Osječki matematički list 15 (2015), 113-129

Modeliranje rizika u osiguranju

Danijel Grahovac*, Ana Leko†

Sažetak

Osiguravajuća društva moraju planirati svoje poslovanje tako da u svakom trenutku imaju dovoljno sredstava za isplatu dospjelih šteta. Kako je iznose šteta i vrijeme njihovog nastanka nemoguće predvidjeti sa sigurnošću, prirodno je modelirati rizik osiguravatelja stohastičkim modelima. U ovom radu predstavljene su osnovne činjenice vezane uz jedan od takvih modela – Cramér-Lundbergov model. Uporaba modela ilustrirana je na stvarnim podacima o dospjelim štetama jednog osiguravajućeg društva. Posebna pozornost posvećena je prilagodbi modela podacima, procjeni parametara i opisu distribucije iznosa šteta. Pokazuje se da se iznosi šteta mogu dobro modelirati Paretovom distribucijom što direktno utječe na procjenu rizika osiguravatelja.

Ključne riječi: *rizik osiguravatelja, Cramér-Lundbergov model, proces rizika, Paretova distribucija*

Insurance risk modelling

Abstract

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: dgrahova@mathos.hr

†Farmeron d.o.o., Osijek, email: ana.leko@farmeron.com, diplomirana studentica Odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Insurance companies have to plan their business so that at any time they have enough capital to pay off the arriving claims. As the claim amounts and the time of their occurrence are impossible to predict with certainty, it is natural to model the insurer's risk by means of stochastic models. In this paper, the basic facts are presented referring to one such model – the Cramér-Lundberg model. The usage of the model is illustrated on real claims data of one insurance company. Special attention is given to fitting the model to the data, estimating the parameters and describing the distribution of the claim amounts. It is shown that the claims can be modelled on the Pareto distribution which directly affects the estimation of the insurer's risk.

Keywords: *insurance risk, Cramér–Lundberg model, risk process, Pareto distribution*

1 Uvod

Jedno od osnovnih pitanja za svako osiguravajuće društvo jest kako odrediti visine premija koje osiguranici trebaju plaćati kako bi u budućnosti društvo moglo isplatiti sve zahtjeve za naknadu štete. Teorija rizika u aktuarstvu koristi matematičke modele kako bi opisala izloženost osiguravajućih društava gubitku i insolventnosti do kojih dolazi ako osiguravatelj nema dovoljno sredstava za naknadu šteta. U okviru matematike neživotnog osiguranja, teorija rizika bavi se modeliranjem i izračunom šteta i rizika, njihove distribucije, vremenske dinamike, ukupne sume, kao i vjerojatnosti propasti odnosno gubitka u portfelju polica osiguranja. Pod portfeljom polica smatramo police osiguranja istog tipa koje uključuju slične rizike.

Mnogi oblici neživotnog osiguranja, primjerice osiguranje motornih vozila, osiguranje nekretnina, osiguranje u slučaju požara itd., mogu se smatrati kratkoročnim ugovorima. Kod kratkoročnih osiguravateljnih ugovora police traju fiksno i relativno kratko vremensko razdoblje, tipično jednu godinu. Osiguravajuće društvo prima od osiguranika premiju, a za uzvrat osiguravatelj isplaćuje štete nastale po polici za vrijeme trajanja police.

Rizik osiguravatelja proizlazi iz činjenice da su vremena dolazaka šteta na naplatu kao i njihovi iznosi osiguravatelju nepoznati i ne mogu se predvidjeti sa sigurnošću. Iz tog razloga višak (kapital) osiguravatelja u svakom budućem trenutku $t > 0$ je slučajna varijabla U_t (za definiciju slučajne varijable i osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti pogledati npr. [2] ili [10]). U trenutku $t = 0$ osiguravatelj raspolaže s početnim kapitalom u za koje pretpostavljamo da je pozitivan ($u > 0$) i nazivamo ga *početni višak*. Prema svojstvima osiguravateljnog ugovora jasno je kako će vrijednost osiguravateljevog viška u budućem vremenu t biti jednaka početnom višku uvećanom za premije koje su uplaćene od strane osiguranika do trenutka t te umanjenom za iznose svih nastalih šteta koje je osiguravajuće društvo isplatilo svojim osiguranicima do trenutka t. Stoga višak osiguravatelja možemo shvatiti kao slučajni proces $\{U_t,\, t \geq 0\}$ definiran s

