# Zanimljive rekurzije

Dragana Jankov Maširević* i Jelena Jankov†

## 1 Riječ dvije o rekurzijama

Rekurzija je metoda definiranja funkcije na način da se najprije definira nekoliko jednostavnih, osnovnih slučajeva, koje zatim koristimo za definiranje složenijih. Preciznije, rekurzije, odnosno rekurzivne relacije su formule kod kojih se $n$–ti član nekog niza $a_n$ može izraziti pomoću nekoliko prethodnih članova $a_k$, $k < n$.

Rekurzije susrećemo svakodnevno, kako u matematici, tako i u programiranju. Naime, čak i u skupu prirodnih brojeva, koji dobro poznajemo još od prvog razreda osnovne škole, možemo uočiti rekurziju: prvi član je 1, a svaki sljedeći dobijemo tako da prethodni uvećamo za 1.

Jednostavan primjer rekurzije je i niz $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. Uočimo da je prvi član niza $a_1 = 1$, te da svaki sljedeći možemo dobiti tako da prethodni pomnožimo s dva, tj. $a_{n+1} = 2a_n$, za sve $n \geq 1$. U sljedećem će poglavlju biti opisan jedan od najpoznatijih rekurzivnih problema, Fibonaccijev problem, koji možemo zapisati na sličan način. Zatim ćemo navesti i opisati problem Hanojskih tornjeva, Catalanove brojeve, te nekoliko zanimljivih rekurzija vezanih uz njih, kao i Collatzovu pretpostavku koja u sebi krije jednu interesantnu rekurziju.

## 2 Fibonaccijevi brojevi

Leonardo od Pise, poznatiji kao Fibonacci, postavio je 1202. godine problem zečeva. Pretpostavke problema bile su da na početku godine imamo jedan novorođeni par zečeva (zeca i zečicu), da su zečevi dovoljno stari za oplodnju nakon jednog mjeseca, da dobivaju par mladih zečeva svaki mjesec, te da zečevi ne ugibaju. Zanimalo ga je koliko ćemo zečeva imati nakon $n$ mjeseci. Pokušajmo izračunati ovaj problem *na prste*.

Ako smo na početku godine imali jedan par zečeva, nakon jednog mjeseca i dalje ćemo imati samo taj par, budući da zečevi tek tada postaju zreli za oplodnju. Nakon dva mjeseca imat ćemo početni par zečeva i njihove potomke, zeca i zečicu. Nakon tri mjeseca imamo tri para zečeva –početni par i dva para njihovih potomaka... Kada bi ovakvim postupkom htjeli izračunati broj zečeva nakon nekoliko godina, računanje bi moglo trajati satima.

*docent na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail djankov@mathos.hr

†student na Odjelu za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, e-mail jjankov@mathos.hr

Problem se može znatno olakšati korištenjem rekurzije.
Označimo s $F_n$ broj parova zečeva nakon $n$ mjeseci. Prema prethodno izračunatom, $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$. Kako bi dobili $F_n$, treba zbrojiti sve parove koji su živjeli prethodni mjesec i potomke parova starih barem dva mjeseca. Slijedi da je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, za sve $n \geq 2$. Ponekad se u literaturi, zbog jednostavnosti računa, uzima da je $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Broj zečeva nakon $n$ mjeseci naziva se još i $n$-ti Fibonaccijev broj. Sljedeći teorem govori o tome kako se još može izračunati $n$-ti Fibonaccijev broj:

**Teorem 1.** *$n$–ti Fibonaccijev broj $F_n$ je jednak:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

**Dokaz.** (vidi [7, str. 178, Teorem 2.]) Ideja dokaza je da se rješenje rekurzivne formule $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, dobije uz pomoć supstitucije $F_n = q^n$, $q \neq 0$. Uvrštavanjem dobivamo

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2},\ \text{odnosno}\ q^{n-2}(q^2 - q - 1) = 0,\ n \geq 2\,.$$

Dakle, $F_n = q^n$ je rješenje Fibonaccijeve rekurzivne formule ako i samo ako je $q^2 - q - 1 = 0$, iz čega slijedi da je

