerivih podskupova pozitivne mjere.*

---

**Rješenje.** Neka je

$$\alpha := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \ \mu^\star\text{-izmjeriv}\}.$$

Po definiciji supremuma, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mu^\star$-izmjeriv podskup $B_n$ od $A$ takav da je

$$\mu(B_n) > \alpha - 1/n. \tag{$\star$}$$

Za svaki takav $B_n$ je
$$\mu(B_n) = \mu^\star(B_n) \le \mu^\star(A) < \infty.$$
Skup $B := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ je $\mu^\star$–izmjeriv, pa je $B \subseteq A$ i
$$\mu(B) \le \alpha. \qquad (\star\star)$$
Kako je $B_n \subseteq B$, slijedi da je $\mu(B_n) \le \mu(B)$ te pomoću $(\star)$ i $(\star\star)$ dobivamo $\mu(B) = \alpha$.
Neka je $S = A \backslash B$. Kako skup $A = B \cup (A \backslash B)$ nije $\mu^\star$–izmjeriv, a $B$ je $\mu^\star$–izmjeriv, slijedi da $S = A \backslash B$ nije $\mu^\star$–izmjeriv skup. Stoga je, prema propoziciji 2.22., $\mu^\star(S) > 0$. Nadalje, pretpostavimo da je $T$ $\mu^\star$-izmjeriv podskup od $S$. Tada je $B \cup T$ $\mu^\star$–izmjeriv podskup od $A$. Zbog $B \cap T = \emptyset$ je
$$\alpha \ge \mu(B \cup T) = \mu(B) + \mu(T) = \alpha + \mu(T) \ge \alpha,$$
odakle slijedi $\mu(T) = 0$. Dakle, $S$ nema $\mu^\star$-izmjerivih podskupova pozitivne mjere.

2.65. Zadatak
*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu $X$, a $E, F \subseteq X$. Dokažite:*

(a) *Ako je $\mu^\star(E) = 0$, onda je $\mu^\star(E \cup F) = \mu^\star(F)$.*

(b) *Ako je $E \subseteq F$, $\mu^\star(F \backslash E) = 0$ i ako je $E$ $\mu^\star$–izmjeriv, onda je $F$ također $\mu^\star$–izmjeriv skup i vrijedi $\mu^\star(F) = \mu^\star(E)$.*

(c) *Ako je $\mu^\star(E \Delta F) = 0$, onda je $\mu^\star(E) = \mu^\star(F)$.*

---

**Rješenje.**

(a) Iz $\mu^\star(E \cup F) \le \mu^\star(E) + \mu^\star(F) = \mu^\star(F)$ i
$$F \subseteq E \cup F \Rightarrow \mu^\star(F) \le \mu^\star(E \cup F)$$
slijedi tražena jednakost.

(b) Prema propoziciji 2.22. skup $F \backslash E$ je $\mu^\star$–izmjeriv. Skup $F = E \cup (F \backslash E)$ je unija dvaju $\mu^\star$–izmjerivih skupova pa je i sam $\mu^\star$-izmjeriv.
Nadalje, iz monotonosti i $\sigma$–subaditivnosti vanjske mjere slijedi
$$\mu^\star(E) \le \mu^\star(F) \le \mu^\star(E) + \mu^\star(F \backslash E) = \mu^\star(E),$$
tj. $\mu^\star(E) = \mu^\star(F)$.

(c) Kako je
$$E \backslash F, F \backslash E \subseteq E \Delta F,$$
slijedi
$$\mu^\star(E \backslash F) = \mu^\star(F \backslash E) = 0.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\mu^\star(E) &= \mu^\star\big((E\cap F)\cup(E\backslash F)\big) \le \mu^\star(E\cap F)+\mu^\star(E\backslash F) = \mu^\star(E\cap F)\\ &\le \mu^\star(F) = \mu^\star\big((E\cap F)\cup(F\backslash E)\big) \le \mu^\star(F\backslash E)+\mu^\star(E\cap F)\\ &= \mu^\star(E\cap F) \le \mu^\star(E),\end{aligned}$$

što daje jednakost $\mu^\star(E)=\mu^\star(F)$.

2.66. ZADATAK

*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu $X$, $A\subseteq X$ i $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Pokažite da je*

$$\mu^\star\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap E_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(A\cap E_n).$$

---

**Rješenje.** Definirajmo najprije pomoćne skupove

$$E := E_1,\; B := A\cap(E_1\cup\ldots\cup E_n).$$

Skup $E_1$ je $\mu^\star$–izmjeriv te koristeći $B$ kao test–skup dobivamo

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B\cap E_1)+\mu^\star(B\cap E_1^c),$$

tj.

$$\mu^\star\left(A\cap(E_1\cup\ldots\cup E_n)\right) = \mu^\star(A\cap E_1)+\mu^\star\left(A\cap(E_2\cup\ldots\cup E_n)\right).$$

Ako taj način zaključivanja ponovimo $n-1$ puta tako da u $i$–tom koraku za $\mu^\star$–izmjeriv skup uzmemo $E_i$, a za test-skup $A\cap(E_i\cup\ldots\cup E_n)$, dobivamo

$$\mu^\star\Big(A\cap(E_1\cup\ldots\cup E_n)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_i).$$

Sada zbog

$$A\cap\big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\big) \subseteq A\cap\big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\big)$$

imamo

$$\sum_{i=1}^{n}\mu^\star(A\cap E_i) = \mu^\star\Big(A\cap\big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\big)\Big) \le \mu^\star\Big(A\cap\big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\big)\Big),$$

odakle slijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^\star(A\cap E_i) \le \mu^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap E_i)\big).$$

Obratna nejednakost očito slijedi iz $\sigma$–subaditivnost vanjske mjere $\mu^\star$.

2.67. Zadatak

*Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na $X$ i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz podskupova od $X$. Pretpostavimo da postoji niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih, $\mu^\star$–izmjerivih skupova, takvih da je $A_n \subseteq B_n$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Dokažite da tada vrijedi*

$$\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

---

**Rješenje.** Neka je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Primijetimo da za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi $A\cap B_n = A_n$. Sada, prema zadatku 2.66., slijedi da je

$$\mu^\star\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \mu^\star\big(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(A\cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^\star(A_n).$$

2.68. Zadatak

*Neka se $\sigma$-pokrivač $\mathcal{C}$ neprebrojivog beskonačnog skupa $X$ sastoji od $\emptyset$, cijelog skupa $X$ i svih jednočlanih podskupova od $X$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C}\to[0,\infty]$ na sljedeći način:*

$$\tau(\emptyset) = 0,\ \ \tau(\{x\}) = 0 \ \ i\ \tau(X) = 1.$$

*Nadalje, neka je $\mu_\tau^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera iz* propozicije 2.25. *Dokažite da je $\mu_\tau^\star = \mu^\star$, gdje je $\mu^\star$ vanjska mjera iz* zadatka 2.54.

---

**Rješenje.** Ako je skup $A = \{a_1,\dots,a_n\}$ konačan, možemo ga zapisati kao prebrojivu uniju

$$A = \big(\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}\big)\cup\big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}\emptyset\big).$$

Tada je

$$0\le \mu_\tau^\star(A) \le \sum_{i=1}^{n}\tau(\{a_i\}) + \sum_{i=n+1}^{\infty}\tau(\emptyset) = 0,$$

odakle slijedi $\mu_\tau^\star(A) = 0$.
Ako je skup $A\subseteq X$ prebrojiv, možemo ga zapisati kao prebrojivu uniju njegovih članova

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\},$$

pa ponovno dobivamo da je $\mu_\tau^\star(A) = 0$.
Pretpostavimo da $A\subseteq X$ nije diskretan skup. Ako je

$$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,\ C_n\in\mathcal{C},$$

tj. ako je $A$ pokriven s prebrojivo mnogo skupova iz $\mathcal{C}$, onda barem jedan $C_n$ mora biti jednak skupu $X$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $C_1 = X$. Tada je

$$1 = \tau(C_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n),$$

pa iz definicije vanjske mjere $\mu_\tau^\star$ (kao infimuma) slijedi $1 \leq \mu_\tau^\star(A)$. Nadalje, kako je $A \subseteq X$, to je

$$\mu_\tau^\star(A) \leq \tau(X) = 1.$$

Time smo pokazali da je $\mu_\tau^\star(A) = 1$ za svaki neprebrojiv skup $A \subseteq X$.

## 2.4. Dynkinove klase i $\pi$-sistemi

2.27. Definicija
*Neka je $X$ skup. Familija $\mathcal{D}$ podskupova od $X$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(d1) $X \in \mathcal{D}$,

(d2) $(A, B \in \mathcal{D} \quad \& \quad B \subseteq A) \Longrightarrow A \backslash B \in \mathcal{D}$,

(d3) *ako je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rastući niz skupova iz* $\mathcal{D}$, *onda je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$,

*naziva se* $d$-sistem, Dynkinova[5] klasa *ili* Dynkinova familija na skupu $X$.

---

2.28. Definicija
*Neka je $X$ skup. Familiju podskupova od $X$ koja je zatvorena na konačne presjeke nazivamo* $\pi$–sistem na skupu $X$.

---

2.29. Primjedba
*Lako je pokazati da je presjek proizvoljno mnogo d-sistema [$\pi$-sistema] na skupu $X$ opet d-sistem [$\pi$-sistem] na $X$. Neka je $\mathcal{E}$ bilo koja familija podskupova od $X$. Presjek svih d-sistema [$\pi$-sistema] na $X$ koji sadrže $\mathcal{E}$ najmanji je d-sistem [$\pi$-sistem] na $X$ koji sadrži $\mathcal{E}$, označavamo ga s $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [odnosno s $\pi(\mathcal{E})$] i nazivamo* $d$-sistem generiran s $\mathcal{E}$ [$\pi$-sistem generiran s $\mathcal{E}$].

---

2.30. Teorem
*Neka je $\mathcal{E}$ bilo koji $\pi$–sistem na $X$. Tada je $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$, tj. $\sigma$–algebra generirana $\pi$–sistemom $\mathcal{E}$ jednaka je d–sistemu generiranim s $\mathcal{E}$.*

---

Sljedeći teorem nam može biti od velike pomoći ukoliko budemo trebali pokazati da se neke dvije mjere podudaraju na $\sigma$–algebri.

2.31. Teorem
*Neka je $\sigma$–algebra $\mathcal{A}$ na skupu $X$ generirana $\pi$–sistemom $\mathcal{E}$, tj. $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Nadalje, neka su $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dvije mjere na $\sigma$-algebri $\mathcal{A}$, takve da je*

$$\mu(E) = \nu(E), \qquad \forall\, E \in \mathcal{E}.$$

*Ako je ispunjen jedan od sljedećih dvaju uvjeta:*

(a) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ *ili*

(b) *postoji rastući niz* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *skupova iz* $\mathcal{E}$ *sa svojstvom*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \& \qquad \mu(E_n), \nu(E_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

*onda je* $\mu = \nu$.

---

[5] Eugene Borisovich Dynkin (Евгений Борисович Дынкин) (1924.-), ruski matematičar.

## Riješeni zadaci

2.69. Zadatak

*Pokažite da je svaka $\sigma$–algebra $\mathcal{A}$ na skupu $X$ ujedno i Dynkinova klasa i $\pi$–sistem. Primijetite da obrat ne vrijedi.*

**Rješenje.** Iz svojstava $\sigma$–algebre direktno slijedi da je $X \in \mathcal{A}$ te da je za svaka dva skupa $A, B \in \mathcal{A}$, takva da je $B \subseteq A$ i $A \backslash B \in \mathcal{A}$. Isto tako, za proizvoljan, rastući niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ i njihova je unija također element te familije, čime su dokazana sva svojstva Dynkinove klase. Nadalje, kako je $\sigma$–algebra $\mathcal{A}$ zatvorena na prebrojive presjeke, ona je i $\pi$–sistem jer je, po definiciji, dovoljno ispuniti zatvorenost na konačne presjeke.

2.70. Zadatak

*Familiju $\mathcal{L}$ podskupova od $X$ nazivamo $\lambda$–sistem ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

($\lambda_1$) $\emptyset \in \mathcal{L}$,

($\lambda_2$) *ako je $A \in \mathcal{L}$, onda je i $A^c \in \mathcal{L}$,*

($\lambda_3$) *familija $\mathcal{L}$ je zatvorena na prebrojive, disjunktne unije, tj. ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz familije $\mathcal{L}$, onda je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$.*

*Pokažite da je familija $\mathcal{F}$, koja je ujedno i $\pi$–sistem i $\lambda$–sistem, također i $\sigma$–algebra.*

**Rješenje.** Prva dva svojstva $\sigma$–algebre direktno slijede iz svojstava $\lambda$–sistema. Kako bi dokazali treće svojstvo, uzmimo proizvoljan niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{F}$. Neka je $B_1 = A_1$ i $B_n = A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, $n \geq 1$. Lako je uočiti da je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktan niz skupova. Kako je familija $\mathcal{F}$ također i $\pi$–sistem, vrijedi da je

$$B_n = A_n \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \in \mathcal{F},$$

pa je prema svojstvu ($\lambda_3$) i $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$.

2.71. Zadatak

*Neka je familija $\mathcal{D}$ ujedno i Dynkinova klasa i $\pi$–sistem na $X$. Pokažite da je tada za svaka dva skupa $A, B \in \mathcal{D}$ i $A \backslash B \in \mathcal{D}$.*

**Rješenje.** Kako je $\mathcal{D}$ $\pi$–sistem, slijedi da je $A \cap B \in \mathcal{D}$, pa iz drugog svojstva Dynkinove klase slijedi $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B \in \mathcal{D}$.

2.72. Zadatak

*Neka su $A, B \subseteq X$. Pronađite $\sigma$–algebru i Dynkinovu klasu generirane familijom $\{A, B\}$. Koja je familija veća? Kada vrijedi jednakost?*

**Rješenje.** Očito, familija $\{A, B\}$ je $\pi$–sistem u slučaju kada je $A = B$, $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ ili kada je barem jedan od skupova $A$ i $B$ jednak $\emptyset$ ili $X$. Tada, prema teoremu 2.30., slijedi da je $\sigma(\{A, B\}) = \mathcal{D}(\{A, B\})$. Isključimo sada prethodno navedene slučajeve te promotrimo sljedeće:

- Ako je $A \cap B \neq \emptyset$, onda je

$$\begin{aligned}\sigma(\{A,B\}) = \{&\emptyset, X, A, B, A^c, B^c, A\cup B, A^c \cap B^c, A \cup B^c, A^c \cap B, B \cup A^c,\\ &B^c \cap A, A^c \cup B^c, A \cap B\},\\ \mathcal{D}(\{A,B\}) = \{&\emptyset, X, A, B, A^c, B^c\},\end{aligned}$$

  odnosno vrijedi da je $\mathcal{D}(\{A,B\}) \subseteq \sigma(\{A,B\})$.

- Ako je $A \cap B = \emptyset$, slijedi da je $A \subseteq B^c$, odnosno $B \subseteq A^c$ te dobivamo da je

$$\sigma(\{A,B\}) = \mathcal{D}(\{A,B\}) = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c, A \cup B, A^c \cap B^c\}.$$

2.73. Zadatak

*Neka su $\mu$ i $\nu$ vjerojatnosne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

(a) *Dokažite da je familija*

$$\mathcal{C} = \{(a,b) : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a \leq b\}$$

*$\pi$–sistem.*

(b) *Dokažite da je familija*

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ \mu(B) = \nu(B)\}$$

*Dynkinova klasa.*

(c) *Ako je $\mu((a,b)) = \nu((a,b))$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq b$, dokažite da je tada $\mu(B) = \nu(B)$ za sve $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tj. vrijedi da je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}$.*

**Rješenje.**

(a) Za svaka dva intervala $(a,b)$, $(c,d) \in \mathcal{C}$ vrijedi da je

$$(a,b) \cap (c,d) = (\max\{a,c\}, \min\{b,d\}) \in \mathcal{C}.$$

(b) Kako su $\mu$ i $\nu$ vjerojatnosne mjere, vrijedi da je $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$, čime je dokazano svojstvo $(d_1)$.
Kako bi dokazali drugo svojstvo, uzmimo proizvoljne skupove $A, B \in \mathcal{D}$, $B \subseteq A$. Očito je $A \backslash B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Kako je $B \subseteq \mathbb{R}$, iz svojstva monotonosti mjere slijedi da je

$$\mu(B) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1, \ \nu(B) \leq \nu(\mathbb{R}) = 1,$$

pa vrijedi

$$\mu(A\backslash B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A\backslash B).$$

Dakle, $A\backslash B \in \mathcal{D}$.
Uzmimo sada proizvoljan, rastući niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{D}$. Iz svojstva neprekidnosti mjere na rastuće nizove, jer je očito $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dobivamo

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big),$$

iz čega slijedi da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, čime su dokazana sva svojstva Dynkinove klase.

(c) Iz definicije familije $\mathcal{D}$ odmah slijedi da je

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{2.11}$$

Nadalje, kako je familija $\mathcal{C}$ $\pi$–sistem, vrijedi $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C})$, pa ako iskoristimo činjenicu da je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ te da je $\mathcal{D}$ Dynkinova klasa, dobivamo

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}. \tag{2.12}$$

Sada iz (2.11) i (2.12) slijedi tražena tvrdnja.

2.74. ZADATAK
*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ prostor vjerojatnosne mjere te neka je $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dokažite da je familija*

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) :\ \mu(A \cap E) = \mu(A)\mu(E)\}$$

*Dynkinova klasa.*

---

**Rješenje.** Pokažimo da vrijede tri osnovna svojstva Dynkinove klase:

(d1) Kako je $\mu(\mathbb{R}) = 1$, vrijedi da je

$$\mu(\mathbb{R} \cap E) = \mu(E) = \mu(\mathbb{R})\mu(E).$$

(d2) Neka su $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$. Očito je $A\backslash B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nadalje, kako je, prema monotonosti mjere,

$$\mu(B \cap E) \leq \mu(B) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1 < \infty,$$

dobivamo da je

$$\begin{aligned} \mu(A\backslash B)\mu(E) &= \mu(A)\mu(E) - \mu(B)\mu(E) = \mu(A \cap E) - \mu(B \cap E) \\ &= \mu\left((A \cap E)\backslash(B \cap E)\right) = \mu\left((A\backslash B) \cap E\right). \end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je $A\backslash B \in \mathcal{A}$.

(d3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathcal{A}$. Kako je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, prema svojstvu neprekidnosti mjere na rastuće nizove i definicije familije $\mathcal{A}$, slijedi da je

$$\mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap E\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap E) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\mu(E) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)\mu(E).$$

## 2.5. Lebesgueova vanjska mjera

Prisjetimo se najprije definicije Lebesgueove[6] vanjske mjere na $\mathbb{R}$, opisane u [10]. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika $(a, b)$, $a \leq b$. Tada je $\mathcal{C}$ $\sigma$-pokrivač skupa $\mathbb{R}$. Nadalje, definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ s

$$\tau((a, b)) := b - a, \qquad a \leq b,$$

te neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. S $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_n \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup $A$, tj.

$$\mathcal{C}_A := \Big\{ ((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} : a_n \leq b_n \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \Big\}.$$

Funkciju $\lambda^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$, definiranu formulom

$$\begin{aligned} \lambda^\star(A) &:= \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) : \; C_n \in \mathcal{C} \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \Big\} \\ &= \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \; ((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A \Big\}, \end{aligned}$$

nazivamo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$.

Sada, iz prethodnog razmatranja i propozicije 2.25., slijedi:

**2.32. Propozicija**
*Lebesgueova vanjska mjera $\lambda^\star$ je vanjska mjera.*

---

**2.33. Propozicija**
*Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Tada je*

(a) $\lambda^\star([a, b]) = b - a$,

(b) $\lambda^\star([a, b)) = b - a$,

(c) $\lambda^\star((a, b]) = b - a$,

(d) $\lambda^\star((a, b)) = b - a$.

---

**2.34. Definicija**
*Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* izmjeriv u smislu Lebesguea *ili da je* Lebesgueov skup *ako je on $\lambda^\star$-izmjeriv.*

---

[6] Henri Léon Lebesgue (1875.-1941.), francuski matematičar.

2.35. PROPOZICIJA
*Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}$ izmjeriv je u smislu Lebesguea, tj.* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^\star}$.

---

Definirajmo sada Lebesgueovu vanjsku mjeru na $\mathbb{R}^d$. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$. S $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omeđenih i otvorenih $d$-intervala koji pokrivaju skup $A$, tj. takvih da je $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Funkciju $\lambda_d^\star : 2^{\mathbb{R}^d} \to [0,\infty]$, definiranu formulom

$$\lambda_d^\star(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_n) : (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A\right\}$$

gdje je

$$\mathrm{vol}\,(I) = \prod_{n=1}^{d} \lambda(T_n),$$

volumen $d$-intervala $I = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d$, nazivamo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$.

2.36. PROPOZICIJA
*Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ je vanjska mjera.*

---

Sljedeća je tvrdnja analogon propozicije 2.33.

2.37. PROPOZICIJA
*Neka je $I$ bilo koji $d$-interval na $\mathbb{R}^d$. Tada je* $\lambda_d^\star(I) = \mathrm{vol}\,(I)$.

---

2.38. DEFINICIJA
*Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ kažemo da je* izmjeriv u smislu Lebesguea *ili da je* Lebesgueov skup *ako je on $\lambda_d^\star$-izmjeriv. S $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ označavamo familiju svih podskupova od $\mathbb{R}^d$ izmjerivih u smislu Lebesguea.*

---

2.39. PROPOZICIJA
*Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}^d$ izmjeriv je u smislu Lebesguea, tj.* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$.

---

Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ u potpunosti je određena svojim vrijednostima na otvorenim skupovima. Preciznije, vrijedi:

2.40. PROPOZICIJA
*Neka je $d \geq 1$. Za svaki podskup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ vrijedi:*

$$\lambda_d^\star(A) = \inf\{\lambda_d^\star(U) : \ U \textit{ je otvoren skup i } A \subseteq U\}.$$

---

2.41. PROPOZICIJA
*Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ je* invarijantna na translacije*, tj.*

$$\lambda_d^\star(A + x) = \lambda_d^\star(A), \qquad A \subseteq \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

*Nadalje, skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je Lebesgueov ako i samo ako je skup $A + x$ Lebesgueov za svaki $x \in \mathbb{R}^d$.*

## Riješeni zadaci

2.75. ZADATAK
*Izračunajte Lebesgueovu vanjsku mjeru skupa $A$ koji sadrži sve racionalne brojeve iz segmenta* $[0,1]$.

---

**Rješenje.** Neka je $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Zbog prebrojivosti skupa $\mathbb{Q}$ članove skupa $A$ možemo poredati u niz, tj. $A = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Nadalje, za svaki $q_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ definirajmo skup $Q_n := \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$. Očito je

$$\lambda^\star(A) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\right\}.$$

Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ iz prethodne nejednakosti dobivamo

$$0 \leq \lambda^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

te prelaskom na limes $\varepsilon \to 0$ dolazimo do jednakosti $\lambda^\star(A) = 0$.

2.76. ZADATAK
*Dokažite da je Lebesgueova vanjska mjera svakog prebrojivog skupa $A \subset \mathbb{R}$ jednaka nuli.*

---

**Rješenje.** Kako je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup, njegove elemente možemo poredati u niz, tj. $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$. Sada je

$$0 \leq \lambda^\star(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star(\{a_n\}) = 0$$

zbog činjenice da je Lebesgueova vanjska mjera jednočlanog skupa jednaka nuli.

2.77. ZADATAK
*Izračunajte Lebesgueovu vanjsku mjeru skupa $B = (2,3]$ te na osnovu toga zaključite radi li se o prebrojivom skupu.*

---

**Rješenje.** Kako je prema propoziciji 2.33. $\lambda^\star(B) = 1$, skup $B$ nije prebrojiv. Nužan uvjet prebrojivosti skupa $B \subset \mathbb{R}$ je $\lambda^\star(B) = 0$.

2.78. ZADATAK
*Neka je $E \subseteq \mathbb{R}$ $\lambda^\star$–izmjeriv skup za koga je $\lambda^\star(E) < \infty$. Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji otvoren skup $U \supseteq E$ takav da je $\lambda^\star(U \backslash E) < \varepsilon$.*

---

**Rješenje.** Ako je $\lambda^\star$ vanjska mjera na nepraznom skupu $X$ i $E_1, E_2 \subseteq X$ $\lambda^\star$–izmjerivi skupovi takvi da je $E_1 \subseteq E_2$ i $\lambda^\star(E_1) < \infty$, tada očito vrijedi

$$\lambda^\star(E_2 \backslash E_1) = \lambda^\star(E_2) - \lambda^\star(E_1).$$

Skup $E \subseteq \mathbb{R}$ možemo prekriti s prebrojivo mnogo otvorenih intervala, tj. $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) =: U$, a po definiciji

$$\lambda^\star(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : \ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)\right\}.$$

Nadalje, za proizvoljan $\varepsilon > 0$, prema definiciji infimuma, dobivamo da je

$$\lambda^\star(U) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^\star\left((a_n, b_n)\right) < \lambda^\star(E) + \varepsilon,$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja

$$\lambda^\star(U \backslash E) = \lambda^\star(U) - \lambda^\star(E) < \varepsilon.$$

2.79. Zadatak
*Neka je $Z \subseteq \mathbb{R}$ i $\lambda^\star(Z) = 0$. Dokažite da postoji otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}$, tako da $U \supseteq Z$ i $\lambda^\star(U \backslash Z) < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$.*

---

**Rješenje.** Prema propoziciji 2.40. vrijedi

$$\lambda^\star(Z) = \inf\{\lambda^\star(U) : \ U \textit{ je otvoren skup i } Z \subseteq U\}.$$

Za proizvoljan $\varepsilon > 0$, prema definiciji infimuma i monotonosti Lebesgueove vanjske mjere, slijedi da postoji otvoren skup $U \supseteq Z$ takav da je

$$\lambda^\star(U \backslash Z) \le \lambda^\star(U) < \lambda^\star(Z) + \varepsilon = \varepsilon.$$

## 2.6. Lebesgueova mjera

Po definiciji, restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na skup $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ je mjera. Označavamo ju s $\lambda_d$ (ili kraće samo $\lambda$) i nazivamo Lebesgueova mjera. Uobičajeno je i restrikciju Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na Borelovu $\sigma$-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ također zvati Lebesgueova mjera i označavati ju s $\lambda_d$ (ili kraće samo $\lambda$). Pri tome iz konteksta treba biti jasno radi li se o Lebesgueovoj mjeri na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star})$ ili o Lebesgueovoj mjeri na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

2.42. Propozicija
*Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgueov skup. Tada vrijedi:*

(a) (regularnost izvana) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) :$ *$U$ je otvoren skup i* $A \subseteq U\}$,

(b) (regularnost iznutra) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) :$ *$K$ je kompaktan skup i* $K \subseteq A\}$,

(c) (konačnost na kompaktima) $\lambda(K) < \infty$ *za svaki kompaktan skup* $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

---

2.43. Primjedba
*U svrhu boljeg razumijevanja sljedeće definicije važno je uvesti pojam Hausdorffovog topološkog prostora. Dakle, za topološki prostor $(X, \mathcal{U})$ kažemo da je* Hausdorffov[7] *ako za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ postoje disjunktne okoline $U_x$ od $x$ i $U_y$ od $y$, $U_x, U_y \in \mathcal{U}$* (vidi [12, definicija 3., str. 108]).

---

2.44. Definicija
*Neka je $(X, \mathcal{U})$ Hausdorffov topološki prostor, a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere takav da je $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Za mjeru $\mu$ kažemo da je* regularna *ako vrijedi:*

(a) (regularnost izvana) *Za svaki skup $A \in \mathcal{A}$ je*

$$\mu(U) = \inf\left\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ otvoren}\right\},$$

(b) (regularnost iznutra) *Za svaki otvoren skup $U$ je*

$$\mu(U) = \sup\left\{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ kompaktan}\right\},$$

(c) (konačnost na kompaktima) $\mu(K) < \infty$ *za svaki kompaktan skup* $K \subseteq X$.

---

2.45. Teorem
*Svaka konačna mjera $\mu$ na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ je regularna.*

---

[7] Felix Hausdorff (1868.-1942.), njemački matematičar.

## Riješeni zadaci

2.80. Zadatak

*Neka je $A \subset \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Pokažite da je $\lambda(A) = 0$, gdje je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$.*

**Rješenje.** Taj zadatak je trivijalna posljedica zadatka 2.76.

2.81. Zadatak

*Izračunajte Lebesgueovu mjeru skupova:*

(a) $(0,5) \cap \mathbb{Q}$, (b) $[0,5]$, (c) $\{2\}$,

(d) $(0,5]\backslash\mathbb{Q}$, (e) $\big((7,15) \cup (8,16)\big) \cap \mathbb{R}$,

(f) $(2,10] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$,

(g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\right]$,

(h) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[9^n, 9^n + \frac{1}{3^n}\right)\backslash\mathbb{Q}\right) \cap [81, 82]$,

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n}\right]$.

**Rješenje.**

(a) $\lambda\left((0,5) \cap \mathbb{Q}\right) = 0$, (b) $\lambda\left([0,5]\right) = 5$,

(c) $\lambda\left(\{2\}\right) = 0$, (d) $\lambda\left((0,5]\backslash\mathbb{Q}\right) = 5$,

(e) $\lambda\left(\big((7,15) \cup (8,16)\big) \cap \mathbb{R}\right) = 9$,

(f) $\lambda\left((2,10] \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\right) = 8$,

(g) skupovi $\left(\left[2^n, 2^n + \dfrac{1}{10^n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ su međusobno disjunktni, pa koristeći $\sigma$-aditivnost dobivamo

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\right]\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\Big(\left[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\right]\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}.$$

(h) Imamo da je

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[9^n, 9^n + \frac{1}{3^n}\right)\backslash\mathbb{Q}\Big) \cap [81, 82]\Big) &= \lambda\Big(\Big[81, 81 + \frac{1}{9}\Big)\backslash\mathbb{Q}\Big)\\ &= \lambda\Big(\Big[81, 81 + \frac{1}{9}\Big)\Big) = \frac{1}{9},\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi zbog $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

(i) Kako je $\big([3, 3+\frac{1}{n}]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova i vrijedi $\lambda(A_1) = 1 < \infty$, gdje je $A_1 = [3, 3+1]$, prema svojstvu neprekidnosti mjere na padajuće nizove slijedi

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\big[3, 3+1/n\big]\Big) = \lim_{n\to\infty}\lambda\left(\big[3, 3+1/n\big]\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

2.82. Zadatak

*Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Dokažite da je $\lambda(A) = 0$, gdje je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^2$. Analogna tvrdnja može se formulirati i dokazati i za $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.*

---

**Rješenje.** Neka je $\varepsilon > 0$ te

$$A_n := \big(-\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n}\big) \times (-n, n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i vrijedi

$$\lambda(A) \le \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n) = 4\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}. \tag{2.13}$$

Preostaje provjeriti je li red $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{n}{2^n}$ konvergentan. To možemo napraviti na nekoliko načina:

1. Prema D'Alembertovu kriteriju konvergencije imamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

   iz čega slijedi konvergencija danog reda.

2. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ i

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

   prema Cauchyjevom kriteriju konvergencije možemo zaključiti da je dani red konvergentan.

3. Dani red možemo direktno sumirati pomoću formule (vidi (2.5), str. 41)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1.$$

Poznavajući Cauchy–Hadamardov[8] teorem i teorem o holomorfnosti sume reda potencija (vidi [21, str. 126–127]), iz prethodne formule deriviranjem dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \tag{2.14}$$

Sada je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

Iz prethodnog razmatranja i nejednakosti (2.13) slijedi da je

$$0 \le \lambda(A) \le 8\varepsilon.$$

Napravimo li granični prijelaz $\varepsilon \to 0$, dobivamo traženu tvrdnju.

2.83. Zadatak
*Neka je $p$ pravac u ravnini zadan jednadžbom $y = ax + b$, $a \neq 0$. Dokažite da je $p$ Lebesgueov skup mjere nula.*

---

**Rješenje.** Neka je $p_k := p \cap ([k, k+1] \times \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je

$$p \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} p_k,$$

dovoljno je pokazati da je $\lambda(p_k) = 0$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$, jer iz toga slijedi

$$0 \le \lambda(p) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(p_k) = 0.$$

Definirajmo ekvidistantnu razdiobu $x_i = k + \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ segmenta $[k, k+1]$. Promotrimo dva slučaja.

- Ako je $a > 0$, onda je

$$p_k \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [ax_{i-1} + b, ax_i + b],$$

pa je

$$\begin{aligned} 0 \le \lambda(p_k) &\le \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [ax_{i-1} + b, ax_i + b]\Big) \\ &\le a \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 = \frac{a}{n}, \end{aligned}$$

odakle graničnim prijelazom $n \to \infty$ dobivamo $\lambda(p_k) = 0$.

[8] Jacques Salamon Hadamard (1865.-1963.), francuski matematičar.

- Za $a < 0$ je

$$p_k \subset \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [ax_i + b, ax_{i-1} + b],$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda(p_k) &\leq \lambda\big(\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [ax_i + b, ax_{i-1} + b]\big) \\ &\leq -a \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 = \frac{-a}{n}, \end{aligned}$$

pa na isti način kao u prethodnom slučaju ponovno dobivamo da je $\lambda(p_k) = 0$.

2.84. ZADATAK

(a) *Neka je $U$ neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}$. Pokažite da je $\lambda(U) > 0$.*

(b) *Konstruirajte otvoren i neomeđen skup u $\mathbb{R}$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom.*

(c) *Konstruirajte otvoren, neomeđen i putovima povezan skup u $\mathbb{R}^2$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom.*

(d) *Postoji li otvoren, neomeđen i putovima povezan skup u $\mathbb{R}$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom?*

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $U \subseteq \mathbb{R}$ neprazan otvoren skup, u njega se može upisati otvoreni interval $I \subseteq U$. Očito je $\lambda(I) > 0$, iz čega slijedi tvrdnja.

(b) Neka je $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Na primjer, neka je $\varepsilon_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo otvorene skupove

$$U_n := (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n),\ n \in \mathbb{N}$$

i skup $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ koji je otvoren i neomeđen u $\mathbb{R}$. Koristeći $\sigma$-subaditivnost mjere $\lambda$ dobivamo

$$\lambda(U) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 < \infty.$$

Zbog (a) je $\lambda(U) > 0$.

(c) Neka su

$$V_n = \big(-2^{-n}, 2^{-n}\big) \times (-n, n),\ n \in \mathbb{N}$$

otvoreni skupovi i $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.
Skup $V$ je otvoren i neomeđen, a geometrijski je jasno da je putovima povezan.
Nadalje, dobivamo da je

$$0 < \lambda(V) = \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-2^{-n}, 2^{-n}\right) \times (-n, n)\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^{n-2}},$$

gdje je red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n}{2^{n-2}}$ konvergentan jer, npr., prema D'Alembertovu kriteriju konvergencije imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

(d) Ne. Ako je neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ neomeđen i putovima povezan, onda on sadrži interval oblika $(-\infty, a)$ ili $(b, \infty)$ čija Lebesgueova mjera iznosi $+\infty$.

2.85. Zadatak
*Ako je $E \subseteq [0,1]$ skup za kojeg je $\lambda(E) = 1$, dokažite da je on tada gust podskup od $[0,1]$.*

---

**Rješenje.** Neka je $I$ neprazan otvoren podskup od $[0,1]$. Ako je $I \cap E = \emptyset$, onda je

$$\lambda(E) + \lambda(I) = \lambda(E \cup I) \le \lambda\left([0,1]\right) = 1,$$

pa slijedi

$$\lambda(E) \le 1 - \lambda(I) < 1,$$

što je kontradikcija s uvjetima zadatka. Dakle, za svaki neprazan otvoren skup $I \subseteq [0,1]$ vrijedi $E \cap I \neq \emptyset$, odnosno $E$ je gust podskup od $[0,1]$.

2.86. Zadatak
*Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih podskupova od $[0,1]$, izmjerivih u smislu Lebesguea, za koje je $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$. Pokažite da za svaki $\varepsilon \in (0,1)$ postoji podniz $(A_{k_n})$ od $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da vrijedi*

$$\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\Big) > \varepsilon.$$

---

**Rješenje.** Neka je $\varepsilon \in (0,1)$. Iz tvrdnje da je $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$ vidimo da postoji podniz $(A_{k_n})$ od $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za čije članove vrijedi

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\varepsilon}{2^n}.$$

Promotrimo sada izmjerive skupove $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$ i $B = [0,1]\backslash A$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}\lambda(B) = \lambda([0,1]\backslash A) &= \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}([0,1]\backslash A_{k_n})\Big)\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\lambda([0,1]\backslash A_{k_n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\lambda(A_{k_n}))\\ &< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\varepsilon}{2^n} = 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je $\lambda(A) = 1 - \lambda(B) > 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon$.

2.87. ZADATAK

*Pokažite da Borel–Cantellijeva lema dokazana u zadatku 2.41. ne vrijedi u slučaju kada umjesto vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ imamo prostor mjere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ te kada izostavimo uvjet $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n) < \infty$, gdje je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih skupova.*

---

**Rješenje.** Neka je $A_n := [0,n]$, $n \in \mathbb{N}$. Sada je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$$

te

$$\lambda\big(\limsup_n A_n\big) = \lambda([0,\infty)) = \infty \neq 0.$$

2.88. ZADATAK

*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ i $t > 0$ realan broj. Dokažite da je $\lambda(tA) = t^d\lambda(A)$ za svaki Borelov skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$.*

---

**Rješenje.** Prema zadatku 2.13. slijedi da je skup $tA$ Borelov. Definirajmo sada novu mjeru $\mu(A) := \lambda(tA)$. Mjere $\mu$ i $t^d\lambda$ podudaraju se na familiji svih $d$-intervala (označimo ju s $\mathcal{I}$). Kako je $\mathcal{I}$ $\pi$-sistem, prema teoremu 2.31. te se mjere podudaraju na $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2.89. ZADATAK

*Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgueov skup mjere $\lambda(A) > 0$.*

(a) *Pokažite da za svaki $\alpha \in (0,1)$ postoji otvoreni interval $I_\alpha$ takav da je*

$$\lambda(A \cap I_\alpha) \ge \alpha\lambda(I_\alpha).$$

(b) *Pokažite da skup $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ sadrži otvoren interval oblika $(-a, a)$, $a > 0$.*

---

**Rješenje.**

(a) Prema definiciji Lebesgueove mjere, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz otvorenih intervala $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Neka je $\varepsilon < \beta\lambda(A)$, $\beta > 0$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\beta)\lambda(A) \leq (1+\beta)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n),$$

pa postoji barem jedan $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\lambda(I_n) \leq (1+\beta)\lambda(A \cap I_n),$$

tj.

$$\frac{1}{1+\beta}\lambda(I_n) \leq \lambda(A \cap I_n).$$

Za $\beta = \frac{1}{\alpha} - 1$ dobivamo tvrdnju.

(b) Prema (a) postoji interval $I = (a, b)$ takav da je

$$\tfrac{3}{4}\lambda(I) \leq \lambda(A \cap I).$$

Neka je $F := A \cap I$ i $l := \lambda(I) = b - a$. Pokažimo najprije da je $[0, l/2) \subset F - F$: Za $x \in [0, l/2)$ vrijedi

$$F \cup (F + x) \subset I \cup (I + x) \subset (a, b + x).$$

Kada bi bilo $x \notin F - F$, zbog $F \cap (F + x) = \emptyset$ vrijedilo bi

$$2\lambda(F) = \lambda(F) + \lambda(F + x) = \lambda(F \cup (F + x)) \leq b + x - a = l + x < \frac{3}{2}l,$$

iz čega bi slijedilo da je $\lambda(F) < \frac{3}{4}l$, tj.

$$\lambda(A \cap I) < \tfrac{3}{4}\lambda(I),$$

što je kontradikcija s polaznom pretpostavkom.

Dakle, pokazali smo da je $[0, l/2) \subset F - F$, odakle očito slijedi

$$(-l/2, l/2) \subset F - F \subset A - A.$$

2.90. Zadatak

*Neka je $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ koja je invarijantna na translacije sa svojstvom $\mu((0, 1]) = 1$. Dokažite da je tada $\mu = \lambda$, tj. da je dana mjera upravo Lebesgueova.*

**Rješenje.** Dovoljno je pokazati da je

$$\mu((a,b]) = b - a \text{ za } a < b,\ a,b \in \mathbb{R},$$

odnosno zbog pretpostavljene translatorne invarijantnosti dovoljno će biti pokazati jednakost

$$\mu((0,b]) = b,\ b > 0$$

jer iz toga direktno slijedi

$$\mu((a,b]) = \mu((0,b-a]+a) = \mu((0,b-a]) = b - a.$$

Pokažimo najprije da je

$$\mu((0,b]) = b \text{ za } 0 < b < 1.$$

Koristeći $\sigma$–aditivnost i translatornu invarijantnost mjere $\mu$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
1 = \mu((0,1]) &= \mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right] \cup \left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \cup \cdots \cup \left(\frac{n-1}{n},1\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left(\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right] + \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right]\right) \\
&= n \cdot \mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right]\right),
\end{aligned}$$

pa je

$$\mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

Na isti način dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(0,\frac{m}{n}\right]\right) &= \mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right] \cup \left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \cup \cdots \cup \left(\frac{m-1}{n},\frac{m}{n}\right]\right) \\
&= m \cdot \mu\left(\left(0,\frac{1}{n}\right]\right) = \frac{m}{n},
\end{aligned}$$

odnosno za $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ je $\mu((0,q]) = q$.
Ako je $p \in (0,1)$ i $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz iz $\mathbb{Q}$ tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, onda iz svojstva neprekidnosti mjere na padajući niz skupova slijedi

$$\mu((0,p]) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,p_n]\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu((0,p_n]) = \lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Nadalje, neka je $r \in \mathbb{R}_+$ i neka je $[r]$ najveće cijelo od $r$. Koristeći osnovna svojstva mjere te prethodno dokazano dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mu\left((0,r]\right) &= \mu\left((0,[r]] \cup ([r],r]\right) = \mu\left((0,[r]]\right) + \mu\left(([r],r]\right) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{[r]}(i-1,i]\Big) + \mu\left(([r],r]\right) = \sum_{i=1}^{[r]} \mu\left((i-1,i]\right) + \mu\left(([r],r]\right) \\
&= \mu\left((0,1]\right) + \mu\left((1,2]\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad + \mu\left(([r]-2,[r]-1]\right) + \mu\left(([r]-1,[r]]\right) + \mu\left(([r],r]\right).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\mu\left((0,1]\right) &= 1 \\
\mu\left((1,2]\right) &= \mu\left((0,1]+1\right) = \mu\left((0,1]\right) = 1 \\
\mu\left((2,3]\right) &= \mu\left((0,1]+2\right) = \mu\left((0,1]\right) = 1 \\
&\cdots \\
\mu\left(([r]-2,[r]-1]\right) &= \mu\left((0,1]+[r]-2\right) = \mu\left((0,1]\right) = 1 \\
\mu\left(([r]-1,[r]]\right) &= \mu\left((0,1]+[r]-1\right) = \mu\left((0,1]\right) = 1
\end{aligned}$$

iz (2.15) slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mu\left((0,r]\right) &= \sum_{i=1}^{[r]} 1 + \mu\left(([r],r]\right) = [r] + \mu\left((0,r-[r]]+[r]\right) \\
&= [r] + \mu\left((0,r-[r]]\right) = [r] + r - [r] = r,
\end{aligned}$$

zbog $r - [r] < 1$.