$$U_t = u + p(t) - S_t, \quad t \geq 0,$$

gdje je p funkcija koja modelira *prihod od premija* i $\{S_t,\, t \geq 0\}$ je slučajni proces takav da je S_t *ukupna vrijednost šteta* u vremenskom intervalu $[0, t]$.

Radi jednostavnosti, prihod od premija obično se smatra determinističkim i pretpostavlja da se premije naplaćuju po konstantnoj stopi $c > 0$, tako da je u intervalu $[0, t]$ na ime premija naplaćeno ukupno ct, odnosno

$$p(t) = ct, \quad t \geq 0.$$

Zanemarujući inflaciju i druge dinamičke promjene u portfelju, ukupna vrijednost šteta u vremenskom intervalu $[0, t]$ može se zapisati kao

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0,$$

pri čemu je $(X_i,\, i \in \mathbb{N})$ niz nenegativnih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F kojima modeliramo iznose pristiglih šteta, a $\{N_t,\, t \geq 0\}$ je slučajni proces takav da N_t modelira broj šteta pristiglih do trenutka t. Proces $\{N_t,\, t \geq 0\}$ obično se naziva *brojeći proces šteta*. Dakle, proces viška prihoda $\{U_t,\, t \geq 0\}$, kojeg još nazivamo i *proces rizika*, ima oblik

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Ukoliko bismo poznavali distribuciju procesa $\{U_t,\, t \geq 0\}$, mogli bismo reći nešto o riziku poslovanja osiguravatelja. Primjerice, mogli bismo izračunati vjerojatnost da vrijednost procesa rizika u nekom trenutku padne ispod 0 čime bi osiguravajuće društvo postalo insolventno. Naravno, distribucija procesa rizika nepoznata je u praktičnim situacijama te je potrebno prilagoditi model na osnovu dostupnih povijesnih podataka. Kako bismo poznavali distribuciju slučajne varijable U_t očito je kako moramo poznavati iznos početnog viška, na adekvatan način procijeniti konstantnu stopu uplata premija c te moramo poznavati ili na adekvatan način pretpostaviti distribucije slučajnih varijabli N_t i X_i.

S obzirom na različite pretpostavke o distribuciji i strukturi zavisnosti veličina uključenih u (1), možemo dobiti različite modele procesa rizika. U nastavku ćemo razmatrati Cramér-Lunbergov model, koji je jedan od jednostavnijih takvih modela, ali ipak dovoljno prilagodljiv i važan u primjenama. Pregled osnovnih svojstava i pitanja vezanih uz model bit će napravljen u odjeljku 2. U odjeljku 3 promatramo praktičan primjer na podacima portfelja polica osiguranja strojeva od loma. Procijenjeni su parametri modela te je ilustrirana primjena dobivenog modela. Na kraju, u odjeljku 4 diskutiraju se različiti alternativni modeli.

2 Cramér-Lundbergov model

1903. godine švedski aktuar Filip Lundberg postavio je temelje moderne teorije rizika. Jedan od Lundbergovih glavnih doprinosa je jednostavni model kojim je moguće opisati dinamičnost homogenog osiguravateljskog portfelja, pri čemu mislimo na portfelj ugovora, odnosno portfelj polica osiguranja za slične rizike. Lundbergov rad bio je daleko ispred svog vremena budući da su temelji teorije slučajnih procesa formirani tek 30-ak godina kasnije ([3]). Tada je Lundbergove ideje usavršio njegov sunarodnjak Harald Cramér te je po njima nazvan prvi model procesa rizika.