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Nadalje, možemo zaključiti da su $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ i $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ rješenja Fibonaccijeve rekurzivne formule. No, općenito, ako su $F$ i $G$ rješenja takve linearne (nema potencija od $F$ različitih od prve) i homogene (nema konstantnih članova) rekurzivne relacije, onda je i njihova linearna kombinacija

$$H = \lambda F + \mu G,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

također rješenje. Zaista, budući da je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, tada množenjem prve relacije s $\lambda$, a druge s $\mu$ zbrajanjem dobivamo navedenu tvrdnju. Dakle i

$$F_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

je rješenje. Početne vrijednosti za Fibonaccijeve brojeve su $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ pa vrijedi da je $\lambda + \mu = 0$ (za $n = 0$) i $\lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$ (za $n = 1$), iz čega dobivamo $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, čime je tvrdnja dokazana. □

Fibonaccijevi brojevi mogu se povezati s mnogim drugim pojmovima u matematici. Pokazano je da vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}},$$

te se ovakvi razlomci nazivaju neprekidni ili verižni razlomci. Na primjer, vrijedi da je

$$\frac{F_2}{F_1} = 2 = 1 + \frac{1}{1}$$
$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1+1}$$
$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} \; \ldots .$$

Fibonaccijevi brojevi mogu se dobiti i iz Pascalovog trokuta za binomne koeficijente, koji se često zapisuje u sljedećem obliku:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 & & & \ldots
\end{array}$$

Ako ga napišemo na način da su svi elementi poravnati s desne strane, zbrajanjem elemenata na njegovim dijagonalama dobivamo Fibonaccijeve brojeve:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & 2 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & 3 \\
 & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & 5 \\
 & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & 8 \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & 13 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 & & 21 \\
 & & & \ldots
\end{array}$$

Fibonaccijevi brojevi pojavljuju se i u brojnim nematematičkim problemima. Pogledajmo neke od njih.

*Primjer* 1. Zanima nas na koliko se načina možemo popeti uz $n$ stepenica tako da prekoračujemo po jednu ili dvije stepenice. Označimo sa $S_n$ broj načina na koji se možemo popeti uz $n$ stepenica. Primjetimo da je $S_0 = 0$, jer se uz nula stepenica možemo popeti na nula načina, te da je $S_1 = 1$.
Načini se mogu podijeliti u dvije skupine: na one koji počinju prekoračenjem jedne stepenice i one koji počinju prekoračenjem dvije stepenice. Prvih načina je $S_{n-1}$, a drugih

$S_{n-2}$, te je $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$, za sve $n \geq 2$. Vidimo da je ovaj niz zapravo jednak Fibonaccijevom nizu.

*Primjer* 2. Organiziramo zabavu na koju dolaze odrasli i djeca, te želimo poslagati stolice u red tako da dva djeteta ne sjede jedno pored drugog. Zanima nas na koliko načina to možemo napraviti. To ovisi o broju stolica u redu. Ukoliko imamo jednu stolicu, na nju može sjesti ili dijete ili odrasla osoba, dakle postoje dva načina. Označimo bijelim kvadratićem stolicu na kojoj će sjediti dijete, a crnim onu na kojoj će sjediti odrasla osoba. Ako imamo dvije stolice, mogući su sljedeći rasporedi stolica u redu: □■, ■□ ili ■■, dok za tri stolice imamo □■□, □■■, ■□■, ■■□ ili ■■■. Primjetimo da ukoliko poslažemo $4, 5, 6, \ldots$ stolica u red, mogući broj načina na koji uz zadane pretpostavke na njih mogu sjesti djeca i odrasli je $8, 13, 21, \ldots$. Dakle, rješenja su redom Fibonaccijevi brojevi.