## 2.7. Cantorov skup i Cantorova funkcija

Cantorov[9] trijadski skup je neprebrojiv skup $K \subset [0,1]$ Lebesgueove mjere $\lambda(K) = 0$, kao što ćemo kasnije pokazati u zadacima. Konstrukciju skupa $K$ započinjemo s jediničnim segmentom $K_0 := [0,1]$ koji podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dobivamo skup $K_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Konstrukciju nastavljamo indukcijom po $n$. Skup $K_n$, $n \geq 2$ dobiva se iz skupa $K_{n-1}$ tako da svaki segment od $K_{n-1}$ podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval. Uočimo da je svaki od skupova $K_n$, $n \in \mathbb{N}$ unija od $2^n$ disjunktnih segmenata duljine $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Nakon $n$-tog koraka konstrukcije izbačeni su međusobno disjunktni intervali

$$J_n^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Cantorov skup definira se kao presjek

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n,$$

pa je

$$K^c = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_n^k\Big).$$

Skup $K$ je neprazan, omeđen i zatvoren, pa je očito i kompaktan.

Uz Cantorov skup važno je spomenuti i Cantorovu funkciju $c : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiranu formulom

$$c(0) = 0, \quad c(1) = 1, \quad c(x) = \begin{cases} h(x), & \text{ako je } x \in K^c \\ \sup\{h(t) : t \in K^c, t \leq x\}, & \text{ako je } x \in K \cap (0,1), \end{cases}$$

gdje je $h : K^c \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$h(x) := \frac{k}{2^n}, \qquad x \in J_n^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots 2^n - 1.$$

Cantorova funkcija $c$ je monotono rastuća i uniformno neprekidna na $[0,1]$.

## Riješeni zadaci

---

2.91. Zadatak
*Pokažite da je $\lambda(K) = 0$.*

---

**Rješenje.** Kako je svaki od skupova $K_n$, $n \in \mathbb{N}$ unija od $2^n$ disjunktnih segmenata duljine $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, iz svojstva $\sigma$–aditivnosti mjere slijedi da je $\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Primjenom

[9] Georg Cantor (1845.-1918.), njemački matematičar.

svojstva neprekidnosti mjere na padajući niz skupova $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zbog $\lambda(K_1) = \frac{2}{3} < \infty$ slijedi da je

$$\lambda(K) = \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

2.92. Zadatak

*Neka je* $0.a_1a_2a_3\dots$ *ternarni prikaz realnog broja* $x \in [0,1]$, *tj.*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0,1,2\}.$$

(a) *Pokažite da se Cantorov skup* $K$ *podudara sa skupom svih realnih brojeva iz segmenta* $[0,1]$ *koji u svom ternarnom prikazu nemaju broj* $1$, *tj.*

$$K = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0,2\} \text{ za svaki } n \Big\}.$$

(b) *Iskoristite* (a) *i pokažite da je* $K$ *neprebrojiv skup.*

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $x \in K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, odnosno vrijedi da je $x \in K_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako je $x \in K_1$, onda je $x \in [0,1/3]$ ili $x \in [2/3,1]$, odnosno u ternarnom prikazu vrijedi da je $x \in [0.0000\dots, 0.0222\dots]$ ili $x \in [0.2000\dots, 0.2222\dots]$, tj. u oba slučaja postoji $a_1 \in \{0,2\}$ takav da je

$$0.a_1 0000\dots \le x \le 0.a_1 2222\dots$$

Ako je $x \in K_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$ u ternarnom prikazu vrijedi da je $x \in [0.00000\dots, 0.00222\dots]$ ili $x \in [0.02000\dots, 0.02222\dots]$ ili $x \in [0.20000\dots, 0.20222\dots]$ ili $x \in [0.22000\dots, 0.22222\dots]$, tj. u sva četiri slučaja postoje $a_1, a_2 \in \{0,2\}$ tako da je

$$0.a_1a_2 000\dots \le x \le 0.a_1a_2 222\dots$$

Sada se indukcijom lako pokaže da za svaki $x \in K_n$ postoje jednoznačno određeni brojevi $a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}$ takvi da je

$$0.a_1a_2\dots a_n 0000\dots \le x \le 0.a_1a_2\dots a_n 2222\dots$$

Dakle, ako je $x \in K$, onda se $x$ može zapisati u obliku $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ gdje je $a_n \in \{0,2\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Obratno, neka je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ gdje su $a_n \in \{0,2\}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} \le x \le \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^k}. \tag{2.16}$$

Za $k = 1$ slijedi da je

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3},$$

odnosno za $a_1 = 0$ vrijedi da je $x \in [0, 1/3]$, a za $a_1 = 2$ dobivamo $x \in [2/3, 1]$, odakle slijedi $x \in K_1$. Na isti način iz (2.16) za svaki $k \in \mathbb{N}$ odabirom brojeva $a_1, \ldots, a_k \in \{0, 2\}$ dobivamo da je $x \in K_k$.

(b) Definirajmo preslikavanje $h : K \to [0, 1]$ na sljedeći način:
Za $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0, 2\}$, neka je

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \text{ gdje je } b_n = \frac{a_n}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Iz ternarnog prikaza brojeva $\frac{1}{3} = 0.0222\ldots$ i $\frac{2}{3} = 0.2000\ldots$ i definicije funkcije $h$ slijedi da je $h(1/3) = h(2/3) = 1/2$, odnosno funkcija $h$ nije injekcija. Nadalje, primijetimo da iz ternarnog prikaza brojeva $0 = 0.0000\ldots$ i $1 = 0.2222\ldots$ slijedi da je $h(0) = 0$ i $h(1) = 1$. Pokažimo još da je funkcija $h$ surjekcija. Neka je $y \in [0, 1]$ proizvoljan element. Tada $y$ možemo zapisati u obliku $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, gdje je $b_n = \frac{a_n}{2} \in \{0, 1\}$. Konstruirajmo $c \in [0, 1]$ takav da je $c_n = 2b_n$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $c_n$ $n$-ta znamenka u prikazu broja $c$. Po konstrukciji slijedi da $c$ ima jednoznačno određen ternarni prikaz koji ne sadrži znamenku 1, pa prema prethodno dokazanoj tvrdnji (a) slijedi da $c$ odgovara nekom $x \in K$ te po konstrukciji od $x$ slijedi da je $h(x) = y$, odnosno možemo zaključiti da je funkcija $h$ surjekcija. To znači da je neki podskup od $K$ ekvipotentan s $[0, 1]$, pa $K$ nije prebrojiv.

2.93. Zadatak

*Dokažite da ako Cantorov skup $K$ zbrojimo sa samim sobom dobivamo segment $[0, 2]$, tj.*

$$K + K = [0, 2].$$

---

**Rješenje.** Vrijedi da je $K \subseteq [0, 1]$, pa je i $K + K \subseteq [0, 2]$.
Kako bismo dokazali obratnu inkluziju, uzmimo proizvoljan $x \in [0, 2]$ i neka je $c = x/2 \in [0, 1]$. Možemo promotriti sljedeća tri slučaja:

- Ako je $x = 0$, onda je $c = 0 \in K$, pa je $x = c + c \in K + K$.
- Ako je $x = 2$, onda je $c = 1 \in K$, pa je $x = c + c \in K + K$.
- Ako je $0 < x < 2$, možemo zaključiti da pored $x = c + c$, $c \in (0, 1)$ može biti i $x = a + b$, $a \neq b$, $a, b \in (0, 1)$. Sada iz jednakosti $a + b = 2c$, koristeći ternarni prikaz svakog od danih brojeva $a, b, c \in (0, 1)$, dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{3^n}, \qquad a_n, b_n, c_n \in \{0, 1, 2\},\ n \in \mathbb{N},$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n - 2c_n}{3^n} = 0.$$

Ako je $c_n = 0$, onda je $a_n = b_n = 0$. Ako je $c_n = 1$, onda je $a_n = 0$ i $b_n = 2$ ili $a_n = 2$ i $b_n = 0$ te ako je $c_n = 2$, onda je $a_n = b_n = 2$. Primijetimo da smo u slučaju $c_n = 1$ isključili mogućnost da je $a_n = b_n = 1$, jer bi tada, zbog $a_n = b_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo $a = b$. Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}, \qquad a_n, b_n \in \{0, 2\} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

tj. prema prethodnom zadatku slijedi da je $x \in K + K$.

2.94. ZADATAK

*Pokažite da je Cantorov skup jednak skupu svih svojih gomilišta. Skupove s tim svojstvom nazivamo* savršenim.

---

**Rješenje.** Neka je $K'$ skup svih gomilišta Cantorovog skupa. Kako je $K$ zatvoren skup, vrijedi $K' \subseteq K$ te preostaje pokazati obratnu inkluziju. Kako bi pokazali da je proizvoljna točka $x_0 \in K$ gomilište skupa $K$, dovoljno je pokazati da za svaki $\delta > 0$ interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sadrži barem jednu točku $x \in K$, $x \neq x_0$. Kako je $x_0 \in K$, zbog $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ vrijedi da je $x_0 \in K_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljan $\delta > 0$ odaberimo dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$ tako da je $\delta > \dfrac{1}{3^n}$. Kako je $x_0 \in K_n$ i $K_n$ je disjunktna unija $2^n$ segmenata duljine $1/3^n$, jasno je da je $x_0$ sadržan u točno jednom od navedenih $2^n$ segmenata koji je očito podskup od $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Iz prethodne konstrukcije vidimo da interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mora sadržavati barem jednu točku skupa $K$ različitu od $x_0$, što dovodi do tražene tvrdnje.

2.95. ZADATAK

*Podsjetimo se da ako imamo preslikavanje $f : X \to Y$ koje je neprekidna bijekcija, pri čemu je $X$ kompaktan, a $Y$ Hausdorffov prostor, onda je $f$ homeomorfizam, odnosno neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidno preslikavanje* (vidi [12, teorem 10., str. 235]). *Neka je $\varphi = c + i$, gdje je $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ Cantorova funkcija, te $i : [0,1] \to [0,1]$ identiteta, tj. $i(x) = x$ za $x \in [0,1]$. Pokažite da je $\varphi$ homeomorfizam s $[0,1]$ na $[0,2]$, koji je ujedno i strogo rastuća funkcija.*

---

**Rješenje.** Za Cantorovu funkciju vrijedi $c(0) = 0$ i $c(1) = 1$, dok za identitetu očito vrijedi isto. Dakle, $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 2$. Nadalje, zbog neprekidnosti funkcija $c$, $i$, iz poznate činjenice da neprekidna funkcija preslikava segment na segment (vidi [12, korolar 3., str. 222]), slijedi da za svaki $\alpha \in (0,2)$ postoji $x \in (0,1)$ tako da je $\varphi(x) = \alpha$. Dakle, $\varphi([0,1]) = [0,2]$.

Kako je $c$ rastuća te $i$ strogo rastuća funkcija na $[0,1]$, to je i funkcija $\varphi$ strogo rastuća, pa je $\varphi : [0,1] \to [0,2]$ injekcija, a zbog prethodnog razmatranja i surjekcija. Dakle, kako je $\varphi$ neprekidna bijekcija s kompaktnog prostora $[0,1]$ na Hausdorffov prostor $[0,2]$, odmah slijedi da je ona i homeomorfizam.

## 2.8. Lebesgue-Stieltjesova mjera na $\mathbb{R}$

Neka je $\mathcal{C}$ familija svih poluotvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika $\langle a,b]$, $a \le b$. Za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$ s $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_n \in \mathcal{C}$ koji pokrivaju skup $A$, tj.

$$\mathcal{C}_A := \Big\{ (\langle a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} : a_n \le b_n \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n] \Big\}.$$

Nadalje, neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija, tj. neka ima svojstvo da je u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ limes zdesna $F(x_0+) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x_0<x}} F(x) = F(x_0)$.

Funkciju $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ definiranu formulom

$$\begin{aligned}\mu_F^\star(A) :&= \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(\langle a_n, b_n]) : (\langle a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A \Big\} \\ &= \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \big[F(b_n) - F(a_n)\big] : (\langle a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A \Big\},\end{aligned}$$

gdje je $\tau : \mathcal{C} \to [0,\infty]$ funkcija definirana s

$$\tau(\langle a,b]) := F(b) - F(a), \qquad a \le b,$$

nazivamo Lebesgue-Stieltjesova[10] vanjska mjera na $\mathbb{R}$ inducirana funkcijom $F$.

2.46. PROPOZICIJA
*Funkcija* $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0,\infty]$ *je vanjska mjera.*

---

2.47. PROPOZICIJA
$\mu_F^\star(\{a\}) = F(a) - F(a-), \qquad a \in \mathbb{R}.$

---

2.48. PROPOZICIJA
*Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a < b$. *Tada je*

(a) $\mu_F^\star([a,b]) = F(b) - F(a-)$,

(b) $\mu_F^\star([a,b\rangle) = F(b-) - F(a-)$,

(c) $\mu_F^\star(\langle a,b]) = F(b) - F(a)$,

(d) $\mu_F^\star(\langle a,b\rangle) = F(b-) - F(a)$.

---

Prema teoremu 2.23. skup $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$ svih $\mu_F^\star$–izmjerivih podskupova od $\mathbb{R}$ je $\sigma$-algebra. Restrikciju vanjske mjere $\mu_F^\star$ na $\sigma$–algebru $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$ označavamo s $\mu_F$ ili $\mathrm{d}\mu_F$ i nazivamo Lebesgue–Stieltjesova mjera inducirana funkcijom $F$.

[10] Thomas Joannes Stieltjes (1856.-1894.), nizozemski astronom i matematičar.

## Riješeni zadaci

2.96. Zadatak

*Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < -1 \\ 1 + x, & \text{ako je } -1 \le x < 0 \\ 2 + x^2, & \text{ako je } 0 \le x < 2 \\ 9, & \text{ako je } x \ge 2. \end{cases}$$

*Izračunajte Lebesgue–Stieltjesovu mjeru $\mu_F$ sljedećih skupova:*

(a) $\{2\}$, (b) $[-1/2, 3)$, (c) $(-1, 0] \cup (1, 2)$,

(d) $[0, 1/2) \cup (1, 2]$, (e) $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

**Rješenje.**

(a) $\mu_F(\{2\}) = 3$, (b) $\mu_F([-1/2, 3)) = \frac{17}{2}$,

(c) $\mu_F((-1, 0] \cup (1, 2)) = 5$, (d) $\mu_F([0, 1/2) \cup (1, 2]) = \frac{29}{4}$.

(e) Dani skup možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\} &= \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, -1/2) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/2, n).\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\mu_F\left(\{x \in \mathbb{R} :\ |x| + 2x^2 > 1\}\right) &= \mu_F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, -1/2) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/2, n)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_F\left((-n, -1/2) \cup (1/2, n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_F\left((-n, -1/2)\right) + \lim_{n\to\infty} \mu_F\left((1/2, n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[F(-1/2-) - F(-n) + F(n-) - F(1/2)\right] = \frac{29}{4}.\end{aligned}$$

2.97. Zadatak

*Neka je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F(x) := \begin{cases} x, & \text{ako je } x < 0 \\ 1 + x, & \text{ako je } x \ge 0. \end{cases}$$

*Ispitajte jesu li Lebesgueova i Lebesgue–Stieltjesova mjera jednočlanog skupa $\{0\}$ jednake.*

**Rješenje.** Nisu jednake jer je

$$\mu_F(\{0\}) = 1 \neq 0 = \lambda(\{0\}).$$

2.98. ZADATAK

*Neka je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \leq 0 \\ 5, & \text{ako je } x > 0. \end{cases}$$

*Ispitajte jesu li Lebesgueova i Lebesgue–Stieltjesova mjera jednake na skupu $(0,5)$.*

**Rješenje.** Lako se vidi da je

$$\mu_F((0,5)) = 5 = \lambda((0,5)).$$

2.99. ZADATAK

*Neka je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}, & \text{ako je } x < 0 \\ \\ \dfrac{2\pi}{\pi - \operatorname{arctg} x}, & \text{ako je } x \geq 0. \end{cases}$$

*Izračunajte Lebesgue–Stieltjesovu mjeru skupa $\{0\}$. Ispitajte je li tako definirana mjera vjerojatnosna.*

**Rješenje.** Iz propozicije 2.47. i definicije funkcije $F$ slijedi da je

$$\mu_F(\{0\}) = F(0) - F(0-) = 2 - \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 2 - 1 = 1.$$

Sada, primjenom svojstva o neprekidnosti mjere na rastuće nizove, dobivamo

$$\begin{aligned} \mu_F(\mathbb{R}) &= \mu_F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n]\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu_F((-n,n]) = \lim_{n\to\infty} (F(n) - F(-n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{2\pi}{\pi - \operatorname{arctg} n} - \frac{\ln(1+n^2)}{n^2} \right) = \frac{2\pi}{\pi - \pi/2} - 0 = 4, \end{aligned}$$

pa možemo zaključiti da $\mu_F$ nije vjerojatnosna mjera.

2.100. ZADATAK

*Neka je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F(x) := \begin{cases} 2\operatorname{arctg} x - 2, & \text{ako je } x < 0 \\ x - 1, & \text{ako je } 0 \leq x < 1 \\ 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}, & \text{ako je } x \geq 1. \end{cases}$$

*Izračunajte Lebesgue–Stieltjesovu mjeru jednočlanog skupa $\{x\}$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Ispitajte je li tako definirana mjera konačna.*

**Rješenje.** Iz definicije funkcije $F$ vidimo da ona ima prekide samo u točkama 0 i 1, pa iz propozicije 2.47. slijedi da je

$$\mu_F(\{x\}) = F(x) - F(x-) = 0 \text{ za sve } x \in \mathbb{R},\, x \neq 0, 1.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} \mu_F(\{0\}) &= F(0) - F(0-) = -1 - (2\operatorname{arctg} 0 - 2) = 1 \\ \mu_F(\{1\}) &= F(1) - F(1-) = 1 + \mathrm{e} - (1 - 1) = 1 + \mathrm{e}. \end{aligned}$$

Sada, primjenom svojstva o neprekidnosti mjere na rastuće nizove, dobivamo

$$\begin{aligned} \mu_F(\mathbb{R}) &= \mu_F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n]\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu_F((-n, n]) = \lim_{n\to\infty} (F(n) - F(-n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{\mathrm{e}^n}{n} - 2\operatorname{arctg} n\right) = +\infty, \end{aligned}$$

pa možemo zaključiti da mjera $\mu_F$ nije konačna.

2.101. Zadatak

*Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija. Pokažite da za svaku točku $x_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$F(x_0-) = \sup\{F(x) : x < x_0\}, \tag{2.17}$$

*gdje je $F(x_0-) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} F(x)$ limes slijeva funkcije $F$ u točki $x_0$ te da je*

$$F(x_0-) \leq F(x_0) = F(x_0+),$$

*pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $F$ neprekidna u točki $x_0$.*

**Rješenje.** Zbog rasta funkcije $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skup $\{F(x) : x < x_0\}$ je odozgor omeđen s $F(x_0)$. Neka je

$$a := \sup\{F(x) : x < x_0\} \leq F(x_0).$$

Kako je $a \leq F(x_0)$, dovoljno je dokazati samo jednakost (2.17), tj. treba pokazati da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je

$$|F(x) - a| < \varepsilon \text{ za svaki } x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Zaista, po definiciji supremuma $a$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je

$$a - \varepsilon < F(x_0 - \delta) \leq a.$$

Zbog toga i zbog rasta funkcije $F$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je

$$F(x) \in (a - \varepsilon, a].$$

2.102. ZADATAK

*Neka je $\mu$ mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, takva da je*

$$\mu\left((-n, n]\right) < \infty \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

*Pokažite da je funkcija $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu\left((0, x]\right), & \text{ako je } x > 0 \\ 0, & \text{ako je } x = 0 \\ -\mu\left((x, 0]\right), & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

*monotono rastuća i zdesna neprekidna funkcija. Monotono rastuće i zdesna neprekidne funkcije nazivamo* Stieltjesove funkcije (vidi [18, str. 95]).

---

**Rješenje.** Pokažimo najprije monotonost:

- Ako je $x \leq 0 \leq y$, onda je iz definicije funkcije $F_\mu$ jasno da je

$$F_\mu(x) \leq 0 \leq F_\mu(y).$$

- Ako je $0 < x \leq y$, vrijedi $(0, x] \subseteq (0, y]$, pa je prema monotonosti mjere

$$0 \leq F_\mu(x) = \mu\left((0, x]\right) \leq \mu\left((0, y]\right) = F_\mu(y).$$

- Ako je $x \leq y < 0$, onda je $(y, 0] \subseteq (x, 0]$ i vrijedi

$$0 \leq -F_\mu(y) = \mu\left((y, 0]\right) \leq \mu\left((x, 0]\right) = -F_\mu(x),$$

  tj. $F_\mu(x) \leq F_\mu(y) \leq 0$.

Iz prethodnog razmatranja zaključujemo da je $F_\mu$ monotono rastuća funkcija. Pokažimo da je neprekidna zdesna. Promotrimo slučaj kada je $x \geq 0$, iz kojega analogno dobivamo tvrdnju i u slučaju kada je $x < 0$.

- Neka je najprije $x > 0$. Uzmimo proizvoljan, padajući niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tada niz intervala $\left((0, x_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ teži prema $(0, x]$, kada $n \to \infty$. Koristeći neprekidnost mjere na padajuće nizove dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left((0, x_n]\right) = \mu\left((0, x]\right) = F_\mu(x).$$

- Ako je $x = 0$, uzmimo padajući niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i niz intervala $\left((0, x_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pada prema $\emptyset$ kada $n$ raste prema $+\infty$. Prema neprekidnosti mjere na padajuće nizove imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left((0, x_n]\right) = \mu\left(\emptyset\right) = 0 = F_\mu(0),$$

  iz čega slijedi neprekidnost zdesna.

2.103. ZADATAK

*Pronađite odgovarajuću Stieltjesovu funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da se Lebesgue–Stieltjesova mjera $\mu_F$ podudara s Diracovom delta mjerom $\delta_0$ koncentriranom u točki $x = 0$.*

---

**Rješenje.** Kako je $\delta_0\left((a,b]\right) = 0$ za $a, b < 0$ kao i za $a, b > 0$, funkcija $F$ mora biti konstanta na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$. Ako je $a \leq 0 < b$, vrijedi $\delta_0\left((a,b]\right) = 1$, odnosno i funkcija $F$ mora imati skok u nuli. Ako još uzmemo u obzir da $F$ mora biti monotono rastuća i neprekidna zdesna, onda ju možemo zapisati u obliku

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < 0 \\ 1, & \text{ako je } x \geq 0 \end{cases} = \chi_{[0,\infty)}(x).$$

Isto tako, kao rješenje možemo uzeti i funkciju $F(x) + c$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

2.104. ZADATAK

*Ako je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* afina *rastuća, zdesna neprekidna funkcija, pokažite da je pripadna Lebesgue–Stieltjesova mjera invarijantna na translacije.*

---

**Rješenje.** Neka je funkcija $F$ afina, odnosno oblika je $F(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Primijetimo da je dovoljno promotriti Lebesgue–Stieltjesovu mjeru na skupu $A = (c, d]$, $c, d \in \mathbb{R}$ jer familija skupova tog oblika, prema teoremu 2.7., generira Borelovu $\sigma$–algebru. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mu_F\left(A + x\right) &= F(d + x) - F(c + x) = a(d + x) + b - a(c + x) - b \\ &= ad + b - (ac + b) = F(d) - F(c) = \mu_F(A). \end{aligned}$$

2.105. ZADATAK

*Neka su $A_1, A_2, A_3 \subseteq \mathbb{R}$ u parovima disjunktni skupovi, takvi da je $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}$. Koristeći tvrdnju da je*

$$\mu_F^\star(B) = \mu_F^\star(B \cap A_1) + \mu_F^\star(B \cap A_2) + \mu_F^\star(B \cap A_3), \ \forall B \subseteq \mathbb{R}$$

*dokažite da je svaki od skupova $A_1, A_2, A_3$ $\mu_F^\star$–izmjeriv, pri čemu je $\mu_F^\star$ Lebesgue–Stieltjesova vanjska mjera.*

---

**Rješenje.** Kako je

$$\begin{aligned} \mu_F^\star(B) &= \mu_F^\star(B \cap A_1) + \mu_F^\star(B \cap A_2) + \mu_F^\star(B \cap A_3) \\ &= \mu_F^\star\left(B \cap A_1\right) + \mu_F^\star\left(B \cap (A_2 \cup A_3)\right) \\ &= \mu_F^\star\left(B \cap A_1\right) + \mu_F^\star\left(B \cap A_1^c\right), \ \forall B \subseteq \mathbb{R}, \end{aligned}$$

slijedi da je skup $A_1$ $\mu_F^\star$–izmjeriv, a analogno se pokaže i za skupove $A_2$ i $A_3$.

## 2.9. Prostor potpune mjere

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $N \subseteq X$ kažemo da je $\mu$–zanemariv ili kraće zanemariv ako postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Lako je uočiti da je svaki skup mjere nula ujedno i zanemariv te da zanemariv skup ne mora biti izmjeriv. Prazan skup je zanemariv.

Neka je $\mathcal{N}_\mu$ skup svih $\mu$–zanemarivih skupova. Ako je $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{A}$, tj. ako $\sigma$–algebra $\mathcal{A}$ sadrži sve zanemarive skupove, onda za prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da je prostor potpune mjere ili potpun prostor, a za mjeru $\mu$ da je potpuna mjera.

2.49. Primjedba
*Restrikcija vanjske mjere $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ na $\sigma$-algebru $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je potpuna mjera. Specijalno, Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ je potpuna. Nažalost, restrikcija Lebesgueove mjere na Borelovu $\sigma$–algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nije potpuna mjera.*

---

U svrhu uvođenja rezultata koji slijede, definirajmo familiju

$$\mathcal{A}_\mu := \{E \cup N : E \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}$$

za koju se može pokazati da je $\sigma$–algebra na $X$ (vidi [10, propozicija 2.70]).

2.50. Propozicija
*Skup $A \subseteq X$ je član familije $\mathcal{A}_\mu$ ako i samo ako postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je*

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0.$$

---

2.51. Definicija
*Neka su $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ i $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dva prostora mjere na istom skupu $X$. Kažemo da je $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$* proširenje *od $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ ako je $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ i $\mu_2(A) = \mu_1(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}_1$.*

---

2.52. Propozicija
*Neka je funkcija $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ definirana formulom*

$$\tilde{\mu}(A) := \mu(E) = \mu(F), \tag{2.18}$$

*gdje su $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je*

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0.$$

*Tada vrijedi:*

(a) *funkcija $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ je mjera koja proširuje mjeru $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,*

(b) *$(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ je najmanji prostor potpune mjere koji proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$, tj. ako neki drugi prostor potpune mjere $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$, onda je $\mathcal{A}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}_{|\mathcal{A}_\mu} = \tilde{\mu}$.*

2.53. PRIMJEDBA
*Može se pokazati da je mjera $\tilde{\mu}$ iz prethodne propozicije dobro definirana, tj. ne ovisi o izboru skupova $E, F \in \mathcal{A}$* (vidi [10, str. 82]).

2.54. DEFINICIJA
*Prostor $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ naziva se* upotpunjenje prostora $(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Pri tome za $\sigma$–algebru $\mathcal{A}_\mu$ kažemo da je* upotpunjenje $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$, *a za mjeru $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ da je* upotpunjenje mjere $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

2.55. PRIMJEDBA
*Ako je prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ potpun i $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ upotpunjenje tog prostora, onda iz definicije 2.51. i propozicije 2.52. slijedi*

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = (X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu}).$$

## Riješeni zadaci

2.106. ZADATAK
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, pri čemu je $X = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{4\}, \{3, 5\}\}$ i $\mu = \delta_4$, Diracova delta mjera koncentrirana u $x = 4$. Ispitajte jesu li skupovi*

(a) $N_1 = \{5\}$,

(b) $N_2 = \{4\}$

*$\mu$–zanemarivi.*

**Rješenje.**

(a) Skup $N_1$ je zanemariv jer je $N_1 \subseteq \{3, 5\}$ i $\delta_4(\{3, 5\}) = 0$.

(b) Najprije primijetimo da su skupovi $X$ i $\{4\}$ jedini nadskupovi skupa $N_2$ koji pripadaju $\sigma$-algebri $\mathcal{A}$. Zbog $N_2 \subseteq X$ i $\delta_4(X) = 1$ te $N_2 \subseteq \{4\}$ i $\delta_4(\{4\}) = 1$ možemo zaključiti da skup $N_2$ nije zanemariv jer je svaki njegov izmjeriv nadskup pozitivne mjere.

2.107. ZADATAK
*Neka su $a, b$ i $c$ međusobno različiti realni brojevi. Nadalje, neka je $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ i $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi:*

$$\mu(\emptyset) = \mu(\{b, c\}) = 0, \;\; \mu(X) = \mu(\{a\}) = 1.$$

*Ispitajte je li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor potpune mjere.*

---

**Rješenje.** Lako se vidi da je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere pa ispitajmo je li potpun, odnosno je li svaki $\mu$–zanemariv skup ujedno i izmjeriv. Kako je, npr.,

$$\{b\} \subseteq \{b, c\} \in \mathcal{A} \text{ i } \mu(\{b, c\}) = 0,$$

to je skup $\{b\}$ zanemariv, ali nije izmjeriv, tj. $\{b\} \notin \mathcal{A}$, pa dani prostor mjere nije potpun.

2.108. Zadatak
*Nađite familiju svih skupova mjere $\mu$ nula ako je $\mu = \delta_a + \delta_b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

---

**Rješenje.** Neka je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vrijedi da je

$$\mu(B) = 0 \iff a \notin B \text{ i } b \notin B.$$

Kako su $\{a\}, \{b\}$ i $\{a, b\}$ Borelovi skupovi, zbog $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je i skup

$$B \backslash \{a, b\} = \begin{cases} B \backslash \{a\}, & \text{ako je } a \in B \text{ i } b \notin B \\ B \backslash \{b\}, & \text{ako } a \notin B \text{ i } b \in B \\ B \backslash \{a, b\}, & \text{ako su } a, b \in B \\ B, & \text{ako } a, b \notin B \end{cases}$$

Borelov te možemo zaključiti da je familija svih skupova mjere $\mu$ nula

$$\mathcal{N}_\mu = \{B \backslash \{a, b\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

2.109. Zadatak
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite da familija $\mathcal{N}_\mu$ svih $\mu$–zanemarivih skupova ima sljedeća svojstva:*

(a) *ako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, a $M \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N$, onda je $M \in \mathcal{N}_\mu$,*

(b) *ako je $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz $\mu$–zanemarivih skupova, onda je $\bigcup_{n=1}^\infty M_n$ također $\mu$–zanemariv skup.*

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, postoji $B \in \mathcal{A}$ tako da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Sada iz $M \subseteq N \subseteq B$ slijedi tvrdnja.

(b) Za svaki $M_n \in \mathcal{N}_\mu$, $n \in \mathbb{N}$ postoji skup $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ tako da je $M_n \subseteq B_n$ i $\mu(B_n) = 0$. Iz prethodnog direktno slijedi da je $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ i

$$0 \leq \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n) = 0.$$

Dakle, vrijedi $\bigcup_{n=1}^\infty M_n \in \mathcal{N}_\mu$.

2.110. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor potpune mjere, $A \in \mathcal{A}$ te $N \in \mathcal{N}_\mu$. Dokažite da je tada*

$$\mu(A \backslash N) = \mu(A).$$

---

**Rješenje.** Iz potpunosti danog prostora mjere slijedi da je $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{A}$, pa je $N \in \mathcal{A}$, što povlači da je i $A \backslash N \in \mathcal{A}$. Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, postoji skup $B \in \mathcal{A}$ tako da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Sada se lako dobije da je $\mu(N) = 0$, pa iz $A \subseteq (A \backslash N) \cup N$ i $A \backslash N \subseteq A$ slijedi

$$\mu(A \backslash N) \leq \mu(A) \leq \mu\left((A \backslash N) \cup N\right) = \mu(A \backslash N) + \mu(N) = \mu(A \backslash N),$$

što daje traženu tvrdnju.

2.111. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor potpune mjere. Ako je $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq X$ i $A \Delta B \in \mathcal{A}$ skup mjere nula, dokažite da je onda $B \in \mathcal{A}$ i $\mu(B) = \mu(A)$.*

---

**Rješenje.** Kako je

$$A \backslash B, B \backslash A \subseteq A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A),$$

potpunost prostora i pretpostavka $\mu(A \Delta B) = 0$ povlače da je

$$A \backslash B, B \backslash A \in \mathcal{A} \text{ i } \mu(A \backslash B) = \mu(B \backslash A) = 0.$$

Sada iz $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ slijedi $A \cap B \in \mathcal{A}$, pa je i

$$B = (B \backslash A) \cup (A \cap B) \in \mathcal{A}.$$

Konačno, iz

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(B \backslash A) + \mu(B \cap A) = \mu(B \cap A), \\ \mu(A) &= \mu(A \backslash B) + \mu(B \cap A) = \mu(B \cap A) \end{aligned}$$

slijedi $\mu(B) = \mu(A)$.

2.112. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite da za dane familije*

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}_1 &:= \{A \cup B : \, A \in \mathcal{A}, \, B \in \mathcal{N}_\mu\}, \\ \overline{\mathcal{A}}_2 &:= \{A \triangle B : \, A \in \mathcal{A}, \, B \in \mathcal{N}_\mu\}, \\ \overline{\mathcal{A}}_3 &:= \{A \backslash B : \, A \in \mathcal{A}, \, B \in \mathcal{N}_\mu\} \end{aligned}$$

*vrijedi*

$$\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1 = \overline{\mathcal{A}}_2 = \overline{\mathcal{A}}_3.$$

---

**Rješenje.** U zadatku 1.5. dokazali smo da vrijede sljedeće jednakosti koje će nam biti potrebne u nastavku:

(a) $A \cup B = (A \backslash N) \triangle [N \cap (A \cup B)]$,

(b) $A \triangle B = (A \backslash N) \cup [N \cap (A \triangle B)]$,

(c) $A \cup B = (A \cup N) \backslash [(N \backslash B) \backslash A]$,

(d) $A \backslash B = (A \backslash N) \cup (A \cap N \cup B^c)$,

gdje su $A, B, N \subseteq X$ takvi da je $B \subseteq N$.
Pokažimo sada da je $\overline{\mathcal{A}}_1 = \overline{\mathcal{A}}_2$.

$\subseteq$ Neka je $C \in \overline{\mathcal{A}}_1$. Tada je $C = A \cup B$, gdje je $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{N}_\mu$, tj. postoji $N \in \mathcal{A}$ tako da je $B \subseteq N$ i $\mu(N) = 0$. Prema tvrdnji (a) slijedi

$$C = (A \backslash N) \triangle [N \cap (A \cup B)] .$$

Imamo da je $A \backslash N \in \mathcal{A}$, $N \cap (A \cup B) \subseteq N$ te $\mu(N) = 0$, iz čega slijedi da je $N \cap (A \cup B) \in \mathcal{N}_\mu$. Sada možemo zaključiti da je $C \in \overline{\mathcal{A}}_2$.

$\supseteq$ Neka je $C \in \overline{\mathcal{A}}_2$. Tada je $C = A \triangle B$, gdje je $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{N}_\mu$, odnosno postoji $N \in \mathcal{A}$ tako da je $B \subseteq N$ i $\mu(N) = 0$. Iz tvrdnje (b) slijedi da je

$$C = (A \backslash N) \cup [N \cap (A \triangle B)] .$$

Sada je $A \backslash N \in \mathcal{A}$, $N \cap (A \triangle B) \subseteq N$ i $\mu(N) = 0$ te je i $N \cap (A \triangle B) \in \mathcal{N}_\mu$. Slijedi da je $C \in \overline{\mathcal{A}}_1$, čime je dokazana tražena jednakost.

Analogno, koristeći tvrdnje (c) i (d) te definicije familija $\overline{\mathcal{A}}_1$ i $\overline{\mathcal{A}}_3$, možemo dokazati da vrijedi jednakost $\overline{\mathcal{A}}_1 = \overline{\mathcal{A}}_3$.
Naposljetku, za proizvoljan $A \in \mathcal{A}$, možemo zaključiti da je

$$A = A \cup \emptyset \in \mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu \implies A \in \overline{\mathcal{A}}_1,$$

tj. $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}_1$.

2.113. Zadatak
*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je* lokalno izmjeriv *ako je $E \cap A \in \mathcal{A}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\mu(A) < \infty$. Neka je $\bar{\mathcal{A}}$ familija svih lokalno izmjerivih skupova. Očito je $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Ukoliko je $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$, za mjeru $\mu$ i prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da su* zasićeni*.*

(a) *Dokažite da je $\bar{\mathcal{A}}$ $\sigma$–algebra na $X$.*

(b) *Pokažite da je svaka konačna mjera zasićena.*

(c) *Neka je $\mu$ konačna mjera. Definirajmo funkciju $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ formulom*

$$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} \mu(A), & \text{ako je } A \in \mathcal{A} \\ \infty, & \text{ako je } A \in \bar{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A}. \end{cases}$$

*Dokažite:*

(c1) *$\bar{\mu}$ je mjera na $(X, \bar{\mathcal{A}})$, tj. prostor $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

(c2) *Ako je mjera $\mu$ potpuna, onda je i $\bar{\mu}$ potpuna mjera.*

(c3) *Dokažite da je prostor mjere $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ zasićen.*

---

**Rješenje.**

(a) Familiju $\bar{\mathcal{A}}$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X : E \cap A \in \mathcal{A} \text{ za svaki } A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \infty\}.$$

Pokažimo da vrijede svojstva $\sigma$–algebre:

($\sigma$1) $\emptyset \in \mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$

($\sigma$2) Neka je $E \in \bar{\mathcal{A}}$. Tada je $E \subseteq X$ i za svaki $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ vrijedi $E \cap A \in \mathcal{A}$. Kako je $E^c \subseteq X$ i

$$E^c \cap A = A \backslash (A \cap E) \in \mathcal{A},$$

to je i $E^c \in \bar{\mathcal{A}}$.

($\sigma$3) Za proizvoljan niz skupova $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\bar{\mathcal{A}}$, iz definicije familije $\bar{\mathcal{A}}$ slijedi da je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq X$, $E_n \cap A \in \mathcal{A}$, za svaki $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$, pa je očito $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subseteq X$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cap A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cap A \in \mathcal{A}$, iz čega slijedi $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \bar{\mathcal{A}}$.

(b) Neka je $\mu$ konačna mjera na $X$, tj. $\mu(X) < \infty$. Kao što je i navedeno u zadatku, očito je $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Kako bismo pokazali obratnu inkluziju, uzmimo proizvoljan skup $E \in \bar{\mathcal{A}}$. Iz definicije familije $\bar{\mathcal{A}}$ slijedi da je $E \subseteq X$ i za svaki $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ je $E \cap A \in \mathcal{A}$. Nadalje, zbog $\mu(A^c) \leq \mu(X) < \infty$ slijedi da je i $E \cap A^c \in \mathcal{A}$, pa zbog jednakosti

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

dobivamo da je $E \in \mathcal{A}$.

(c1) Prva dva svojstva mjere očito vrijede iz definicije funkcije $\bar{\mu}$. Kako bismo dokazali treće svojstvo, uzmimo proizvoljan niz disjunktnih skupova $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $\bar{\mathcal{A}}$.

- Ako je $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ i
$$\bar{\mu}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n).$$

- Ako $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \notin \mathcal{A}$, onda barem jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ nije iz $\mathcal{A}$ (u suprotnom, ako bi svi skupovi bili iz $\mathcal{A}$, imali bi prethodno opisani slučaj), pa je
$$\bar{\mu}\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(A_n).$$

- Pretpostavimo da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ te da barem jedan od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ nije iz $\mathcal{A}$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $A_1 \in \bar{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A}$. Sada iz definicije familije $\bar{\mathcal{A}}$ slijedi da je $A_1 \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \in \mathcal{A}$, što je kontradikcija s prethodnom pretpostavkom. Dakle, ako je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, onda je svaki od skupova $A_n$, $n \in \mathbb{N}$ element $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$ te imamo već opisani slučaj.

(c2) Vrijedi da je $\bar{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$. Ako je $A \in \bar{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A}$, onda je $\bar{\mu}(A) = \infty$. Ako pretpostavimo da je $A$ $\bar{\mu}$–zanemariv, onda postoji $B \in \bar{\mathcal{A}}$ tako da je $A \subseteq B$ i $\bar{\mu}(B) = 0$. Tada je
$$\infty = \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B) = 0,$$
što vodi na zaključak da su $\bar{\mu}$–zanemarivi skupovi samo oni iz $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$, dakle ako je $\mu$ potpuna mjera, onda je to i $\bar{\mu}$.

(c3) Mjera $\mu$ je konačna, pa je prostor mjere $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ zasićen za sve skupove iz $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$, tj. u tom je slučaju i $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ te $\bar{\mu} = \mu$.