U daljnjem specificiranju modela (1) uvode se pretpostavke na proces ukupne vrijednosti šteta $\{S_t,\, t \geq 0\}$. Lundberg je pretpostavio sljedeće:

1) štete (zahtjevi za isplatu) stižu u vremenima $0 < T_1 \leq T_2 \leq \cdots$ koje nazivamo dolaznim vremenima,

2) šteta koja stiže u vremenu T_i ima iznos X_i. Niz $(X_i,\, i \in \mathbb{N})$ čine nezavisne, nenegativne, jednako distribuirane slučajne varijable,

3) slučajni procesi dolaznih vremena $(T_i,\, i \in \mathbb{N})$ i iznosa šteta $(X_i,\, i \in \mathbb{N})$ su međusobno nezavisni.

Homogenost se manifestira u svojstvu nezavisnosti i jednakoj distribuiranosti niza $(X_i,\, i \in \mathbb{N})$. Uz definiran niz dolaznih vremena $(T_i,\, i \in \mathbb{N})$, slučajnu varijablu N_t koja modelira broj šteta pristiglih do trenutka t možemo zapisati kao

$$N_t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}} = \#\{i \in \mathbb{N} \colon T_i \leq t\}, \quad t \in [0, \infty),$$

pri čemu # označava broj elemenata skupa. Dodatna pretpostavka u Cramér-Lundbergovom modelu odnosi se na brojeći proces šteta koji je specificiran kao homogeni Poissonov proces.

Definicija 2.1. Slučajni proces $\{N_t,\, t \geq 0\}$ je homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ ako zadovoljava sljedeće pretpostavke:

(i) $N_0 = 0$ g.s., odnosno $P(N_0 = 0) = 1$,

(ii) za $0 \leq s < t$, slučajna varijabla $N_t - N_s$ je jednako distribuirana kao slučajna varijabla N_{t-s} (stacionarnost prirasta procesa),

(iii) za $0 \leq s < t$, slučajna varijabla $N_t - N_s$ je nezavisna od familije $\{N_u,\ u \leq s\}$ (nezavisnost prirasta procesa),

(iv) za svaki $t > 0$, N_t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt, odnosno

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Promatramo li Poissonov proces kao model za brojeći proces šteta tada svojstva iz definicije 2.1 možemo interpretirati ovako: (i) u trenutku 0 nema šteta; (ii) distribucija broja šteta u nekom intervalu ovisi samo o duljini tog intervala; (iii) broj šteta u disjunktnim vremenskim intervalima je nezavisan; (iv) broj šteta u jediničnom vremenskom intervalu ima Poissonovu distribuciju s parametrom λ, stoga je λ očekivani broj šteta u jediničnom vremenskom intervalu.

Osim dolaznih vremena šteta, možemo promatrati i međudolazna vremena, odnosno slučajne varijable $W_n = T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ koje predstavljaju vrijeme proteklo između $(n-1)$-ve i n-te štete. Izbor Poissonovog procesa za brojeći proces eksplicitno određuje svojstvo niza međudolaznih vremena, o čemu govori sljedeći teorem (za dokaz vidjeti primjerice [7]).

Teorem 2.1. *Ako je $\{N_t,\ t \geq 0\}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$, tada niz međudolaznih vremena $(W_n,\ n \in \mathbb{N})$ čine nezavisne, eksponencijalno distribuirane slučajne varijable s parametrom λ.*

Može se pokazati da vrijedi i obrat prethodne tvrdnje (vidi [7]). Konačno, slijedi precizna definicija Cramér-Lunbergovog modela.

Definicija 2.2. Cramér-Lundbergov proces rizika je proces $\{U_t,\ t \geq 0\}$ definiran s

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

pri čemu je $u > 0$, $c > 0$, $\{N_t,\ t \geq 0\}$ je homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$, a $(X_i,\ i \in \mathbb{N})$ je niz nezavisnih, nenegativnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s funkcijom distribucije F.

2.1 Modeliranje iznosa šteta

Cramér-Lundbergov model ostavlja slobodu izbora distribucije F kojom modeliramo iznose pristiglih šteta. U modeliranju, cilj je opisati varijaciju u iznosima šteta nalaženjem distribucije šteta koja adekvatno opisuje stvarne štete koje se pojavljuju. Za opis distribucije šteta upotrebljava se niz statističkih tehnika. Standardna je metoda pretpostaviti da je distribucija šteta član neke parametarske familije i u tom slučaju se nepoznati parametri procjenjuju korištenjem podataka o iznosima šteta metodama kao što su metoda maksimalne vjerodostojnosti ili metoda momenata.