## 3 Hanojski tornjevi

Ovu je zanimljivu rekurziju prvi zapisao francuski matematičar Francois Edouard Anatole Lucas 1883. godine. Ona potiče od legende koja kaže da je indijski bog Brahma prilikom stvaranja svijeta u svoj hram postavio tri dijamantna štapa, te je na prvi stavio 64 zlatna koluta različitog promjera, tako da ih je poslagao od najvećeg prema najmanjem, a zatim je od svećenika svoga hrama zahtjevao da bez prestanka prebacuju kolutove s prvog štapa na treći, upotrebljavajući srednji štap kao pomoćni. Svećenici su prilikom prebacivanja trebali poštivati određena pravila koja su se sastojala u tome da se odjednom može premjestiti samo jedan kolut, te se ne smije stavljati veći kolut na manji. Legenda također kaže da će, kada budu prebačeni svi kolutovi na treći štap, nastupiti kraj svijeta. Pitanje je koliki je minimalni broj premještanja kolutova s prvog štapa na treći. To se može lako pokazati metodom matematičke indukcije. Najprije, označimo s $N_n$ broj premještanja, ukoliko je dano $n$ kolutova. Ako imamo samo jedan kolut, jasno je da imamo samo jedno premještanje, tj. $N_1 = 1$. Pretpostavimo da je za premještanje $n-1$ kolutova potrebno $N_{n-1}$ prijenosa. Ukoliko dodamo još jedan kolut, njega najprije možemo staviti na drugi štap, te sada imamo $N_{n-1}+1$ prijenos. Sada moramo, poštivajući tražene zahtjeve prijenosa $n-1$ kolutova s trećeg štapa prenijeti na drugi, što možemo učiniti koristeći prvi štap kao pomoćni, te je

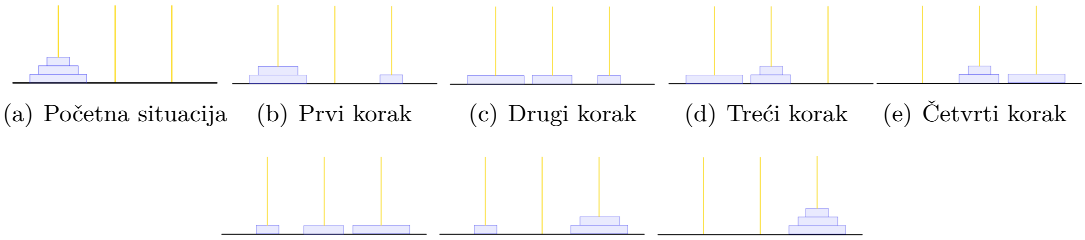
$$N_n = (N_{n-1} + 1) + N_{n-1} = 2N_{n-1} + 1\,.$$

Sada je

$$\begin{aligned} N_n &= 2N_{n-1} + 1 = 2(2N_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 N_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2N_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 N_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 = \cdots \\ &= 2^n N_0 + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{n-1} + \cdots + 1 = 2^n - 1\,, \end{aligned}$$

što se može lako pokazati metodom matematičke indukcije po $n \in \mathbb{N}$.

Dakle, vidimo da je za prebacivanje 64 koluta potrebno najmanje $2^{64} - 1$ tj. 18 446 744 073 709 551 615 prijenosa. Na Slici 1 prikazano je rješenje problema u slučaju kada su dana tri koluta, a koje se sastoji od $2^3 - 1 = 7$ koraka.



(a) Početna situacija (b) Prvi korak (c) Drugi korak (d) Treći korak (e) Četvrti korak

(f) Peti korak (g) Šesti korak (h) Sedmi korak

Slika 1: Rješenje problema Hanojskih tornjeva s tri koluta

# 4 Catalanovi brojevi

Catalanovi se brojevi prvi put spominju 1751. godine u pismu Leonarda Eulera matematičaru Christianu Goldbachu, u kome je Euler predložio način na koji se lako može odrediti broj triangulacija konveksnog $n$–terokuta, odnosno $n$–terokuta kojemu je svaki od kutova manji od 180°, ali nije uspio dokazati da je njegova metoda točna. Nešto kasnije, o istom je problemu Euler pisao Johannu Andreasu von Segneru, koji je također riješio problem triangulacije konveksnog $n$–terokuta, ali na nešto drugačiji način. Kasnih 1830–ih godina, Joseph Liouville je objavio Eulerovu metodu za koju je tražio dokaz. Javljali su mu se matematičari diljem svijeta, no belgijski je matematičar Eugen Charles Catalan prvi dao točan dokaz problema, te po njemu ovi brojevi i danas nose ime. Catalanovi se brojevi mogu izračunati pomoću sljedeće formule

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}\,, n \geq 0\,,$$

a također su zadani rekurzivnom relacijom

$$C_0 = 1,\ C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1},\ n \geq 1\,.$$

U Tablici 1 navedeno je prvih jedanaest Catalanovih brojeva.