# 3. Izmjerive funkcije

## 3.1. Pojam izmjerive funkcije

U poglavlju 2.2. uveli smo pojam proširenog skupa realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$. U svrhu boljeg razumijevanja pojma izmjerive funkcije najprije ćemo ponoviti neke osnovne stvari vezane uz topologiju na $\bar{\mathbb{R}}$, kao i pojam Borelove $\sigma$-algebre na $\bar{\mathbb{R}}$.
Za bazu topologije na $\bar{\mathbb{R}}$ uzimaju se svi otvoreni skupovi iz $\mathbb{R}$, kao i skupovi oblika

$$(a, \infty] := (a, \infty) \cup \{\infty\} \quad \text{i} \quad [-\infty, b) := \{-\infty\} \cup (-\infty, b).$$

Dakle, ako je neki skup otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$, onda se on može zapisati u jednom od sljedećih oblika:

$$U, \quad U \cup \{-\infty\}, \quad U \cup \{\infty\}, \quad U \cup \{-\infty, \infty\}, \qquad \text{gdje je } U \text{ otvoren u } \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Obratno ne mora vrijediti. Tako je, na primjer, skup $(a, b) \cup \{\infty\}$ oblika (3.1), ali on nije otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$.

3.1. Propozicija
*Neka je $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ Borelova $\sigma$-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$. Tada je*

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}.$$

---

3.2. Definicija
*Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ skup i $f : A \to Y$ funkcija. Funkcija $f$ je* izmjeriva u paru $\sigma$-algebri $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *ili, kraće,* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.*

---

U prethodnoj definiciji $f^{-1}(B)$ označava original skupa $B$, tj.

$$f^{-1}(B) := \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A.$$

3.3. Teorem
*Neka su $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ i $(Z, \mathcal{C})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Nadalje, neka je $f : A \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva funkcija, a $g : B \to Z$ $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$ izmjeriva funkcija. Ako je $f(A) \subseteq B$, onda je kompozicija $g \circ f : A \to Z$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$ izmjeriva funkcija.*

---

3.4. Definicija
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $A \subseteq X$ podskup od $X$.*

*Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je* $\mathcal{A}$-izmjeriva *ili, kraće,* izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

*Za funkciju $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ kažemo da je* $\mathcal{A}$-izmjeriva *ili, kraće,* izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.*

*Ako je* $(X,\mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, *onda za izmjerivu funkciju kažemo da je* Borelova *ili* izmjeriva u smislu Borela.

*Ako je* $(X,\mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star})$, *onda za izmjerivu funkciju kažemo da je* Lebesgueova *ili* izmjeriva u smislu Lebesguea.

---

3.5. Teorem

*Neka su* $(X,\mathcal{A})$ *i* $(Y,\mathcal{B})$ *izmjerivi prostori,* $A \subseteq X$ *izmjeriv skup i* $f : A \to Y$. *Pretpostavimo da je* $\mathcal{E}$ *familija podskupova od* $Y$ *takva da je* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. *Funkcija* $f$ *je* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ *izmjeriva ako i samo ako je* $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ *za svaki* $E \in \mathcal{E}$.

---

3.6. Teorem

*Neka je* $(X,\mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \subseteq X$ *bilo koji podskup od* $X$ *i* $f : A \to \mathbb{R}$ [*ili* $\bar{\mathbb{R}}$] *funkcija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $f$ *je* $\mathcal{A}$-*izmjeriva,*

(b) $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ *za svaki otvoren skup* $V$ *u* $\mathbb{R}$ [*odnosno* $\bar{\mathbb{R}}$],

(c) $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ *za svaki zatvoren skup* $C$ *u* $\mathbb{R}$ [*odnosno* $\bar{\mathbb{R}}$].

---

3.7. Korolar

*Neka je* $(X,\mathcal{B}(X))$ *izmjeriv prostor s Borelovom* $\sigma$-*algebrom i neka je* $A \in \mathcal{B}(X)$. *Svaka neprekidna funkcija* $f : A \to \mathbb{R}$ [*ili* $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$] *je izmjeriva.*

---

3.8. Teorem

*Neka je* $(X,\mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *izmjeriv skup i* $f : A \to [-\infty,\infty]$. *Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(a) $f$ *je* $\mathcal{A}$-*izmjeriva,*

(b) $\big\{x \in A : f(x) \le t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$

(c) $\big\{x \in A : f(x) < t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$

(d) $\big\{x \in A : f(x) \ge t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$

(e) $\big\{x \in A : f(x) > t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

---

3.9. Teorem

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$, *tj. postoji Lebesgueov skup koji nije Borelov.*

---

3.10. PRIMJEDBA

*Jedna od najvažnijih izmjerivih funkcija je* karakteristična funkcija *koja je prethodno definirana u poglavlju s pripremnim materijalom. No, kako nam je sada već poznat pojam izmjerive funkcije, u nastavku navodimo precizniju definiciju.*

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $B \subseteq X$.* Karakteristična funkcija $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ *skupa $B$, definirana formulom*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in B \\ 0, & \text{ako } x \notin B, \end{cases}$$

*je prema* teoremu *3.8.* $\mathcal{A}$*-izmjeriva ako i samo ako je*

$$\{x \in X : \chi_B(x) > t\} \in \mathcal{A} \quad \text{za svaki } t \in \mathbb{R},$$

*a to vrijedi ako i samo ako je $B \in \mathcal{A}$.*

---

## Riješeni zadaci

3.1. ZADATAK

*Neka je $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$, $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}\}$. S $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ označimo $\sigma$-algebru generiranu familijom $\mathcal{E}$. Ispitajte je li funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) := \frac{1}{1+x}$ izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Lako je pokazati da je $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = 2^X$, pa za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi $f^{-1}(B) \subseteq X$, tj. $B \in 2^X$, stoga slijedi da je funkcija $f$ izmjeriva.

3.2. ZADATAK

*Dokažite ili opovrgnite: funkcija $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$h(x) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ako } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

*je izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Dana funkcija je izmjeriva jer se može zapisati u obliku karakteristične funkcije

$$h(x) = \chi_{\mathbb{Q}^c}(x),\ x \in \mathbb{R},$$

gdje je skup $\mathbb{Q}^c$ Borelov.

3.3. ZADATAK

*Neka su $(X, \mathcal{C})$ i $(X, \mathcal{A})$ izmjerivi prostori, pri čemu je $X$ neprebrojiv skup, $\mathcal{C}$ familija podskupova od $X$ koji su ili prebrojivi ili imaju prebrojiv komplement te $\mathcal{A}$ familija svih podskupova od $X$.*

(a) *Pokažite da je svaka $\mathcal{C}$–izmjeriva funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ također i $\mathcal{A}$–izmjeriva.*

(b) *Konstruirajte primjer $\mathcal{A}$–izmjerive funkcije koja nije $\mathcal{C}$–izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Najprije, primijetimo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$ $\sigma$–algebre na $X$ (vidi [10, primjer 2.3., str. 18]).

(a) Jasno je da vrijedi $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan, Borelov skup. Kako je funkcija $f$ $\mathcal{C}$–izmjeriva, to je prema definiciji $f^{-1}(A) \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, pa je funkcija $f$ i $\mathcal{A}$–izmjeriva.

(b) Neka su $A$, $A^c \subseteq X$ neprebrojivi skupovi. Tada je $A \in \mathcal{A}$, ali $A \notin \mathcal{C}$, pa je funkcija
$$\chi_{_A}(x) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x \in A \\ 0, \text{ ako } x \notin A \end{cases}$$
$\mathcal{A}$–izmjeriva, ali nije $\mathcal{C}$–izmjeriva.

3.4. Zadatak
*Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori i $f : X \to Y$ izmjeriva funkcija u paru $\sigma$–algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Tvori li familija svih skupova oblika $f(A)$, $A \in \mathcal{A}$ $\sigma$–algebru na $Y$?*

---

**Rješenje.** Općenito ne. Neka je $X = Y = \mathbb{R}$. Za $\sigma$–algebru $\mathcal{A}$ uzmimo bilo koju $\sigma$–algebru različitu od $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Na primjer, neka je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{1\}, \mathbb{R}\backslash\{1\}\}$, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$–izmjeriva funkcija definirana s $f(a) := 1$, $a \in \mathbb{R}$. Tada je $f(\emptyset) = \emptyset$ i $f(A) = \{1\}$ za $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$. Sada je $f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, pa možemo zaključiti da to nije $\sigma$–algebra na $\mathbb{R}$, jer, na primjer, $\mathbb{R} \notin f(\mathcal{A})$.

3.5. Zadatak
*Neka je $X$ skup, $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$ familija izmjerivih prostora i $(f_i,\, i \in I)$ familija preslikavanja $f_i : X \to X_i$.*

(a) *Za fiksan $i_0 \in I$ nađite najmanju $\sigma-$algebru na $X$ koja čini preslikavanje $f_{i_0}$ izmjerivim.*

(b) *Označimo sa $\sigma(f_i,\, i \in I)$ najmanju $\sigma$–algebra na $X$ koja čini sva preslikavanja $f_i$, $i \in I$ istovremeno izmjerivim. Pokažite da je*
$$\sigma(f_i,\, i \in I) = \sigma\big(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big).$$

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $i_0 \in I$ fiksan. Kako bi preslikavanje $f_{i_0}$ bilo izmjerivo, prema definiciji izmjerive funkcije mora biti zadovoljeno da je
$$f_{i_0}^{-1}(\mathcal{A}_{i_0}) \subseteq \mathcal{A}.$$
U zadataku 2.4. je pokazano da je $f_{i_0}^{-1}(\mathcal{A}_{i_0})$ $\sigma$–algebra, pa je to i najmanja $\sigma-$algebra na $X$ koja preslikavanje $f_{i_0}$ čini izmjerivim. Možemo pisati $f_{i_0}^{-1}(\mathcal{A}_{i_0}) = \sigma(f_{i_0})$ te takvu $\sigma$–algebru nazivamo $\sigma$–algebra generirana preslikavanjem $f_{i_0}$.

(b) Iz prethodnog dijela zadatka jasno je da $\sigma(f_i,\, i \in I)$ nužno sadrži $f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ za svaki $i \in \mathcal{I}$. Znamo da $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ općenito ne mora biti $\sigma$–algebra, pa možemo zaključiti da je tražena $\sigma$–algebra dana sa $\sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right)$.

3.6. ZADATAK
*Nađite $\sigma(f)$, tj. $\sigma$–algebru generiranu preslikavanjem $f$ ako je*

(a) $f(x) = x,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

---

**Rješenje.**

(a) Uzmimo proizvoljan Borelov skup $B$. Tada je $f^{-1}(B) = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dakle, $\sigma(f) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Za proizvoljan Borelov skup $B \in \mathcal{B}([0, \infty))$ vrijedi da je

$$f^{-1}(B) = \sqrt{B} \cup (-\sqrt{B}),$$

gdje je

$$\sqrt{A} := \{\sqrt{a} :\ a \in A\},\ -A = \{-a :\ a \in A\},\ A \subseteq \mathbb{R}.$$

Sada je $\sigma(f) = \{\sqrt{B} \cup (-\sqrt{B}) :\ B \in \mathcal{B}([0, \infty))\}$.

3.7. ZADATAK
*Neka je $X$ skup, $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$ familija izmjerivih prostora i $f_i : X \to X_i$ familija preslikavanja. Pokažite da je preslikavanje $f : F \to X$ $\mathcal{F}$–$\sigma(f_i : i \in I)$ izmjerivo ako i samo ako su sva preslikavanja $f_i \circ f : F \to X_i$, $i \in I$, $\mathcal{F}$–$\mathcal{A}_i$ izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Preslikavanje $f_i \circ f : F \to X_i$ je izmjerivo za svaki $i \in I$

$$\begin{aligned}
&\iff (\forall i \in I)(f_i \circ f)^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{F} \iff \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) \subseteq \mathcal{F}\\
&\iff f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big) \subseteq \mathcal{F} \iff \sigma\big(f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)\big) \subseteq \mathcal{F}\\
&\iff f^{-1}\big(\sigma\big(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)\big) \subseteq \mathcal{F} \text{ tj. } f^{-1}\left(\sigma(f_i : i \in I)\right) \subseteq \mathcal{F},
\end{aligned}$$

pa prema definiciji izmjerive funkcije odmah slijedi da je $f$ izmjerivo preslikavanje. U prethodnom smo razmatranju koristili zadatke 2.10. i 3.5.

3.8. ZADATAK
*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija. Pokažite da je tada i funkcija*

$$f^a(x) = \begin{cases} a, & \text{ako je } f(x) > a\\ f(x), & \text{ako je } f(x) \le a \end{cases}$$

*izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Kako je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma((b, \infty))$, $b \in \mathbb{R}$, dovoljno je pokazati, prema teoremu 3.5., da je $(f^a)^{-1}((b, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ za svaki $b \in \mathbb{R}$. Promotrimo dva slučaja:

- ako je $b > a$, onda je $(f^a)^{-1}((b, \infty)) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
- ako je $b \leq a$, onda je $(f^a)^{-1}((b, \infty)) = f^{-1}((b, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jer je funkcija $f$ izmjeriva prema uvjetima zadatka.

3.9. Zadatak
*Pokažite da je preslikavanje $\tau_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano s $\tau_x(y) := y - x$, izmjerivo.*

---

**Rješenje.** Neka je $\varepsilon = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Tada je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\varepsilon)$. Uzmimo proizvoljan skup $[a, b) \in \varepsilon$. Tada je

$$\tau_x^{-1}([a, b)) = [a, b) + x = [a + x, b + x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

pa prema teoremu 3.5. slijedi da je preslikavanje $\tau_x$ izmjerivo.

3.10. Zadatak
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija i $\mathcal{E} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Dokažite:*

(a) *Ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$, onda je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tj. $f$ je izmjeriva funkcija.*

(b) *Neka su $\mu, \nu$ dvije konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takve da je $\mu(f^{-1}(E)) = \nu(E)$ za svaki $E \in \mathcal{E}$. Tada je $\mu(f^{-1}(B)) = \nu(B)$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$, tvrdnja slijedi iz teorema 3.5.

(b) Familja $\mathcal{E}$ je $\pi$-sistem koji generira $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, pa tražena tvrdnja slijedi iz teorema 2.31.

3.11. Zadatak
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$–izmjeriva funkcija. Dokažite da je tada i funkcija $F : X \to \mathbb{R}$, definirana s*

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)}, & \textit{ako je } f(x) \neq 0 \\ 0, & \textit{ako je } f(x) = 0, \end{cases}$$

*izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Definirajmo pomoćnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{ako je } x \neq 0 \\ 0, & \text{ako je } x = 0. \end{cases}$$

Neka je $V \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan otvoren skup. Primijetimo da možemo pisati $V = \big(V \backslash \{0\}\big) \cup \big(V \cap \{0\}\big)$. U ovisnosti o tome sadrži li skup $V$ nulu ili ne, možemo promotriti dva slučaja te u oba dobivamo da je $g^{-1}(V) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada prema teoremu 3.6. slijedi da je funkcija $g$ izmjeriva. Kako je $F = g \circ f$, prema teoremu 3.3. funkcija $F$ je također izmjeriva.

3.12. Zadatak

*Dokažite ili opovrgnite: svaka izmjeriva funkcija je neprekidna.*

---

**Rješenje.** Karakteristična funkcija

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x \in [-1,1] \\ 0, \text{ ako } x \notin [-1,1] \end{cases}$$

je izmjeriva, ali nije neprekidna, što pokazuje da dana tvrdnja općenito ne vrijedi.

3.13. Zadatak

*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija. Pokažite da je tada funkcija $g(x) = \operatorname{arctg}(f(x))$ omeđena i izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Kako je $|g(x)| = |\operatorname{arctg}(f(x))| \leq \pi/2$, vidimo da je $g$ omeđena funkcija. Nadalje, kako je arkustangens neprekidna funkcija, ona je, prema korolaru 3.7., i izmjeriva, pa je funkcija $g$ izmjeriva kao kompozicija izmjerivih funkcija.

3.14. Zadatak

*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* homeomorfizam*, odnosno neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidno preslikavanje. Dokažite da tada za svaki Borelov skup $B$ vrijedi da je $f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

---

**Rješenje.** Neka je $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverz funkcije $f$. Kako je $f^{-1}$ neprekidno preslikavanje, odmah slijedi i da je izmjerivo, pa je za svaki Borelov skup $B$ iz kodomene funkcije $f^{-1}$ i $(f^{-1})^{-1}(B) = f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gdje prethodna jednakost slijedi iz činjenice da je $f$ bijekcija.

3.15. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $D \subseteq \mathbb{R}$ gust skup na $\mathbb{R}$. Dokažite da je funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva ako i samo ako je $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in D$.*

---

**Rješenje.** Ako je $f$ izmjeriva, onda je prema teoremu 3.8. $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in \mathbb{R}$, pa specijalno i za svaki $d \in D \subseteq \mathbb{R}$.
Obratno, neka je $t \in \mathbb{R}$. Skup $D$ je gust na $\mathbb{R}$ pa zato za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $d_n \in D \cap (t, t + 1/n)$. Kako je

$$\{x \in X : f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq t + 1/n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > d_n\} \in \mathcal{A},$$

funkcija $f$ je izmjeriva.

3.16. ZADATAK

*Neka je*

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \, A \text{ je prebrojiv ili } A^c \text{ je prebrojiv}\}$$

*$\sigma$–algebra na $\mathbb{R}$. Opišite sve $\mathcal{A}$–izmjerive funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$.*

---

**Rješenje.** Neka je $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$–izmjeriva funkcija. Ako promotrimo njezinu sliku $f(\mathbb{R})$, možemo zaključiti da je taj skup sigurno prebrojiv jer bi u suprotnom mogli odabrati $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ tako da je neprebrojivo mnogo vrijednosti od $f(\mathbb{R})$ veće od $t$ te neprebrojivo mnogo vrijednosti manje ili jednako od $t$. No, prema teoremu 3.8. te definiciji $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$ to je u kontradikciji s izmjerivosti funkcije $f$ jer barem jedan od skupova $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) > t\}$, $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) \leq t\}$ mora biti prebrojiv. Označimo sada s $D$ prebrojiv skup vrijednosti koje poprima funkcija $f$, tj. $D := f(\mathbb{R})$. Sada je

$$\bigcup_{t \in D} \{x \in \mathbb{R} : \, f(x) = t\} = \mathbb{R}$$

neprebrojiv skup zbog neprebrojivosti skupa realnih brojeva, pa je zbog prebrojivosti skupa $D$ jasno da barem jedan od skupova $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) = t\}$ mora biti neprebrojiv. Nadalje, možemo zaključiti da je točno jedan takav skup neprebrojiv jer bi u suprotnom skupovi $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) = t\}$ i $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) \neq t\}$ bili neprebrojivi, što bi dalo kontradikciju s tim da mora biti zadovoljeno $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) = t\} \in \mathcal{A}$. Neka je sada $t_1 \in \mathbb{R}$ tako da je skup $\{x \in \mathbb{R} : \, f(x) = t_1\}$ neprebrojiv. Tada je $f(x) = t_1$ za sve osim eventualno prebrojivo mnogo $x \in \mathbb{R}$.
Isto tako, ako pretpostavimo da je $f(x) = t_1 \in [0, \infty]$ za sve osim prebrojivo mnogo $x \in \mathbb{R}$, odmah vidimo da je funkcija $f$ izmjeriva.

3.17. ZADATAK

*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeriv prostor i $A \subseteq \mathbb{R}$. Nadalje, neka su $f, g : A \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije i $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pokažite da je tada funkcija $h : A \to \mathbb{R}$, $h(x) := F\left(f(x), g(x)\right)$ izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Kako bismo pokazali da je funkcija $h$ izmjeriva, dovoljno je pokazati, prema teoremu 3.8., da je

$$\{x \in A : \, h(x) > t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ za svaki } t \in \mathbb{R}.$$

Definirajmo pomoćni skup

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, F(x, y) > t\}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Kako je $U$ otvoren skup u $\mathbb{R}^2$, možemo ga zapisati kao uniju otvorenih 2–intervala, tj.

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, a_n < x < b_n, \, c_n < y < d_n\}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\{x \in A:\, h(x) > t\} = \{x \in A:\, (f(x), g(x)) \in U\} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in A:\, (f(x), g(x)) \in I_n\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\{x \in A:\, a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \in A:\, c_n < g(x) < d_n\}\right).\end{aligned}$$

Kako su $f$ i $g$ izmjerive funkcije, prema teoremu 3.8. slijedi da su skupovi $\{x \in A:\, a_n < f(x) < b_n\}$ i $\{x \in A:\, c_n < g(x) < d_n\}$ izmjerivi, pa je i $\{x \in A:\, h(x) > t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, odnosno funkcija $h$ je izmjeriva.

3.18. Zadatak

*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere i $E \subseteq (0,1)$ Lebesgueov skup koji nije Borelov. Ispitajte je li funkcija $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(x) := \begin{cases} x, & \textit{ako je } x \in E \\ -x, & \textit{ako je } x \in (0,1)\backslash E \end{cases}$$

*izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Iz

$$\{x \in (0,1):\, f(x) > 0\} = E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

slijedi da $f$ nije izmjeriva funkcija.

3.19. Zadatak

*Dokažite da izmjerivost funkcije $|f|$ općenito ne povlači izmjerivost funkcije $f$.*

---

**Rješenje.** Prema teoremu 3.9. postoji skup $B \subseteq \mathbb{R}$ koji nije Borelov. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s

$$f(x) := \chi_B - \chi_{B^c},\, x \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $|f|$ je konstanta, tj.

$$|f(x)| = 1, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R},$$

pa je izmjeriva. Međutim, funkcija $f$ nije izmjeriva jer $f^{-1}(\{1\}) = B$ nije Borelov skup.

3.20. Zadatak

*Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ izmjeriva funkcija.*

(a) *Dokažite da je tada i $\|f\|_2$ izmjeriva funkcija, gdje je $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2–norma.*

(b) *Ispitajte vrijedi li i obrat: ako je funkcija $\|f\|_2$ izmjeriva, onda je to i funkcija $f$.*

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g(x) = \|x\|_2$. To je neprekidna funkcija, pa je stoga i izmjeriva. Odmah slijedi da je i funkcija

$$\|f(x)\|_2 = (g \circ f)(x)$$

izmjeriva kao kompozicija izmjerivih funkcija.

(b) Na isti način kao u zadatku 3.19. može se pokazati da navedena tvrdnja općenito ne vrijedi.

3.21. Zadatak

*Neka je $(X, \Sigma)$ izmjeriv prostor i $(Y, d)$* separabilan metrički prostor*, tj. metrički prostor u kome se svaki otvoren podskup može zapisati kao najviše prebrojiva unija otvorenih kugli. Pokažite da je funkcija $f : X \to Y$ izmjeriva ako i samo ako je za svaki $y \in Y$ funkcija $x \mapsto d(y, f(x))$, s $X$ na $\mathbb{R}$, izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Za svaki $y \in Y$ definirajmo funkciju $g_y : X \to \mathbb{R}$ s $g_y(x) := d(y, f(x))$. Primijetimo da za svaki $r > 0$ i $y \in Y$ vrijedi

$$\begin{aligned} f^{-1}(K(y,r)) &= \{x \in X : f(x) \in K(y,r)\} = \{x \in X : d(y, f(x)) < r\} \\ &= \{x \in X : g_y(x) < r\} = g_y^{-1}((-\infty, r)), \end{aligned}$$

gdje je $K(y, r)$ otvorena kugla oko $y$, radijusa $r$. Pretpostavimo da je $g_y$ izmjeriva funkcija za svaki $y \in Y$. Tada, prema prethodno pokazanom, vrijedi da je

$$f^{-1}(K(y,r)) = g_y^{-1}((-\infty, r)) \in \Sigma$$

za sve $y \in Y$ i $r > 0$. Kako je $Y$ separabilan metrički prostor, vrijedi da je $f^{-1}(O) \in \Sigma$ za svaki otvoren skup $O \subseteq Y$ te prema teoremu 3.6. slijedi da je $f$ izmjeriva funkcija.
Kako bi pokazali obrat, pretpostavimo da je $f$ izmjeriva funkcija te neka je $y \in Y$. Iz jednakosti

$$g_y^{-1}((-\infty, r)) = f^{-1}(K(y,r)) \text{ koja vrijedi za svaki } r > 0,$$

i $g_y^{-1}((-\infty, r)) = \emptyset$ koja vrijedi za $r \le 0$, vidimo da je funkcija $g_y$ izmjeriva za sve $y \in Y$.

## 3.2. Svojstva izmjerivih funkcija

3.11. Propozicija

*Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *i* $f : A \to [-\infty, \infty]$ *bilo koja* $\mathcal{A}$*-izmjeriva funkcija. Tada je i funkcija* $\alpha f$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

---

3.12. Propozicija

*Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ *bilo koje dvije* $\mathcal{A}$*-izmjerive funkcije. Tada su funkcije* $\max\{f, g\}$ *i* $\min\{f, g\}$ *izmjerive.*

---

3.13. Propozicija

*Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* $\mathcal{A}$*-izmjerivih funkcija* $f_n : A \to [-\infty, \infty]$. *Tada vrijedi:*

(a) *funkcije* $\sup_n f_n, \inf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ *su* $\mathcal{A}$*-izmjerive,*

(b) *funkcije* $\limsup_n f_n, \liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ *su* $\mathcal{A}$*-izmjerive,*

(c) *skup* $A_0 := \{x \in A : \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$ *je izmjeriv. Funkcija* $\lim_n f_n : A_0 \to [-\infty, \infty]$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

---

3.14. Propozicija

*Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f, g : A \to [0, \infty]$ *bilo koje dvije* $\mathcal{A}$*-izmjerive funkcije. Tada je i funkcija* $f + g$ $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

---

3.15. Propozicija

*Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *bilo koje dvije realne i* $\mathcal{A}$*-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

(a) *funkcija* $\alpha f$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva za svaki realan broj* $\alpha$,

(b) *funkcija* $f + g$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva,*

(c) *funkcija* $f - g$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva,*

(d) *funkcija* $|f|^\alpha$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva za svaki realan broj* $\alpha > 0$,

(e) *funkcija* $fg$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva,*

(f) *skup* $A_0 := \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ *je izmjeriv. Funkcija* $\frac{f}{g} : A_0 \to \mathbb{R}$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

---

3.16. PROPOZICIJA

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija $f$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva ako i samo ako su funkcije $f^+$ i $f^-$ $\mathcal{A}$-izmjerive, gdje su*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}, \qquad x \in A$$

*funkcije koje nazivamo* pozitivni dio *funkcije $f$ te* negativni dio *funkcije $f$, redom.*

---

## Riješeni zadaci

---

3.22. ZADATAK

*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija. Ispitajte jesu li sljedeće funkcije izmjerive:*

(a) $f(x-2)$,

(b) $e^{f(x)}$,

(c) $\sin(f(x)+8)$,

(d) $\operatorname{sign}(f(x-7))$.

---

**Rješenje.** Primjenom teorema 3.3. te korolara 3.7. lako se pokaže da su sve funkcije (a)–(c) izmjerive.

(d) Funkciju signum možemo zapisati kao

$$\operatorname{sign}(x) = -1 \cdot \chi_{(-\infty,0)}(x) + 0 \cdot \chi_{\{0\}}(x) + 1 \cdot \chi_{(0,\infty)}(x),$$

pa je u ovom slučaju potrebno iskoristiti i propoziciju 3.15. kako bismo pokazali da je funkcija $\operatorname{sign}(f(x-7))$ izmjeriva.

3.23. ZADATAK

*Neka su $E_1, \dots, E_n$ Borelovi podskupovi od $\mathbb{R}$ i neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(x) := \textit{broj skupova } E_1, \dots, E_n \textit{ koji sadrže } x \textit{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

*Pokažite da je $f$ izmjeriva funkcija.*

---

**Rješenje.** Uočimo da je $f(x) = \chi_{E_1}(x) + \cdot + \chi_{E_n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a kako su $E_i$, $i = 1, \dots, n$ Borelovi skupovi, to su funkcije $\chi_{E_i}$, $i = 1, \dots, n$ izmjerive, pa je funkcija $f$ izmjeriva kao zbroj konačno mnogo izmjerivih funkcija.

3.24. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor.*

(a) *Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije i $A \in \mathcal{A}$ izmjeriv skup. Pokažite da je tada i funkcija $h : X \to \mathbb{R}$, definirana s*

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in A \\ g(x), & \text{ako } x \notin A, \end{cases}$$

*izmjeriva.*

(b) *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$ tako da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Pretpostavimo da vrijedi*

$$f_{n|A_n\cap A_k} = f_{k|A_n\cap A_k}, \text{ za svaki } n, k \in \mathbb{N}$$

*i neka je $f(x) := f_n(x)$ za $x \in A_n$. Pokažite da je tada funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ izmjeriva.*

---

**Rješenje.**

(a) Možemo pisati $h(x) = \chi_A(x) \cdot f(x) + \chi_{A^c}(x) \cdot g(x)$. Kako je karakteristična funkcija izmjerivog skupa izmjeriva, prema propoziciji 3.15. slijedi da je funkcija $h$ izmjeriva.

(b) Iz uvjeta $f_{n|A_n\cap A_k} = f_{k|A_n\cap A_k}$ za svaki $n, k \in \mathbb{N}$ slijedi da je funkcija $f$ dobro definirana ako stavimo $f(x) = f_n(x)$ za $x \in A_n$. Neka je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada iz uvjeta zadatka slijedi

$$f^{-1}(B) = X \cap f^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap f^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n \cap f_n^{-1}(B)\right) \in \mathcal{A},$$

pa je funkcija $f$ izmjeriva.

3.25. Zadatak

*Ispitajte je li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2} \chi_{\{n\}}(x) + (1 + 2\sin x + \cos(3x))\, \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0}(x)$$

*izmjeriva.*

---

**Rješenje.** Funkciju $f$ možemo zapisati i na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{x}{2} \chi_{\mathbb{N}_0}(x) + (1 + 2\sin x + \cos(3x))\, \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0}(x).$$

Kako je $\mathbb{N}_0$ prebrojiv Borelov skup, to je i pripadna karakteristična funkcija izmjeriva. Nadalje, skup $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ je također Borelov, kao komplement skupa $\mathbb{N}$, pa je i karakteristična funkcija $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0}(x) : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ izmjeriva. Iz neprekidnosti funkcija $x \mapsto \frac{x}{2}$ i $x \mapsto 1 + 2\sin x + \cos(3x)$ slijedi da su one i izmjerive, pa je i funkcija

$$f(x) = \frac{x}{2}\chi_{\mathbb{N}_0}(x) + (1 + 2\sin x + \cos(3x))\,\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0}(x)$$

izmjeriva kao zbroj umnoška izmjerivih funkcija.

3.26. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija. Dokažite da je tada i*

$$g(x) = \ln(1 + |f(x)|) + \frac{3f(x)}{\pi - 5},\ x \in \mathbb{R}$$

*izmjeriva funkcija.*

---

**Rješenje.** Funkcija

$$a_3(a_2(a_1(f(x)))) = \ln(1 + |f(x)|)$$

je izmjeriva kao kompozicija izmjerivih funkcija

$$a_1(x) = |x|,\ a_2(x) = 1 + x,\ a_3(x) = \ln x,\ x > 1.$$

Prema tvrdnji (a) propozicije 3.15. slijedi da je funkcija

$$h(x) = \frac{3f(x)}{\pi - 5}$$

izmjeriva, pa je i funkcija $g$ izmjeriva kao zbroj izmjerivih funkcija.

3.27. Zadatak

*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Pokažite da su tada funkcija $f$ i njezina derivacija $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije.*

---

**Rješenje.** Funkcija $f$ je derivabilna, pa je i neprekidna, odnosno i izmjeriva. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}$$

je izmjeriva prema propoziciji 3.15. Prema tvrdnji (c) propozicije 3.13. tada je izmjeriva i funkcija $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f'$.

3.28. Zadatak

*Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Dokažite da je tada funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$g(x) := \begin{cases} f'(x), & \text{ako je } x \in (0,1) \\ e^{f(x)} - f^2(x), & \text{ako je } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

*izmjeriva.*

**Rješenje.** U zadatku 3.27. smo pokazali da derivabilnost funkcije $f$ povlači izmjerivost funkcija $f$ i $f'$. Nadalje, funkcija $h(x) = \mathrm{e}^x - x^2$ je neprekidna, pa je i izmjeriva te slijedi da je i funkcija

$$(h \circ f)(x) = \mathrm{e}^{f(x)} - f^2(x)$$

izmjeriva kao kompozicija izmjerivih funkcija. Kako su $(0,1)$ i $\mathbb{Z}$ Borelovi skupovi, njihove su karakteristične funkcije izmjerive. Sada je i funkcija

$$g(x) = f'(x)\,\chi_{(0,1)}(x) + (h \circ f)(x)\,\chi_{\mathbb{Z}}(x)$$

izmjeriva kao zbroj umnoška izmjerivih funkcija.

## 3.3. Jednostavne funkcije

Podsjetimo se najprije da je stepenasta funkcija na skupu $A$ svaka funkcija $f : A \to [-\infty, \infty]$ koja prima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.

Konačnu i izmjerivu stepenastu funkciju nazivamo jednostavna funkcija. Preciznije:

3.17. DEFINICIJA
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ podskup od $X$ i $f : A \to \mathbb{R}$ stepenasta i $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Tada kažemo da je $f$* jednostavna funkcija s obzirom na izmjeriv prostor $(X, \mathcal{A})$ *ili, kraće,* jednostavna funkcija.

---

Svaka se jednostavna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ može prikazati u obliku

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ disjunktni i izmjerivi skupovi, takvi da je $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su različiti realni brojevi. Takav prikaz naziva se standardni prikaz jednostavne funkcije.

3.18. TEOREM
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnih funkcija $f_n : A \to (-\infty, \infty)$ sa sljedećim svojstvima:*

(a) *$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f(x)$ za svaki $x \in A$,*

(b) *niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkama prema funkciji $f$, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in A,$$

(c) *ako je funkcija $f$ omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema funkciji $f$ na cijelom skupu $K$,*

(d) *ako je $f \geq 0$, onda se niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ može odabrati tako da je $f_n \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

---

3.19. KOROLAR
*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija $f$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva ako i samo ako postoji niz jednostavnih funkcija koji konvergira po točkama prema funkciji $f$ na cijelom skupu $A$.*

---

## Riješeni zadaci

3.29. Zadatak

*Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor te $f : X \to [0, \infty)$ funkcija. Pokažite da je $f$ izmjeriva funkcija ako i samo ako postoji niz $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih realnih brojeva i niz disjunktnih izmjerivih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da je*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_n}(x) \text{ za svaki } x \in X.$$

**Rješenje.** Pretpostavimo najprije da je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \chi_{A_n}(x),\ x \in X,$$

gdje je $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih realnih brojeva i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih izmjerivih skupova. Definirajmo sada funkcije

$$f_n := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},\ n \in \mathbb{N}.$$

Možemo zaključiti da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija, pa je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ izmjeriva funkcija kao limes niza izmjerivih funkcija.
Kako bismo pokazali da vrijedi obrat, pretpostavimo da je $f : X \to [0, \infty)$ izmjeriva funkcija. Prema teoremu 3.18. slijedi da postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastućih jednostavnih funkcija $f_n : X \to [0, \infty)$ tako da je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svaki $x \in X$. Ako definiramo $f_0 := 0$, onda je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - f_{n-1}(x)\right),\ x \in X.$$

Kako su sve funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ jednostavne, takve su i funkcije $f_n - f_{n-1}$, pa ih možemo zapisati u obliku

$$f_n - f_{n-1} = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{i,n} \chi_{A_{i,n}},$$

gdje su $\alpha_{i,n}$, $i \in \{1, \ldots, k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ nenegativni realni brojevi, a $A_{1,n}, \ldots, A_{k_n,n}$, $n \in \mathbb{N}$ disjunktni izmjerivi skupovi. Sada je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{i,n} \chi_{A_{i,n}}(x),$$

iz čega lako slijedi traženi zapis funkcije $f$.

3.30. Zadatak

*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeriv prostor te $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ jednostavne funkcije. Pokažite da postoji izmjeriva funkcija $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ takva da je $f = h \circ g$ ako i samo ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

---

**Rješenje.** Pretpostavimo da vrijedi $f = h \circ g$ za neku izmjerivu funkciju $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Primijetimo da je za proizvoljan $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $h^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Stoga je

$$f^{-1}(B) = g^{-1}\left(h^{-1}(B)\right) \in g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

pa vrijedi $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Kako bismo pokazali da vrijedi obrat, pretpostavimo da je $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pokažimo sada da postoji tražena funkcija $h$, u dva koraka:

- Neka je $f = \chi_A$ za neki $A \in f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Kako je $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, možemo zaključiti da postoji $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ takav da je $A = g^{-1}(B)$. Sada za $h = \chi_B$ vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}(h \circ g)(x) = \chi_B(g(x)) = 1 \iff g(x) \in B \iff x \in g^{-1}(B) \iff x \in A \\ \iff \chi_A(x) = 1,\end{aligned}$$

  pa je $(h \circ g)(x) = f(x)$ za svaki $x \in X$.

- Neka je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi i $A_1, \ldots, A_n$ disjunktni skupovi iz $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Za svaki $i = 1, \ldots, n$ odaberimo $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tako da je $A_i = g^{-1}(B_i)$. Ako promotrimo jednostavnu funkciju $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}$, iz prethodno pokazanog slijedi

$$(h \circ g)(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}(g(x)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x) = f(x), \ \forall x \in X.$$

## 3.4. Svojstvo „skoro svuda”

3.20. DEFINICIJA

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere i $T \subseteq X$. Ako neka tvrdnja ili svojstvo vrijede za sve $x \in T$ osim za $x \in N$, gdje je $N \subseteq T$ zanemariv skup, onda kažemo da ta tvrdnja ili svojstvo vrijedi* $\mu$-skoro svuda na $T$ *ili* $\mu$-gotovo svuda na $T$.

*Ako je iz konteksta jasno na koju mjeru $\mu$ i na koji skup $T$ mislimo, onda koristimo kraće nazive:* skoro svuda *ili* gotovo svuda.

*Za označavanje svojstva koje vrijedi skoro svuda koristi se kratica (s.s.).*

---

3.21. TEOREM

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od $X$, $(Y, \mathcal{B})$ izmjeriv prostor i $f : A \to Y$ neka $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $g : A \to Y$ bilo koja druga funkcija takva da je $g = f$ (s.s.). Ako je mjera $\mu$ potpuna, onda je funkcija $g$ izmjeriva.*

---

## Riješeni zadaci

3.31. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere i $f : X \to (0, 1]$ $\mathcal{A}$–izmjeriva funkcija. Pokažite da je tada ili $f = \chi_A$ (s.s.) za neki izmjeriv skup $A$ ili postoji konstanta $c \in (0, 1/2)$ tako da je*

$$\mu(\{x \in X : c < f(x) < 1 - c\}) > 0.$$

---

**Rješenje.** Definirajmo skup

$$A_n := \left\{x \in X : \frac{1}{2n} < f(x) < 1 - \frac{1}{2n}\right\} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Ako postoji $n \in \mathbb{N}$ za koga je $\mu(A_n) > 0$, onda je uz odabir konstante $c = \frac{1}{2n}$ zadovoljeno

$$\mu(\{x \in X : c < f(x) < 1 - c\}) > 0.$$

Pretpostavimo sada da je $\mu(A_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Možemo primijetiti da je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući niz skupova koji teži prema skupu $\{x \in X : 0 < f(x) < 1\}$, pa je prema neprekidnosti mjere na rastući niz skupova i

$$\mu(\{x \in X : 0 < f(x) < 1\}) = 0.$$

Iz posljednjeg slijedi da je $f = \chi_A$ (s.s.) za izmjeriv skup $A = f^{-1}(\{1\})$.

3.32. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere i $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija.* Esencijalni supremum *funkcije $f$ definira se kao*

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : f(x) > a\}) = 0\} = \inf\{a \in \mathbb{R} : f \leq a \text{ (s.s.)}\}.$$

*Za funkciju* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definiranu s*

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x \in [0,1) \\ 2, & \textit{ako je } x = 1 \end{cases}$$

*odredite* $\sup f$ *i* $\operatorname{ess\,sup} f$ *ako je* $\mu = \lambda$ *tj. Lebesgueova mjera.*

---

**Rješenje.** Očito je $\sup f = 2$, a kako je $\lambda(\{1\}) = 0$, to je $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{a \in \mathbb{R} : f \leq a \text{ (s.s.)}\} = 1$.

3.33. ZADATAK

*Neka je* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *prostor mjere. Pokažite da je*

$$\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$$

*te da jednakost vrijedi ako je funkcija* $f$ *neprekidna.*

---

**Rješenje.** Ako je $\sup f = \infty$, jasno je da tražena nejednakost vrijedi. Stoga, pretpostavimo da je $\sup f = M \in \mathbb{R}$. Tada je $f(x) \leq M$ za svaki $x \in X$, pa iz definicije esencijalnog supremuma ponovno dobivamo da je $\operatorname{ess\,sup} f \leq \sup f$.
Nadalje, pretpostavimo da je funkcija $f$ neprekidna i da je $\operatorname{ess\,sup} f < M$, $M \in \mathbb{R}$. Sada, prema definiciji esencilajnog supremuma možemo odabrati $a \in \mathbb{R}$ tako da je $a < M$ i $f(x) \leq a$ (s.s.), odnosno skup $A = \{x \in X : f(x) > a\}$ je, zbog izmjerivosti funkcije $f$, izmjeriv i to mjere nula. Kako je funkcija $f$ neprekidna, slijedi da $A$ sadrži otvoren izmjeriv skup $f^{-1}((a, M))$, odnosno prema monotonosti mjere i činjenici da je Lebesgueova mjera nepraznog otvorenog skupa strogo pozitivna (vidi zadatak 2.84. (a)) vrijedi da je

$$0 < \lambda\left(f^{-1}((a, M))\right) \leq \lambda(A) = 0,$$

što nije moguće. Dakle, mora biti $\operatorname{ess\,sup} f = \sup f$. Naposljetku, ako je $\sup f = \infty$, uvjet da je $f(x) \leq a$ (s.s.), $a \in \mathbb{R}$ nije zadovoljen, pa dobivamo

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{\emptyset\} = +\infty = \sup f.$$

3.34. ZADATAK

*Neka su* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *izmjerive funkcije. Pokažite da je tada*

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

---

**Rješenje.** Prema definiciji esencijalnog supremuma slijedi da je $f \leq \operatorname{ess\,sup} f$ (s.s.) i $g \leq \operatorname{ess\,sup} g$ (s.s.), odnosno

$$f + g \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g \qquad \text{(s.s.)}.$$

Dakle, vrijedi $\operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g \in \{a \in \mathbb{R} : f + g \leq a \text{ (s.s.)}\}$, pa prema definiciji infimuma slijedi da je

$$\operatorname{ess\,sup}(f + g) = \inf\{a \in \mathbb{R} : f + g \leq a \text{ (s.s.)}\} \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g.$$

# 4. Integracija izmjerivih funkcija

## 4.1. Integral nenegativne jednostavne funkcije

O integralu nenegativne elementarne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trebamo razmišljati kao o površini između grafa krivulje i $x$-osi. Stoga, navedimo sljedeću općenitu definiciju:

4.1. DEFINICIJA
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty)$ jednostavna nenegativna funkcija s prikazom*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

*gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi.*

(I) *Broj*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

*naziva se* integral funkcije $f$ s obzirom na mjeru $\mu$ *ili, kraće,* integral funkcije $f$.