Pri traženju prikladne distribucije šteta, moramo posebno voditi računa da distribucija koju odaberemo može modelirati i one najveće do tada opažene štete. U suprotnom, podcjenjivanje vjerojatnosti velikih šteta izlaže nas velikom riziku. Često se može dogoditi da samo jedna ili nekoliko najvećih šteta svojim iznosom nadmaše sve ostale zajedno. Stoga je od izuzetne važnosti pravilno procijeniti vjerojatnosti pojavljivanja takvih ekstremnih događaja. Vjerojatnosti pojavljivanja ekstremnih događaja opisane su *desnim repom* distribucije, tj. ponašanjem repne funkcije distribucije

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$$

za velike vrijednosti x.

Jedan od mogućih izbora za distribuciju iznosa šteta je eksponencijalna distribucija s parametrom $\rho > 0$. U tom slučaju

$$\overline{F}(x) = e^{-\rho x}, \quad x \geq 0, \tag{3}$$

i rep distribucije opada u nulu eksponencijalno brzo. To znači da je vjerojatnost opažanja šteta velikog iznosa vrlo mala. U praktičnim primjenama takva situacija je vrlo rijetka. Stoga će u primjenama biti važne distribucije kod kojih repna funkcija distribucije opada sporije od eksponencijalne i to kao opća potencija.

Definicija 2.3. Za slučajnu varijablu X s funkcijom distribucije F kažemo da ima distribuciju s teškim repom ako je

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = L(x)x^{-\alpha},$$

gdje $\alpha > 0$ nazivamo repni indeks dok je L funkcija takva da za svaki $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Parametar α određuje težinu repa distribucije. Što je vrijednost α niža, ekstremne vrijednosti su vjerojatnije. Na ovaj način moguće je modelirati rizike ekstremnih događaja koji su često i najvažniji jer mogu izazvati velike gubitke.

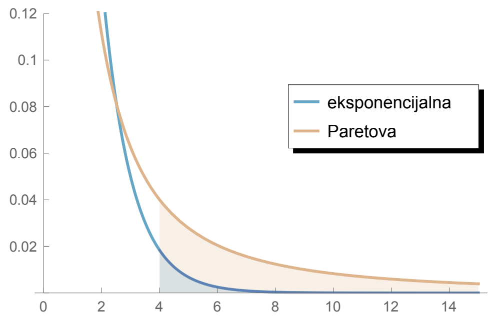
Primjer 2.1. Slučajna varijabla X ima Paretovu distribuciju s parametrima $\kappa > 0$ i $\alpha > 0$ ukoliko ima repnu funkciju distribucije zadanu izrazom

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x}\right)^{\alpha}, \quad x > 0. \tag{4}$$

Paretova distribucija ima težak rep, a vrijednost α odgovara repnom indeksu. Ova familija distribucija tipično dobro opisuje stvarne podatke pa se često koristi u modeliranju. Jedno od svojstava Paretove distribucije, ali i ostalih distribucija s teškim repom jest da je $EX^q = \infty$ za $q \geq \alpha$. Ako je $\alpha > 1$, očekivanje Paretove distribucije je konačno i iznosi

$$EX = \frac{\kappa}{\alpha - 1}. \tag{5}$$

Na slici 1 prikazane su funkcije gustoće eksponencijalne (3) s parametrom $\rho = 1$ i Paretove distribucije (4) s parametrima $\kappa = 1$ i $\alpha = 1$. Površine ispod krivulja predstavljaju repne vjerojatnosti. Iz ovog prikaza jasno je kako gustoća Paretove distribucije sporije opada u nulu i time su vjerojatnosti poprimanja velikih vrijednosti značajno veće nego kod eksponencijalne distribucije.