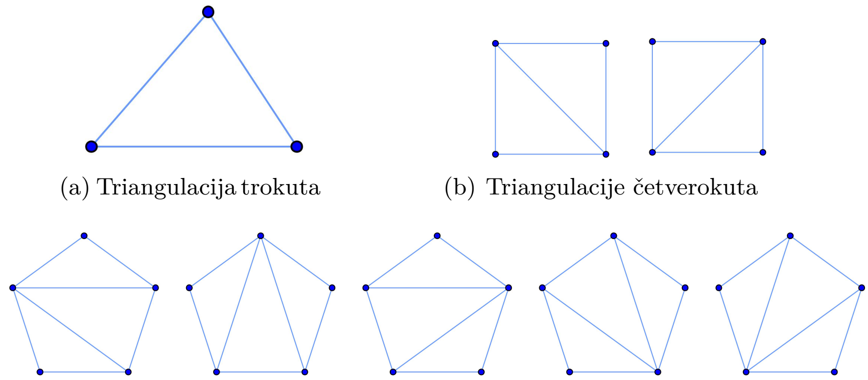
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1 430 | 4 862 | 16 796 |

Tablica 1: Prvih jedanaest Catalanovih brojeva

U nastavku ćemo, pored problema triangulacije konveksnog $n$–terokuta, opisati još nekoliko zanimljivih problema koji kao rješenje imaju Catalanove brojeve, dok ih se u knjizi [2] može pronaći čak 95.

## 4.1 Problem triangulacije konveksnog $n$–terokuta

Ovaj se problem sastoji se u određivanju broja $T_n$ svih mogućih načina na koje se konveksni $n$–terokut može podijeliti na $n-2$ trokuta. Pri tome zahtjevamo da se dva trokuta iz te triangulacije ili uopće ne sijeku ili da se sijeku u jednom (zajedničkom) vrhu ili da se sijeku duž (zajedničkog) brida. Takve triangulacije nazivaju se dijagonalnim, jer se koriste samo unutarnje dijagonale $n$–terokuta koje se ne sijeku u njegovoj unutrašnjosti. Općenito se definira $T_2 = 1$, jer dužinu nije moguće triangulirati. Za $n = 3$ imamo trokut koji je već trianguliran, pa je jasno $T_3 = 1$ (vidi Sliku 2 (a)). Na Slici 2 (b) i (c) vidimo da je konveksni četverokut moguće triangulirati na dva načina, jer je za triangulaciju potrebno povući samo jednu dijagonalu, te je $T_4 = 2$, dok je konveksni peterokut moguće triangulirati na $T_5 = 5$ različitih načina. Nastavimo li dalje s promatranjem konveksnih $n$–terokuta za $n = 6, 7, 8 \ldots$ možemo uočiti da je $T_n = C_{n-2}$ za sve $n \geq 2$, što se također može i dokazati metodom matematičke indukcije.



(a) Triangulacija trokuta

(b) Triangulacije četverokuta

(c) Triangulacije peterokuta

Slika 2: Rješenje problema triangulacije nekih konveksnih $n$–terokuta

## 4.2 Problem zagrada

Pretpostavimo da imamo $n$ parova zagrada ( ). Problem zagrada sastoji se u određivanju broja načina na koji možemo na *ispravan način* poredati $n$ zadanih parova zagrada, što znači da svakoj prethodno otvorenoj zagradi pridružimo odgovarajuću zatvorenu zagradu. Intuitivno možemo pretpostaviti da u slučaju $n = 0$ imamo samo jednu mogućnost. U Tablici 2 prikazani su svi mogući načini na koje možemo ispravno poredati zadane parove zagrada u slučaju kada je $n = 1, 2, 3$, te možemo uočiti da su oni jednaki odgovarajućim Catalanovim brojevima $C_1, C_2, C_3$.

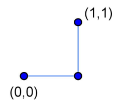
| | | |
|---|---|---|
| $n = 1$ | ( ) | Jedan način |
| $n = 2$ | ( )( ), (( )) | Dva načina |
| $n = 3$ | ( )( )( ), ( )(( )), (( ))( ), (( )( )), ((( ))) | Pet načina |

Tablica 2: Rješenje problema zagrada za $n = 1, 2, 3$

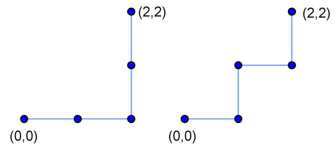
Ukoliko pokušamo riješiti problem za $n = 4, 5, \ldots$ dobit ćemo redom odgovarajuće Catalanove brojeve $C_4, C_5, \ldots$. Dokaz da je rješenje problema zagrada upravo odgovarajući Catalanov broj može se pronaći u [6].