*Za funkciju $f$ kažemo da je* integrabilna *ako je $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$.*

(II) *Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int \chi_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

*naziva se* integral funkcije $f$ na skupu $E$ s obzirom na mjeru $\mu$ *ili, kraće,* integral funkcije $f$ na skupu $E$.

*Za funkciju $f$ kažemo da je* integrabilna na skupu $E$ *ako je $\int_E f \,\mathrm{d}\mu < \infty$.*

---

Za integral $\int f \,\mathrm{d}\mu$ se koriste i sljedeće oznake:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad \int_X f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

4.2. PRIMJEDBA
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere. Skup svih nenegativnih jednostavnih funkcija definiranih na $X$ označavat ćemo s $\mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ ili, kraće, s $\mathcal{F}_+$.*

---

4.3. TEOREM
*Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada su $\alpha f$, $f + g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i vrijedi:*

(a) $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$ (pozitivna homogenost),

(b) $\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ (aditivnost),

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$ (monotonost).

---

4.4. LEMA
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ nenegativna jednostavna funkcija. Funkcija $m : \Sigma \to [0, \infty]$ zadana formulom*

$$m(E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_E f \,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \Sigma$$

*je mjera na $\Sigma$.*

---

4.5. TEOREM
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f, f_n \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ nenegativne jednostavne funkcije sa sljedećim dvama svojstvima:*

(a) $f_n \leq f_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira po točkama prema* $f$, *tj.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in X.$$

*Tada je*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

---

## Riješeni zadaci

---

4.1. ZADATAK
*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere, gdje je $\lambda$ Lebesgueova mjera. Izračunajte integral funkcije $f : [a,b] \to [0, \infty)$ definirane s $f(x) := c$.*

---

**Rješenje.** Imamo da je

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= c \int_{[a,b]} \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= c \int \chi_{[a,b]}\,\mathrm{d}\lambda(x) = c\,\lambda([a,b]) = c\,(b-a).\end{aligned}$$

4.2. ZADATAK
*Neka je* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *prostor mjere te*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2\chi_{[0,2]}(x) + 4\chi_{(1,3]}(x), \\ f_2(x) &= 2\chi_{[0,1]}(x) + 6\chi_{(1,2]}(x) + 4\chi_{(2,3]}(x). \end{aligned}$$

*Pokažite da vrijedi*

(a) $f_1(x) = f_2(x)$,

(b) $\int f_1 \, \mathrm{d}\lambda = \int f_2 \, \mathrm{d}\lambda$.

---

**Rješenje.**

(a) Možemo promotriti četiri slučaja: kada je $x \in [0,1]$, $x \in (1,2]$, $x \in (2,3]$ i $x \notin [0,3]$ te u svakom od njih dobivamo da je

$$f_1(x) = f_2(x).$$

(b) Imamo da je

$$\begin{aligned} \int f_1(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) &= 2 \int \chi_{[0,2]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) + 4 \int \chi_{(1,3]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= 2\,\lambda([0,2]) + 4\,\lambda((1,3]) = 12 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int f_2(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) &= 2 \int \chi_{[0,1]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) + 6 \int \chi_{(1,2]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) + 4 \int \chi_{(2,3]}(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= 2\,\lambda([0,1]) + 6\,\lambda((1,2]) + 4\,\lambda((2,3]) = 12 \end{aligned}$$

iz čega odmah slijedi tražena jednakost.

4.6. PRIMJEDBA
*U* [10, str. 115] *je dokazano da integral nenegativne jednostavne funkcije ne ovisi o njezinom prikazu.*

---

4.3. ZADATAK
*Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor mjere te* $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2 : X \to [0, \infty)$ *nenegativne jednostavne funkcije za koje vrijedi* $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$. *Dokažite da je tada*

$$\int f_1 \, \mathrm{d}\mu - \int f_2 \, \mathrm{d}\mu = \int g_1 \, \mathrm{d}\mu - \int g_2 \, \mathrm{d}\mu.$$

---

**Rješenje.** Kako integral nenegativne jednostavne funkcije ne ovisi o njenom prikazu, iz uvjeta zadatka slijedi

$$\int (f_1 + g_2) \, \mathrm{d}\mu = \int (f_2 + g_1) \, \mathrm{d}\mu.$$

Nadalje, prema svojstvu aditivnosti integrala iz prethodne jednakosti dobivamo

$$\int f_1 \, \mathrm{d}\mu + \int g_2 \, \mathrm{d}\mu = \int f_2 \, \mathrm{d}\mu + \int g_1 \, \mathrm{d}\mu,$$

iz čega odmah slijedi tražena jednakost.

4.4. Zadatak

*Neka je* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *prostor mjere,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval koji možemo prikazati kao disjunktnu uniju*

$$I = I_1 \cup I_2, \quad I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$$

*te* $f : I \to [0, \infty)$ *nenegativna jednostavna funkcija. Pokažite da vrijedi*

$$\int_I f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{I_1} f \mathrm{d}\lambda + \int_{I_2} f \mathrm{d}\lambda.$$

---

**Rješenje.** Kako je $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ te $\chi_{I_j} : I_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ možemo pisati

$$f(x) = f(x)\chi_I(x) = f(x)\chi_{I_1 \cup I_2}(x) = f(x)\chi_{I_1}(x) + f(x)\chi_{I_2}(x),$$

pa prema svojstvu aditivnosti integrala nenegativne jednostavne funkcije odmah slijedi tražena tvrdnja.

4.5. Zadatak

*Neka je* $\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \mathcal{B}\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \lambda\right)$ *prostor mjere. Izračunajte integral funkcije* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ *definirane s* $f(x) := [\sin x]$*, gdje* $[a]$ *označava cjelobrojni dio realnog broja* $a$*.*

---

**Rješenje.** Kako je

$$f(x) = [\sin x]\chi_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right)}(x) + [\sin x]\chi_{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}}(x) = \chi_{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}}(x),$$

odmah slijedi da je

$$\int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \chi_{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}} \, \mathrm{d}\lambda = \int \chi_{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}} \, \mathrm{d}\lambda = \lambda\left(\left\{\tfrac{\pi}{2}\right\}\right) = 0.$$

4.6. Zadatak

*Neka je* $(X, \mathcal{A}, \delta_y)$ *prostor mjere, gdje je* $\delta_y$ *Diracova delta mjera koncentrirana u točki* $y \in X$*, tj.*

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } y \in A \\ 0, & \textit{ako } y \notin A, \end{cases} \qquad A \in \mathcal{A}.$$

*Dokažite da tada vrijedi*

$$\int f \, \mathrm{d}\delta_y = f(y)$$

*za svaku nenegativnu jednostavnu funkciju* $f : X \to [0, \infty)$*.*

---

**Rješenje.** Prema definiciji nenegativne jednostavne funkcije slijedi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi. Kako je $y \in X$ fiksan, postoji jedinstveni $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $y \in A_{i_0}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\delta_y &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\delta_y = \alpha_{i_0} \delta_y(A_{i_0}) = \alpha_{i_0} \\ &= \alpha_{i_0} \chi_{A_{i_0}}(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(y) = f(y).\end{aligned}$$

4.7. Zadatak

*Neka su $\mu_1, \ldots, \mu_n$ mjere na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{A})$ i $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Dokažite da je tada i $\mu$ mjera na danom izmjerivom prostoru te da vrijedi*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f \,\mathrm{d}\mu_i$$

*za svaku nenegativnu jednostavnu funkciju $f : X \to [0, \infty)$.*

---

**Rješenje.** U zadatku 2.28. pokazano je da je funkcija $\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i$ mjera ako su $\mu_1, \ldots, \mu_n$ mjere i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi. Kako je u našem slučaju $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, jasno je da je $\mu$ mjera na danom izmjerivom prostoru. Preostaje pokazati da vrijedi tražena jednakost za proizvoljnu nenegativnu jednostavnu funkciju $f : X \to [0, \infty)$.

(1) Najprije, neka je $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{A}$. Tada vrijedi:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(A) = \sum_{i=1}^{n} \int \chi_A \,\mathrm{d}\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \int f \,\mathrm{d}\mu_i.$$

(2) Neka je $f \in \mathcal{F}_+$, $f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, gdje su $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+$. Koristeći jednakost dobivenu u slučaju (1) imamo

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int \chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu_i = \sum_{i=1}^{n} \int f \,\mathrm{d}\mu_i.\end{aligned}$$

4.8. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ upotpunjenje prostora mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pokažite da za svaku nenegativnu jednostavnu funkciju $h : X \to [0, \infty)$ na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{A}_\mu)$ postoje nenegativne jednostavne funkcije $f, g : X \to [0, \infty)$ na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{A})$, takve da vrijedi $f \leq h \leq g$, $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ te*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int h \, \mathrm{d}\tilde{\mu} = \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

---

**Rješenje.** Pretpostavimo da je $h : X \to [0, \infty)$ $\mathcal{A}_\mu$–izmjeriva, nenegativna jednostavna funkcija, odnosno možemo je prikazati u obliku

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ i $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_\mu$ su disjunktni skupovi. Dakle, kako je $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ te je $\sigma$–algebra $\mathcal{A}_\mu$ upotpunjenje $\sigma$–algebre $\mathcal{A}$, prema propoziciji 2.50. za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoje skupovi $B_i, C_i \in \mathcal{A}$, takvi da je $B_i \subseteq A_i \subseteq C_i$ i $\mu(C_i \backslash B_i) = 0$, iz čega slijedi

$$\alpha_i \chi_{B_i} \leq \alpha_i \chi_{A_i} \leq \alpha_i \chi_{C_i} \text{ zbog } \alpha_i \geq 0.$$

Nadalje, sumiranjem po svim $i = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{B_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{C_i},$$

odnosno $f \leq h \leq g$ ako definiramo funkcije $f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{B_i}$, $g := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{C_i}$. Funkcije $f$ i $g$ su očito $\mathcal{A}$–izmjerive i zadovoljavaju

$$0 \leq \mu(\{f \neq g\}) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (C_i \backslash B_i)\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \backslash B_i) = 0.$$

Iz prethodnog razmatranja te jednakosti (2.18) dane u propoziciji 2.52. slijedi da je

$$\mu(B_i) = \mu(C_i) = \tilde{\mu}(A_i), \; i = 1, \ldots, n,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{\mu}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(C_i),$$

što je ekvivalentno s traženom tvrdnjom da je

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int h \, \mathrm{d}\tilde{\mu} = \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

## 4.2. Integral nenegativne izmjerive funkcije

Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere. Prema teoremu 3.18. svaku $\Sigma$–izmjerivu nenegativnu funkciju $f : X \to [0, \infty]$ možemo aproksimirati s nenegativnom jednostavnom funkcijom $g \in \mathcal{F}_+$, $g \leq f$. Imajući to na umu, možemo proširiti integral na skup svih nenegativnih izmjerivih funkcija, što je opisano u sljedećoj definiciji:

4.7. Definicija

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna $\Sigma$-izmjeriva funkcija.*

(I) *Broj*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup \Big\{ \int g \, \mathrm{d}\mu : g \in \mathcal{F}_+, \; g \leq f \Big\}$$

*naziva se* integral funkcije $f$ s obzirom na mjeru $\mu$ *ili, kraće,* integral funkcije $f$.

*Za funkciju $f$ kažemo da je* integrabilna *ako je $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$.*

(II) *Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int \chi_E f \, \mathrm{d}\mu$$

*naziva se* integral funkcije $f$ na skupu $E$ s obzirom na mjeru $\mu$ *ili, kraće,* integral funkcije $f$ na skupu $E$.

*Za funkciju $f$ kažemo da je* integrabilna na skupu $E$ *ako je $\int_E f \, \mathrm{d}\mu < \infty$.*

---

4.8. Propozicija

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere. Ako je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući niz funkcija iz $\mathcal{F}_+$ koji konvergira prema $\Sigma$-izmjerivoj funkciji $f : X \to [0, \infty]$, onda je*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

---

4.9. Teorem

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $f, g : X \to [0, \infty]$ nenegativne $\Sigma$-izmjerive funkcije i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:*

(a) $\int \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int f \, \mathrm{d}\mu$ (pozitivna homogenost),

(b) $\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$ (aditivnost),

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$ (monotonost).

---

4.10. Propozicija

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $f, g : X \to [0, \infty]$ nenegativne i $\Sigma$-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

(a) $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ *(s.s.)*,

(b) *ako je* $f = g$ *(s.s.), onda je* $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$.

---

U teoriji integracije vrlo je važan Levijev[11] teorem koji nam govori da na skupu svih nenegativnih i izmjerivih funkcija integral i limes rastućeg niza funkcija ,,komutiraju".

4.11. Teorem (Levijev teorem o monotonoj konvergenciji)
*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere, a* $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma$*-izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* $\Sigma$*-izmjerivih funkcija* $f_n : X \to [0, \infty]$ *sa sljedećim dvama svojstvima:*

(a) $f_n \le f_{n+1}$ *(s.s.) za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *(s.s.)*.

*Tada je*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

---

4.12. Teorem (Levijev teorem za redove)
*Neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* $\Sigma$*-izmjerivih funkcija* $f_n : X \to [0, \infty]$*. Ako red* $\sum_n f_n$ *konvergira, onda je*

$$\int \Big( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

---

4.13. Korolar
*Neka je* $f : X \to [0, \infty]$ *izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere* $(X, \Sigma, \mu)$*. Funkcija* $m : \Sigma \to [0, \infty]$ *definirana formulom*

$$m(E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_E f \,\mathrm{d}\mu, \qquad E \in \Sigma$$

*je mjera na* $\Sigma$.

---

4.14. Teorem (Fatouova[12] lema)
*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere, a* $f : X \to [0, \infty]$ *i* $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma$*-izmjerive funkcije. Ako je* $f = \liminf_n f_n$ *(s.s.), onda je*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

[11] Beppo Levi (1875.-1961.), talijanski matematičar.
[12] Pierre Joseph Louis Fatou (1878.-1929.), francuski matematičar.

---

4.15. TEOREM (ČEBIŠEVLJEVA[13] NEJEDNAKOST)
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija i $p \in (0, \infty)$ fiksan broj. Za svaki $t > 0$ definirajmo $\Sigma$-izmjeriv skup $A_t := \{x \in X : f(x) \geq t\}$. Tada je*

$$\mu(A_t) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \chi_{A_t} \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \,\mathrm{d}\mu. \tag{4.1}$$

---

## Riješeni zadaci

4.9. ZADATAK
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma$–izmjeriva integrabilna funkcija. Dokažite da tada vrijedi*

$$f < \infty \ (s.s.).$$

**Rješenje.** Neka je $A = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Dovoljno je pokazati da je $\mu(A) = 0$. Kako je $f$ integrabilna funkcija, to je $\int f \mathrm{d}\mu < \infty$, pa možemo pisati

$$\int f \mathrm{d}\mu = a, \ a \in \mathbb{R}.$$

Iz definicije skupa $A$ možemo zaključiti da je $f(x) \geq n\chi_A(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$, pa iz monotonosti integrala slijedi:

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{n} \int f \,\mathrm{d}\mu \geq \int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) \geq 0.$$

Kada na prethodnu nejednakost djelujemo limesom $n \to \infty$, dobivamo da je $\mu(A) = 0$.

4.10. ZADATAK
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma$–izmjeriva integrabilna funkcija. Dokažite da je tada skup $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ $\sigma$–konačan s obzirom na mjeru $\mu$.*

**Rješenje.** Imamo da je

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \geq 1/n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Sada, koristeći nejednakost (4.1) za $p = 1$, dobivamo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A_n) = \mu\left(\left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) < \infty,$$

što daje tvrdnju zadatka.

[13] Pafnuty Lvovich Chebyshev (Пафнутий Львович Чебышев) (1821.-1894.), ruski matematičar.

4.11. ZADATAK
*Neka je $f : X \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere $(X, \Sigma, \mu)$, tako da je $f^p$ integrabilna funkcija za svaki $p > 0$, i neka je $A_t$ skup kao u teoremu 4.15. Dokažite:*

(a) $\lim_{t\to\infty} \mu(A_t) = 0$,

(b) $\lim_{t\to\infty} (t^p \mu(A_t)) = 0$, *za* $p > 0$.

---

**Rješenje.**

(a) Iz Čebiševljeve nejednakosti (4.1) za $p = 1$ slijedi

$$0 \leq \mu(A_t) \leq \frac{1}{t} \int_{A_t} f \, \mathrm{d}\mu,$$

pa kada na tu nejednakost djelujemo limesom $t \to \infty$, dobivamo

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} \mu(A_t) \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{A_t} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

(b) Vrijedi da je

$$0 \leq \mu(A_t) = \int_{A_t} \mathrm{d}\mu = \int_{A_t} \frac{f^p}{f^p} \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{t^p} \int_{A_t} f^p \, \mathrm{d}\mu = \frac{m(A_t)}{t^p}.$$

Prema korolaru 4.13. $m$ je mjera, a prema pretpostavci da je $f^p$, $p > 0$ integrabilna funkcija slijedi $m(X) < \infty$. Pokažimo sada da je $\lim_{t\to\infty} m(A_t) = 0$, odakle će slijediti tvrdnja.
Ako je $u > t$, onda je $m(A_u) \leq m(A_t)$, pa je dovoljno pokazati da niz $\big(m(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema 0. Zaista, kako je

$$A_n \supseteq A_{n+1}, n \in \mathbb{N} \;\text{ i } m(A_1) \leq m(X) < \infty,$$

to iz neprekidnosti mjere na padajuće nizove i zadatka 4.9. slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = m(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0.$$

4.12. ZADATAK
*Neka je $f : X \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere $(X, \Sigma, \mu)$ te neka je $t > 0$ proizvoljan realan broj. Dokažite da vrijede sljedeće nejednakosti:*

(a) $\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq t\}\right) \leq \dfrac{1}{g(t)} \displaystyle\int g\left(f(x)\right) \mathrm{d}\mu(x)$, *gdje je* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *rastuća funkcija,*

(b) $\mu\Big(\{x \in X : f(x) \geq \alpha \displaystyle\int f(x) \, \mathrm{d}\mu(x)\}\Big) \leq \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$,

(c) $\mu\left(\{x \in X : f(x) < t\}\right) \leq \dfrac{1}{h(t)} \displaystyle\int h\left(f(x)\right) \mathrm{d}\mu(x)$, *gdje je* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *padajuća funkcija.*

---

**Rješenje.**

(a) Kako je funkcija $g$ rastuća, vrijedi da je

$$\{x \in X : f(x) \geq t\} = \{x \in X : g(f(x)) \geq g(t)\},$$

pa je

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq t\}\right) &= \mu\left(\{x \in X : g(f(x)) \geq g(t)\}\right) \\
&= \int \chi_{\{y \in X : g(f(y)) \geq g(t)\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \frac{g(f(x))}{g(f(x))} \chi_{\{y \in X : g(f(y)) \geq g(t)\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int \frac{g(f(x))}{g(t)} \chi_{\{y \in X : g(f(y)) \geq g(t)\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{g(t)} \int g(f(x))\, \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

(b) Zbog jednostavnijeg zapisa, neka je $b = \alpha \int f\, \mathrm{d}\mu$. Slično kao u (a) imamo

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq b\}\right) &= \int \chi_{\{y \in X : f(y) \geq b\}}(x)\, \mathrm{d}\mu \\
&= \int \frac{f(x)}{f(x)} \chi_{\{y \in X : f(y) \geq b\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int \frac{f(x)}{b} \chi_{\{y \in X : f(y) \geq b\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{b} \int f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

(c) Kako je funkcija $h$ padajuća vrijedi da je

$$\{x \in X : f(x) < t\} = \{x \in X : h(f(x)) > h(t)\},$$

pa analogno, kao u dokazu tvrdnje (a), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in X : f(x) < t\}\right) &= \mu\left(\{x \in X : h(f(x)) > h(t)\}\right) \\
&= \int \chi_{\{y \in X : h(f(y)) > h(t)\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \frac{h(f(x))}{h(f(x))} \chi_{\{y \in X : h(f(y)) > h(t)\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \int \frac{h(f(x))}{h(t)} \chi_{\{y \in X : h(f(y)) > h(t)\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \frac{1}{h(t)} \int h(f(x))\, \mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}$$

4.13. ZADATAK

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere i* $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma$*–izmjeriva integrabilna funkcija takva da je* $\int f \, \mathrm{d}\mu = 1$*. Pokažite da je funkcija* $\mathcal{P} : \Sigma \to \mathbb{R}_+$*, definirana s*

$$\mathcal{P}(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_A f \, \mathrm{d}\mu, \qquad A \in \Sigma,$$

*vjerojatnosna mjera.*

---

**Rješenje.** Iz korolara 4.13. slijedi da je funkcija $\mathcal{P}$ mjera, a kako je

$$\mathcal{P}(X) = \int f \, \mathrm{d}\mu = 1,$$

jasno je da je $\mathcal{P}$ i vjerojatnosna mjera.

4.14. ZADATAK

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere i* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *niz disjunktnih izmjerivih skupova takvih da je* $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$*. Pokažite da za svaku nenegativnu* $\Sigma$*–izmjerivu funkciju* $f : X \to [0, \infty]$ *vrijedi*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

---

**Rješenje.** Koristeći Levijev teorem za redove lako dobivamo

$$\begin{aligned}\int f \, \mathrm{d}\mu &= \int_{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n} f \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

4.16. PRIMJEDBA

*U nekoliko sljedećih zadataka koristit ćemo metodu poznatu pod imenom* Lebesgueova indukcija*. Naime, ako treba dokazati da određena tvrdnja vrijedi za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju, Lebesgueova indukcija omogućava lakše dokazivanje u smislu da najprije dokažemo da tvrdnja vrijedi za odgovarajuću karakterističnu funkciju, zatim, uz pomoć toga i definicije 4.1., da tvrdnja vrijedi za svaku nenegativnu jednostavnu funkciju te, naposljetku, uz pomoć Levijevog teorema o monotonoj konvergenciji dokazujemo da tvrdnja vrijedi za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju (vidi zadatak 4.15.).*

---

4.15. ZADATAK

*Neka je* $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ *prostor s mjerom prebrojavanja, tj.* $\mu(A)$ *je broj elemenata skupa* $A \subseteq \mathbb{N}$ *i* $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$*. Dokažite da je tada*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

---

**Rješenje.**

(1) Ako je $f = \chi_A$, $A \subseteq \mathbb{N}$, onda je

$$\int \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n).$$

(2) Ako je $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$ nenegativna jednostavna funkcija, onda je

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int \chi_{A_k} \,\mathrm{d}\mu \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz Tonellijevog teorema za sume (vidi primjedbu 2.18.).

(3) U općem slučaju, kada je $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ proizvoljna nenegativna izmjeriva funkcija, definirajmo najprije pomoćne funkcije

$$g_k(n) := \begin{cases} f(n), & \text{ako je } n \leq k \\ 0, & \text{ako je } n > k. \end{cases}$$

Tada je $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $g_k \leq g_{k+1} \leq f$ i pri tome je $\lim_{k \to \infty} g_k = f$. Štoviše, $\int g_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{k} f(n)$. Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int g_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

4.16. Zadatak

*Neka su $\mu$ i $\nu$ mjere na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$ takve da je $\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ za neku nenegativnu izmjerivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$. Dokažite da vrijedi*

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \int g f \,\mathrm{d}\mu$$

*za svaku nenegativnu, izmjerivu funkciju $g : X \to [0, \infty]$.*

---

**Rješenje.**

(1) Neka je $g = \chi_A$, $A \in \Sigma$. Tada vrijedi

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \int \chi_A \,\mathrm{d}\nu = \nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int \chi_A f \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}\mu.$$

(2) Ako je $g \in \mathcal{F}_+$, onda funkciju $g$ možemo zapisati u obliku $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, pa je

$$\begin{aligned}\int g \,\mathrm{d}\nu &= \int \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\nu \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \chi_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(3) Neka je $g$ nenegativna, izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih jednostavnih funkcija tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, pa je i $\lim\limits_{n\to\infty} f g_n = fg$. Sada iz Levijevog teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\nu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int g_n f \,\mathrm{d}\mu = \int g f \,\mathrm{d}\mu.$$

4.17. Zadatak

*Neka je $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ izmjeriva funkcija, $c \in \mathbb{R}$ i $\lambda$ Lebesgueova mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pokažite da tada vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+c) \,\mathrm{d}\lambda(x).$$

---

**Rješenje.** Koristeći Lebesgueovu indukciju dobivamo:

(1) Neka je $f = \chi_A$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(A), \\ \int_{\mathbb{R}} f(x+c) \,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x+c) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{A-c}(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \lambda(A-c),\end{aligned}$$

gdje je $A - c = \{a - c : a \in A\}$, pa vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+c) \,\mathrm{d}\lambda(x)$$

zbog svojstva translatorne invarijantnosti Lebesgueove mjere.

(2) Neka je $f \in \mathcal{F}_+$, tj. $f = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$ međusobno disjunktni skupovi. Koristeći (1) dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(A_i - c) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i - c}(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x+c) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+c) \,\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

(3) Ako je $f$ nenegativna izmjeriva funkcija, onda postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, pa prema (2) i Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x+c)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+c)\,\mathrm{d}\lambda(x).\end{aligned}$$

4.18. Zadatak

*Neka je $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$ prostor mjere. Ako za svaki $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi*

$$\mu(A)=\mu(A-1),$$

*gdje je $A-1 := \{a-1 :\ a\in A\}$, dokažite da za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju $f : X\to[0,\infty]$ vrijedi*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x+1)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

---

**Rješenje.** Primijetimo da zadatak možemo riješiti na isti način kao zadatak 4.17.

4.19. Zadatak

*Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor mjere, $\alpha$ pozitivan realan broj, te $A\in\Sigma$. Nadalje, neka je $\nu:\Sigma\to[0,\infty]$ mjera na izmjerivom prostoru $(X,\Sigma)$ definirana s*

$$\nu(B) := \alpha\mu(A\cap B),\ \ B\in\Sigma.$$

*Lebesgueovom indukcijom dokažite da za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju $f : X\to[0,\infty]$ vrijedi*

$$\int f\,\mathrm{d}\nu = \alpha\int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

---

**Rješenje.**

(1) Pokažimo najprije da tvrdnja vrijedi za karakterističnu funkciju. Stoga, neka je $f=\chi_B$, $B\in\Sigma$.

$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}\nu &= \int \chi_B\,\mathrm{d}\nu = \nu(B) = \alpha\mu(A\cap B) = \alpha\int \chi_{A\cap B}\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int \chi_A\chi_B\,\mathrm{d}\mu\\ &= \alpha\int_A \chi_B\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int_A f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(2) Neka je $f \in \mathcal{F}_+$, tj. $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, gdje su $\alpha_i \geq 0$ i $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$ su međusobno disjunktni skupovi. Sada dobivamo

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\nu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\nu \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha \int_A \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \alpha \int_A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(3) Naposljetku, pokažimo da tvrdnja vrijedi za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju $f$. Iz činjenice da postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, prema (2) i Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\nu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

4.20. Zadatak

*Neka je $(X, \Sigma, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor te neka su dane $\sigma$–algebre $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \Sigma$ koje su nezavisne, odnosno vrijedi*

$$\mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C),\ B \in \mathcal{B},\ C \in \mathcal{C}.$$

*Pokažite da za svaku nenegativnu $\mathcal{B}$–izmjerivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$ i za svaku nenegativnu $\mathcal{C}$–izmjerivu funkciju $g : X \to [0, \infty]$ vrijedi*

$$\int fg \,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int f \,\mathrm{d}\mathcal{P} \int g \,\mathrm{d}\mathcal{P}.$$

---

**Rješenje.**

(1) Neka je $f = \chi_B$, $B \in \mathcal{B}$, $g = \chi_C$, $C \in \mathcal{C}$. Tada je

$$\begin{aligned}\int fg \,\mathrm{d}\mathcal{P} &= \int \chi_B \chi_C \,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int \chi_{B\cap C} \,\mathrm{d}\mathcal{P} = \mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(B) \cdot \mathcal{P}(C) \\ &= \int \chi_B \,\mathrm{d}\mathcal{P} \int \chi_C \,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int f \,\mathrm{d}\mathcal{P} \int g \,\mathrm{d}\mathcal{P}.\end{aligned}$$

(2) Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+$. Tada postoje nenegativni realni brojevi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ te disjunktni skupovi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ tako da je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$, pa je prema dijelu (1) zadatka

$$\begin{aligned}\int fg \,\mathrm{d}\mathcal{P} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \int \chi_{A_i} \chi_{B_j} \,\mathrm{d}\mathcal{P} \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \int \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mathcal{P} \int \chi_{B_j} \,\mathrm{d}\mathcal{P} \\ &= \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mathcal{P} \int \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j} \,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int f \,\mathrm{d}\mathcal{P} \int g \,\mathrm{d}\mathcal{P}.\end{aligned}$$

(3) Neka su $f$ i $g$ nenegativne izmjerive funkcije. Tada postoje rastući nizovi nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ i $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} f_n g_n = fg$, pa iz Levijevog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\int fg\,\mathrm{d}\mathcal{P} &= \lim_{n\to\infty}\int f_n g_n\,\mathrm{d}\mathcal{P} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\int f_n\,\mathrm{d}\mathcal{P}\int g_n\,\mathrm{d}\mathcal{P}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mathcal{P}\lim_{n\to\infty}\int g_n\,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int f\,\mathrm{d}\mathcal{P}\int g\,\mathrm{d}\mathcal{P}.\end{aligned}$$

4.21. Zadatak

*Neka su $(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ prostori mjere i $f : X \to Y$ izmjerivo preslikavanje takvo da je $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$ za svaki $A \in \mathcal{N}$ i*

$$\nu(E) = \mu\left(f^{-1}(E)\right),\ E \in \mathcal{N}.$$

*Dokažite da je tada*

$$\int_X (g\circ f)\,\mathrm{d}\mu = \int_Y g\,\mathrm{d}\nu$$

*za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju $g : Y \to [0,\infty]$.*

---

**Rješenje.**

(1) Neka je $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{N}$. Tada je

$$\begin{aligned}\int_X (g\circ f)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X (\chi_E\circ f)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{f^{-1}(E)}\,\mathrm{d}\mu = \mu\left(f^{-1}(E)\right)\\ &= \nu(E) = \int_Y \chi_E\,\mathrm{d}\nu = \int_Y g\,\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

(2) Neka je $g \in \mathcal{F}_+$, tj. $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i\chi_{E_i}$, gdje su $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ i $E_1,\ldots,E_n \in \mathcal{N}$ su disjunktni skupovi. Primjenom jednakosti dokazane u (1) slijedi

$$\begin{aligned}\int_X (g\circ f)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\int_X (\chi_{E_i}\circ f)\,\mathrm{d}\mu \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\int_Y \chi_{E_i}\,\mathrm{d}\nu\\ &= \int_Y\sum_{i=1}^n \alpha_i\chi_{E_i}\,\mathrm{d}\nu = \int_Y g\,\mathrm{d}\nu.\end{aligned}$$

(3) Neka je $g$ nenegativna izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, odnosno vrijedi i $\lim\limits_{n\to\infty} g_n\circ f = g\circ f$. Sada prema Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\int_X (g\circ f)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X (g_n\circ f)\,\mathrm{d}\mu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_Y g_n\,\mathrm{d}\nu = \int_Y g\,\mathrm{d}\nu.$$

4.22. Zadatak
*Pokažite primjerom da je uvjet $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ u Fatouovoj lemi nužan.*

---

**Rješenje.** Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere te $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija definiranih s $f_n := -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = 0 =: f,$$

pa slijedi

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda = 0 > -1 = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda,$$

što je u kontradikciji s tvrdnjom Fatouove leme.

4.23. Zadatak
*Neka je dan prostor mjere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ i niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definiranih s $f_n := \chi_{(n,n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da tada vrijedi stroga nejednakost u Fatouovoj lemi.*

---

**Rješenje.** Kako je

$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} \chi_{(n,n+1)} = \lim_{n\to\infty} \chi_{(n,n+1)} = 0 \implies \int f \,\mathrm{d}\lambda = 0 \text{ i}$$
$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda = \liminf_{n\to\infty} \lambda\left((n, n+1)\right) = 1,$$

vrijedi

$$\int f \,\mathrm{d}\lambda < \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

4.24. Zadatak
*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere te $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definiranih s $g_n := n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da je tada*

$$\int g \,\mathrm{d}\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\lambda,$$

*gdje je $g := \lim_{n\to\infty} g_n$. Vrijedi li u tom slučaju tvrdnja Fatouove leme?*

---

**Rješenje.** Kako je $\lim_{n\to\infty} g_n = 0 = g$, to je

$$\int g \,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

Zbog

$$\int g_n \,\mathrm{d}\lambda = \int n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n})} \,\mathrm{d}\lambda = n\lambda\left([1/n, 2/n)\right) = 1$$

je

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\lambda = 1,$$

iz čega odmah zaključujemo da je

$$\int g \, \mathrm{d}\lambda < \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\lambda$$

te također vrijedi i tvrdnja Fatouove leme.

4.25. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f, f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ $\Sigma$–izmjerive funkcije. Ako je $f_n \le f$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, dokažite da je tada*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

*Ta je tvrdnja poznata kao* Obrat Fatouove leme.

---

**Rješenje.** Definirajmo pomoćne funkcije $g_n := f - f_n$, $n \in \mathbb{N}$ koje su nenegativne izmjerive, prema uvjetu zadatka. Prema tvrdnji Fatouove leme slijedi

$$\int \liminf_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{4.2}$$

Koristeći jednakost (1.2), danu na str. 6 dobivamo

$$\liminf_{n\to\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \tag{4.3}$$

i

$$\int \liminf_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu = \int \liminf_{n\to\infty} (f - f_n) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu - \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{4.4}$$

Sada iz (4.2), (4.3) i (4.4) slijedi

$$\int f \, \mathrm{d}\mu - \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int f \, \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

odnosno

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

4.26. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih skupova. Koristeći se jednakostima*

$$\chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n},$$
$$\chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n},$$

*dokazanim u zadatku 1.13., dokažite:*

(a) $\mu\big(\liminf_{n\to\infty} A_n\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

(b) $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big)$, *ako je mjera* $\mu$ *konačna,*

(c) *ako je dan prostor mjere* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *i niz* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *izmjerivih skupova* $A_n = (n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}$, *pokažite da tvrdnja* (b) *ne vrijedi, što će značiti da* (b) *općenito ne vrijedi kada pripadni prostor mjere nije konačan.*

---

**Rješenje.**

(a) Pomoću Fatouove leme dobivamo:

$$\begin{aligned}\mu\big(\liminf_{n\to\infty} A_n\big) &= \int \chi_{\liminf_{n\to\infty} A_n} \,\mathrm{d}\mu = \int \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(b) Uz pomoć obrata Fatouove leme možemo pokazati da vrijedi:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) = \limsup_{n\to\infty} \int \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu &\leq \int \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n} \,\mathrm{d}\mu = \mu\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big).\end{aligned}$$

(c) Vrijedi da je

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) &= \limsup_{n\to\infty} n = \infty, \\ \lambda\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) &= \lambda\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq k} (n, 2n)\Big) = \lambda(\emptyset) = 0,\end{aligned}$$

pa vidimo da tvrdnja (b) u tom slučaju ne vrijedi.

4.17. Primjedba

*Primijetimo da su u zadatku* 2.47. *već dokazane tvrdnje* (a) *i* (b) *prethodnog zadatka, no na drugačiji način, odnosno koristeći samo svojstva mjere.*

---

## 4.3. Integral izmjerive funkcije

4.18. DEFINICIJA

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere, a* $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$*-izmjeriva funkcija.*

(I) *Ako je barem jedan od brojeva* $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu$ *i* $\int f^- \, \mathrm{d}\mu$ *konačan, gdje su funkcije* $f^+$ *i* $f^-$ *definirane kao u propoziciji 3.16. s*

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}, \qquad x \in X,$$

*onda se definira broj*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu$$

*i nazivamo ga* integral funkcije $f$ s obzirom na mjeru $\mu$ *ili, kraće,* integral funkcije $f$.

*Za funkciju* $f$ *kažemo da je* integrabilna *ako je* $\int f \, \mathrm{d}\mu$ *konačan.*

(II) *Neka je* $E \in \Sigma$ *izmjeriv skup. Ako je definiran integral* $\int \chi_E f \, \mathrm{d}\mu$*, onda broj*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int f \chi_E \, \mathrm{d}\mu$$

*nazivamo* integral funkcije $f$ na skupu $E$ s obzirom na mjeru $\mu$ *ili, kraće,* integral funkcije $f$ na skupu $E$.

*Za funkciju* $f$ *kažemo da je* integrabilna na skupu $E$ *ako je* $\int_E f \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

---

4.19. LEMA

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere, a* $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$*-izmjeriva funkcija. Funkcija* $f$ *je integrabilna ako i samo ako je funkcija* $|f|$ *integrabilna, tj. ako je* $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

---

4.20. PROPOZICIJA

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere, a* $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$*-izmjeriva funkcija. Ako je* $f$ *integrabilna, onda vrijedi:*

(a) $f(x) \in \mathbb{R}$ *(s.s.). Preciznije,* $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) = 0$.

(b) *Skup* $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ *je* $\sigma$*-konačan.*

---

4.21. TEOREM

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere, a* $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ *dvije* $\Sigma$*-izmjerive funkcije takve da je* $f = g$ *(s.s.). Ako je definiran integral* $\int f \, \mathrm{d}\mu$*, onda je definiran i integral* $\int g \, \mathrm{d}\mu$ *i pri tome je*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

---

**4.22. Teorem**

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $f = 0$ *(s.s.)*,

(b) $\int |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$,

(c) $\int f\chi_A \, \mathrm{d}\mu = 0$ *za svaki* $A \in \Sigma$.

---

**4.23. Teorem**

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije $\alpha f$ i $f + g$ integrabilne i pri tome vrijedi:*

(a) $\int \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int \, \mathrm{d}\mu$ (homogenost),

(b) $\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$ (aditivnost),

(c) $f \le g \Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu \le \int g \, \mathrm{d}\mu$ (monotonost).

---

**4.24. Teorem (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji)**

*Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma$-izmjerive funkcije i neka je $g : X \to [0, \infty]$ integrabilna funkcija. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

(a) $f = \lim_n f_n$ *(s.s.)*,

(b) *funkcije $f_n$ su* dominirane *funkcijom $g$, tj.*

$$|f_n| \le g \quad (s.s.) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},$$

*onda su sve funkcije $f$ i $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ integrabilne i vrijedi*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

---

**4.25. Primjedba**

*Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji je osnovni teorem integralnog računa.*

---

**4.26. Teorem**

*Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma$-izmjerive funkcije. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, onda vrijedi:*

(a) *red* $\sum_n f_n$ *konvergira (s.s.),*

(b) *ako je* $f = \sum_n f_n$ *(s.s.), onda je*

$$\int \Big( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

---

## Riješeni zadaci

---

4.27. ZADATAK
*Neka su* $\mu, \nu, \eta : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *mjere na izmjerivom prostoru* $(X, \Sigma)$*, takve da je* $\mu := c_1\nu + c_2\eta$*, gdje su* $c_1$ *i* $c_2$ *nenegativni realni brojevi, te* $f : X \to \mathbb{R}$ $\Sigma$*–izmjeriva funkcija, integrabilna u odnosu na mjere* $\nu$ *i* $\eta$*. Pokažite da vrijedi*

$$\int f \, d\mu = c_1 \int f \, d\nu + c_2 \int f \, d\eta,$$

*iz čega će slijediti da je funkcija* $f$ *integrabilna i u odnosu na mjeru* $\mu$*.*

---

**Rješenje.**

(1) Neka je $f = \chi_A$, $A \in \Sigma$. Tada je

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \int \chi_A \, d(c_1\nu + c_2\eta) = (c_1\nu + c_2\eta)(A) \\ &= c_1\nu(A) + c_2\eta(A) = c_1 \int f \, d\nu + c_2 \int f \, d\eta. \end{aligned}$$

(2) Neka je $f : X \to [0, \infty)$ nenegativna jednostavna funkcija. Tada je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

gdje su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ i $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ su disjunktni skupovi. Sada je

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \chi_{A_i} \, d(c_1\nu + c_2\eta) \\ &\overset{(1)}{=} c_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(A_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \eta(A_i) = c_1 \int f \, d\nu + c_2 \int f \, d\eta. \end{aligned}$$

(3) Neka je $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, pa prema (2) i Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu &\overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \left( c_1 \int f_n \,\mathrm{d}\nu + c_2 \int f_n \,\mathrm{d}\eta \right) \\ &= c_1 \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\nu + c_2 \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\eta = c_1 \int f \,\mathrm{d}\nu + c_2 \int f \,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

(4) Neka je $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Kako je $f$ integrabilna s obzirom na mjere $\nu$ i $\eta$, vrijedi da je

$$\begin{aligned}c_1 \int f \,\mathrm{d}\nu + c_2 \int f \,\mathrm{d}\eta &= c_1 \left( \int f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int f^- \,\mathrm{d}\nu \right) + c_2 \left( \int f^+ \,\mathrm{d}\eta - \int f^- \,\mathrm{d}\eta \right) \\ &= c_1 \int f^+ \,\mathrm{d}\nu + c_2 \int f^+ \,\mathrm{d}\eta - \left( c_1 \int f^- \,\mathrm{d}\nu + c_2 \int f^- \,\mathrm{d}\eta \right) \\ &\overset{(3)}{=} \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

4.28. ZADATAK

*Neka je $\mu$ mjera prebrojavanja na izmjerivom prostoru $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ i $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Izračunajte $\int f \,\mathrm{d}\mu$ te ispitajte koji uvjeti moraju biti ispunjeni kako bi funkcija $f$ bila integrabilna.*

---

**Rješenje.** Promotrimo sljedeće slučajeve:

(1) Neka je $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ nenegativna izmjeriva funkcija, $N_n := \{1, \ldots, n\}$ i

$$f_n := f\chi_{N_n} = f(1)\chi_{\{1\}} + \cdots + f(n)\chi_{\{n\}} = \sum_{i=1}^{n} f(i)\chi_{\{i\}} = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

tako da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Sada, prema Levijevom teoremu o monotonoj konvergeniji, slijedi da je

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i)\mu(\{i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} f(i),$$

jer je $\mu(\{i\}) = 1$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.

(2) Neka je $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ proizvoljna izmjeriva funkcija. Tada $f$ možemo zapisati u obliku $f = f^+ - f^-$, gdje su $f^+$, $f^-$ nenegativne izmjerive funkcije, pa slijedi

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} f^+(i) - \sum_{i=1}^{\infty} f^-(i).$$

Da bi $\int f \,\mathrm{d}\mu$ imao smisla, barem jedan od integrala $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ mora biti konačan, odnosno, barem jedan od redova $\sum_{i=1}^{\infty} f^+(i)$, $\sum_{i=1}^{\infty} f^-(i)$ mora konvergirati.
Nadalje, kako bi funkcija $f$ bila integrabilna, mora vrijediti

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f^+(i) < \infty \ \text{ i } \ \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f^-(i) < \infty,$$

što je ekvivalentno s tvrdnjom (vidi lemu 4.19.) da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \big(f^+(i) + f^-(i)\big) < \infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)| < \infty.$$

Dakle, funkcija $f$ je integrabilna ako i samo ako red $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ apsolutno konvergira i u tom slučaju vrijedi

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i).$$

4.29. Zadatak
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i $f : X \to [-\infty, \infty]$ integrabilna funkcija. Ako danu funkciju proširimo do funkcije $\tilde{f}$ na sljedeći način:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{ako je } x \in X \backslash N \\ \beta, & \textit{ako je } x \in N, \end{cases}$$

*gdje je $N$ skup mjere nula, dokažite da je $\tilde{f}$ integrabilna funkcija te $\int \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.*

---

**Rješenje.** Kako se funkcije $f$ i $\tilde{f}$ podudaraju svuda osim na skupu mjere nula, pri čemu je funkcija $f$ integrabilna, prema teoremu 4.21. slijedi da je $\tilde{f}$ integrabilna funkcija te vrijedi

$$\int \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

4.30. Zadatak
*Neka je $\mu$ konačna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

(a) *Ispitajte je li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s*

$$f(x) := \sin \frac{x}{a}, \ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

*integrabilna u odnosu na mjeru $\mu$.*

(b) *Izračunajte*

$$\lim_{n\to\infty}\int \sin\frac{x}{n}\,\mathrm{d}\mu.$$

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $\left|\sin\frac{x}{a}\right| \le 1$, slijedi da je

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\sin\frac{x}{a}\right|\,\mathrm{d}\mu \le \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}\mu = \mu(\mathbb{R}) < \infty,$$

odnosno funkcija $f$ je integrabilna.

(b) Neka je $x \in \mathbb{R}$. Zbog neprekidnosti funkcije sinus imamo da je

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n} = 0,$$

a zbog $\left|\sin\frac{x}{n}\right| \le 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ funkcije $x \mapsto \sin\frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ su dominirane integrabilnom funkcijom $g(x) := 1$. Prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int \sin\frac{x}{n}\,\mathrm{d}\mu = \int 0\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

4.31. Zadatak

*Neka je $f : X \to [-\infty,\infty]$ $\Sigma$–izmjeriva integrabilna funkcija. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve skupove $A \in \Sigma$, takve da je $\mu(A) < \delta$ vrijedi $\left|\int_A f\,\mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon$.*

---

**Rješenje.** Neka je $f : X \to [-\infty,\infty]$ $\Sigma$–izmjeriva, integrabilna funkcija i $\varepsilon > 0$. Definirajmo niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija $f_n : X \to [0,\infty]$ s $f_n := \min\{|f|, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Vidimo da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija koje su dominirane integrabilnom funkcijom $|f|$ te za koje vrijedi $\lim_{n\to\infty}\min\{|f|, n\} = |f|$. Prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int \min\{|f|, n\}\,\mathrm{d}\mu = \int |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Sada možemo zaključiti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\int (|f| - \min\{|f|, n\})\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za sve } n \ge n_0.$$

Neka je $\delta := \varepsilon/(2n_0)$ te primijetimo da ako za skup $A \in \Sigma$ vrijedi $\mu(A) < \delta$, onda je

$$\begin{aligned}
\left|\int_A f\,\mathrm{d}\mu\right| &\le \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_A (|f| - \min\{|f|, n_0\})\,\mathrm{d}\mu + \int_A \min\{|f|, n_0\}\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int (|f| - \min\{|f|, n_0\})\,\mathrm{d}\mu + \int_A n_0\,\mathrm{d}\mu \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + n_0\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

4.32. ZADATAK

*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere te $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva, integrabilna funkcija. Za svaki konačan interval $I \subset \mathbb{R}$ definirajmo*

$$f_I := \frac{1}{\lambda(I)} \int_I f \, \mathrm{d}\lambda \ \text{ i } E_I = \{x \in I : \ f(x) > f_I\}.$$

*Pokažite da tada vrijedi*

$$\int_I |f - f_I| \, \mathrm{d}\lambda = 2 \int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda.$$

---

**Rješenje.** Uočimo najprije da je

$$\begin{aligned}\int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda + \int_{I \setminus E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda &= \int_I (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_I f \, \mathrm{d}\lambda - \int_I f_I \, \mathrm{d}\lambda = \int_I f \, \mathrm{d}\lambda - \int_I f \, \mathrm{d}\lambda = 0.\end{aligned}$$

Iz prethodnog razmatranja slijedi

$$\int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda = \int_{I \setminus E_I} (f_I - f) \, \mathrm{d}\lambda. \tag{$\star$}$$

Nadalje, imamo da je

$$\begin{aligned}\int_I |f - f_I| \, \mathrm{d}\lambda &= \int_{E_I} |f - f_I| \, \mathrm{d}\lambda + \int_{I \setminus E_I} |f - f_I| \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda + \int_{I \setminus E_I} (f_I - f) \, \mathrm{d}\lambda \\ &\overset{(\star)}{=} \int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda + \int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda = 2 \int_{E_I} (f - f_I) \, \mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

4.33. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, gdje je mjera $\mu$ konačna, te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija.*

(a) *Uz pretpostavku da je $f^n$ integrabilna funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$ te da postoji $\lim\limits_{n \to \infty} \int f^n \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, dokažite da je $|f(x)| \leq 1$ (s.s.).*

(b) *Ako je $f^n$ integrabilna funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$, pokažite da je tada*

$$\int f^n \, \mathrm{d}\mu = c \in \mathbb{R} \ \text{ za sve } n \in \mathbb{N}$$

*ako i samo ako je $f = \chi_A$ za neki izmjeriv skup $A \subseteq X$.*

---

**Rješenje.** Uočimo da je $f^n$ funkcija $f^n : X \to \mathbb{R}$ definirana s $f^n(x) := (f(x))^n$ za svaki $x \in X$.

(a) Neka je $f^n$ integrabilna funkcija te postoji $\lim_{n\to\infty} \int f^n \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno onome što trebamo pokazati, odnosno neka za izmjeriv skup

$$A = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$$

vrijedi $\mu(A) > 0$. Iz jednakosti

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| \geq 1 + 1/k\}$$

vidimo da postoji $\delta > 1$, tako da je za izmjeriv skup $B = \{x \in X : |f(x)| > \delta\}$ zadovoljeno $\mu(B) > 0$. Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f^{2n} \geq \delta^{2n} \chi_{B}$ te iz

$$\delta^{2n} \mu(B) = \int \delta^{2n} \chi_{B} \, \mathrm{d}\mu \leq \int f^{2n} \, \mathrm{d}\mu$$

slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \int f^{2n} \, \mathrm{d}\mu = \infty$, što je u kontradikciji s polaznom pretpostavkom. Dakle, možemo zaključiti da je $|f(x)| \leq 1$ za s.s. $x \in X$.

(b) Pretpostavimo da je $\int f^n \, \mathrm{d}\mu = c$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Prema (a) slijedi da je $|f(x)| \leq 1$ (s.s.). Definirajmo pomoćne skupove $A := \{x \in X : f(x) = 1\}$, $B := \{x \in X : f(x) = -1\}$ i $C := \{x \in X : |f(x)| < 1\}$. Sada, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int f^n \, \mathrm{d}\mu &= \int_A f^n \, \mathrm{d}\mu + \int_B f^n \, \mathrm{d}\mu + \int_C f^n \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_A 1 \, \mathrm{d}\mu + \int_B (-1)^n \, \mathrm{d}\mu + \int_C f^n \, \mathrm{d}\mu \\ &= \mu(A) + (-1)^n \mu(B) + \int_C f^n \, \mathrm{d}\mu = c. \end{aligned}$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$ za sve $x \in C$ te je na skupu $C$ niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominiran funkcijom $g : X \to [0, \infty]$, $g(x) = 1$, koja je integrabilna zbog pretpostavke o konačnosti mjere $\mu$, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \int_C f^n \, \mathrm{d}\mu = 0$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} (\mu(A) + (-1)^n \mu(B)) = c.$$

Kako $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ ne postoji, možemo zaključiti da je $\mu(B) = 0$. Dakle, $\mu(A) = c$, odnosno

$$c = \int f^n \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) + \int_C f^n \, \mathrm{d}\mu = c + \int_C f^n \, \mathrm{d}\mu \ \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}, \qquad (\star)$$

iz čega zaključujemo da je $\int_C f^n \, d\mu = 0$, pa mora vrijediti $f(x) = 0$, (s.s.) na skupu $C$. Iz posljednjeg i jednakosti $(\star)$ slijedi da je $f = \chi_A$ (s.s.).
Obratna tvrdnja očito vrijedi, jer ako je $f = \chi_A$ za neki izmjeriv skup $A \subseteq X$, onda je

$$\int f^n \, d\mu = \int \chi_A^n \, d\mu = \int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \in \mathbb{R}.$$

.

4.34. Zadatak

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih, $\Sigma$-izmjerivih i monotono padajućih funkcija koji konvergira prema funkciji $f : X \to [0, \infty]$. Dokažite:*

(a) *Ako je funkcija $f_1$ integrabilna, onda su sve funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne i pri tome je*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

(b) *Pokažite primjerom da se općenito ne smije izostaviti integrabilnost funkcije $f_1$.*

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz monotono padajućih funkcija, vrijedi da je

$$f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots,$$

iz čega, prema monotonosti integrala, slijedi

$$\infty > \int f_1(x) \, d\mu \geq \int f_2(x) \, d\mu \geq \cdots \geq \int f_n(x) \, d\mu \geq \cdots,$$

odnosno možemo zaključiti da su sve funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ integrabilne. Ako se za dominirajuću funkciju uzme nenegativna, integrabilna funkcija $f_1$, jednakost

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

odmah slijedi iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji.

(b) Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere te neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih izmjerivih i monotono padajućih funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih s $f_n := \chi_{(n,\infty)}$, $n \in \mathbb{N}$. Iz

$$\int f_1 \, d\lambda = \int \chi_{(1,\infty)} \, d\lambda = \lambda((1, \infty)) = +\infty$$

slijedi da funkcija $f_1$ nije integrabilna. Sada je $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ i

$$\int f \, d\lambda = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \infty.$$

4.35. Zadatak

*Neka je* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *prostor mjere. Konstruirajte niz izmjerivih integrabilnih funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tako da je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R},$$

*gdje je* $f$ *integrabilna funkcija i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda \neq \int f \,\mathrm{d}\lambda.$$

*Je li taj primjer u kontradikciji s Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji?*

---

**Rješenje.** Neka je

$$f_n(x) := n \cdot \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ su integrabilne:

$$\int f_n \,\mathrm{d}\lambda = n \int \chi_{(0,\frac{1}{n})} \,\mathrm{d}\lambda = 1 < \infty$$

i vrijedi $\lim_{n\to\infty} f_n = 0 = f$ te je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\lambda = 1 \neq 0 = \int f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ nisu dominirane nekom integrabilnom funkcijom, pa to nije u kontradikciji s Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji.

4.36. Zadatak

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere i* $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma$*–izmjeriva integrabilna funkcija. Dokažite da je funkcija* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$F(x) := \int \chi_{(-\infty,x]} f \,\mathrm{d}\mu$$

*neprekidna na* $\mathbb{R}$.

---

**Rješenje.** Pretpostavimo da $F$ nije neprekidna u točki $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in \mathbb{R}$ tako da je $|x_\delta - x_0| < \delta$ i $\varepsilon \leq |F(x_\delta) - F(x_0)|$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_\delta < x_0$. Tada je

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \int \chi_{(-\infty,x_0]} f \,\mathrm{d}\mu = \int \left(\chi_{(-\infty,x_\delta]} + \chi_{(x_\delta,x_0]}\right) f \,\mathrm{d}\mu \\ &= F(x_\delta) + \int \chi_{(x_\delta,x_0]} f \,\mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

pa je stoga

$$\begin{aligned}\varepsilon \le |F(x_\delta) - F(x_0)| &= \Big| \int \chi_{(x_\delta, x_0]} f \,\mathrm{d}\mu \Big| \\ &\le \int \big|\chi_{(x_\delta, x_0]} f\big| \,\mathrm{d}\mu \le \int \chi_{(x_0-\delta, x_0+\delta)} |f| \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Specijalno, ako za $\delta$ uzmemo redom brojeve $\frac{1}{n}$, dobivamo

$$\varepsilon \le \int \chi_{(x_0-1/n, x_0+1/n)} |f| \,\mathrm{d}\mu, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{$\star$}$$

Nadalje, definirajmo pomoćni niz funkcija

$$f_n := \chi_{(x_0-1/n, x_0+1/n)} |f|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Niz funkcija $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući i (s.s.) konvergira prema $|f|$. Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int (|f| - f_n) \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Graničnim prijelazom $n \to \infty$ iz ($\star$) dobivamo $\varepsilon \le 0$, što je kontradikcija.

4.37. Zadatak

*Dokažite da uz pretpostavke Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

---

**Rješenje.** Definirajmo pomoćni niz funkcija $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u obliku

$$h_n(x) := \sup\{|f_k(x) - f(x)| : k \ge n\}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Sada iz $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Nadalje, uočimo da je $h_{n+1} \le h_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, a iz $|f_k - f| \le |f_k| + |f| \le 2g$, $k \ge n$ slijedi da je $h_n \le 2g$. Prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji vrijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Sada iz nejednakosti $0 \le \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \le \int h_n \,\mathrm{d}\mu$ možemo zaključiti da je

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

4.38. ZADATAK
*Neka je* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *integrabilna funkcija te neka su definirane funkcije* $g_n := f\chi_{[-n,n]}$, $h_n := \min\{f, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Dokažite da je tada*

$$\lim_{n\to\infty} \int |g_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int |h_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

---

**Rješenje.** Vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{[-n,n]}(x) = 1$ te je

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} f\chi_{[-n,n]} = f.$$

Nadalje, kako je $|g_n| \leq |f|$, $n \in \mathbb{N}$, prema lemi 4.19. i zadatku 4.37. slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int |g_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} \min\{f, n\} = f$ i $|h_n| \leq |f|$, $n \in \mathbb{N}$, na isti način zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int |h_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

## 4.4. Integracija na izmjerivom skupu

Prvi prirodni način na koji možemo definirati integrabilnost i integral funkcije $f$ na skupu $A$ je opisan definicijom 4.18.(II). Dakle, funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ je integrabilna na skupu $A \in \Sigma$ ako i samo ako je integrabilna funkcija $f\chi_A : X \to [-\infty, \infty]$.

Prije druge ekvivalentne definicije te teorema koji joj prethodi, sjetimo se pojma restrikcije $\sigma$–algebre definiranog u zadatku 2.3. i restrikcije mjere, definiranog u zadatku 2.29.:

4.27. Definicija

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere. Ako je $A \subseteq X$ bilo koji neprazan podskup od $X$, tada je*

$$\Sigma_A := \{S \cap A : S \in \Sigma\}$$

*$\sigma$-algebra na skupu $A$, koju nazivamo* restrikcija $\sigma$–algebre $\Sigma$ na skup $A$.

*Ako je $A \in \Sigma$ neprazan skup, funkcija $\mu_{|A} : \Sigma_A \to [0, \infty]$ definirana formulom*

$$\mu_{|A}(B) := \mu(B), \qquad B \in \Sigma_A$$

*je mjera na $(A, \Sigma_A)$, koju nazivamo* restrikcija mjere $\mu$ na $\Sigma_A$.

---

4.28. Teorem

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Tada vrijedi:*

(a) *Integral $\int_A f d\mu$ funkcije $f$ na skupu $A$ je definiran ako i samo ako je definiran integral $\int f_{|A} d\mu_{|A}$ funkcije $f_{|A}$ za prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$.*

(b) *Ako je definiran integral $\int_A f d\mu$, onda je*

$$\int_A f d\mu := \int f_{|A} d\mu_{|A}.$$

---

U sljedećem teoremu možemo vidjeti da je integrabilna funkcija ujedno integrabilna i na svakom izmjerivom skupu.

4.29. Teorem

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Tada vrijedi:*

(a) *Ako je definiran integral $\int f \, \mathrm{d}\mu$, onda je definiran integral $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ za svaki $A \in \Sigma$.*

(b) *Ako je $f$ integrabilna (na $X$), onda je $f$ integrabilna na svakom skupu $A \in \Sigma$.*

---

4.30. Teorem

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i $f : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija. Ako je definiran integral $\int f \, \mathrm{d}\mu$, onda vrijedi:*

(a) $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$ *za svaki skup* $A \in \Sigma$ *za koji je* $\mu(A) = 0$.

(b) *Neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz međusobno disjunktnih skupova iz* $\Sigma$ *i* $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Tada je*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) *Neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rastući niz skupova iz* $\Sigma$ *i* $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. *Tada je*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

(d) *Neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *padajući niz skupova iz* $\Sigma$ *i* $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. *Ako je* $\left| \int_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu \right| < \infty$, *onda je*

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

---

4.31. Primjedba

*Zahvaljujući teoremu 4.28. svi rezultati koji vrijede za integral $\int f \, \mathrm{d}\mu$ funkcije $f : X \to [-\infty, \infty]$ vrijede također i za integral $\int_A f \, \mathrm{d}\mu$ funkcije $f$ na izmjerivom skupu $A \in \Sigma$.*

---

## Riješeni zadaci

4.39. Zadatak

*Izračunajte:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{|\cos x|} \, \mathrm{d}\lambda$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \int_{[\frac{\pi}{2},\pi]} \sqrt[n]{\dfrac{\sin x}{x+\pi}} \mathrm{d}\lambda$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \mathrm{e}^{-\frac{n^4}{6}x} \, \mathrm{d}\lambda$,

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,5]} \mathrm{e}^{-nx^5}\mathrm{d}\lambda.$

---

**Rješenje.**

(a) Definirajmo pomoćni niz funkcija $f_n(x) := \sqrt[n]{|\cos x|}$, $n \in \mathbb{N}$, koje su neprekidne, pa stoga i izmjerive. Lako se vidi da je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominiran integrabilnom funkcijom $g : [0,\pi] \to [0,\infty)$, $g(x) = 1$, a kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ako je } x = \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{ ako je } x \in [0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi] \end{cases} = \chi_{[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]}(x),$$

prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\pi]} \sqrt[n]{|\cos x|}\,\mathrm{d}\lambda = \int \chi_{[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]}\,\mathrm{d}\lambda = \lambda\big([0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]\big) = \pi.$$

(b) Niz izmjerivih funkcija $f_n(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x+\pi}\right)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$ dominiran je integrabilnom funkcijom $g : [\frac{\pi}{2},\pi] \to [0,\infty)$, $g(x) = 1$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ako je } x = \pi \\ 1, \text{ ako je } x \in [\frac{\pi}{2},\pi) \end{cases} = \chi_{[\frac{\pi}{2},\pi)}(x),$$

prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[\frac{\pi}{2},\pi]} f_n\mathrm{d}\lambda = \int_{[\frac{\pi}{2},\pi]} \chi_{[\frac{\pi}{2},\pi)}\mathrm{d}\lambda = \lambda\big([\tfrac{\pi}{2},\pi)\big) = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Neka je $f_n(x) := \mathrm{e}^{-\frac{n^4}{6}x}$, $n \in \mathbb{N}$ pomoćni niz funkcija koje su neprekidne, pa stoga i izmjerive. Niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je dominiran integrabilnom funkcijom $g : [0,1] \to [0,\infty)$, $g(x) = 1$, a kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ako je } x \in [0,1) \\ 1, \text{ ako je } x = 0 \end{cases} = \chi_{\{0\}}(x),$$

prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} e^{-\frac{n^4}{6}x}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} \chi_{\{0\}}\mathrm{d}\lambda = \lambda\big(\{0\}\big) = 0.$$

(d) Funkcije $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^5}$, $n \in \mathbb{N}$ su izmjerive i dominirane integrabilnom funkcijom $g : [0,5] \to [0,\infty)$, $g(x) = 1$, a kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x = 0 \\ 0, \text{ ako je } x \in (0,5] \end{cases} = \chi_{\{0\}}(x)$$

također izmjeriva funkcija, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,5]} \mathrm{e}^{-nx^5}\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,5]} \chi_{\{0\}}\,\mathrm{d}\lambda = \lambda\big(\{0\}\big) = 0.$$

4.40. Zadatak

*Neka je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana na sljedeći način: $f(x) := 0$ za sve $x \in K$, gdje je $K$ Cantorov skup, te $f(x) := n$, $n \in \mathbb{N}$ za $x$ iz svakog intervala $J_n^k$, $k = 1, \dots, 2^n - 1$ koji je izbačen u $n$–tom koraku konstrukcije Cantorovog skupa. Izračunajte*

$$\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

---

**Rješenje.** Prema definiciji funkcije $f$ slijedi da je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{K_n^c}(x),$$

gdje je $K_n^c = \bigcup_{n=1}^{2^n-1} J_n^k$ unija međusobno disjunktnih intervala $J_n^k$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$ duljine $1/3^n$, izbačenih nakon $n$–tog koraka konstrukcije Cantorovog skupa. Sada dobivamo da je

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{2^n-1} J_n^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^n-1}{3^n}\\ &= \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{21}{4},\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz formule (2.14), dane na str. 75.

4.41. Zadatak

*Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } x \in \mathbb{Q}\\ [1/x], & \textit{inače,}\end{cases}$$

*gdje $[t]$ označava cjelobrojni dio od $t$. Dokažite:*

(a) *$f$ je izmjeriva funkcija,*

(b) *$\int f\,\mathrm{d}\lambda = \infty$.*

---

**Rješenje.** Definirajmo funkciju $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ s

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n\chi_{\langle 1/(n+1), 1/n]}$$

te uočimo da je $f(x) \neq g(x) \Leftrightarrow x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Dakle, kako je skup $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\lambda$–zanemariv, slijedi da je $f = g$ (s.s.) na $[0,1]$.

(a) Kako je $f = g$ (s.s.) na $[0,1]$, iz izmjerivosti funkcije $g$ i potpunosti Lebesgueove mjere prema teoremu 3.21. slijedi da je i $f$ izmjeriva funkcija.

(b) Prema propoziciji 4.10. slijedi da je

$$\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\lambda.$$

Pomoću Levijevog teorema za redove dobivamo

$$\int_{[0,1]} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} g \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int n\chi_{(1/(n+1),1/n]} \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

4.32. Primjedba

*Ako je dan prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \delta_a)$, gdje je $\delta_a$ Diracova delta mjera koncentrirana u točki $a \in X$ i $f : X \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija, onda prema teoremu 4.30.* (a) *vrijedi da je*

$$\int f \, \mathrm{d}\delta_a = f(a).$$

---

4.42. Zadatak

*Neka je $\nu = 3\lambda + 2\delta$ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, gdje je $\lambda$ Lebesgueova mjera, a $\delta$ mjera definirana s*

$$\delta(A) := \begin{cases} 0, \text{ za } 1 \notin A, \, 2 \notin A \\ 1, \text{ za } 1 \in A, \, 2 \notin A \\ 2, \text{ za } 1 \notin A, \, 2 \in A \\ 3, \text{ za } 1 \in A, \, 2 \in A \end{cases} = \delta_1(A) + 2\delta_2(A),$$

*za $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Izračunajte $\int f \mathrm{d}\nu$ ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definirana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, \text{ ako je } n-1 \le x < n, \, n \in \mathbb{N} \\ 0, \quad \text{inače.} \end{cases}$$

---

**Rješenje.** Definirajmo pomoćni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih izmjerivih funkcija $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ s $f_n := 2^{-n}\chi_{[n-1,n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x).$$

Red $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ očito konvergira, pa prema Levijevom teoremu za redove slijedi

$$\int f \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int 2^{-n}\chi_{[n-1,n)} \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Nadalje, prema primjedbi 4.32. slijedi

$$\int f \mathrm{d}\delta = \int f \mathrm{d}\delta_1 + 2 \int f \mathrm{d}\delta_2 = f(1) + 2f(2) = \frac{1}{2}.$$

Sada je

$$\int f \mathrm{d}\nu = 3 \int f \mathrm{d}\lambda + 2 \int f \mathrm{d}\delta = 4.$$

4.43. Zadatak
*Neka je* $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ *i* $f : X \to [0, \infty)$ *funkcija definirana s* $f(x) := \mathrm{e}^{-1/x}$. *Nadalje, neka je* $\mu$ *mjera prebrojavanja i* $\delta_1$ *Diracova delta mjera koncentrirana u točki* $x = 1$ *na izmjerivom prostoru* $(X, 2^X)$. *Izračunajte*

$$\int f \, \mathrm{d}\nu,$$

*pri čemu je* $\nu = \mu + \delta_1$.

---

**Rješenje.** Kako je $\mu$ mjera prebrojavanja, slijedi da je

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(1/n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e} - 1}.$$

Nadalje, prema primjedbi 4.32. vrijedi

$$\int f \, \mathrm{d}\delta_1 = f(1) = \mathrm{e}^{-1}.$$

Sada je

$$\int f \, \mathrm{d}\nu = \frac{1}{\mathrm{e} - 1} + \frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{2\,\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}(\mathrm{e} - 1)}.$$

4.44. Zadatak
*Neka su* $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *izmjerive integrabilne funkcije za koje vrijedi*

$$\int_{(-\infty, q]} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(-\infty, q]} g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x), \qquad q \in \mathbb{Q}.$$

*Dokažite da je tada*

$$\int_B f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_B g(x) \, \mathrm{d}\lambda(x), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

---

**Rješenje.** Definirajmo pomoćnu familiju

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \int_A f \, \mathrm{d}\lambda = \int_A g \, \mathrm{d}\lambda \right\}.$$

Kako je familija $\mathcal{C} := \{(-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}$ $\pi$–sistem koji generira Borelovu $\sigma$–algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, ako pokažemo da je $\mathcal{A}$ Dynkinova klasa, onda će vrijediti

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

tj. $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pokažimo da je $\mathcal{A}$ Dynkinova klasa, tj. da vrijede svojstva (d1)–(d3).

(d1) Funkcije $f$ i $g$ su nenegativne Borelove i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{(-\infty,n]} = f\chi_{(-\infty,\infty)} = f, \ \lim_{n\to\infty} g\chi_{(-\infty,n]} = g\chi_{(-\infty,\infty)} = g,$$

pa je prema uvjetima zadatka i Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(-\infty,n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{(-\infty,n]} g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\lambda,$$

odnosno $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(d2) Neka su $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$. Kako su $f$ i $g$ integrabilne funkcije, vrijedi

$$0 \leq \int f\chi_A \,\mathrm{d}\lambda < \infty \ \text{ i } \ 0 \leq \int g\chi_A \,\mathrm{d}\lambda < \infty,$$

pa je

$$\begin{aligned}\int_{B\setminus A} f \,\mathrm{d}\lambda &= \int f\chi_{B\setminus A} \,\mathrm{d}\lambda = \int f(\chi_B - \chi_A) \,\mathrm{d}\lambda = \int f\chi_B \,\mathrm{d}\lambda - \int f\chi_A \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_B f \,\mathrm{d}\lambda - \int_A f \,\mathrm{d}\lambda = \int_B g \,\mathrm{d}\lambda - \int_A g \,\mathrm{d}\lambda = \int_{B\setminus A} g \,\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

odnosno $B\setminus A \in \mathcal{A}$.

(d3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathcal{A}$. Kako su $f$ i $g$ nenegativne funkcije, to su $(f\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ rastući nizovi funkcija koji konvergiraju prema $f\chi_{\cup_{n=1}^\infty A_n}$ i $g\chi_{\cup_{n=1}^\infty A_n}$, redom.

Sada možemo primijeniti Levijev teorem o monotonoj konvergenciji, pa dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{\cup_{n=1}^\infty A_n} f \,\mathrm{d}\lambda &= \int f\chi_{\cup_{n=1}^\infty A_n} \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f\chi_{A_n} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} g \,\mathrm{d}\lambda = \int g\chi_{\cup_{n=1}^\infty A_n} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{\cup_{n=1}^\infty A_n} g \,\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

tj. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Dakle, familija $\mathcal{A}$ je Dynkinova klasa, odnosno prema prethodnom razmatranju slijedi tvrdnja zadatka.

4.45. ZADATAK
*Neka je $\mu$ $\sigma$–konačna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Pokažite da postoji konačna mjera $\nu$ na danom izmjerivom prostoru, takva da $\mu$ i $\nu$ imaju iste nul–skupove, tj. skupove mjere nula.*

---

**Rješenje.** Neka je $\mathcal{N}_\mu$ familija svih izmjerivih skupova mjere $\mu$ nula, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz izmjerivih skupova, takvih da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\varepsilon > 0$ fiksan. Definirajmo pomoćni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivih funkcija $f_n : X \to [0, \infty)$ s $f_n(x) := \dfrac{\chi_{A_n}(x)}{2^n(\mu(A_n) + \varepsilon)}$ i funkciju $f_\varepsilon : X \to [0, \infty)$

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X$$

koja je očito pozitivna i izmjeriva. Uočimo da red $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ konvergira, pa iz Levijevog teorema za redove dobivamo

$$\begin{aligned}\int f_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu &= \int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}}{2^n(\mu(A_n) + \varepsilon)}\Big) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + \varepsilon)} \int \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A_n)}{2^n(\mu(A_n) + \varepsilon)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.\end{aligned}$$

Sada možemo definirati funkciju

$$\nu(A) := \int_A f_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu,\ A \in \Sigma,$$

koja je mjera prema korolaru 4.13. navedenom na str. 125. Neka je $N \in \mathcal{N}_\mu$ proizvoljan skup. Tada je i (vidi teorem 4.30. (a))

$$\nu(N) = \int_N f_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

odnosno vrijedi $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$, gdje je $\mathcal{N}_\nu$ familija svih izmjerivih skupova mjere $\nu$ nula. Kako bismo pokazali obratnu inkluziju, uzmimo $M \in \mathcal{N}_\nu$. Tada je

$$\nu(M) = \int_M f_\varepsilon \,\mathrm{d}\mu = 0$$

te prema propoziciji 4.10. (a) slijedi da je $\chi_M \cdot f_\varepsilon = 0$ (s.s.), no kako je funkcija $f_\varepsilon$ pozitivna, dobivamo da je $\mu(M) = 0$.

## 4.5. Veza između Riemannovog i Lebesgueovog integrala

Riemannov[14] integral se definira samo za omeđene funkcije definirane na segmentu. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{za svaki } x \in [a,b].$$

Lebesgueov integral je proširenje Riemannovog integrala, tj. svaka R-integrabilna funkcija (integrabilna u smislu Riemanna) je ujedno integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral podudara s Riemannovim integralom. Ta je tvrdnja dana u sljedećem teoremu koji nazivamo Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost:

4.33. Teorem

*Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.*

(a) *Funkcija $f$ je R-integrabilna ako i samo ako je ona neprekidna skoro svuda na $[a,b]$.*

(b) *Ako je funkcija $f$ R-integrabilna, onda je ona integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral $\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$ podudara s Riemannovim integralom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

---

Riemannov integral se obično definira na segmentu, ali se na sličan način može definirati i na omeđenim intervalima oblika $(a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ ako je na njima dana funkcija omeđena i neprekidna (vidi [20]).

4.34. Primjedba

*Ako dana funkcija $f$, definirana na intervalu $[a,b)$, nije omeđena u okolini točke $b$ ili je točka $b$ beskonačna, definira se integral funkcije $f$ na sljedeći način* (vidi [11, str. 231-234])*:*

*Neka je funkcija $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabilna (dakle i ograničena) na svakom segmentu $[a,B]$, gdje je $B < b \leq +\infty$. Ako postoji konačan limes*

$$\lim_{B \to b-} \int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x,$$

*onda se taj limes naziva* nepravi integral funkcije $f$ na $[a,b)$ *i označava se s $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Analogno se definira i nepravi integral funkcije $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ koja nije omeđena u okolini točke $a$ ili je točka $a$ beskonačna, izrazom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A \to a+} \int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

*za funkciju $f$ koja je integrabilna na svakom segmentu $[A,b] \subset (a,b]$.*

*Ako funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ nije omeđena u okolinama točaka $a$ i $b$ ili su točke $a$ i*

[14] Bernhard Riemann (1826.-1866.), njemački matematičar.

*b beskonačne te ako je funkcija $f$ integrabilna na $[A, B]$ za svaki segment $[A, B] \subset (a, b)$, onda definiramo*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{A \to a+} \int_A^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{B \to b-} \int_c^B f(x)\,\mathrm{d}x,$$

*gdje je $c$ proizvoljna točka iz $(a, b)$. Taj se integral naziva* nepravi integral *i navedena definicija ne ovisi o izboru točke $c \in (a, b)$.*
*Radi ilustracije teorema 4.33., pretpostavimo da treba izračunati Lebesgueov integral $\int f d\lambda$ funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Ako je $f$ R-integrabilna na $(-\infty, \infty)$, u smislu prethodne definicije, odaberimo nizove $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ gdje $a_n \to -\infty$ i $b_n \to \infty$ i definirajmo funkcije $f_n := f\chi_{[a_n, b_n]} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $f_n \to f$ pa pomoću Levijeva teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo*

$$\int f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f\chi_{[a_n, b_n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n, b_n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

*Pri tome za računanje Riemannova integrala $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ možemo koristiti poznate tehnike (parcijalna integracija, integracija supstitucijom itd.).*

---

## Riješeni zadaci

---

4.46. ZADATAK
*Dokažite da su dane funkcije integrabilne u smislu Lebesguea na pripadnom skupu $A$:*

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^\alpha}$, $\alpha > 0$, $A = [0, \infty)$,

(b) $g(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \mathrm{e}^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, $A = (0, \infty)$.

---

**Rješenje.** Prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji dovoljno je konstruirati integrabilnu funkciju na $A$, kojom je dana funkcija dominirana.

(a) Ako je $0 \le x < 1$, onda za neprekidnu (pa stoga i izmjerivu) funkciju $f$ vrijedi da je $\mathrm{e}^{-x^\alpha} \le 1$, pa je $g_1 = \chi_{[0,1)}$ dominirajuća integrabilna funkcija na $[0, 1)$. Kako je $\lim_{x\to\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^\alpha} = 0$; $\alpha > 0$, postoji realan broj $M > 0$, takav da za sve $x \in [1, \infty)$ vrijedi $x^2 \mathrm{e}^{-x^\alpha} \le M$, odnosno $\mathrm{e}^{-x^\alpha} \le M\frac{1}{x^2}$. Sada možemo dominirajuću funkciju na $[1, \infty)$ definirati s $g_2(x) := \dfrac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)}$ te vrijedi

$$\int_{[1,\infty)} \frac{M}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} \frac{M}{x^2}\chi_{[1,n]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{M}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{M}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= M \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = M < \infty,$$

gdje smo zbog omeđenosti i neprekidnosti funkcije $\frac{1}{x^2}$ na segmentu $[1, n]$ mogli izjednačiti Lebesgueov integral s Riemannovim. Naposljetku, dobivamo da je

$$f(x) \leq 1\chi_{[0,1)}(x) + \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)}(x),$$

pri čemu je konstruirana dominirajuća funkcija $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ integrabilna na $A$.

(b) Promotrimo najprije funkciju $g_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiranu s $g_1(x) := \dfrac{\sin x}{x}$. Kako je $\lim_{x\to 0} g_1(x) = 1$ i $\lim_{x\to\infty} g_1(x) = 0$, postoji realan broj $M_1 > 0$, tako da je $|g_1(x)| \leq M_1$ za svaki $x \in (0, \infty)$.
Nadalje, definirajmo funkciju $g_2(x) := \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Za $x \in (0, 1)$ vrijedi da je $|g_2(x)| \leq 1$. Ako je $x \in [1, \infty)$, onda postoji realan broj $M_2 > 0$ tako da je $|g_2(x)| \leq \dfrac{M_2}{x^2}$, pa je $\int \frac{M_2}{x^2}\chi_{[1,\infty)}\,\mathrm{d}\lambda = M_2 < \infty$, kao što je i navedeno u (a). Sada je

$$|g(x)| = \left|\frac{\sin x}{x}\right|^3 \mathrm{e}^{-\alpha x} \leq M_1^3\left(\chi_{(0,1)}(x) + \frac{M_2}{x^2}\chi_{[1,\infty)}(x)\right),$$

gdje je funkcija s desne strane, prema prethodnom razmatranju, integrabilna.

4.47. Zadatak
*Izračunajte:*

(a) $\displaystyle\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\lambda,$

(b) $\displaystyle\int_{[2,\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\lambda.$

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $X = [1, \infty)$, $f : X \to [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ te $f_n = f \cdot \chi_{[1,n]}$ za $n \in \mathbb{N}$. Niz nenegativnih izmjerivih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono rastući i konvergira prema izmjerivoj funkciji $f$ na cijelom skupu $[1, \infty)$. Pomoću Levijevog teorema o monotonoj konvergenciji i definicije integrala na skupu dobivamo

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^3}\chi_{[1,n]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Kako je funkcija $f(x) = \frac{1}{x^3}$ omeđena i neprekidna na segmentu $[1, n]$, prema teoremu 4.33. ona je R-integrabilna na tom segmentu i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Zato je

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}.$$

(b) Neka je $X = [2, \infty)$, $f : X \to [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ te neka je s $f_n := f \cdot \chi_{[2,n]}$, $n \in \mathbb{N}$ definiran monotono rastući niz nenegativnih izmjerivih funkcija na skupu $[2, \infty)$ koji konvergira prema izmjerivoj funkciji $f$. Kao u dijelu (a) zadatka možemo zaključiti da vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{[2,\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[2,\infty)} \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[2,n]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[2,n]} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt{n} - 2\sqrt{2}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Uočimo da funkcija $f$ nije integrabilna na $[2, \infty)$ u smislu Lebesguea.