### 4.3 Putovi u cjelobrojnoj mreži

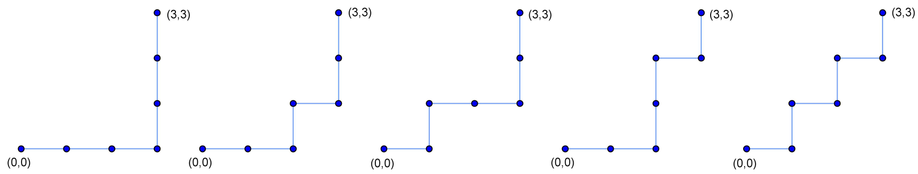
Problem putova u cjelobrojnoj mreži, za zadani prirodni broj $n$, sastoji se od određivanja svih mogućih najkraćih putova u Kartezijevom koordinatnom sustavu koji polaze od ishodišta $(0,0)$ a završavaju u točki $(n,n)$. Uvjet pri odabiru putova je da oni prolaze samo kroz cjelobrojne točke, nikada ne prijeđu iznad pravca $x = y$, odnosno ne prelaze dijagonalu zadane mreže i da smo u svakom sljedećem koraku bliži krajnjoj točki, pa su stoga dozvoljeni samo pomaci gore ili desno po zadanoj mreži. Ako je $n = 0$, jasno je da imamo samo jedan mogući put. Na Slici 3 prikazani su svi mogući putovi u slučaju kada je $n = 1, 2, 3$, te možemo uočiti da je broj putova u svakom pojedinom slučaju jednak odgovarajućem Catalanovom broju. Ovaj se problem može lako povezati s problemom za-




(a) $n = 1$




(b) $n = 2$

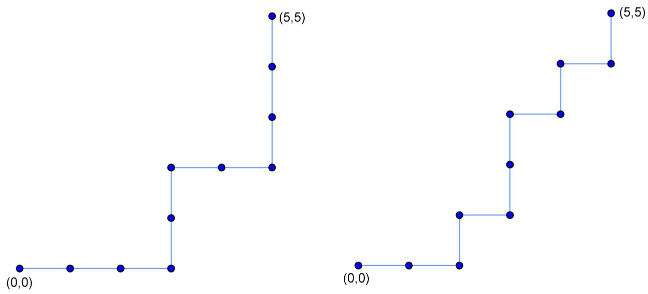



(c) $n = 3$

Slika 3: Rješenje problema putova za dani $n$

grada i to tako da svaku otvorenu zagradu zamjenimo s odmakom od dijagonale, u desno, a svaku zatvorenu zagradu, pomakom gore, prema dijagonali.

*Primjer* 3. Za zadane probleme putova u cjelobrojnoj mreži, na Slici 4 (a) i (b) napravite odgovarajući problem zagrada.




(a) (b)

Slika 4: Primjeri putova za $n = 5$

**Rješenje.** Pomoću problema zagrada zadani se problem može zapisati na sljedeći način:

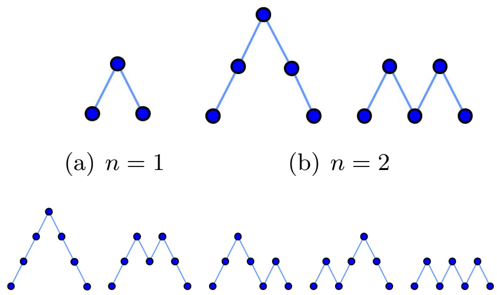
(a) $((())(()))$

(b) $(()())()()$.

Isto tako, problem zagrada lako možemo prevesti na problem putova u cjelobrojnoj mreži.

## 4.4 Dyckovi planinski putovi

Problem Dyckovih planinskih putova sastoji se u pronalaženju svih mogućih konfiguracija planinskih lanaca koji imaju točno $n$ uspona i $n$ padova, uz pretpostavku da se oni uvijek nalaze iznad početne razine lanca. Ako je $n = 0$, očito je moguća samo jedna konfiguracija. Na Slici 5 možemo vidjeti da u slučaju $n = 1$ također postoji samo jedna konfiguracija, dok je za $n = 2$ moguće napraviti dvije, odnosno za $n = 3$ pet različitih planinskih konfiguracija.