4.48. Zadatak

*Izračunajte*

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{n}{\sqrt[4]{x}(1+x)^2} \left|\sin\left(\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}\right)\cos\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3n^2}\right)\right| \mathrm{d}\lambda.$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{n}{(n+1)x^2} \sqrt[n]{3+\cos(nx)}\,\mathrm{d}\lambda.$

---

**Rješenje.**

(a) Definirajmo niz izmjerivih funkcija $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ s

$$\begin{aligned}f_n(x) :&= \frac{n}{\sqrt[4]{x}(1+x)^2} \left|\sin\left(\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}\right)\cos\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3n^2}\right)\right| \chi_{[1,n]}(x) \\ &= \left|\frac{\sin\left(\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}\right)}{\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}}\right| \left|\cos\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3n^2}\right)\right| \frac{3}{2(1+x)^2}\chi_{[1,n]}(x),\ n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

i funkciju $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ s $g(x) := \dfrac{3}{2(1+x)^2}$. Sada zbog $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $|\cos x| \le 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|f_n(x)| \le g(x),\ n \in \mathbb{N},\ x \in [1, \infty).$$

Nadalje, zbog

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sin\left(\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}\right)}{\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}}\right| = 1,\ \lim_{n\to\infty} \left|\cos\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3n^2}\right)\right| = 1,\ x \in [1, \infty)$$

vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x),\ x \in [1, \infty).$$

Kako je funkcija $g$ omeđena i neprekidna na segmentu $[1, n]$, prema teoremu 4.33. slijedi

$$\begin{aligned}\int_{[1,\infty)} g\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]}\frac{3}{2(1+x)^2}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{3}{2(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2(1+n)}\right)=\frac{3}{4}<\infty.\end{aligned}$$

Dakle, niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je i dominiran izmjerivom integrabilnom funkcijom, pa prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[1,\infty)} g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \frac{3}{4}.$$

(b) Definirajmo pomoćni niz funkcija $f_n : [1,\infty)\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ s

$$f_n(x) := \frac{n}{(n+1)x^2}\sqrt[n]{3+\cos(nx)}\chi_{[1,n]}(x),\ n\in\mathbb{N}.$$

Zbog $|\cos(nx)|\le 1$ vrijedi

$$\sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{3+\cos(nx)}\le\sqrt[n]{4}\ \text{ za sve } x\in[1,\infty),\ n\in\mathbb{N},$$

iz čega zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos(nx)}=1,$$

pa je za $x\in[1,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)x^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos(nx)} = \frac{1}{x^2}.$$

Nadalje, zbog

$$|f_n(x)|\le\frac{4}{x^2}\ \text{ za sve } x\in[1,\infty),\ n\in\mathbb{N}$$

i integrabilnosti funkcije $x\mapsto \frac{4}{x^2}\chi_{[1,\infty)}(x)$ u smislu Lebesguea (vidi zadatak 4.46. (a)) primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]}\frac{n}{(n+1)x^2}\sqrt[n]{3+\cos(nx)}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[1,\infty)}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

### 4.49. Zadatak

*Neka je $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ prostor mjere i $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x):=\mathrm{e}^x+x$. Nadalje, neka je $\delta$ mjera na izmjerivom prostoru $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ definirana s*

$$\delta(A) := \begin{cases} 3, & \textit{ako je } 1/2\in A\\ 0, & \textit{inače}\end{cases} = 3\delta_{\frac{1}{2}}(A)$$

*za $A\in\mathcal{B}([0,1])$ te $\mu=\lambda+\delta$. Izračunajte $\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\mu$.*

---

**Rješenje.** Kako je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ omeđena i neprekidna, to je ona i R–integrabilna i vrijedi

$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x + x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{1}{2}.$$

Također je, prema primjedbi 4.32.,

$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\delta = 3\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\delta_{\frac{1}{2}}(x) = 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\sqrt{\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\right),$$

pa slijedi

$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\mu = 3\sqrt{\mathrm{e}} + \mathrm{e} + 1.$$

4.50. Zadatak

*Neka je $\nu = 5\lambda + 6\delta_1$ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, gdje je $\lambda$ Lebesgueova mjera, a $\delta_1$ Diracova delta mjera koncentrirana u točki $x = 1$. Izračunajte $\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\nu$ ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ definirana s $f(x) := |x|\mathrm{e}^{-x^2}$.*

---

**Rješenje.** Kako je funkcija $f$ očito R–integrabilna na segmentu $[-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$, to je ona i Lebesgue integrabilna na tom segmentu i vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |x|\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-n^2}\right) = 1.$$

Analogno kao u prethodnom zadatku dobivamo da je

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\delta_1 = f(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Sada je

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\nu = 5 + \frac{6}{\mathrm{e}}.$$

4.51. Zadatak

*Pokažite da je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definirana s*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \textit{ako je } x = \frac{p}{q}, \textit{ gdje su } p \neq 0 \textit{ i } q \neq 0 \textit{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \textit{ako je } x = 0 \\ 0, & \textit{ako je } x \textit{ iracionalan broj,} \end{cases}$$

*R-integrabilna i izračunajte $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.*

---

**Rješenje.** Može se pokazati da $f$ ima prekid u svakoj racionalnoj točki te da je neprekidna u svakoj iracionalnoj točki. Naime, ako je $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdje su $p \neq 0$ i $q \neq 0$ relativno prosti brojevi, dobivamo da je $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Ako odaberemo $\varepsilon > 0$ takav da je $0 < \frac{1}{q} - \varepsilon$, onda za svaki $\delta > 0$ postoji iracionalan broj $x_\delta \in [0,1] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x_\delta) = 0$ i $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, odnosno vidimo da $f$ ima prekid u svakoj racionalnoj točki. Sada uzmimo proizvoljni $\varepsilon > 0$. Za iracionalan broj $x_0$ postoji konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$ takvih da je $f(\frac{p}{q}) = 1/q \geq \varepsilon$. Ako odaberemo dovoljno malen $\delta > 0$, takav da $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ne sadrži ni jedan takav racionalan broj, onda je za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x) = 0$ ili $f(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon$, odnosno vidimo da je funkcija $f$ neprekidna u $x_0$. Kako je skup $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ zanemariv, iz prethodnog razmatranja odmah slijedi da je $f$ R–integrabilna funkcija. Kako je $f = 0$ (s.s.), to je i

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} 0\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

4.52. Zadatak

*Izračunajte limese sljedećih Riemannovih integrala:*

(a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\frac{3}{3+nx}\right)^{\frac{1}{1+x}} \mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)}\,\mathrm{d}x.$

---

**Rješenje.**

(a) Funkcije $f_n(x) = \left(\frac{3}{3+nx}\right)^{\frac{1}{1+x}}$, $n \in \mathbb{N}$ su neprekidne i omeđene na segmentu $[0,2]$, pa su i R–integrabilne te prema teoremu 4.33. vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\frac{3}{3+nx}\right)^{\frac{1}{1+x}} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,2]} \left(\frac{3}{3+nx}\right)^{\frac{1}{1+x}} \mathrm{d}\lambda.$$

Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neprekidnih, pa stoga i izmjerivih funkcija dominiran je Lebesgue-integrabilnom funkcijom $g : [0,2] \to [0,\infty)$, $g(x) = 1$, a kako je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{3+nx}\right)^{\frac{1}{1+x}} = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x = 0 \\ 0, \text{ ako je } x \in (0,2] \end{cases} = \chi_{\{0\}}(x),$$

prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,2]}\left(\frac{3}{3+nx}\right)^{\frac{1}{1+x}}\mathrm{d}\lambda=\int_{[0,2]}\chi_{\{0\}}\,\mathrm{d}\lambda=\lambda\left(\{0\}\right)=0.$$

(b) Neka je $f_n:=(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$. Funkcije $f_n$, $n\in\mathbb{N}$ su neprekidne i omeđene na $[0,1]$, pa je prema Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Uočimo da na osnovu Bernoullijeve[15] nejednakosti (vidi [12, str. 34])

$$1+nx\le(1+x)^n,\qquad x>-1,\ n\in\mathbb{N}$$

slijedi da je niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominiran Lebesgue-integrabilnom funkcijom $g:[0,1]\to[0,\infty)$, $g(x)=1$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}=\begin{cases}1, \text{ ako je } x=0\\ 0, \text{ ako je } x\in(0,1]\end{cases}=\chi_{\{0\}}(x),$$

primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,\mathrm{d}\lambda=\int_{[0,1]}\chi_{\{0\}}=\lambda\left(\{0\}\right)=0.$$

(c) Neka je $X=[0,\infty)$. Definirajmo funkcije $f_n:X\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ formulom

$$f_n(x):=\frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}\mathrm{e}^x)}.$$

Funkcije $f_n$, $n\in\mathbb{N}$ su očito R–integrabilne na segmentu $[0,m]$, $m\in\mathbb{N}$, pa prema Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost i primjedbi 4.34. slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Kako je $|\sin(x^{-1}\mathrm{e}^x)|\le1$ za svaki $x\in X$, to je

$$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{ako je } 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, & \text{ako je } x=1\\ 0, & \text{ako je } x>1.\end{cases}$$

Neka je

$$g(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}, & \text{ako je } 0\le x\le1\\ x^{-2}, & \text{ako je } x>1.\end{cases}$$

[15] Jacob Bernoulli (1654.-1705.), švicarski matematičar.

Funkcija $g$ je integrabilna na $X$, u smislu Lebesguea, zbog

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} g \, \mathrm{d}\lambda &= \int_{[0,1]} \frac{4}{3} \, \mathrm{d}\lambda + \int_{(1,\infty)} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}\lambda = \frac{4}{3} + \lim_{n\to\infty} \int_{(1,n]} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{4}{3} + \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3} + \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} < \infty.\end{aligned}$$

Neka je $n \geq 2$. Ako je $x > 1$, onda iz nejednakosti

$$1 + x^n + \frac{1}{4n} \sin(x^{-1}\mathrm{e}^x) \geq x^n > x^2$$

slijedi $f_n(x) \leq g(x)$ za svaki $x > 1$ i za svaki $n \geq 2$.

Ako je $0 \leq x \leq 1$, onda je

$$1 + x^n + \frac{1}{4n} \sin(x^{-1}\mathrm{e}^x) \geq 1 - \frac{1}{4n} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dakle, na skupu $X$ je $|f_n| = f_n \leq g$ za svaki $n \geq 2$. Sada pomoću Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1 + x^n + \frac{1}{4n} \sin(x^{-1}\mathrm{e}^x)} \, \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} f(x) \, \mathrm{d}\lambda = 1.$$

4.53. ZADATAK

*Izračunajte limese sljedećih Riemannovih integrala:*

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + nx^3} \, \mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{n \sin x}{1 + n^2x^3} \, \mathrm{d}x,$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{-x^2}}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} \, \mathrm{d}x.$

---

**Rješenje.**

(a) Najprije napomenimo (vidi [5]) da je niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran s $h_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ monotono rastući i vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = \mathrm{e}^x$. Nadalje, ako definiramo niz $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\infty)$, zbog R–integrabilnosti tih funkcija na segmentu $[0, m]$, $m \in \mathbb{N}$, prema Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost i primjedbi 4.34., slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Također, prema prethodnom razmatranju, za sve $x \in [0,\infty)$ vrijedi da je $f_n(x) \le \mathrm{e}^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Kako je funkcija $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$, definirana s $g(x) := \mathrm{e}^{-x}$, R-integrabilna na segmentu $[0,m]$, $m \in \mathbb{N}$, prema Lebesgueovom kriteriju za R-integrabilnost i Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{m\to\infty}\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x}\chi_{[0,m]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{m\to\infty}\int_{[0,m]} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^m}\right) = 1 < \infty,\end{aligned}$$

te je ona također i Lebesgue-integrabilna na $[0,\infty)$. Iz prethodnog razmatranja, pomoću teorema o dominiranoj konvergenciji, dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

(b) Definirajmo niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s $f_n(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{1+nx^3}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [1,\infty)$ koje su R-integrabilne na nizu segmenata $([0,m])_{m\in\mathbb{N}}$ te prema Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost i primjedbi 4.34. slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Nadalje, za sve $x \in [1,\infty)$ vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ i

$$|f_n(x)| \le \frac{\sqrt{x}}{nx^3} = \frac{1}{nx^{5/2}} \le \frac{1}{x^{5/2}},\ n\in\mathbb{N},$$

pri čemu je funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{x^{5/2}}$ Lebesgue-integrabilna na $[1,\infty)$ zbog

$$\begin{aligned}\int_{[1,\infty)}\frac{1}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}\frac{1}{x^{5/2}}\chi_{[0,n]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]}\frac{1}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{1}{x^{5/2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3n^{3/2}}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Iz prethodnog razmatranja, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji, slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}\frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} 0\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

(c) Funkcije $f_n(x) := \dfrac{n\sin x}{1+n^2x^3}$, $n \in \mathbb{N}$ su R–integrabilne na segmentu $[1,m]$, $m \in \mathbb{N}$, pa kao u dijelu zadatka (a) i (b) vrijedi da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{n\sin x}{1+n^2x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)}\frac{n\sin x}{1+n^2x^3}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Također vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ i

$$|f_n(x)| \le \frac{n}{1+n^2x^3} \le \frac{n}{n^2x^3} = \frac{1}{nx^3} \le \frac{1}{x^3},$$

pri čemu je u zadatku 4.47. (a) pokazana integrabilnost funkcije $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$, $x \in [1,\infty)$, u smislu Lebesguea. Sada prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} \frac{n \sin x}{1+n^2x^3}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[1,\infty)} 0\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

(d) Najprije primijetimo da su funkcije $f_n(x) := \dfrac{xe^{-x^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\infty)$ R–integrabilne na segmentu $[0,m]$, $m \in \mathbb{N}$, pa kao i prije možemo zaključiti da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{xe^{-x^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{xe^{-x^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Kako je za $x \in [0,\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = xe^{-x^2}$ i $|f_n(x)| \le xe^{-x^2}$, pri čemu je funkcija $x \mapsto xe^{-x^2}$ Lebesgue-integrabilna na $[0,\infty)$, zbog

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} xe^{-x^2}\chi_{[0,n]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-n^2}}{2}\right) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

iz prethodnog razmatranja, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji, slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{xe^{-x^2}}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}.$$

4.54. Zadatak

*Izračunajte*

$$\int_0^\infty e^{-[x]}\,\mathrm{d}x,$$

*gdje je* $[x]$ *najveće cijelo od* $x$.

---

**Rješenje.** Kako je funkcija $f(x) = e^{-[x]}$ R-integrabilna na segmentu $[0,n]$, $n \in \mathbb{N}$, pomoću Lebesgueovog kriterija za R–integrabilnost i primjedbe 4.34. lako je uočiti da vrijedi

$$\int_0^\infty e^{-[x]}\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\infty)} e^{-[x]}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Definirajmo funkcije $f_n(x) := \mathrm{e}^{-n+1}\chi_{[n-1,n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\infty)$. Tada je $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ te pomoću Levijevog teorema za redove dobivamo

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-[x]}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int \mathrm{e}^{-n+1}\chi_{[n-1,n)}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n+1} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

Dakle,

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-[x]}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

4.55. Zadatak

*Na skupu realnih brojeva konstruirajte funkciju koja nije integrabilna u smislu Lebesguea, ali je Riemann integrabilna.*

---

**Rješenje.** Promotrimo funkciju $f : [0,\infty) \to [-\infty,\infty]$,

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{1}{n+1}, & \text{ako je } x \in [n, n+1) \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}_0$. Tada je

$$f = f^+ - f^- \quad \text{i} \quad \int f\,\mathrm{d}\lambda = \int f^+\,\mathrm{d}\lambda - \int f^-\,\mathrm{d}\lambda,$$

gdje je

$$\int f^+\,\mathrm{d}\lambda = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$
$$\int f^-\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}.$$

Kako prethodni redovi divergiraju, Lebesgueov integral funkcije $f$ ne postoji. Nadalje je

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

a taj red konvergira prema Leibnitzovom kriteriju za alternirajuće redove, odnosno funkcija $f$ je R–integrabilna.

4.56. Zadatak

*Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ R–integrabilna na cijelom skupu realnih brojeva, tada je ona i Lebesgue–integrabilna i vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

---

**Rješenje.** Definirajmo pomoćni niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ s $f_n(x) := f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Zbog R–integrabilnosti funkcije $f$ slijedi i R–integrabilnost funkcija $f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, primijetimo da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz izmjerivih funkcija koji konvergira prema izmjerivoj funkciji $f$. Sada, prema Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost i Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji, slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[-n,n]}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

4.57. Zadatak

*Pokažite da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\int_{(0,1]} (x \ln x)^n\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Gamma(n+1),$$

*gdje je s*

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\ t > 0$$

*definirana* Eulerova[16] Gama funkcija*. Nadalje, koristeći prethodnu jednakost pokažite da vrijedi*

$$\int_{(0,1]} x^{-x}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

---

**Rješenje.** Kako je $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x = 0$, funkcija $x \mapsto x \ln x$ je omeđena i neprekidna na $(0, 1]$, pa stoga i R-integrabilna. Primjenom Lebesgueovog kriterija za R-integrabilnost slijedi da je

$$\int_{(0,1]} (x \ln x)^n\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 (x \ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Koristeći se metodom supstitucije, uz $x = \mathrm{e}^{-t}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x \ln x)^n\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 0+} \int_a^1 (x \ln x)^n\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0+} \int_0^{-\ln a} \left(-\mathrm{e}^{-t}t\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \lim_{a\to 0+} \int_0^{-\ln a} t^n \mathrm{e}^{-t(n+1)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

[16] Leonhard Euler (1707.-1783.), švicarski matematičar.

Sada, primjenom supstitucije $t = \dfrac{s}{n+1}$, iz prethodnog računa slijedi

$$\begin{aligned}(-1)^n \lim_{a\to 0+} \int_0^{-\ln a} t^n \mathrm{e}^{-t(n+1)}\,\mathrm{d}t &= (-1)^n \lim_{a\to 0+} \int_0^{-\ln a(n+1)} \left(\frac{s}{n+1}\right)^n \mathrm{e}^{-s}\,\frac{\mathrm{d}s}{n+1} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \int_0^{\infty} s^{(n+1)-1}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Gamma(n+1).\end{aligned}$$

Nadalje, uočimo da $x^{-x}$ možemo razviti u red na sljedeći način:

$$x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\,\ln x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x\,\ln x)^n}{n!},$$

pri čemu su svi članovi sume pozitivni za $x \in (0,1)$. Sada, prema Levijevom teoremu za redove i poznatom svojstvu Gama funkcije

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N},$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{(0,1]} x^{-x}\,\mathrm{d}\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_{(0,1]}(x\,\ln x)^n\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Gamma(n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}.\end{aligned}$$

4.58. Zadatak

*Dokažite jednakost:*

$$\int_{(0,1)}\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2\mathrm{d}\lambda = \frac{\pi^2}{3}.$$

---

**Rješenje.** Razvijanjem funkcije $x \mapsto (1-x)^{-2}$ u MacLaurinov[17] red (odnosno u Taylorov[18] red oko točke $x_0 = 0$ (vidi [5, 21]) dobivamo

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

pa je stoga

$$\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\ln^2 x. \tag{4.1}$$

[17]Colin Maclaurin (1698.-1746.), engleski matematičar.
[18]Brook Taylor (1685.-1731.), engleski matematičar.

Sada iz jednakosti (4.1) i Levijevog teorema za redove slijedi

$$\int_{(0,1)} \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_{(0,1)} x^n \ln^2 x \,\mathrm{d}\lambda.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln^2 x = 0$ i $\lim\limits_{x\to 1-} x^n \ln^2 x = 0$, funkcija $x \mapsto x^n \ln^2 x$ je R-integrabilna na $(0,1)$, pa prema Lebesgueovom kriteriju za R-integrabilnost vrijedi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_{(0,1)} x^n \ln^2 x \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^1 x^n \ln^2 x \,\mathrm{d}x,$$

odakle primjenom parcijalne integracije dobivamo da je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^1 x^n \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot\frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)^2}$$

te pomoću jednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

iz prethodnog računa dolazimo do traženog rješenja.

4.59. Zadatak

*Dokažite da je*

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \zeta(2),$$

*gdje je s*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\; s > 1$$

*definirana* Riemannova Zeta funkcija.

---

**Rješenje.** Najprije, uočimo da prema formuli za sumu geometrijskog reda (vidi (2.5), str. 41) slijedi

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx}. \tag{4.2}$$

Zbog R-integrabilnosti funkcije $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ na $(0,m]$, $m \in \mathbb{N}$ primjenom Lebesgueovog kriterija za R-integrabilnost dobivamo da je

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\int_0^{m} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\int_{(0,m]} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Sada, zbog (4.2), primjenom Levijevog teorema za redove slijedi da je

$$\int_{(0,m]} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(0,m]} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Nadalje, kako su funkcije $f_n := x\mathrm{e}^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}$ R-integrabilne na $(0, m]$, $m \in \mathbb{N}$, ponovno prema Lebesgueovom kriteriju za R-integrabilnost te korištenjem parcijalne integracije slijedi

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,m]} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^m x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{-x}{n} \mathrm{e}^{-nx} \right)\Big|_0^m + \frac{1}{n} \int_0^m \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-m}{n}\,\mathrm{e}^{-nm} + \frac{1}{n} \left( \frac{-\mathrm{e}^{-nm}}{n} + \frac{1}{n} \right) \right).\end{aligned}$$

Iz prethodnih rezultata dobivamo da je

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{m\to\infty} \int_{(0,m]} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \left( \frac{-m}{n}\,\mathrm{e}^{-nm} - \frac{\mathrm{e}^{-nm}}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)\end{aligned}$$

## 4.6. Prostor $L^p(X, \Sigma, \mu)$, konveksne funkcije i nejednakosti

4.35. DEFINICIJA
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere i $p \in [1, \infty)$. S $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ označavamo skup svih $\Sigma$-izmjerivih funkcija $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sa svojstvom da je funkcija $|f|^p$ integrabilna. Ponekad koristimo i neku od sljedećih kraćih oznaka: $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^p(X)$ ili $\mathcal{L}^p(\mu)$, ako je iz konteksta jasno što su skup $X$, $\sigma$-algebra $\Sigma$ i mjera $\mu$.*

---

4.36. PROPOZICIJA
*$\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ je realan vektorski prostor.*

---

4.37. PROPOZICIJA
*Preslikavanje $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}_+$, $1 \le p < \infty$, definirano formulom*

$$\|f\|_p := \left( \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p},$$

*zadovoljava sljedeća tri svojstva norme: pozitivnu definitnost, homogenost i nejednakost trokuta. Osim toga je*

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ (s.s.).$$

---

4.38. PRIMJEDBA
*U slučaju kada je $p = \infty$, uz oznake kao u definiciji 4.35. definiramo*

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \ge 0 : |f(x)| \le M \ (s.s.) \text{ na skupu } X\},$$

*uz napomenu da je* $\inf \emptyset = \infty$.

---

Da bi se dobio normiran vektorski prostor, u $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ se uvodi relacija ekvivalencije $\sim$. Po definiciji je $f \sim g$ ako je $f = g$ (s.s.). S $[f]$ ćemo označavati klasu ekvivalencije koja sadrži funkciju $f$, a s $L^p(X, \Sigma, \mu)$ ili, kraće, $L^p$ skup svih klasa. Struktura vektorskog prostora $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ prenosi se na $L^p(X, \Sigma, \mu)$ tako da se definira:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f + g] \\ \alpha[f] &= [\alpha f]. \end{aligned}$$

Napokon, u vektorskom prostoru $L^p$ definira se norma formulom

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

4.39. TEOREM ([2, TEOREM 11., STR. 123])
*$L^p$, $1 \le p \le \infty$ je potpun normiran prostor.*

4.40. PRIMJEDBA ([12, DEFINICIJA 3., STR. 129])
*Potpun normiran prostor naziva se Banachov prostor.*

4.41. PRIMJEDBA ([22, STR. 306])
*Može se pokazati da u slučaju $0 < p < 1$ ne vrijedi nejednakost trokuta, dakle $\|\cdot\|_p$ nije norma za takve $p$, ali se ipak često koristi izraz* norma na $L^p$.

Navedimo sada definiciju konveksne funkcije te nejednakosti dokazane u [10] koje će nam biti potrebne u nastavku.

4.42. DEFINICIJA
*Neka je $(a, b) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Realna funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ je* konveksna *ako vrijedi*

$$\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \qquad \forall\lambda \in [0, 1],\ \forall x, y \in (a, b),\ x \neq y.$$

*Realna funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ je* konkavna *ako vrijedi*

$$\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \qquad \forall\lambda \in [0, 1],\ \forall x, y \in (a, b),\ x \neq y.$$

Iz prethodne definicije slijedi da se nad svakim segmentom $[x, y]$ graf konveksne funkcije $\varphi$ nalazi ispod sekante koja prolazi točkama $(x, \varphi(x))$ i $(y, \varphi(y))$, a također i da je

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_2)}{x_3 - x_2}, \qquad x_1 < x_2 < x_3. \tag{4.1}$$

4.43. TEOREM (JENSENOVA[19] NEJEDNAKOST)
*Neka je $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, gdje je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Nadalje, neka je $\mu$ vjerojatnosna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$ i $f : X \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Ako je $f(x) \in (a, b)$ za svaki $x \in X$, onda je*

$$\varphi\Big(\int f \,\mathrm{d}\mu\Big) \leq \int (\varphi \circ f)\,\mathrm{d}\mu.$$

4.44. PRIMJEDBA ([17, TEOREM 12.14., STR. 115])
*Neka vrijede uvjeti prethodnog teorema, uz pretpostavku da je $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija, gdje je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Tada vrijedi* Jensenova nejednakost za konkavne funkcije

$$\varphi\Big(\int f \,\mathrm{d}\mu\Big) \geq \int (\varphi \circ f)\,\mathrm{d}\mu. \tag{4.2}$$

[19] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859.-1925.), danski matematičar.

4.45. Teorem (Hölderova[20] nejednakost)
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ izmjerive funkcije. Ako su $p$ i $q$ konjugirani eksponenti, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i ako je $1 < p < \infty$, onda vrijedi:*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \Big( \int |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big( \int |g|^q \, d\mu \Big)^{1/q}, \tag{4.3}$$

*odnosno*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

---

4.46. Primjedba
*Može se pokazati da nejednakost (4.3) vrijedi i u slučaju kada je $p = 1$, $q = \infty$ (vidi zadatak 4.69.).*
*Za $p = q = 2$ nejednakost (4.3) poznata je pod nazivom* Cauchy[21]–Bunyakovsky[22]–Schwarz[23] nejednakost.

---

4.47. Teorem (Nejednakost Minkowskog[24])
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ izmjerive funkcije. Ako je $1 \leq p < \infty$, onda vrijedi:*

$$\Big( \int |f + g|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \leq \Big( \int |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} + \Big( \int |g|^p \, d\mu \Big)^{1/p},$$

*odnosno*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

---

## Riješeni zadaci

---

4.60. Zadatak
*Pokažite da je funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna ako i samo ako je za svaku točku $c \in (a, b)$ funkcija $x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c}$ rastuća na $(a, b) \backslash \{c\}$.*

---

**Rješenje.** Ako je $\varphi$ konveksna funkcija, iz nejednakosti (4.1) slijedi da je funkcija $x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c}$ rastuća na $(a, b) \backslash \{c\}$.

[20] Otto Hölder (1859.-1937.), njemački matematičar.
[21] Augustin–Louis Cauchy (1789.-1857.), francuski matematičar.
[22] Viktor Yakovych Bunyakovsky (Виктор Яковлевич Буняковский) (1804.-1889.), ruski matematičar.
[23] Karl Hermann Schwarz (1843.-1921.), njemački matematičar.
[24] Hermann Minkowski (1864.-1909.), njemački matematičar i fizičar.

Obratno, ako je funkcija $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}$ rastuća na $(a,b)\backslash\{c\}$, onda za $x,y \in (a,b)\backslash\{c\}$, $x \leq y$ i $c = \lambda x + (1-\lambda)y$, $\lambda \in (0,1)$ slijedi da je

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(c)}{y-c},$$

odakle množenjem s $(y-c)(c-x) \geq 0$ dobivamo

$$(y-c)\left(\varphi(c)-\varphi(x)\right) \leq (c-x)\left(\varphi(y)-\varphi(c)\right).$$

Iz prethodne nejednakosti slijedi da je

$$(y-x)\varphi(c) - (c-x)\varphi(c) \leq (y-c)\varphi(x) + (c-x)\left(\varphi(y)-\varphi(c)\right),$$

odakle oduzimanjem izraza $-(c-x)\varphi(c)$ s obiju strana znaka nejednakosti te zatim dijeljenjem s $y-x \geq 0$ slijedi

$$\varphi(c) \leq \frac{y-c}{y-x}\varphi(x) + \frac{c-x}{y-x}\varphi(y).$$

Uvrštavanjem $c = \lambda x + (1-\lambda)y$ u prethodnu nejednakost dobivamo da je

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y),$$

odnosno funkcija $\varphi$ je konveksna.

4.61. Zadatak

*Neka je $\varphi$ konveksna na $(a,b)$, a $\Psi$ konveksna i rastuća na $\varphi((a,b))$. Pokažite da je kompozicija $\Psi \circ \varphi$ konveksna na $(a,b)$.*

---

**Rješenje.** Funkcija $\varphi$ je konveksna na $(a,b)$, pa po definiciji vrijedi

$$\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \qquad \forall\lambda \in [0,1],\ \forall x,y \in (a,b),\ x \neq y.$$

Funkcija $\Psi$ je rastuća, pa iz prethodne nejednakosti slijedi

$$\Psi\left(\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big)\right) \leq \Psi\left((1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)\right),$$

odnosno kako je $\Psi$ i konveksna, vrijedi da je

$$(\Psi\circ\varphi)\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)(\Psi\circ\varphi)(x) + \lambda(\Psi\circ\varphi)(y).$$

4.62. Zadatak

*Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor konačne mjere te neka je $f \in \mathcal{L}^1(X,\Sigma,\mu)$ strogo pozitivna funkcija za koju vrijedi*

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = 1.$$

*Pokažite da je tada*

$$\int (\ln f)\,\mathrm{d}\mu \leq \mu(X)\ln\frac{1}{\mu(X)}.$$

---

**Rješenje.** Kako je $x \mapsto \ln x$ konkavna funkcija, korištenjem Jensenove nejednakosti za konkavne funkcije (4.2) dobivamo

$$\int (\ln f) \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(X)} \leq \ln\left(\int f \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(X)}\right) = \ln\left(\frac{\int f\,\mathrm{d}\mu}{\mu(X)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mu(X)}\right),$$

iz čega odmah slijedi tražena nejednakost.

4.63. Zadatak

*Neka je $\mu$ vjerojatnosna mjera na $X$, a $f, g : X \to [0, \infty]$ izmjerive funkcije takve da je $fg \geq 1$ (s.s.). Pokažite da je tada*

$$\int f\,\mathrm{d}\mu \int g\,\mathrm{d}\mu \geq 1.$$

---

**Rješenje.** Očito je

$$\int f\,\mathrm{d}\mu \geq 0 \quad \text{i} \quad \int g\,\mathrm{d}\mu \geq 0.$$

Pretpostavimo da su oba integrala konačna jer je u suprotnom dokaz trivijalan. Koristeći pretpostavku da je $\mu$ vjerojatnosna mjera na $X$, tj. $\mu(X) = 1$, dobivamo

$$1 = \mu(X) = \int 1\,\mathrm{d}\mu \leq \int f^{1/2} g^{1/2}\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int f\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \left(\int g\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/2},$$

gdje zadnja nejednakost slijedi primjenom Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz nejednakosti na funkcije $f^{1/2}$ i $g^{1/2}$. Kvadriranjem prethodne nejednakosti dobivamo traženu tvrdnju.

4.64. Zadatak

*Neka je $f \in L^2([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ funkcija za koju vrijedi $\|f\|_2 = 1$ te*

$$\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}\lambda \geq \alpha > 0.$$

*Nadalje, neka je definiran skup*

$$A_\beta := \{x \in [0,1] : f(x) \geq \beta\}, \ \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

*Ako je $0 < \beta < \alpha$, pokažite da vrijedi*

$$\lambda(A_\beta) \geq (\beta - \alpha)^2.$$

*Ta je nejednakost poznata kao* Paley[25]–Zygmundova[26] lema.

[25] Raymond Paley (1907.-1933.), engleski matematičar.
[26] Antoni Zygmund (1900.-1992.), poljski matematičar.

---

**Rješenje.** Uočimo da vrijedi

$$f-\beta \le (f-\beta)\chi_{A_\beta} \le f\chi_{A_\beta},$$

iz čega dobivamo

$$\begin{aligned}0<\alpha-\beta &\le \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)-\beta = \int_{[0,1]} (f(x)-\beta)\,\mathrm{d}\lambda(x) \le \int_{[0,1]} f(x)\chi_{A_\beta}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\\ &\le \|f\|_2\sqrt{\lambda(A_\beta)} = \sqrt{\lambda(A_\beta)},\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz nejednakosti.

4.65. Zadatak
*Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor konačne netrivijalne mjere te $f : X \to [-\infty,\infty]$ $\Sigma$–izmjeriva, omeđena funkcija za koju je $\|f\|_\infty > 0$. Pokažite da za sve $n\in\mathbb{N}$ vrijedi:*

(a) $M_n := \int |f|^n\,\mathrm{d}\mu \in (0,\infty)$,

(b) $M_{n+\alpha}M_{n-\alpha} \ge M_n^2$, *za* $\alpha\in\mathbb{R}$,

(c) $\mu(X)^{-1/n}\|f\|_n \le \dfrac{M_{n+1}}{M_n} \le \|f\|_\infty$.

---

**Rješenje.** Kako je funkcija $f$ omeđena, vrijedi da je

$$|f| \le \|f\|_\infty \le c < \infty,\ c\in\mathbb{R}.$$

Nadalje, zbog $\|f\|_\infty > 0$ vrijedi i $|f|>0$ na skupu pozitivne mjere.

(a) Zbog $|f|>0$ odmah slijedi $M_n>0$. Nadalje je

$$M_n = \int |f|^n\,\mathrm{d}\mu \le c^n \int 1\,\mathrm{d}\mu = c^n\mu(X) < \infty,$$

pa je $M_n\in(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$.

(b) Primjenom Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}M_n &= \int |f|^n\,\mathrm{d}\mu = \int |f|^{\frac{n+\alpha}{2}}|f|^{\frac{n-\alpha}{2}}\,\mathrm{d}\mu\\ &\le \sqrt{\int |f|^{n+\alpha}\,\mathrm{d}\mu \int |f|^{n-\alpha}\,\mathrm{d}\mu} = \sqrt{M_{n+\alpha}M_{n-\alpha}}.\end{aligned}$$

(c) Imamo da je

$$M_{n+1} = \int |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mu \leq \int |f|^n \|f\|_\infty\,\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty M_n,$$

iz čega slijedi druga nejednakost. S druge strane, ako definiramo mjeru $\mathcal{P} := \mu/\mu(X)$, slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mu(X)^{-1/n}\|f\|_n \leq \frac{M_{n+1}}{M_n} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\int |f|^n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(X)}\right)^{1/n} \leq \frac{\int |f|^{n+1}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(X)}}{\int |f|^n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu(X)}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\int |f|^n\,\mathrm{d}\mathcal{P}\right)^{1+1/n} \leq \int |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mathcal{P} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\int |f|^n\,\mathrm{d}\mathcal{P}\right)^{(n+1)/n} \leq \int |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mathcal{P},
\end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz Jensenove nejednakosti, zbog konveksnosti funkcije $x \mapsto x^{\frac{n+1}{n}}$:

$$\left(\int |f|^n\,\mathrm{d}\mathcal{P}\right)^{(n+1)/n} \leq \int |f|^{n\cdot\frac{n+1}{n}}\,\mathrm{d}\mathcal{P} = \int |f|^{n+1}\,\mathrm{d}\mathcal{P}.$$

4.66. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ $\Sigma$–izmjerive funkcije. Dokažite:*

(a) *Hölderovu nejednakost, ako je $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$ i $p, q \in (1, \infty)$ su konjugirani eksponenti,*

(b) *nejednakost Minkowskog, ako su $f, g \in \mathcal{L}^p$ i $p \in [1, \infty)$,*

*koristeći Jensenovu nejednakost za konkavne funkcije.*

---

**Rješenje.**

(a) Neka su $p, q \in (1, \infty)$ konjugirani eksponenti. Kako je $\varphi(x) = x^{1/q}$ konkavna funkcija, koristeći Jensenovu nejednakost za konkavne funkcije (4.2), s obzirom na mjeru $\dfrac{|f|^p \, \mathrm{d}\mu}{\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu}$, slijedi

$$\begin{aligned}
\int |fg| \, \mathrm{d}\mu &= \int |g||f|^{-p/q} \chi_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \int |g||f|^{-p/q} \chi_{\{|f|\neq 0\}} \frac{|f|^p \, \mathrm{d}\mu}{\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \\
&= \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \int \left(|g|^q |f|^{-p} \chi_{\{|f|\neq 0\}}\right)^{1/q} \frac{|f|^p \, \mathrm{d}\mu}{\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \\
&\leq \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \left( \frac{\int |g|^q |f|^{-p} \chi_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu}{\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \right)^{1/q} \\
&\leq \left( \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left( \int |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj nejednakosti iskoristili činjenicu da je

$$\chi_{\{|f|\neq 0\}} \leq 1.$$

Iz prethodnog računa slijedi da je $fg \in \mathcal{L}^1$.

(b) Neka je $p \in [1,\infty)$ te $\varphi(x) = (x^{1/p}+1)^p$ pomoćna funkcija. Kako je

$$\varphi''(x) = \frac{1-p}{p}(1+x^{-1/p})x^{-1-1/p} \leq 0,$$

možemo zaključiti da je funkcija $\varphi$ konkavna. Primjenom Jensenove nejednakosti za konkavne funkcije (4.2), s obzirom na mjeru $\dfrac{|f|^p \, \mathrm{d}\mu}{\int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu}$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int (|f|+|g|)^p \chi_{\{|f|\neq 0\}} \, \mathrm{d}\mu &= \int \left( \frac{|g|}{|f|} \chi_{\{|f|\neq 0\}} + 1 \right)^p |f|^p \chi_{\{|f|\neq 0\}} \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \int \left[ \left( \frac{|g|^p}{|f|^p} \chi_{\{|f|\neq 0\}} \right)^{1/p} + 1 \right]^p \frac{|f|^p \, \mathrm{d}\mu}{\int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \\
&\leq \int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \left[ \left( \frac{\int |g|^p \chi_{\{|f|\neq 0\}} \, \mathrm{d}\mu}{\int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu} \right)^{1/p} + 1 \right]^p \\
&= \left[ \left( \int_{\{|f|\neq 0\}} |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} + \left( \int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \right]^p.
\end{aligned}$$

Ako na objema stranama prethodne nejednakosti dodamo

$$\int_{\{|f|=0\}} (|f|+|g|)^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{|f|=0\}} |g|^p \, \mathrm{d}\mu,$$

zbog poznate nejednakosti

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p,\ a,b \geq 0,\ p \geq 1$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\int (|f|+|g|)^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \left[\left(\int_{\{|f|\neq 0\}} |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_{\{|f|\neq 0\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right]^p + \left[\int_{\{|f|=0\}} |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{p/p} \\
&\leq \left[\left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right]^p.
\end{aligned}$$

4.67. Zadatak

(Obratna Hölderova nejednakost) *Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor mjere, a $f,g : X \to [-\infty,\infty]$ izmjerive funkcije. Nadalje, neka je $p \in (0,1)$ i $q = \frac{p}{p-1} < 0$. Ako je $f \in \mathcal{L}^p$ i $g \in \mathcal{L}^q$, dokažite da tada vrijedi*

$$\int |fg| \,\mathrm{d}\mu \geq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}.$$

---

**Rješenje.** Neka je $s := 1/p \in (1,\infty)$ i $t = s/(s-1) = 1/(1-p) \in (1,\infty)$. Kako su $s$ i $t$ konjugirani eksponenti, primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $|fg|^p$ i $|g|^{-p}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |fg|^p |g|^{-p} \,\mathrm{d}\mu &\leq \left(\int |fg|^{ps} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/s} \left(\int |g|^{-tp} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/t} \\
&= \left(\int |fg| \,\mathrm{d}\mu\right)^p \left(\int |g|^{p/(p-1)} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1-p}.
\end{aligned}$$

Uzimanjem $p$–tog korijena iz prethodne nejednakosti slijedi

$$\left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |fg| \,\mathrm{d}\mu\right) \left(\int |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1/q}.$$

Napokon, množenjem prethodne nejednakosti s

$$0 < \left(\int |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} < \infty$$

odmah slijedi obratna Hölderova nejednakost.

4.68. Zadatak

(Generalizirana Hölderova nejednakost) *Pokažite da vrijedi sljedeća generalizacija Hölderove nejednakosti:*

$$\int |f_1 \cdot f_2 \cdots f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n} \tag{4.4}$$

*za sve $p_j \in (1,\infty)$ takve da je $\sum_{j=1}^{n} p_j^{-1} = 1$ te za sve izmjerive funkcije $f_j : X \to [-\infty,\infty]$, $j = 1,\dots,n$.*

---

**Rješenje.** Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$.

- Neka je $n = 2$. Tada je (4.4) upravo Hölderova nejednakost.
- Pretpostavimo da (4.4) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
- Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n+1$. U tu svrhu neka su $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ izmjerive funkcije, $p_1,\dots,p_{n+1} > 1$ takvi da je $\sum_{j=1}^{n+1} p_j^{-1} = 1$ te definirajmo $p^{-1} := \sum_{j=1}^{n} p_j^{-1}$. Sada, iz Hölderove nejednakosti, slijedi

$$\begin{aligned}\int |f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \cdot f_{n+1}|\,\mathrm{d}\mu &\le \left(\int |f_1 \cdot f_2 \cdots f_n|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}\\ &= \left(\int |f_1|^p \cdot |f_2|^p \cdots |f_n|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}.\end{aligned}$$

Na desnu stranu prethodne nejednakosti možemo primijeniti pretpostavku indukcije, uz konjugirane eksponente $p_j/p$, $j = 1,\dots,n$:

$$\begin{aligned}\int |f_1 \cdot f_2 \cdots f_n \cdot f_{n+1}|\,\mathrm{d}\mu &\le \left(\int |f_1|^p \cdot |f_2|^p \cdots |f_n|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}\\ &\le \|f_1\|_{p_1} \cdot \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n} \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}.\end{aligned}$$

4.69. Zadatak

*Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor mjere, a $f,g : X \to [-\infty,\infty]$ izmjerive integrabilne funkcije takve da je $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Dokažite da Hölderova nejednakost vrijedi i u slučaju kada je $p = 1$ i $q = \infty$, odnosno pokažite da vrijedi:*

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

---

**Rješenje.** Iz $g \in \mathcal{L}^\infty(X,\Sigma,\mu)$ slijedi

$$|g(x)| \le \|g\|_\infty + \varepsilon, \text{ za sve } x \in N^c = N_\varepsilon,\ \mu(N) = 0.$$

Sada je

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu = \int_{N^c} |f||g|\,\mathrm{d}\mu \le (\|g\|_\infty + \varepsilon) \int_{N^c} |f|\,\mathrm{d}\mu \le (\|g\|_\infty + \varepsilon) \int |f|\,\mathrm{d}\mu$$

te prelaskom na limes $\varepsilon \to 0$ dobivamo

$$\int |fg|\,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

4.70. Zadatak

(Obratna nejednakost Minkowskog) *Neka je* $p \in (0,1)$. *Ako su* $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, *dokažite da tada vrijedi*

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leq \| \, |f| + |g| \, \|_p. \tag{4.5}$$

---

**Rješenje.** Neka je $q = \frac{p}{p-1}$. Tada primjenom obratne Hölderove nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int (|f| + |g|)^p \, d\mu &= \int (|f| + |g|)(|f| + |g|)^{p-1} \, d\mu \qquad (4.6)\\
&= \int |f|(|f| + |g|)^{p-1} \, d\mu + \int |g|(|f| + |g|)^{p-1} \, d\mu \\
&\geq \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int (|f| + |g|)^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int (|f| + |g|)^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{1/q} \\
&= \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int (|f| + |g|)^{p} \, d\mu \right)^{1/q} \\
&\quad + \left( \int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int (|f| + |g|)^{p} \, d\mu \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da u slučaju $\int (|f| + |g|)^p \, d\mu = 0$ slijedi da je $|f| + |g| = 0$ (s.s.), odnosno $f = 0$ (s.s.) i $g = 0$ (s.s.) te tada u (4.5) vrijedi jednakost. Također, ako je $\int (|f| + |g|)^p \, d\mu = \infty$, onda očito vrijedi nejednakost (4.5). Stoga u nastavku pretpostavimo da je

$$0 < \left( \int (|f| + |g|)^p \, d\mu \right)^{1/q} < \infty$$

te dijeljenjem nejednakosti (4.6) s prethodnim izrazom dobivamo

$$\left( \int (|f| + |g|)^p \, d\mu \right)^{1/p} \geq \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

što je upravo obratna nejednakost Minkowskog.

4.71. Zadatak

*Neka je* $(X, \Sigma, \mu)$ *prostor mjere i neka niz* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *izmjerivih funkcija* $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *konvergira prema izmjerivoj funkciji* $f : X \to \mathbb{R}$. *Ako postoji funkcija* $g \in \mathcal{L}^p$ *takva da je* $|f_n| \leq |g|$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *dokažite da je tada*

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0.$$

---

**Rješenje.** Vrijedi da je

$$|f_n - f|^p \le \big(|f_n| + |g|\big)^p \le \big(2\max\{|f_n|, |g|\}\big)^p = 2^p|g|^p,\ n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $|g|^p$ integrabilna funkcija i $\lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p = 0$, tražena tvrdnja odmah slijedi iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

4.72. Zadatak

*Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor mjere, $f : X \to [-\infty,\infty]$ izmjeriva funkcija,*

$$\varphi(p) = \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_p^p, \qquad 0 < p < \infty$$

*te $E := \{p : \varphi(p) < \infty\}$.*

(a) *Neka su $p_1, p_2 \in E$, $p_1 < p_2$. Pokažite da je $[p_1, p_2] \subseteq E$, pa je stoga $E$ interval.*

(b) *Pokažite da je funkcija $\varphi$ konveksna na interioru skupa $E$.*

(c) *Neka je $0 < r < p < s$. Pokažite da je $\|f\|_p \le \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$, što implicira $L^r \cap L^s \subseteq L^p$.*

---

**Rješenje.**

(a) Svaki $p \in (p_1, p_2)$ se može zapisati kao

$$p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2,\ \lambda = \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \in (0,1).$$

Tada je

$$|f|^{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2} \le \lambda |f|^{p_1} + (1-\lambda)|f|^{p_2} \tag{4.7}$$

jer je eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, $a > 0$ konveksna. Sada, prema monotonosti integrala slijedi

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \varphi(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) \\ &= \int |f|^{\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2} \, \mathrm{d}\mu \le \lambda \int |f|^{p_1} \, \mathrm{d}\mu + (1-\lambda) \int |f|^{p_2} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \lambda\, \varphi(p_1) + (1-\lambda)\, \varphi(p_2) < \infty,\end{aligned} \tag{4.8}$$

iz čega odmah možemo zaključiti da tražena tvrdnja vrijedi.

(b) Iz (4.8) odmah slijedi da je $\varphi$ konveksna funkcija na interioru skupa $E$.

(c) Iskoristimo li nejednakost (4.7) i činjenicu da je $0 < r < p < s$, imamo da je za svaki $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned}|f|^p &\le \lambda |f|^r + (1-\lambda)|f|^s \\ &\le \lambda \max\{|f|^r, |f|^s\} + (1-\lambda)\max\{|f|^r, |f|^s\} \\ &= \max\{|f|^r, |f|^s\}\end{aligned}$$

te sada monotonost integrala daje traženu nejednakost.

4.73. ZADATAK

*Neka je $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ispitajte za koje $\alpha$ je*

(a) $f \in \mathcal{L}^1((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$,

(b) $f \in \mathcal{L}^1([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \lambda)$.

---

**Rješenje.**

(a) Vrijedi da je

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} x^\alpha \, \mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} x^\alpha \chi_{[1/n,1)} \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1)} x^\alpha \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right),\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili Levijev teorem o monotonoj konvergenciji, a u trećoj Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost. Iz prethodnog računa možemo zaključiti da je $f \in \mathcal{L}^1((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ ako i samo ako je $\alpha > -1$.

(b) Na isti način kao u dijelu zadatka (a) možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned}\int_{[1,\infty)} x^\alpha \, \mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} x^\alpha \chi_{[1,n]} \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} x^\alpha \, \mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} x^\alpha \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \right)\end{aligned}$$

te vrijedi da je $f \in \mathcal{L}^1([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \lambda)$ ako i samo ako je $\alpha < -1$.

4.74. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere.*

(a) *Ako je mjera $\mu$ konačna i $1 \le q < p < \infty$, dokažite da za svaku izmjerivu funkciju $f : X \to [-\infty, \infty]$ vrijedi*

$$\|f\|_q \le \mu(X)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_p,$$

*a time i*

$$L^p(X,\Sigma,\mu) \subseteq L^q(X,\Sigma,\mu).$$

(b) *Vrijede li prethodne tvrdnje i u slučaju kada mjera $\mu$ nije konačna?*

---

**Rješenje.**

(a) Neka su $r, s \in (1,\infty)$ konjugirani eksponenti. Tada, prema Hölderovoj nejednakosti, slijedi:

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \int |f|^q \,\mathrm{d}\mu = \int |f|^q \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu \le \left(\int |f|^{qr} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \left(\int 1^s \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/s} \\ &= \left(\int |f|^{qr} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/r} \mu(X)^{1/s}.\end{aligned}$$

Za
$$r = \frac{p}{q} > 1 \text{ i } s = \frac{p}{p-q}$$
iz prethodnog razmatranja slijedi:

$$\begin{aligned}\|f\|_q &\le \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{q}} \mu(X)^{(1-q/p)\cdot\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \mu(X)^{1/q-1/p} \\ &= \|f\|_p \, \mu(X)^{1/q-1/p}.\end{aligned}$$

Nadalje, neka je $f \in L^p(X,\Sigma,\mu)$. Tada je $f$ izmjeriva funkcija i vrijedi $\|f\|_p < \infty$. Iz prethodno dokazane nejednakosti, zbog pretpostavke o konačnosti mjere $\mu$, slijedi da je
$$\|f\|_q \le c \cdot \|f\|_p < \infty, \ c \in \mathbb{R},$$
pa je također i $f \in L^q(X,\Sigma,\mu)$, odnosno
$$L^p(X,\Sigma,\mu) \subseteq L^q(X,\Sigma,\mu).$$

(b) Pokažimo primjerom da tvrdnja (a) općenito ne vrijedi kada mjera nije konačna. Neka je $([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \lambda)$ prostor mjere te $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Iz $\lambda([1,\infty)) = \infty$ slijedi da dana mjera nije konačna. Nadalje, kako je

$$\begin{aligned}\int_{[1,\infty)} |f|^p \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{[1,\infty)} x^{-p\alpha} \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} x^{-p\alpha} \chi_{[1,n]} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} x^{-p\alpha} \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_1^n x^{-p\alpha} \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^{1-p\alpha}-1}{1-p\alpha}\right),\end{aligned}$$

možemo zaključiti da je $f \in L^p\left([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \lambda\right)$ za $p > \frac{1}{\alpha}$. Dakle, za sve $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$ je $f \in L^p\left([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \lambda\right)$ te $f \notin L^q\left([1,\infty), \mathcal{B}([1,\infty)), \lambda\right)$. Dakle, u tom slučaju ne vrijedi tvrdnja (a).

4.75. Zadatak

*Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty]$ definirana s $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{[0,1]}(x)$. Dokažite da je $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, ali $f \notin \mathcal{L}^2(\lambda)$.*

**Rješenje.** Definirajmo funkciju

$$\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \tilde{f}(0)=0,\ \tilde{f}(x)=f(x)\ \text{ za } x\neq 0.$$

Očito je $\tilde{f}=f$ (s.s.), pa je stoga

$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}\lambda &= \int \tilde{f}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[1/n,1]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1/n,1]}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2,\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili Levijev teorem o monotonoj konvergenciji, a u predzadnjoj jednakosti Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost zbog R-integrabilnosti funkcije $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ na segmentu $[1/n,1]$, $n\in\mathbb{N}$. Na isti način dobivamo da je

$$\begin{aligned}\int f^2\,\mathrm{d}\lambda &= \int \tilde{f}^2\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{1}{x}\chi_{[1/n,1]}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{[1/n,1]}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.\end{aligned}$$

4.76. ZADATAK

*Neka je $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ prostor mjere i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ definiranih s*

$$f_n := n^2\chi_{(0,1/n)},\ n\in\mathbb{N}.$$

*Dokažite:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$,

(b) $f_n\in L^p$, $p\geq 1$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_p=\infty$, $p\geq 1$.

**Rješenje.**

(a) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{(0,1/n)}=\chi_{\emptyset}=0$, lako se vidi da je i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=0$.

(b) Neka je $p\geq 1$. Vrijedi da je

$$\int |f_n|^p\,\mathrm{d}\lambda = \int n^{2p}\chi_{(0,1/n)}\,\mathrm{d}\lambda = n^{2p-1}<\infty,\ n\in\mathbb{N}.$$

(c) Pomoću (b) dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \lim_{n\to\infty}\left(n^{2p-1}\right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} n^{2-1/p} = \infty \text{ zbog } \ p\geq 1.$$

4.48. PRIMJEDBA

*U prethodnom zadatku možemo uočiti poznatu činjenicu da postoji niz funkcija iz $L^p$ koji konvergira obično, ali ne konvergira u $L^p$.*

---

4.77. ZADATAK

*Pokažite da postoji niz funkcija u $L^{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)\cap L^{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, $1\le p_1,p_2<\infty$ koji konvergira u $L^{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, ali ne konvergira u $L^{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.*

---

**Rješenje.** Neka je $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ prostor mjere i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ definiranih s

$$f_n := \frac{1}{n^\alpha}\chi_{(n,2n)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Sada je

$$\|f_n\|_p = \left(\int \frac{1}{n^{\alpha p}}\chi_{(n,2n)}\,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} = \frac{1}{n^{\alpha-1/p}} < \infty,\ n\in\mathbb{N},\ 1\le p<\infty.$$

Dakle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in L^{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)\cap L^{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ za sve $1\le p_1,p_2<\infty$. Iz prethodnog računa dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{p_2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1/p_2}} = 0 \text{ ako i samo ako je } p_2 > \frac{1}{\alpha},$$

tj. za sve $\alpha\in\mathbb{R}_+$, takve da je $p_1<\frac{1}{\alpha}<p_2$, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $L^{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, ali ne konvergira u $L^{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Neka je sada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ definiranih s

$$f_n := n^\alpha\chi_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})},\ n\in\mathbb{N}.$$

Slijedi

$$\|f_n\|_p = \left(\int n^{\alpha p}\chi_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n})}\,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} = n^{\alpha-1/p} < \infty,\ n\in\mathbb{N},\ 1\le p<\infty,$$

tj. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in L^{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)\cap L^{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ za sve $1\le p_1,p_2<\infty$. Iz prethodnog računa možemo zaključiti

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{p_2} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1/p_2} = 0 \text{ ako i samo ako je } p_2 < \frac{1}{\alpha},$$

tj. za sve $\alpha\in\mathbb{R}_+$, takve da je $p_2<\frac{1}{\alpha}<p_1$, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $L^{p_2}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, ali ne konvergira u $L^{p_1}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

4.78. ZADATAK

*Neka je $(X,\Sigma,\mu)$ prostor mjere, $0<p<q<r<\infty$ te*

$$t := \frac{1/p-1/q}{1/p-1/r}.$$

*Dokažite da za svaku funkciju $f\in L^p(X,\Sigma,\mu)\cap L^r(X,\Sigma,\mu)$ vrijedi $f\in L^q(X,\Sigma,\mu)$ i*

$$\|f\|_q \le \|f\|_p^{1-t}\|f\|_r^t.$$

---

**Rješenje.** Iz zadatka 4.72. (c) odmah slijedi da je $f \in L^q(X, \Sigma, \mu)$. Preostaje dokazati traženu nejednakost.
Neka je $P = \frac{r-q}{r-p} \in (0,1)$ i $Q = 1 - P$. Tada je $q = Pp + Qr$. Kako su $1/P$ i $1/Q$ konjugirani eksponenti, primjenom Hölderove nejednakosti dobivamo

$$\int |f|^q \, \mathrm{d}\mu = \int |f|^{Pp} |f|^{Qr} \, \mathrm{d}\mu \leq \Big( \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^P \Big( \int |f|^r \, \mathrm{d}\mu \Big)^Q. \tag{4.9}$$

Kako je $t = \dfrac{r(q-p)}{q(r-p)}$ i $Q = 1 - P = \dfrac{q-p}{r-p}$, slijedi da je $\dfrac{P}{q} = \dfrac{r-q}{q(r-p)} = \dfrac{1-t}{p}$ i $\dfrac{Q}{q} = \dfrac{q-p}{q(r-p)} = \dfrac{t}{r}$ te iz jednakosti (4.9) zaključujemo da je

$$\|f\|_q \leq \left( \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1-t}{p}} \left( \int |f|^r \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{t}{r}} = \|f\|_p^{1-t} \|f\|_r^t.$$

4.79. Zadatak
*Neka je $((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)), \lambda)$ prostor mjere te $p \geq 1$. Pokažite da je*

$$f_n(x) := \frac{n^\alpha}{(x+n)^\beta} \in \mathcal{L}^p\left((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)), \lambda\right)$$

*za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ te za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

---

**Rješenje.** Kako su sve funkcije $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ neprekidne, jasno je i da su izmjerive. Preostaje pokazati da je integral funkcije

$$|f_n(x)|^p = n^{p\alpha}(x+n)^{-p\beta}$$

konačan. Kako je $n^{p\alpha}$ konstanta, dovoljno je pokazati da je $(x+n)^{-p\beta} \in \mathcal{L}^1$. Neka je $\gamma := p\beta > 1$. Sada je

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)} (x+n)^{-\gamma} \, \mathrm{d}\lambda &= \lim_{m\to\infty} \int_{(0,\infty)} (x+n)^{-\gamma} \chi_{(0,m]} \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{m\to\infty} \int_{(0,m]} (x+n)^{-\gamma} \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_0^m (x+n)^{-\gamma} \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \left( \frac{(m+n)^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{n^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) \\
&= \frac{n^{1-\gamma}}{\gamma - 1} < \infty,
\end{aligned}$$

gdje smo kod prve jednakosti koristili Levijev teorem o monotonoj konvergenciji, a u trećoj jednakosti Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost. Iz prethodnog računa možemo zaključiti da tražena tvrdnja vrijedi.

4.80. Zadatak
*Neka je*

$$f(x) = (x^\alpha + x^\beta)^{-1}, \ x > 0.$$

*Ispitajte za koje $\alpha, \beta > 0$ je $f \in \mathcal{L}^1\left((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty)), \lambda\right)$.*

---

**Rješenje.** Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\alpha \le \beta$. Možemo razlikovati dva slučaja: kada je $x \in (0,1)$ te $x \in [1,\infty)$.
Ako je $x \in (0,1)$, onda je

$$\frac{1}{x^\alpha} \ge \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \ge \frac{1}{x^\alpha + x^\alpha} = \frac{1/2}{x^\alpha},$$

što pokazuje da je $(x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in \mathcal{L}^1\left((0,1),\mathcal{B}((0,1)),\lambda\right)$ ako i samo ako je $\alpha < 1$ (vidi zadatak 4.73. (a)).
Slično, ako je $x \ge 1$, onda je

$$\frac{1}{x^\beta} \ge \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \ge \frac{1}{x^\beta + x^\beta} = \frac{1/2}{x^\beta},$$

odnosno $(x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in \mathcal{L}^1\left([1,\infty),\mathcal{B}([1,\infty)),\lambda\right)$ ako i samo ako je $\beta > 1$ (vidi zadatak 4.73. (b)). Dakle, možemo zaključiti da je

$$(x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in \mathcal{L}^1\left((0,\infty),\mathcal{B}((0,\infty)),\lambda\right) \iff \alpha < 1,\ \beta > 1.$$

Ako pretpostavimo da je $\alpha \ge \beta$, na isti način možemo zaključiti da je

$$(x^\alpha + x^\beta)^{-1} \in \mathcal{L}^1\left((0,\infty),\mathcal{B}((0,\infty)),\lambda\right) \iff \alpha > 1,\ \beta < 1.$$

4.81. ZADATAK

*Neka je $1 \le p < r < \infty$, a $Z = L^p(X,\Sigma,\mu) \cap L^r(X,\Sigma,\mu)$. Dokažite da je $\|\ \| : Z \to \mathbb{R}$, definirana formulom $\|f\| := \|f\|_p + \|f\|_r$, norma na $Z$.*

---

**Rješenje.** Lako je uočiti da zadana funkcija zadovoljava svojstva pozitivne semidefinitnosti te pozitivne definitnosti i homogenosti norme. Nejednakost trokuta slijedi iz nejednakosti Minkowskog na sljedeći način:

$$\|f+g\| = \|f+g\|_p + \|f+g\|_r \le \|f\|_p + \|g\|_p + \|f\|_r + \|g\|_r = \|f\| + \|g\|.$$

4.82. ZADATAK

*Neka je $(\Omega,\Sigma,\mu)$ vjerojatnosni prostor. U teoriji vjerojatnosti izmjeriva funkcija $X : \Sigma \to \mathbb{R}$ naziva se* slučajna varijabla*. Nadalje, integral (ako je definiran) $E(X) := \int X \,\mathrm{d}\mu$ naziva se* očekivanje slučajne varijable $X$*. Ako je $X \in \mathcal{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu)$, onda se $V(X) := E(X^2) - E^2(X)$ naziva* varijanca slučajne varijable $X$*. Dokažite:*

(a) $X \in \mathcal{L}^2(\Omega,\Sigma,\mu) \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)$,

(b) $\mu(\{|X| \ge \sqrt{4n}\}) \le \frac{1}{4n}\big(V(X) + E^2(X)\big)$, *gdje je*

$$\{|X| \ge \sqrt{4n}\} = \{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \ge \sqrt{4n}\}.$$

---

**Rješenje.**

(a) Tvrdnja odmah slijedi iz zadatka 4.74. (a).

(b) Pomoću Čebiševljeve nejednakosti (vidi (4.1), str. 127) za $p = 2$ dobivamo

$$\mu(\{|X| \geq \sqrt{4n}\}) \leq \frac{1}{4n} E(X^2),$$

pa iz jednakosti $E(X^2) = V(X) + E^2(X)$ slijedi tražena tvrdnja.

# 5. Produkt prostora mjere

U ovom ćemo poglavlju definirati produkt dvaju izmjerivih prostora, te ćemo za Kartezijev (ili direktni) produkt skupova $A$ i $B$ koristiti uobičajenu oznaku $A \times B$. Dakle, $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

5.1. DEFINICIJA
*Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori. Njihov* produkt *je izmjeriv prostor* $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, *gdje je* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *tzv.* produktna $\sigma$-algebra *definirana s*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

---

Članove familije $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nazivamo izmjerivim pravokutnicima.

5.2. PROPOZICIJA
*Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori.*

(a) *Produktna* $\sigma$*-algebra* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *je generirana familijom „cilindara"*

$$\mathcal{C} = \{A \times Y : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \times B : B \in \mathcal{B}\}.$$

(b) *Produktna* $\sigma$*-algebra* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *je najmanja* $\sigma$*-algebra na* $X \times Y$ *sa svojstvom da su izmjerive obje projekcije*

$$\pi_1 : X \times Y \to X, \quad \pi_1(x,y) = x$$
$$\pi_2 : X \times Y \to Y, \quad \pi_2(x,y) = y.$$

---

U nastavku su definirani određeni pojmovi koji će nam također biti potrebni pri rješavanju zadataka.

Neka je $E \subseteq X \times Y$. Za svaki $x \in X$, $y \in Y$ definiraju se prerezi

$$\begin{aligned} &(x\text{-prerez skupa } E) \quad && E_x = \{\tilde{y} \in Y : (x, \tilde{y}) \in E\}, \\ &(y\text{-prerez skupa } E) \quad && E^y = \{\tilde{x} \in X : (\tilde{x}, y) \in E\}. \end{aligned}$$

Neka je funkcija $f$ definirana na Kartezijevom produktu $X \times Y$. Tada definiramo prereze $f_x$ i $f^y$ funkcije $f$ na $Y$ i $X$ formulama

$$\begin{aligned} f_x(y) &= f(x,y), \qquad && y \in Y, \\ f^y(x) &= f(x,y), \qquad && x \in X. \end{aligned}$$

U svrhu uvođenja sljedećeg teorema navodimo pomoćni rezultat:

5.3. LEMA
*Neka su* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *dva prostora* $\sigma$*-konačne mjere i* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. *Tada vrijedi:*

(a) *funkcija* $x \mapsto \nu(E_x)$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva,*

(b) *funkcija* $y \mapsto \mu(E^y)$ *je* $\mathcal{B}$*-izmjeriva.*

---

### 5.4. Teorem

*Neka su* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *prostori* $\sigma$*-konačne mjere. Tada postoji jedinstvena mjera* $\mu \otimes \nu$ *na* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *takva da je*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$

*Nadalje, za svaki* $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *je*

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, \mathrm{d}\nu(y).$$

---

### 5.5. Definicija

*Mjeru* $\mu \otimes \nu$ *iz* teorema 5.4. *nazivamo* produktna mjera *ili* produkt mjera $\mu$ i $\nu$.

---

### 5.6. Primjedba

*U nastavku će nam od iznimne važnosti biti Lebesgueova mjera* $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$ *na* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

---

### 5.7. Lema

*Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori i* $(x, y) \in X \times Y$*. Tada vrijedi:*

*(a) ako je* $E \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*, onda je* $E_x \in \mathcal{B}$ *i* $E^y \in \mathcal{A}$*,*

*(b) ako je* $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ *bilo koja* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-izmjeriva funkcija, onda je* $f_x$ $\mathcal{B}$*-izmjeriva a* $f_y$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva funkcija.*

---

### 5.8. Teorem (Tonellijev[27] teorem)

*Neka su* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *prostori* $\sigma$*-konačne mjere, a* $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:*

(a) *funkcija* $x \mapsto \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu$ *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva,*

(b) *funkcija* $y \mapsto \int_X f^y \,\mathrm{d}\mu$ *je* $\mathcal{B}$*-izmjeriva,*

(c)
$$\int_{X \times Y} f\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \Big( \int_X f^y\, \mathrm{d}\mu \Big)\, \mathrm{d}\nu(y) = \int_X \Big( \int_Y f_x\, \mathrm{d}\nu \Big)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

---

[27] Leonida Tonelli (1885.-1946.), talijanski matematičar.

5.9. TEOREM (FUBINIJEV[28] TEOREM [23, STR. 539])
*Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostori $\sigma$-konačne mjere, a $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ funkcija koja je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-izmjeriva i integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\mu \otimes \nu$. Tada vrijedi:*

(a) *$\mathcal{B}$-izmjeriva funkcija $f_x$ je $\nu$–integrabilna na $Y$ za $\mu$–s.s. $x \in X$. $\mathcal{A}$–izmjeriva funkcija $f^y$ je $\mu$–integrabilna na $X$ za $\nu$–s.s. $y \in Y$.*

(b) *Funkcija $x \mapsto \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu$ je $\mathcal{A}$–izmjeriva i $\mu$–integrabilna na $X$. Funkcija $y \mapsto \int_X f^y \,\mathrm{d}\mu$ je $\mathcal{B}$–izmjeriva i $\nu$–integrabilna na $Y$.*

(c)
$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_Y \Big( \int_X f^y(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \Big) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_X \Big( \int_Y f_x(y) \,\mathrm{d}\nu(y) \Big) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

---

## Riješeni zadaci

5.1. ZADATAK
*Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dva prostora $\sigma$–konačnih mjera, takvi da je $\mathcal{A} \neq 2^X$ te $\sigma$–algebra $\mathcal{B}$ sadrži neprazan skup mjere nula. Dokažite da prostor mjere $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nije potpun. Specijalno, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$ nije potpun prostor.*

---

**Rješenje.** Neka je $Z \in 2^X \setminus \mathcal{A}$, a $N \in \mathcal{B}$ neprazan skup, takav da je $\nu(N) = 0$. Prema teoremu 5.4. slijedi da je

$$(\mu \otimes \nu)(X \times N) = 0.$$

Kako je $Z \times N \subseteq X \times N$, skup $Z \times N$ je $(\mu \otimes \nu)$-zanemariv.

Nadalje, neka je $y \in N$. Tada je $Z = (Z \times N)^y$. Ako je prostor mjere $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ potpun, onda je $Z \times N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ te iz leme 5.7. slijedi da je

$$Z = (Z \times N)^y \in \mathcal{A},$$

što je kontradikcija. Dakle, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nije prostor potpune mjere.

5.2. ZADATAK
*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera i $\mu$ mjera prebrojavanja na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ te $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ karakteristična funkcija skupa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Pokažite da je*

$$\int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(y) \Big) \,\mathrm{d}\lambda(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda(x) \Big) \,\mathrm{d}\mu(y)$$

*te objasnite je li to u kontradikciji s Tonellijevim teoremom.*

[28] Ghirin Guido Fubini (1879.-1943.), talijanski matematičar.

**Rješenje.** Iz jednakosti

$$\int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \Big)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{x\}}\,\mathrm{d}\mu(y) \Big)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1\,\mathrm{d}\lambda = \infty,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y) \Big)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}\,\mathrm{d}\lambda(x) \Big)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}\mu = 0$$

vidimo da vrijedi tvrdnja zadatka. Nadalje, mjera prebrojavanja $\mu$ nije $\sigma$–konačna, pa dana tvrdnja nije u kontradikciji s Tonellijevim teoremom.

5.3. Zadatak

*Neka je* $0 < a < b$. *Dokažite da je*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(b/a). \tag{5.1}$$

**Rješenje.** Neka je funkcija $f : [0,\infty) \times [a,b] \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$. Funkcija $f$ je nenegativna i neprekidna te je zbog posljednjeg i $\lambda_2$–izmjeriva. Prema Tonellijevom teoremu i Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost slijedi da je

$$\int_0^\infty \Big( \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big( \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y,$$

odnosno

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln(b/a).$$

5.10. Primjedba

*Integral* (5.1) *je specijalan slučaj Frullanijevog*[29] *integrala* [7, str. 622]

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (f(0) - f(+\infty)) \cdot \ln\frac{b}{a}, \quad a, b > 0.$$

5.4. Zadatak

*Izračunajte*

$$\int_{[-1,2]\times[0,3]} x^2 y\,\mathrm{d}(\lambda \otimes \lambda).$$

**Rješenje.** Prema Tonellijevom teoremu i Lebesgueovom kriteriju za R–integrabilnost slijedi

$$\begin{aligned}\int_{[-1,2]\times[0,3]} x^2 y\,\mathrm{d}(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{[0,3]} \left( \int_{[-1,2]} x^2 y\,\mathrm{d}\lambda(x) \right)\,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_0^3 \left( \int_{-1}^2 x^2 y\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y = 3\int_0^3 y\,\mathrm{d}y = \frac{27}{2}.\end{aligned}$$

[29] Giuliano Frullani (1795.-1834.), talijanski matematičar.

5.5. ZADATAK
*Dokažite jednakost:*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

---

**Rješenje.** Najprije primijetimo da je

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y$$

te je stoga

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Nadalje, funkcija $f : [0,m]\times[0,n] \to \mathbb{R}$, $m,n\in\mathbb{N}$, zadana formulom

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}\sin x,$$

je omeđena i neprekidna na svojoj domeni, pa je zbog posljednjeg i $\lambda_2$-izmjeriva. Sada je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^m \left(\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_0^m \left(\int_0^n \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz neprekidnosti funkcije $(n,x)\mapsto \int_0^n \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y$.

Primjenom Lebesgueovog kriterija za R–integrabilnost i Fubinijevog teorema, iz prethodnog razmatranja dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,m]}\left(\int_{[0,n]} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x)\\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]}\left(\int_{[0,m]} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y)\\ &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(\int_0^m \mathrm{e}^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}(1-y\mathrm{e}^{-my}\sin m - \mathrm{e}^{-my}\cos m)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\mathrm{n} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

gdje smo u 5. jednakosti iskoristili poznatu činjenicu da limes i integral komutiraju u slučaju kada je podintegralna funkcija neprekidna na području integracije (vidi [7, str. 711]).

5.6. Zadatak

*Neka je* $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \lambda)$ *prostor mjere. Izračunajte uzastopne integrale funkcije* $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ *definirane s*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ako je } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ako je } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*te zaključite je li ona integrabilna s obzirom na Lebesgueovu mjeru* $\lambda_2$.

---

**Rješenje.** Najprije primijetimo da je funkcija $f$ neprekidna s.s. jer je neprekidna u svim točkama domene osim u $(0,0)$ te je $\lambda_2((0,0)) = 0$. Kako je funkcija $f$ neparna u prvoj, a također i u drugoj varijabli, tj. $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$, koristeći se poznatom činjenicom da je integral neparne funkcije po simetričnom intervalu jednak nuli, dobivamo

$$\int_{[-1,1]} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}x = 0,$$

odnosno

$$\int_{[-1,1]} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}y = 0.$$

Kod prethodnog smo računa koristili Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost zbog R-integrabilnosti podintegralnih funkcija.

Sada možemo zaključiti da vrijedi

$$\int_{[-1,1]} \left( \int_{[-1,1]} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{[-1,1]} \left( \int_{[-1,1]} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x).$$

Provjerimo još je li funkcija $f$ integrabilna s obzirom na Lebesgueovu mjeru $\lambda_2$ na $[-1,1] \times [-1,1]$. Iz

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} \left| \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \right| \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{-1}^{1} \left| \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \right| \mathrm{d}x = \frac{1}{|y|} \int_0^{1/|y|} \frac{t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t \\ &\geq \frac{2}{|y|} \int_0^1 \frac{t}{(t^2+1)^2} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{|y|} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2|y|}, \end{aligned}$$

gdje smo koristili supstituciju $x = t|y|$ te činjenicu da je $|y| \leq 1$ i

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} \frac{1}{2|y|} \, \mathrm{d}\lambda(y) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2|y|} \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y \\ &= -\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty, \end{aligned}$$

slijedi da funkcija $f$ nije integrabilna.

5.7. ZADATAK
*Neka je $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 2^{\mathbb{N}}$ te $\mu = \nu$ mjere prebrojavanja. Interpretirajte Tonellijev i Fubinijev teorem u tom slučaju.*

---

**Rješenje.** Najprije primijetimo da je mjera prebrojavanja $\sigma$–konačna na $\mathbb{N}$ te da iz uvjeta zadatka slijedi da je $\mu \otimes \nu$ mjera prebrojavanja na $2^{\mathbb{N}} \otimes 2^{\mathbb{N}}$, tj. na $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Neka su $f_m$ i $f^n$ prerezi funkcije $f$ na $\mathbb{N}$ definirani kao prije. Također, podsjetimo se da je u zadatku 4.15. na str. 129 pokazano da ako je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ prostor s mjerom prebrojavanja i $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$, tada je $\int f(n)\,\mathrm{d}\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Iskažimo sada Tonellijev teorem u ovom slučaju:
Neka je $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0, \infty]$ funkcija koja je $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$–izmjeriva. Tada vrijedi da su funkcije $m \mapsto \int_{\mathbb{N}} f_m(n)\,\mathrm{d}\nu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_m(n)$ i $n \mapsto \int_{\mathbb{N}} f^n(m)\,\mathrm{d}\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f^n(m)$ izmjerive i

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} f^n(m)\,\mathrm{d}\mu(m)\right)\mathrm{d}\nu(n)\\ &= \int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} f_m(n)\,\mathrm{d}\nu(n)\right)\mathrm{d}\mu(m)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n).\end{aligned} \tag{5.2}$$

U svrhu iskaza Fubinijevog teorema podsjetimo se da je u zadatku 4.28. na str. 141 dokazano da ako je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ prostor s mjerom prebrojavanja i $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija, onda je $f$ integrabilna funkcija ako i samo ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ apsolutno konvergentan, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$, i tada je $\int f(n)\,\mathrm{d}\mu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Iskažimo sada Fubinijev teorem.
Neka je $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ funkcija koja je $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$–izmjeriva i integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\mu\otimes\nu$. Tada vrijedi:

(a) Izmjeriva funkcija $f_m$ je $\nu$-integrabilna na $\mathbb{N}$ za $\mu$–s.s. $m \in \mathbb{N}$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |f_m(n)| < \infty$ i $\int_{\mathbb{N}} f_m(n)\,\mathrm{d}\nu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_m(n)$ i izmjeriva funkcija $f^n$ je $\mu$-integrabilna na $\mathbb{N}$ za $\nu$–s.s. $n \in \mathbb{N}$, tj. $\sum_{m=1}^{\infty} |f^n(m)| < \infty$ i $\int_{\mathbb{N}} f^n(m)\,\mathrm{d}\mu(m)$ $= \sum_{m=1}^{\infty} f^n(m)$.

(b) Funkcija $m \mapsto \int_{\mathbb{N}} f_m(n)\,\mathrm{d}\nu(n)$ je $2^{\mathbb{N}}$-izmjeriva i $\mu$-integrabilna na $\mathbb{N}$, tj. iz posljednjeg slijedi da je $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |f(m,n)| < \infty$ i

$$\int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} f_m(n)\,\mathrm{d}\nu(n)\right)\mathrm{d}\mu(m) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n).$$

Također, funkcija $n \mapsto \int_{\mathbb{N}} f^n(m)\,\mathrm{d}\mu(m)$ je $2^{\mathbb{N}}$-izmjeriva i $\nu$-integrabilna na $\mathbb{N}$, tj. iz posljednjeg slijedi da je $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |f(m,n)| < \infty$ i

$$\int_{\mathbb{N}}\left(\int_{\mathbb{N}} f^n(m)\,\mathrm{d}\mu(m)\right)\mathrm{d}\nu(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n).$$

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(m,n)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f^n(m)\,\mathrm{d}\mu(m)\right)\mathrm{d}\nu(n)\\ &= \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f_m(n)\,\mathrm{d}\nu(n)\right)\mathrm{d}\mu(m)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n).\end{aligned}$$

5.11. PRIMJEDBA
*Ako je funkcija $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,\infty]$ iz prethodnog zadatka definirana s $f(m,n):=a_{m,n}$, $m,n\in\mathbb{N}$, možemo primijetiti da je jednakost (5.2) ekvivalentna jednakosti (2.4) navedenoj u primjedbi 2.18., što je upravo Tonellijev teorem za sume.*

---

5.8. ZADATAK
*Neka su $(X,\mathcal{A},\mu)$ i $(Y,\Sigma,\nu)$ prostori mjere te $E$ i $F$ $(\mu\otimes\nu)$–izmjerivi podskupovi od $X\times Y$ konačne mjere. Ako vrijedi*

$$\nu(E_x)=\nu(F_x)$$

*za $\mu$-s.s. $x\in X$, dokažite da je onda*

$$(\mu\otimes\nu)(E)=(\mu\otimes\nu)(F).$$

*Taj je rezultat poznat kao* Cavalierijev[30] princip za produkt mjere.

---

**Rješenje.** Iz uvjeta zadatka, prema teoremu 5.4., slijedi da je

$$(\mu\otimes\nu)(E)=\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu=\int_X \nu(F_x)\,\mathrm{d}\mu=(\mu\otimes\nu)(F).$$

[30] Bonaventura Cavalieri (1598.-1647.), talijanski matematičar.

# 6. Konvergencija izmjerivih funkcija

U ovom ćemo poglavlju proučavati razne tipove konvergencije realnih izmjerivih funkcija. Svi rezultati mogu se poopćiti i na izmjerive funkcije koje primaju vrijednosti u $[-\infty, \infty]$ tako da na $[-\infty, \infty]$ gledamo kao na (s.s.) $\mathbb{R}$.

6.1. Definicija

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz $\Sigma$-izmjerivih realnih funkcija definiranih na $X$ i $f : X \to \mathbb{R}$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija. Za niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da*

(a) konvergira skoro svuda *prema funkciji $f$ ako postoji $\mu$-zanemariv skup $N \subset X$ takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in X \backslash N.$$

*Pišemo* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *($\mu$-s.s.),* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *(s.s.) ili* $f_n \xrightarrow{s.s.} f$.

(b) konvergira skoro uniformno *prema funkciji $f$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji skup $E \in \Sigma$ takav da je $\mu(E) < \varepsilon$ i da niz $(f_n)$ konvergira uniformno prema $f$ na skupu $E^c$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists E \in \Sigma)\ \mu(E) < \varepsilon \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E^c} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

*Tada pišemo* $f_n \xrightarrow{s.u.} f$.

(c) konvergira po mjeri $\mu$ *prema funkciji $f$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

*Pišemo* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(d) konvergira u $\mathcal{L}^p$ *($1 \le p < \infty$) prema funkciji $f$ ako su $f, f_n \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$ i ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

*Pišemo* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

---

6.2. Teorem

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz $\Sigma$-izmjerivih realnih funkcija definiranih na $X$ i $f : X \to \mathbb{R}$ $\Sigma$-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:*

(a) *ako je $\mu(X) < \infty$ i ako $f_n \xrightarrow{s.s.} f$, onda $f_n \xrightarrow{\mu} f$,*

(b) [Egorovljev[31] teorem] *ako je $\mu(X) < \infty$ i ako $f_n \xrightarrow{s.s.} f$, onda $f_n \xrightarrow{s.u.} f$ ,*

[31] Dmitri Fyodorovich Egorov (Димитрий Федорович Егоров) (1869.-1931.), ruski matematičar.

(c) [Rieszov[32] teorem] *ako* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *onda postoji podniz* $(f_{n_k})$ *koji konvergira skoro svuda prema* $f$, $f_{n_k} \xrightarrow{s.s.} f$,

(d) *ako* $f_n \xrightarrow{s.u.} f$, *onda* $f_n \xrightarrow{s.s.} f$ *i* $f_n \xrightarrow{\mu} f$,

(e) *ako* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, $1 \le p < \infty$, *onda* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

---

6.3. PRIMJEDBA

*Neka su funkcije* $f, f_n$, $n \in \mathbb{N}$ *definirane kao u prethodnom teoremu. U nastavku ćemo koristiti oznaku* $f_n \overset{\mathcal{L}^p}{\not\to} f$ *kako bismo naznačili da niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne konvergira u* $\mathcal{L}^p$, $1 \le p < \infty$ *prema funkciji* $f$ *te* $f_n \overset{\mu}{\not\to} f$ *kako bismo naznačili da niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne konvergira po mjeri* $\mu$ *prema funkciji* $f$.

---

## Riješeni zadaci

6.1. ZADATAK

*Neka je* $\lambda$ *Lebesgueova mjera na* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *a* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz funkcija* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiranih formulom* $f_n(x) := n\mathrm{e}^{-n|x|}$. *Dokažite:*

(a) $f_n \xrightarrow{s.s.} 0$, (b) $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\not\to} 0$, (c) $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ te definirajmo pomoćnu funkciju $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $g_x(t) := t\mathrm{e}^{-t|x|}$. Primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo:

$$\lim_{t\to\infty} g_x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{t|x|}} = \frac{1}{|x|} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{t|x|}} = 0.$$

Ako napravimo restrikciju funkcije $g_x$ na skup prirodnih brojeva, možemo uočiti da je $g_x(n) = f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ te iz prethodnog razmatranja i činjenice da je $\lambda(\{0\}) = 0$ slijedi da je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, odnosno $f_n \xrightarrow{s.s.} 0$.

(b) Kako je prema Levijevom teoremu o monotonoj konvergenciji i Lebesgueovom kriteriju za R-integrabilnost

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} n\mathrm{e}^{-n|x|}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\mathrm{e}^{-n|x|}\chi_{[-m,m]}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{[-m,m]} n\mathrm{e}^{-n|x|}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{m\to\infty} \int_{-m}^{m} n\mathrm{e}^{-n|x|}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{m\to\infty} (2 - 2\mathrm{e}^{-mn}) = 2, \end{aligned}$$

možemo zaključiti da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira prema 0 u $\mathcal{L}^1$.

[32] Riesz Frigyes (1880.-1956.), mađarski matematičar.

(c) Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ je

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\} &= \left\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{-n|x|} > \frac{\varepsilon}{n}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -n|x| > \ln\varepsilon - \ln n\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{\ln n - \ln\varepsilon}{n}\right\} \\ &= \left(-\frac{\ln n - \ln\varepsilon}{n}, \frac{\ln n - \ln\varepsilon}{n}\right), \qquad \text{za } n > \varepsilon.\end{aligned}$$

Nadalje, definirajmo pomoćnu funkciju $g_\varepsilon(x) \colon (0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ s $g_\varepsilon(x) := 2x^{-1}(\ln x - \ln\varepsilon)$ te primjenom L'Hospitalovog pravila izračunajmo njezin limes:

$$\lim_{x\to\infty} g_\varepsilon(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2(\ln x - \ln\varepsilon)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Ako s $g_{\varepsilon_{|\mathbb{N}}}$ označimo restrikciju funkcije $g_\varepsilon$ na skup prirodnih brojeva, tada iz prethodnog razmatranja dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} g_{\varepsilon_{|\mathbb{N}}}(n) = 0.$$

6.2. Zadatak

*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih formulom $f_n(x) = n^2\chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}$. Dokažite:*

(a) $f_n \xrightarrow{s.s.} 0$, (b) $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\not\to} 0$, (c) $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

---

**Rješenje.**

(a) Kako je $x \in \mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0,1) \cup [1,\infty)$, promotrit ćemo dva slučaja:

(a1) Ako je $x \in (-\infty, 0]$ ili $x \in [1,\infty)$, tada je $f_n(x) = n^2\chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}(x) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa dani niz funkcija konvergira po točkama, a onda i $\lambda$–s.s. prema nul-funkciji.

(a2) Ako je $x \in (0,1)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan, tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x < 1 - \frac{1}{n_0}$, pa za svaki $n \geq n_0$ vrijedi da je $f_n(x) = n^2\chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}(x) = 0$, odnosno

$$|f_n(x) - 0| = n^2\chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}(x) = 0 < \varepsilon,$$

pa iz konvergencije po točkama ponovno slijedi tražena tvrdnja.

(b) Iz

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int n^2\chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

zaključujemo da $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\not\to} 0$.

(c) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Sada iz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| > \varepsilon\}\right) &= \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : n^2\chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}(x) > \varepsilon\}\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : \chi_{\left(1-\frac{1}{n},1\right)}(x) = 1\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\left(1-\tfrac{1}{n},1\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\end{aligned}$$

zaključujemo da dani niz funkcija konvergira po mjeri $\lambda$ prema nul-funkciji.

**6.3. Zadatak**

*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih formulom $f_n(x) := \sqrt{n}\,\chi_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)}$. Dokažite:*

(a) $f_n \xrightarrow{s.s.} 0$, (b) $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0$, (c) $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

---

**Rješenje.**

(a) Za svaki $x \in [0,\infty)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x \notin \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Sada iz $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ zaključujemo da dani niz funkcija konvergira prema nul-funkciji po točkama, pa stoga i $\lambda$–s.s.

(b) Konvergencija u $\mathcal{L}^1$ slijedi iz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_1 &= \int f_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int \chi_{\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\lambda\left(\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

(c) Iz teorema 6.2. (e) i dokazane tvrdnje (b) zadatka odmah slijedi $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

**6.4. Zadatak**

*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty))$, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiranih formulom $f_n(x) := \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\chi_{[0,n]}(x)$. Dokažite:*

(a) $f_n \xrightarrow{s.s.} 0$, (b) $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\nrightarrow} 0$, (c) $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

---

**Rješenje.**

(a) Provjerimo najprije postoji li limes po točkama. Za proizvoljni $x \in [0,\infty)$ uočimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in [0,n]$ za svaki $n \geq n_0$, pa je stoga i $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ za svaki $n \geq n_0$. Sada je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pa zaključujemo da dani niz funkcija konvergira po točkama, pa onda i $\lambda$-s.s. prema nul-funkciji.