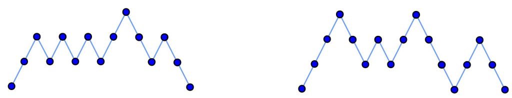
(a) $n = 1$ (b) $n = 2$

(c) $n = 3$

Slika 5: Rješenje Dyckovih planinskih putova za $n = 1, 2, 3$

Problem Dyckovih planinskih putova možemo povezati s već opisanim problemom zagrada i to tako da svaku otvorenu zagradu zamjenimo usponom, a zatvorenu padom.

*Primjer* 4. Za zadane probleme Dyckovih planinskih putova, na Slici 6 (a) i (b) napravite odgovarajući problem zagrada.



(a) (b)

Slika 6: Primjeri Dyckovih planinskih putova

**Rješenje.** Zadani problem možemo zapisati pomoću problema zagrada na sljedeći način:

(a) $(()()()(())())$

(b) $((())()(()))(())$.

Također, problem zagrada na isti način možemo zapisati u obliku odgovarajućeg problema Dyckovih planinskih putova.

# 5 Collatzova pretpostavka

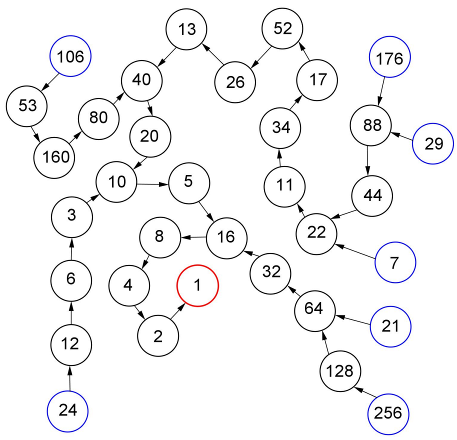
Collatzova pretpostavka, koja se još naziva i Collatzova slutnja, $3n+1$ problem, Ulamova pretpostavka, Kakutanijev problem itd. je dobro poznat otvoreni problem, koji je 1937. godine postavio njemački matematičar Lothar Collatz.

Ova pretpostavka glasi: *Odaberimo proizvoljan prirodan broj: ako je on paran, podijelimo ga s* 2*, a ako je neparan, pomnožimo ga s* 3 *i zatim uvećamo za* 1*. Koristeći ovaj postupak, rekurzivno, nakon konačno mnogo koraka dobit ćemo broj* 1*.*
Matematički ovo možemo zapisati na sljedeći način: za zadani prirodni broj $a_n \neq 1$, naredni se izračunava na sljedeći način:

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n + 1, & \text{ako je } a_n \text{ neparan,} \\ \dfrac{a_n}{2}, & \text{ako je } a_n \text{ paran.} \end{cases}$$

Mnogi su matematičari pokušavali dokazati da je ova pretpostavka točna ili naći kontraprimjer da ona ne vrijedi, dok je mađarski matematičar Paul Erdös rekao da *Matematika još nije spremna za ovakve probleme.*

Na Slici 7 možemo vidjeti rješenje Collaztove pretpostavke u slučaju da je zadan polazni broj 7, 21, 24, 29, 106, 176 ili 256.




Slika 7: Primjeri rješavanja Collatzove pretpostavke

# Literatura

[1] J. Fürlinger, J. Hofbauer, *q–Catalan Numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 40, 248–264, 1985.

[2] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] E. Lehtonen, *Two undecidable variants of Collatz's problems*, Theoretical Computer Science 407, 596.–600., 2008.

[4] J. Lodder, *Gabriel Lamé's Counting of Triangulations*, Loci, 2013., DOI:10.4169/loci003996.

[5] A. A. K. Majumdar, *Generalized multi–peg Tower of Hanoi problem*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 38, 201.–208., 1996.

[6] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[7] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Web:

- Hrvoje Čavrak, Catalanovi brojevi, Hrvatski matematički elektronski časopis, no. 7, veljača 2006.
  http://e.math.hr/old/catalan/index.html

- T. Davis, Catalan Numbers, 2006.
  http://www.geometer.org/mathcircles

- Zvonimir Šikić, Fibonaccijev niz, 2004.
  http://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS_fibonaccijev_niz.pdf