(b) Iz

$$\begin{aligned}\|f_n - 0\|_1 &= \int_{[0,\infty)} |f_n| \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \chi_{[0,n]} \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{[0,n]} \tfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \neq 0,\end{aligned}$$

gdje smo zbog neprekidnosti i omeđenosti funkcije $x \mapsto \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ na segmentu $[0, n]$ mogli zamijeniti Lebesgueov integral Riemannovim, možemo zaključiti da dani niz funkcija ne konvergira u $\mathcal{L}^1$.

(c) Kako je $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ za $x \in [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, slijedi da je

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\{x \in [0,\infty) : |f_n(x)| > \varepsilon\} = \emptyset, \quad \forall n \geq n_0,$$

pa slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{x \in [0,\infty) : |f_n(x) - 0| > \varepsilon\}\right) = \lambda(\emptyset) = 0$$

te zaključujemo da $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

6.5. Zadatak

*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty))$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiranih formulom $f_n(x) := f\chi_{[0,n]}(x)$. Dokažite:*

(a) $f_n \xrightarrow{s.s.} f$, (b) $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, (c) $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

(d) *Ako je $f = \chi_{\mathbb{N}} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, pokažite da dani niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira uniformno, ali konvergira skoro uniformno prema funkciji $f$.*

---

**Rješenje.**

(a) Za svaki $x \in [0,\infty)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{[0,n]}(x) = 1$, iz čega slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} f(x)\,\chi_{[0,n]}(x) = f(x),$$

odnosno niz funkcija $f_n$, $n \in \mathbb{N}$ konvergira po točkama, pa onda i $\lambda$–s.s. prema funkciji $f$.

(b) Funkcija $f$ je integrabilna, pa prema lemi 4.19. slijedi da je i $|f|$ integrabilna funkcija. Sada iz

$$|f - f_n| = |f - f\chi_{[0,n]}| = |f|\chi_{(n,\infty)} \leq |f|$$

možemo zaključiti da je niz funkcija $(|f - f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ dominiran integrabilnom funkcijom $|f|$. Također vrijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} |f - f_n| = \lim_{n\to\infty} |f|\chi_{(n,\infty)} = 0,$$

pa iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\lambda = \int 0 \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

iz čega slijedi da niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $\mathcal{L}^1$ prema funkciji $f$.

(c) Prema (b) i teoremu 6.2. (e) slijedi da $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.

(d) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$|f - f_n| = \chi_{\mathbb{N}\cap(n,\infty)} = \chi_{\{x\in\mathbb{N}:\, x>n\}},$$

pa iz $\sup_{x\in[0,\infty)} \chi_{\{x\in\mathbb{N}:\, x>n\}} = \sup_{x\in[0,\infty)}\{0,1\} = 1$ slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} \chi_{\{x\in\mathbb{N}:\, x>n\}}(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Dakle, niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira uniformno prema funkciji $f$.

Za $E = \mathbb{N}$ je $\lambda(E) = 0$, dok za $E^c = [0,\infty)\backslash\mathbb{N}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E^c} |f(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

odnosno niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro uniformno prema funkciji $f$.

6.6. ZADATAK

*Neka je $\lambda$ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih s $f_n(x) := \frac{1}{n}\chi_{(n,2n)}(x)$. Ispitajte konvergira li niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{L}^p$, $1 \le p < \infty$. Konvergira li niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ po mjeri $\lambda$?*

---

**Rješenje.** Iz

$$\|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p \,\mathrm{d}\lambda = \int \frac{1}{n^p}\chi_{(n,2n)} \,\mathrm{d}\lambda = n^{-p}\lambda((n,2n)) = n^{1-p} \qquad (\star)$$

zaključujemo da je za $p > 1$ $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = 0$, pa $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0$. Iz konvergencije u $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, slijedi konvergencija po mjeri $\lambda$ (vidi teorem 6.2. (e)).

Preostaje razmotriti slučaj $p = 1$. Pretpostavimo da $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} g$. Tada prema teoremu 6.2. (e) $f_n \xrightarrow{\lambda} g$, a zbog (s.s.) jedinstvenosti limesa po mjeri, slijedi da je $g = 0$ ($\lambda$-s.s.). To bi značilo da je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_1 = 0,$$

što bi bila kontradikcija s već pokazanim u jednakosti $(\star)$: da je $\|f_n\|_1 = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira u $\mathcal{L}^1$.

6.7. ZADATAK

*Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \in \mathcal{A}$ te $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : A \to \mathbb{R}$ koji konvergira skoro svuda prema funkcijama $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : A \to \mathbb{R}$. Pokažite da je tada $f = g$ (s.s.).*

---

**Rješenje.** Kako niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira (s.s.) prema funkciji $f$ na skupu $A$, postoji $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$ tako da

$$f_n(x) \to f(x) \text{ za svaki } x \in B$$

i $\mu(A\backslash B) = 0$. Nadalje, kako niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira (s.s.) i prema funkciji $g$ na skupu $A$, postoji $B' \subseteq A$, $B' \in \mathcal{A}$ tako da

$$f_n(x) \to f(x) \text{ za svaki } x \in B'$$

i $\mu(A\backslash B') = 0$.
Sada je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in B \cap B'$, pa zbog

$$0 \le \mu(A\backslash(B \cap B')) \le \mu(A\backslash B) + \mu(A\backslash B') = 0$$

slijedi da je $f = g$ (s.s.) na skupu $A$.

6.8. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$, koji konvergira skoro uniformno prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ te $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $g_n : X \to \mathbb{R}$ koji konvergira skoro uniformno prema funkciji $g : X \to \mathbb{R}$. Pokažite da tada niz funkcija $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro uniformno prema funkciji $f + g$ na $X$.*

---

**Rješenje.** Kako niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro uniformno prema funkciji $f$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izmjeriv skup $A \in \Sigma$ tako da je $\mu(A) < \varepsilon/2$ i $f_n \to f$ uniformno na $A^c$. Isto tako, kako niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira skoro uniformno prema funkciji $g$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji izmjeriv skup $B \in \Sigma$ tako da je $\mu(B) < \varepsilon/2$ i $g_n \to g$ uniformno na $B^c$.
Sada je jasno da niz funkcija $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji $f+g$ uniformno na $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, a kako je

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B) < \varepsilon, \text{ za svaki } \varepsilon > 0,$$

slijedi da $f_n + g_n \to f + g$ skoro uniformno na $X$.

6.9. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz $\Sigma$–izmjerivih funkcija definiranih na izmjerivom skupu $E \in \Sigma$ i $f : E \to \mathbb{R}$. Dokažite:*

(a) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *ako i samo ako svaki podniz $(f_{n_k})$ ima podniz koji konvergira po mjeri prema $f$.*

(b) *Uz pretpostavku da je mjera $\mu$ konačna $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ako i samo ako svaki podniz $(f_{n_k})$ ima podniz koji konvergira skoro svuda prema $f$.*

---

**Rješenje.**

(a) Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$, onda i svaki njegov podniz $(f_{n_k})$ konvergira po mjeri $\mu$ prema $f$. Obratno, ako $f_n \overset{\mu}{\not\to} f$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\})$ ne konvergira prema nuli. To znači da postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $n_k \geq k$ takav da je $a_{n_k} = \mu(\{x \in E : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \geq \delta$. Lako je postići da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bude strogo rastući niz prirodnih brojeva. To bi značilo da podniz $(f_{n_k})$, kao niti jedan njegov podniz, ne konvergiraju po mjeri prema $f$.

(b) Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$, onda i $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$, pa po Rieszovom teoremu $(f_{n_k})$ ima podniz koji konvergira skoro svuda prema $f$. Obratno, ako svaki podniz $(f_{n_k})$ ima podniz $(\widehat{f}_{n_k})$ koji konvergira skoro svuda prema $f$, onda po tvrdnji (a) teorema 6.2. niz $(\widehat{f}_{n_k})$ konvergira po mjeri prema $f$. Prema već dokazanoj tvrdnji (a) tada $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

6.10. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi $\Sigma$-izmjerivih realnih funkcija definiranih na $X$ i $f, g : X \to \mathbb{R}$ $\Sigma$-izmjerive funkcije. Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$, dokažite da tada*

(a) *niz $(af_n + bg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po mjeri $\mu$ prema funkciji $af + bg$ za $a, b \in \mathbb{R}$,*

(b) *niz $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po mjeri $\mu$ prema funkciji $|f|$,*

(c) $(\max\{f_n, g_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira po mjeri $\mu$ prema funkciji* $\max\{f, g\}$,

(d) *ako postoji nenegativan realan broj $M$ takav da je $|f_n| \leq M$ ($\mu$-s.s.) na $X$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $|f| \leq M$ ($\mu$-s.s),*

(e) *ako postoji nenegativan realan broj $M$ takav da je $|f_n|, |g_n| \leq M$ ($\mu$-s.s.) na $X$, $n \in \mathbb{N}$, onda niz $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po mjeri $\mu$ prema funkciji $fg$.*

---

**Rješenje.**

(a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Iz nejednakosti

$$|af_n(x) + bg_n(x) - af(x) - bg(x)| \leq |a||f_n(x) - f(x)| + |b||g_n(x) - g(x)|$$

slijedi

$$\begin{aligned}&\{x \in X : |af_n(x) + bg_n(x) - af(x) - bg(x)| > \varepsilon\}\\ &\qquad \subseteq \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2|a|}\right\} \cup \left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2|b|}\right\},\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |(af_n + bg_n)(x) - (af + bg)(x)| > \varepsilon\}\right)\\ &\le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2|a|}\right\}\right)\\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2|b|}\right\}\right) = 0.\end{aligned}$$

(b) Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ iz nejednakosti

$$||f_n(x)| - |f(x)|| \le |f_n(x) - f(x)|$$

slijedi

$$\{x \in X : ||f_n(x)| - |f(x)|| > \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\},$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : ||f_n(x)| - |f(x)|| > \varepsilon\}\right)\\ &\le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) = 0.\end{aligned}$$

(c) Iz jednakosti

$$\max\{f_n(x), g_n(x)\} = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + g_n(x) + |f_n(x) - g_n(x)|\right),$$

koristeći prethodno dokazane tvrdnje (a) i (b), dobivamo

$$\begin{aligned}&|\max\{f_n(x), g_n(x)\} - \max\{f(x), g(x)\}|\\ &= \left|\tfrac{1}{2}(f_n(x) + g_n(x) + |f_n(x) - g_n(x)|) - \tfrac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)\right|\\ &\le \left|\tfrac{1}{2}(f_n(x) - f(x)) + \tfrac{1}{2}(g_n(x) - g(x))\right| + \tfrac{1}{2}\left||f_n(x) - g_n(x)| - |f(x) - g(x)|\right|\\ &\le \tfrac{1}{2}|f_n(x) - f(x)| + \tfrac{1}{2}|g_n(x) - g(x)| + \tfrac{1}{2}|(f_n(x) - f(x)) - (g_n(x) - g(x))|\\ &\le \tfrac{1}{2}|f_n(x) - f(x)| + \tfrac{1}{2}|g_n(x) - g(x)| + \tfrac{1}{2}|f_n(x) - f(x)| + \tfrac{1}{2}|g_n(x) - g(x)|\\ &= |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|.\end{aligned}$$

Sada za proizvoljan $\varepsilon > 0$ slijedi da je

$$\begin{aligned}&\{x \in X : |\max\{f_n(x), g_n(x)\} - \max\{f(x), g(x)\}| > \varepsilon\}\\ &\quad\subseteq \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |\max\{f_n(x), g_n(x)\} - \max\{f(x), g(x)\}| > \varepsilon\}\right)\\ &\le \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0.\end{aligned}$$

(d) Kako je

$$|f(x)| = |f_n(x) - (f_n(x) - f(x))| \leq |f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

za proizvoljan $\varepsilon > 0$ slijedi da je

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > M + \varepsilon\}\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x)| > M + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\ &= \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right), \end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz uvjeta zadatka $|f_n| \leq M$ ($\mu$–s.s.) na $X$. Djelujemo li na prethodnu nejednakost s limesom $n \to \infty$, iz uvjeta zadatka dobivamo

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > M + \varepsilon\}\right) = 0,$$

odnosno $|f| \leq M$ ($\mu$–s.s.).

(e) Kako je $|f_n|, |g_n| \leq M$ ($\mu$-s.s.) na $X$, $n \in \mathbb{N}$, iz dokazane tvrdnje (d) zadatka slijedi da je $|f|, |g| \leq M$ ($\mu$-s.s.) na $X$ te iz nejednakosti

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \\ &\leq M|g_n(x) - g(x)| + M|f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

dobivamo da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} &\{x \in X : |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| > \varepsilon\} \\ &\quad \subseteq \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2M}\right\} \cup \left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2M}\right\}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| > \varepsilon\}\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right) \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right) = 0. \end{aligned}$$

## 6.11. Zadatak

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ je* Cauchyjev niz u mjeri *$\mu$ ako za svaka dva realna broja $\varepsilon, \delta > 0$ postoji prirodan broj $n_0 \equiv n_0(\varepsilon, \delta)$ takav da je*

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \delta, \qquad \forall m, n \geq n_0.$$

*Dokažite: Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u mjeri $\mu$, onda postoji funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ prema kojoj taj niz konvergira po mjeri $\mu$.*

---

**Rješenje.** Kako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u mjeri $\mu$, postoji rastući niz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prirodnih brojeva tako da je

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}, \qquad \forall m, n \geq n_k.$$

Ako definiramo niz $g_k := f_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ i skupove $A_k := \{x \in X : |g_k(x) - g_{k+1}(x)| > 2^{-k}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $B_m := \bigcup_{k\geq m} A_k$, onda iz prethodnog slijedi da je $\mu(A_k) < 2^{-k}$ i $0 \leq \mu(B_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-m}$. Dakle, za $x \in X \backslash B_m$ i $i \geq j \geq m$ vrijedi

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq \sum_{l=j}^{\infty} 2^{-l} = 2^{1-j}, \qquad (\star)$$

odnosno $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ je po točkama Cauchyjev niz na $X\backslash B_m$, $m \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka je $B := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ i $f(x) := \lim_{j\to\infty} g_j(x)\chi_{X\backslash B}(x)$ izmjeriva funkcija. Zbog $\mu(B_k) < 2^{1-k}$, $k \in \mathbb{N}$, koristeći neprekidnost mjere na padajući niz skupova $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$, slijedi da je $\mu(B) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$ te niz $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira s.s. prema funkciji $f$. Također iz $(\star)$, uzimanjem limesa po $i \to \infty$, vrijedi da je

$$|g_j(x) - f(x)| < 2^{1-j} \qquad \text{za } j \geq k \text{ i } x \in X\backslash B_k$$

te zbog $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$ slijedi da $g_j \xrightarrow{\mu} f$. Napokon, zbog

$$\begin{aligned} &\{x \in X : \, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \\ &\quad \subseteq \{x \in X : \, |f_n(x) - g_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in X : \, |g_j(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}, \end{aligned}$$

pri čemu su oba skupa zdesna po volji male mjere za dovoljno velike $n$ i $j$, slijedi da $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

6.12. Zadatak

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ i $f : X \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija takva da $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Dokažite da je tada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u mjeri $\mu$.*

---

**Rješenje.** Zbog $f_n \xrightarrow{\mu} f$ iz definicije konvergencije po mjeri slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0,$$

tj. za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $\delta > 0$ postoji $n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0(\varepsilon, \delta)$ vrijedi

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) < \delta.$$

Sada, iz nejednakosti

$$\begin{aligned}
&\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\big) \\
&\quad \le \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |f_m(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\quad < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \text{ za svaki } m, n \ge n_0(\varepsilon, \delta)
\end{aligned}$$

slijedi da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u mjeri $\mu$.

6.13. ZADATAK

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ koji je ujedno i Cauchyjev niz u $L^p$, tj. za svaki $\delta > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaka dva prirodna broja $m, n \ge n_0$ vrijedi $\|f_n - f_m\|_p < \delta$. Dokažite da je tada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u mjeri $\mu$.*

---

**Rješenje.** Za proizvoljan $\varepsilon > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \ge n_0$ vrijedi $\|f_n - f_m\|_p < \sqrt[p]{\varepsilon^{p+1}}$, iz Čebiševljeve nejednakosti (vidi (4.1), str. 127) slijedi da je

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right) \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n(x) - f_m(x)|^p \, \mathrm{d}\mu = \frac{\|f_n - f_m\|_p^p}{\varepsilon^p} < \varepsilon,$$

što daje tvrdnju zadatka.

# 7. Dekompozicija mjere

U ovom ćemo se poglavlju baviti zadacima vezanim uz Hahnovu dekompoziciju, Jordanovu dekompoziciju te Radon-Nikodymov i Lebesgueov teorem o dekompoziciji mjere s predznakom. Prije toga definirat ćemo nove pojmove i rezultate koji će nam biti potrebni u nastavku.

7.1. Definicija
*Neka je $(X, \Sigma)$ izmjeriv prostor.* Mjera s predznakom *je svaka funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ sa svojstvima:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) ($\sigma$-aditivnost) *za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\Sigma$ vrijedi*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

---

7.2. Definicija
*Za mjeru s predznakom $\mu$ kažemo da je* konačna *ako je $\mu(A) \in \mathbb{R}$ za svaki $A \in \Sigma$. Konačnu mjeru s predznakom nazivamo* realna mjera.

---

7.3. Definicija
*Neka je $\nu$ realna mjera na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Za skup $A \in \Sigma$ kažemo da je:*

(a) pozitivan skup *(u odnosu na $\nu$, za mjeru $\nu$) ako je $\nu(A \cap E) \geq 0$ za svaki $E \in \Sigma$,*

(b) negativan skup *(u odnosu na $\nu$, za mjeru $\nu$) ako je $\nu(A \cap E) \leq 0$ za svaki $E \in \Sigma$,*

(c) nul-skup *(u odnosu na $\nu$, za mjeru $\nu$) ako je $\nu(A \cap E) = 0$ za svaki $E \in \Sigma$.*

---

7.4. Propozicija
*Neka je $\nu$ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Vrijedi:*

(a) *Skup $A \in \Sigma$ je pozitivan [negativan] ako i samo ako je $\nu(E) \geq 0$ [$\nu(E) \leq 0$] za svaki izmjeriv podskup $E$ od $A$.*

(b) *$A \in \Sigma$ je nul-skup ako i samo ako je $\nu(E) = 0$ za svaki izmjeriv podskup $E$ od $A$.*

(c) *Svaki izmjeriv podskup pozitivnog [negativnog, nul-] skupa je pozitivan [negativan, nul-] skup.*

(d) *Prebrojiva unija pozitivnih [negativnih, nul-] skupova je pozitivan [negativan, nul-] skup.*

---

### 7.5. Teorem (Hahnova[33] dekompozicija)

*Neka je $\mu$ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Tada postoji par $(P, N)$ izmjerivih skupova takvih da je:*

(a) *$P$ pozitivan, a $N$ negativan skup,*

(b) $P \cap N = \emptyset$,

(c) $P \cup N = X$.

*Par $(P, N)$ s tim svojstvima naziva se* Hahnova dekompozicija *prostora $X$ za mjeru s predznakom $\mu$.*

---

### 7.6. Primjedba

*Hahnova dekompozicija nije jedinstvena. Općenito, ako su $(P_1, N_1)$ i $(P_2, N_2)$ Hahnove dekompozicije, onda su skupovi $P_1 \cap N_2$, $P_2 \cap N_1$ i pozitivni i negativni. Zato im mjera mora biti nula, tj. $\mu(P_1 \cap N_2) = \mu(P_2 \cap N_1) = 0$, odakle se lako dobiva:*

$$\mu(P_1 \backslash P_2) = \mu(P_2 \backslash P_1) = 0, \;\; \mu(N_1 \backslash N_2) = \mu(N_2 \backslash N_1) = 0.$$

*Stoga se može reći da je Hahnova dekompozicija jedinstvena u sljedećem smislu* (vidi [2])*: ako su $(P_1, N_1)$ i $(P_2, N_2)$ dvije takve dekompozicije, onda za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi:*

$$\mu(P_1 \cap E) = \mu(P_2 \cap E) \quad \& \quad \mu(N_1 \cap E) = \mu(N_2 \cap E).$$

*Lako je uočiti da su funkcije $\mu^+, \mu^- : \Sigma \to [0, \infty]$ za $E \in \Sigma$, definirane formulama*

$$\mu^+(E) := \mu(E \cap P_1), \qquad \mu^-(E) := -\mu(E \cap N_1),$$

*mjere koje ne ovise o izboru Hahnove dekompozicije $(P_1, N_1)$. Štoviše, barem jedna od njih je konačna te vrijedi da je*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

*Ta tvrdnja je poznata kao* Jordanova[34] dekompozicija mjere s predznakom *ili kao* Jordanova dekompozicija *od $\mu$. Za mjeru $\mu^+$ kažemo da je* pozitivni dio*, a za $\mu^-$ da je* negativni dio *od $\mu$. Mjeru $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ nazivamo* varijacija *od $\mu$. Lako je provjeriti da vrijedi*

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E), \qquad \forall E \in \Sigma.$$

---

[33] Hans Hahn (1879.-1934.), austrijski matematičar.

[34] Camille Jordan (1838.-1932.), francuski matematičar.

**7.7. Definicija**
*Neka je $\mu$ mjera, a $\nu$ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Kažemo da je $\nu$* apsolutno neprekidna u odnosu na *$\mu$ i pišemo $\nu \ll \mu$ ako vrijedi*

$$(\forall E \in \Sigma)\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0.$$

---

**7.8. Primjedba**
*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ bilo koja $\Sigma$-izmjeriva funkcija. Prema korolaru 4.13. funkcija $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$, definirana formulom $\nu(E) := \int_E f\,\mathrm{d}\mu$, je mjera. Pomoću propozicije 4.10. lako je zaključiti da*

$$(\forall E \in \Sigma)\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0,$$

*odnosno mjera $\nu$ je apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru $\mu$.*

---

**7.9. Teorem (Radon[35]-Nikodymov[36]teorem)**
*Neka su $\mu$ i $\nu$ dvije mjere na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$ takve da je $\mu$ $\sigma$-konačna i $\nu \ll \mu$. Tada postoji $\Sigma$-izmjeriva funkcija $f : X \to [0, \infty]$ takva da je*

$$\nu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{za svaki } E \in \Sigma.$$

*Osim toga, ako je i $\nu$ $\sigma$-konačna mjera, onda se može postići da $f$ bude konačna i $\mu$-skoro svuda jedinstvena funkcija.*

*Funkciju $f$ nazivamo* gustoća *ili* Radon-Nikodymova derivacija mjere $\nu$ po mjeri $\mu$ *i često pišemo $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$ ili $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.*

---

**7.10. Definicija**
*Neka su $\mu, \nu$ dvije mjere s predznakom na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Kažemo da su $\mu$ i $\nu$ međusobno* okomite *ili* singularne *i pišemo $\mu \perp \nu$ ako postoji $A \in \Sigma$ takav da je $A$ nul-skup za $\mu$, a $A^c$ nul-skup za $\nu$.*

---

**7.11. Primjedba**
*Lako je pokazati da će mjere $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ biti singularne ako i samo ako postoji skup $A \in \Sigma$ takav da je $\mu(A) = 0$ i $\nu(A^c) = 0$.*

---

**7.12. Teorem (Lebesgueova dekompozicija mjere)**
*Neka su $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ dvije mjere na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Ako je $\nu$ $\sigma$-konačna mjera, onda postoje i jedinstvene su mjere $\nu_a$ i $\nu_s$ na $(X, \Sigma)$, takve da je*

(a) $\nu = \nu_a + \nu_s$,

[35] Johann Radon (1887.-1956.), austrijski matematičar.
[36] Otton Martin Nikodym (1887.-1974.), američki matematičar poljskog porijekla.

(b) $\nu_a \ll \mu$,

(c) $\nu_s \perp \mu$.

*Mjeru* $\nu_a$ *nazivamo* apsolutno neprekidni dio*, a* $\nu_s$ singularni dio *mjere* $\nu$ *u odnosu na mjeru* $\mu$.

---

## Riješeni zadaci

---

7.1. Zadatak

*Neka je* $\nu : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *realna mjera na izmjerivom prostoru* $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ *definirana formulom*

$$\nu(A) := -\sum_{n\in A}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad A \in 2^{\mathbb{N}}.$$

*Nađite jednu Hahnovu dekompoziciju* $(P, N)$ *prostora* $\mathbb{N}$ *za mjeru* $\nu$.

---

**Rješenje.** Definirajmo najprije pomoćnu funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s $f(n) := \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ te skupove $P := \{n \in \mathbb{N} : f(n) \geq 0\} = 2\mathbb{N} - 1$ i $N := \{n \in \mathbb{N} : f(n) < 0\} = 2\mathbb{N}$. Uočimo da je par $(P, N)$ Hahnova dekompozicija prostora $\mathbb{N}$ za mjeru $\nu$ jer je

$$P \cup N = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{N},\ P \cap N = \emptyset,$$

dok je za svaki skup $E \in 2^{\mathbb{N}}$

$$\nu(E \cap P) = \sum_{E\cap P} f(n) \geq 0, \qquad \nu(E \cap N) = \sum_{n\in E\cap N} f(n) \leq 0.$$

7.2. Zadatak

*Neka su* $\mu_1$ *i* $\mu_2$ *dvije realne mjere na izmjerivom prostoru* $(X, \Sigma)$*, a* $\lambda_1$ *i* $\lambda_2$ *bilo koja dva realna broja. Dokažite:*

(a) $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ *je realna mjera,*

(b) $|\lambda_1\mu_1| = |\lambda_1||\mu_1|$.

---

**Rješenje.**

(a) Vrijedi da je

$$(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)(\emptyset) = \lambda_1\mu_1(\emptyset) + \lambda_2\mu_2(\emptyset) = 0.$$

Također, za svaki niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih izmjerivih skupova vrijedi

$$\begin{aligned}(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) &= \lambda_1\mu_1\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \lambda_2\mu_2\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\\ &= \lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1(E_n) + \lambda_2\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1\mu_1(E_n) + \lambda_2\mu_2(E_n))\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)(E_n).\end{aligned}$$

Isto tako, kako su $\mu_1$ i $\mu_2$ konačne mjere i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to je i $(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)(A) \in \mathbb{R}$ za svaki $A \in \Sigma$.

(b) Neka je $(P, N)$ Hahnova dekompozicija od $\mu_1$. Ako je $\lambda_1 \geq 0$, onda je $(P, N)$ Hahnova dekompozicija i od $\lambda_1\mu_1$, pa je zato

$$\begin{aligned}|\lambda_1\mu_1|(E) &= (\lambda_1\mu_1)^+(E) + (\lambda_1\mu_1)^-(E) = (\lambda_1\mu_1)(E \cap P) - (\lambda_1\mu_1)(E \cap N)\\ &= \lambda_1\mu_1(E \cap P) - \lambda_1\mu_1(E \cap N) = \lambda_1\mu_1^+(E) + \lambda_1\mu_1^-(E)\\ &= |\lambda_1||\mu_1|(E).\end{aligned}$$

Ako je $\lambda_1 < 0$, onda je $(N, P)$ Hahnova dekompozicija od $\lambda_1\mu_1$ pa je zato

$$\begin{aligned}|\lambda_1\mu_1|(E) &= (\lambda_1\mu_1)^+(E) + (\lambda_1\mu_1)^-(E) = (\lambda_1\mu_1)(E \cap N) - (\lambda_1\mu_1)(E \cap P)\\ &= \lambda_1\mu_1(E \cap N) - \lambda_1\mu_1(E \cap P) = -\lambda_1(\mu_1(E \cap P) - \mu_1(E \cap N))\\ &= |\lambda_1|(\mu_1^+(E) + \mu_1^-(E)) = |\lambda_1||\mu_1|(E).\end{aligned}$$

7.3. ZADATAK
*Neka su $\mu_1$ i $\mu_2$ dvije realne mjere na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Odredite*

(a) *najveću realnu mjeru koja je manja i od $\mu_1$ i od $\mu_2$,*

(b) *najmanju realnu mjera koja je veća i od $\mu_1$ i od $\mu_2$.*

---

**Rješenje.**

(a) Lako se vidi da je s

$$\min\{\mu_1(E), \mu_2(E)\} := \frac{1}{2}(\mu_1(E) + \mu_2(E) - |\mu_1(E) - \mu_2(E)|)$$

definirana tražena realna mjera.

(b) Najmanju realnu mjeru koja je veća i od $\mu_1$ i od $\mu_2$ možemo definirati na sljedeći način:

$$\max\{\mu_1(E), \mu_2(E)\} := \frac{1}{2}(\mu_1(E) + \mu_2(E) + |\mu_1(E) - \mu_2(E)|).$$

7.4. ZADATAK
*Neka su na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$ zadane realne mjere $\nu_1, \nu_2$ i $\mu$. Dokažite:*

(a) *ako je $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$, onda je $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2) \perp \mu$ za sve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,*

(b) *ako je $\nu_1 \ll \mu$ i $\nu_2 \ll \mu$, onda je $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2) \ll \mu$ za sve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.*

---

**Rješenje.**

(a) Iz $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$ možemo zaključiti da postoje skupovi $A_1, A_2 \in \Sigma$ takvi da je $A_1$ nul-skup za $\nu_1$, $A_1^c$ nul-skup za $\mu$, $A_2$ nul-skup za $\nu_2$ i $A_2^c$ nul-skup za $\mu$. Neka je $A := A_1 \cap A_2$. Prema tvrdnji (c) propozicije 7.4. slijedi da je skup $A$ nul-skup i za $\nu_1$ i za $\nu_2$, pa je $A$ nul-skup i za $c_1\nu_1 + c_2\nu_2$. Nadalje, po tvrdnji (d) iste propozicije skup $A^c = A_1^c \cup A_2^c$ je nul-skup za $\mu$, pa tražena tvrdnja slijedi.

(b) Ako je $\mu(E) = 0$, onda je $\nu_1(E) = 0$ i $\nu_2(E) = 0$, pa je zato $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2)(E) = 0$.

7.5. ZADATAK

*Neka su $\lambda, \nu$ i $\mu$ $\sigma$-konačne mjere na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Dokažite:*

(a) *ako je $\nu \ll \mu$ i ako je $f$ nenegativna izmjeriva funkcija, onda je* $\int f \,\mathrm{d}\nu = \int f \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \,\mathrm{d}\mu$,

(b) *ako je $\lambda \ll \mu$ i $\nu \ll \mu$, onda je* $\frac{\mathrm{d}(\lambda+\nu)}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} + \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$,

(c) *ako je $\nu \ll \lambda \ll \mu$, onda je* $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}$,

(d) *ako je $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$, onda je* $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}$.

---

**Rješenje.**

(a) Ako je $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ nenegativna jednostavna funkcija sa standardnim prikazom, onda je

$$\int \varphi \,\mathrm{d}\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{E_i} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int \varphi \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu.$$

Nadalje, neka je $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija koji po točkama konvergira prema funkciji $f$. Tada iz prethodnog razmatranja i Levijevog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} d\mu = \int f \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu.$$

(b) Najprije uočimo da iz zadatka 7.4. (b) slijedi $\lambda + \nu \ll \mu$. Nadalje, za svaki $E \in \Sigma$ je prema dokazanoj tvrdnji (a), za $f = \chi_E$,

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad \text{i} \quad \lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu.$$

Zato je

$$(\lambda + \nu)(E) = \int \left(\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu,$$

iz čega slijedi tražena tvrdnja.

(c) Za svaki $E \in \Sigma$ prema dokazanoj tvrdnji (a) slijedi

$$\nu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \int_E \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}d\mu,$$

iz čega deriviranjem po mjeri $\mu$ dobivamo traženu tvrdnju.

(d) Prema (c) je

$$1 = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu},$$

odnosno vrijedi $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} = \left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}$.

**7.6. Zadatak**

*Neka su $\mu$ i $\nu$ mjere na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$ takve da je $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ za neku izmjerivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$. Prema primjedbi 7.8. i definiciji 7.7. slijedi da je tada mjera $\nu$ apsolutno neprekidna u odnosu na $\mu$. Dokažite da je mjera $\nu$ singularna s $\mu$ ako i samo ako je $f = 0$ ($\mu$-s.s.).*

---

**Rješenje.** Po definiciji 7.10. vrijedi da je $\nu \perp \mu$ ako i samo ako postoji $A \in \Sigma$ takav da je $A$ nul-skup za $\nu$, a $A^c$ nul-skup za $\mu$, tj. $\nu(A) = \mu(A^c) = 0$. Sada iz propozicije 4.10. slijedi da prethodna tvrdnja vrijedi ako i samo ako je $f = 0$ ($\mu$-s.s.) na $A$ i $\mu(A^c) = 0$, tj. ako i samo ako je $f = 0$ ($\mu$-s.s.) na $X$.

**7.7. Zadatak**

*Neka je $(X, \Sigma, \mu)$ prostor mjere takav da $\mu$ nije $\sigma$-konačna mjera. Pokažite da tvrdnja Radon–Nikodymovog teorema ne mora vrijediti ukoliko mjera $\mu$ nije $\sigma$-konačna.*

---

**Rješenje.** Neka je $X = [0, 1]$, a za $\sigma$-algebru $\Sigma$ uzmimo familiju svih Lebesgueovih skupova iz $[0, 1]$. Nadalje, neka $\nu$ bude Lebesgueova mjera $\lambda$, a $\mu$ mjera prebrojavanja, koja nije $\sigma$-konačna. Tada je $\nu$ konačna mjera koja je ujedno i apsolutno neprekidna u odnosu na $\mu$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji $\Sigma$-izmjeriva funkcija $f : X \to [0, \infty]$, takva da je $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ za svaki $E \in \Sigma$. Specijalno, tada bi vrijedilo

$$1 = \nu(X) = \int_X f\,d\mu. \tag{$\star$}$$

Ako pokažemo da je $f$ nul-funkcija, dobit ćemo kontradikciju sa ($\star$), pa će u tom slučaju dokaz biti potpun. Dakle, preostaje pokazati da je $f$ nul-funkcija ili, ekvivalentno, da je

$$E_0 := \{x \in X : f(x) \neq 0\} = \emptyset.$$

Kako je $\nu$ konačna mjera, iz

$$\nu(X) = \int_X f\,d\mu < \infty$$

slijedi da je $f$ integrabilna po mjeri $\mu$. Zbog toga je skup $E_0$ $\sigma$-konačan s obzirom na mjeru prebrojavanja $\mu$ (vidi propoziciju 4.20.), odakle lako slijedi da je $E_0$ najviše prebrojiv skup i zato je $\nu(E_0) = 0$. Nadalje, kako je

$$0 = \nu(E_0) = \int_{E_0} f\,d\mu = \int f\chi_{E_0}\,d\mu,$$

iz tvrdnje (a) propozicije 4.10. slijedi da je $f\chi_{E_0} = 0$ ($\mu$-s.s.), tj. skup $\{x \in E_0 : f(x) \neq 0\}$ je $\mu$-zanemariv, a kako je $\mu$ mjera prebrojavanja, to znači da je $E_0 = \emptyset$.

7.8. Zadatak

*Neka su $\delta_x$, Diracova delta mjera koncentrirana u točki $x$, i $\lambda$, Lebesgueova mjera, mjere na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pokažite da je $\delta_x \perp \lambda$.*

---

**Rješenje.** Odabirom izmjerivog skupa $A = \mathbb{R}\backslash\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ dobivamo da je $\delta_x(A) = 0$ i $\lambda(A^c) = \lambda(\{x\}) = 0$, pa prema primjedbi 7.11. vrijedi $\delta_x \perp \lambda$.

7.9. Zadatak

*Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeriv prostor, $\lambda_1$ Lebesgueova mjera na $[0,2] \subseteq \mathbb{R}$, tj. $\lambda_1 := \chi_{[0,2]}\lambda$, a $\lambda_2$ Lebesgueova mjera na $[1,3] \subseteq \mathbb{R}$, tj. $\lambda_2 := \chi_{[1,3]}\lambda$. Nađite Lebesgueovu dekompoziciju mjere $\lambda_2$ u odnosu na mjeru $\lambda_1$.*

---

**Rješenje.** Uočimo da je

$$\lambda_2 = \chi_{[1,2]}\lambda_2 + \chi_{(2,3]}\lambda_2 = \chi_{[1,2]}\lambda + \chi_{(2,3]}\lambda$$

te vrijedi $\chi_{[1,2]}\lambda_2 \ll \lambda_1$ i $\chi_{(2,3]}\lambda_2 \perp \lambda_1$. Dakle, $\chi_{[1,2]}\lambda_2$ predstavlja apsolutno neprekidni dio, a $\chi_{(2,3]}\lambda_2$ singularni dio mjere $\lambda_2$ u odnosu na mjeru $\lambda_1$.

7.10. Zadatak

*Neka je $\nu$ mjera s predznakom, a $\mu$ mjera na izmjerivom prostoru $(X, \Sigma)$. Ako je $\nu = \nu_a + \nu_s$ Lebesgueova dekompozicija mjere $\nu$ u odnosu na mjeru $\mu$, dokažite da je tada*

$$|\nu|(A) = |\nu_a|(A) + |\nu_s|(A)$$

*za svaki izmjeriv skup $A \in \Sigma$.*

---

**Rješenje.** Neka je $A \in \Sigma$ izmjeriv skup takav da je on nul–skup za mjeru $\nu_a$, a $A^c$ nul–skup za $\nu_s$. Podsjetimo se da je u zadatku 2.3. dokazano da ako je $\Sigma$ $\sigma$-algebra na skupu $X$, onda je

$$\Sigma_A := \{A \cap B : B \in \Sigma\}$$

$\sigma$-algebra na skupu $A \in \Sigma$. Postoji Hahnova dekompozicija prostora $A$ za mjeru $\nu_s$, $A = P_1 \cup N_1$ i Hahnova dekompozicija prostora $A^c$ za mjeru $\nu_a$, $A^c = P_2 \cup N_2$. Nadalje, neka je $P = P_1 \cup P_2$ i $N = N_1 \cup N_2$. Za proizvoljan skup $B \in \Sigma$, zbog $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, slijedi

$$\nu(B \cap P) = \nu(B \cap P_1) + \nu(B \cap P_2) = \nu_s(B \cap P_1) + \nu_a(B \cap P_2) \geq 0,$$
$$\nu(B \cap N) = \nu(B \cap N_1) + \nu(B \cap N_2) = \nu_s(B \cap N_1) + \nu_a(B \cap N_2) \leq 0.$$

Dakle, par $(P, N)$ je Hahnova dekompozicija prostora $X$ za mjeru $\nu$, a također i Hahnova dekompozicija za mjere $\nu_a$ i $\nu_s$. Iz prethodnog razmatranja dobivamo

$$\begin{aligned}
|\nu|(B) &= \nu(B \cap P) - \nu(B \cap N) \\
&= \nu_s(B \cap P) - \nu_s(B \cap N) + \nu_a(B \cap P) - \nu_a(B \cap N) \\
&= |\nu_s|(B) + |\nu_a|(B).
\end{aligned}$$

# Literatura


[1] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Problems in Real Analysis*, Academic Press, San Diego, 1999.

[2] N. Antonić, M. Vrdoljak, *Mjera i integral*, Prirodoslovno–matematički fakultet - Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2001.

[3] M. Capiński, E. Kopp, *Measure, Integral and Probability*, Springer–Verlag, London, 2005.

[4] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[5] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[6] B. K. Driver, *Analysis Tools with Examples*,
`http://math.ucsd.edu/ driver/DRIVER/book.htm.`

[7] G. M. Fikhtengol'ts, *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya II*, Nauka, Moskva, 1969.

[8] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer–Verlag, New York, 1974.

[9] K. Horvatić, *Linearna algebra, 1. dio*, Zagreb, 1999.

[10] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[11] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[12] S. Mardešić, *Matematička analiza u $n$-dimenzionalnom realnom prostoru, I dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[13] N. Okičić, *Teorija skupova*, Tuzla, 2008.

[14] M. Papadimitrakis, *Notes on Measure Theory*, Department of Mathematics, University of Crete, 2004.

[15] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[16] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[17] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[18] S. J. Taylor, *Introduction to Measure and Integration*, Cambridge University Press, New York, 2008.

[19] T. Traynor, *Real Analysis, part I, Basic Measure and Integration*, 2003.

[20] Š. Ungar., *Matematička analiza 3*,
http://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/Analiza3_internet.pdf

[21] Š. Ungar., *Matematička analiza 4*,
http://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza4.pdf

[22] E. M. Vestrup, *The Theory of Measures and Integration*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

[23] J. Yeh, *Real Analysis, Theory of Measure and Integration*, 2nd Edition, University of California, Irvine, 2006.

[24] *Stranica kolegija Mjera i integral na Matematičkom odjelu PMF–a u Zagrebu*,
http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii

# Indeks

**Dragana Jankov Maširević** rođena je 5. siječnja 1985. godine u Vukovaru. Sveučilišni dodiplomski studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku započela je 2003. i završila 2007. godine, stekavši stručno zvanje profesora matematike i informatike. Iste je godine upisala i sveučilišni poslijediplomski doktorski studij iz područja prirodnih znanosti, polje matematika, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, na kojem je 22. studenog 2011. godine obranila doktorski rad (disertaciju) pod naslovom *Integral expressions for series of functions of hypergeometric and Bessel types*. Voditelj rada bio je prof. dr. sc. Tibor Poganj, redoviti profesor Pomorskog fakulteta Sveučilišta u Rijeci. Kao studentica dodiplomskog studija, 2006. godine dobila je Rektorovu nagradu za seminarski rad *Ortogonalni operatori u ravnini i prostoru.*

Od 2007. godine zaposlena je na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, najprije u suradničkom zvanju asistentice (od 2007. do 2011. godine), potom i više asistentice (od 2011. do 2013. godine) te docentice (od 2013. godine do danas). Uz to, aktivno sudjeluje u realizaciji dvaju znanstvenih projekata financiranih od strane Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku te Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske. Područja znanstvenog interesa i rada D. Jankov Maširević su specijalne funkcije, s naglaskom na Neumannove, Kapteynove i Schlömilchove funkcijske redove, kao i njihove integralne reprezentacije.

Dosad je objavila dvadeset radova u znanstvenim i stručnim časopisima i zbornicima s međunarodnih konferencija.

Od 2012. godine referent je za matematički referativni časopis *Mathematical Reviews.*