Slika 1: Funkcije gustoće eksponencijalne i Paretove distribucije

2.2 Vjerojatnost propasti

Postavlja se pitanje postoji li neki vremenski trenutak u kojem do tada naplaćene premije zajedno s inicijalnim kapitalom neće biti dostatne za pokrivanje svih dotadašnjih ostvarenih šteta. U tom slučaju bismo govorili o *propasti osiguravatelja*. Jasno je kako bi u tom trenutku, neka je to trenutak t, vrijedilo upravo $U_t < 0$ pa stoga propast definiramo kao događaj

$$\{U_t < 0, \text{ za neki } t > 0\}.$$

Primijetimo da ovako definirana propast u praksi ne znači nužno i stvarnu propast osiguravatelja, budući da je on u mogućnosti povisiti premije ukoliko se proces rizika previše približi nuli ili se gubitak u jednom portfelju može pokriti zaradom iz preostalih. Jednako tako moguće je da društvo ulaže imovinu pa se proces rizika mijenja i zbog prinosa na imovinu ili drugih prihoda. Od interesa je prvo pojavljivanje propasti, stoga uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 2.4. Vrijeme T kada proces rizika prvi puta poprimi vrijednost manju od nule naziva se vrijeme propasti:

$$T = \inf\{t > 0 \colon U_t < 0\}.$$

Uočimo kako slučajna varijabla T ne mora nužno biti realna slučajna varijabla, tj. moguće je da T poprimi vrijednost ∞ s pozitivnom vjerojatnošću, odnosno da se propast nikada ne realizira.

Definicija 2.5. Vjerojatnost propasti s obzirom na početni kapital u i konstantnu stopu uplata premija c dana je izrazom

$$\begin{aligned}
\psi(u, c) &= P(U_t < 0, \text{ za neki } t > 0 \mid U_0 = u) \\
&= P(u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i < 0, \text{ za neki } t > 0 \mid U_0 = u) \\
&= P(T < \infty), \quad u > 0.
\end{aligned}$$

Ono što osiguravatelj želi jest držati vjerojatnost propasti na što nižoj vrijednosti ili barem ispod neke određene granice. Unatoč jednostavnosti Cramér-Lundbergovog modela, vjerojatnost propasti općenito je teško izračunati. Tek za određene oblike distribucija šteta poznati su eksplicitni izrazi, dok se inače moramo zadovoljiti različitim aproksimacijama i asimptotskim ocjenama.

Prvi cilj osiguravatelja je svakako izbjeći slučaj kada propast nastupa s vjerojatnošću 1 bez obzira na vrijednost početnog kapitala. Pokazuje se da se taj slučaj može jednostavno identificirati na osnovu vrijednosti parametara modela. Za dokaz sljedeće tvrdnje pogledati primjerice [5].

Teorem 2.2. *Ako je u Cramér-Lundbergovom modelu* (2.2) $EX_1 < \infty$ *i*

$$c - \lambda EX_1 \leq 0,$$

tada za svaki $u > 0$ *propast nastupa s vjerojatnošću* 1.

Drugim riječima, u slučaju iz prethodnog teorema je $\psi(u,c) = 1$ za sve $u > 0$. Ako vrijedi

$$c - \lambda EX_1 > 0, \tag{6}$$

kažemo da je zadovoljen *uvjet neto profita*. Minimalno što osiguravatelj mora zahtijevati jest da je ispunjen uvjet neto profita, inače nema smisla preuzimati rizik. Od veličina koje se pojavljuju u (6), osiguravatelj može utjecati jedino na stopu premija c. Stoga će stopa premija biti određena tako da je uvjet neto profita zadovoljen.

U sljedećem koraku, osiguravatelj može utjecati na vjerojatnost propasti mijenjanjem iznosa početnog kapitala i stope premija. Utjecaj tih veličina na vjerojatnost propasti često nije jednostavno odrediti. Ipak, u nekim slučajevima vjerojatnost propasti može se eksplicitno izraziti.

Primjer 2.2. Pretpostavimo da je u Cramér-Lundbergovom modelu distribucija iznosa šteta eksponencijalna (3) s parametrom $\rho > 0$. Tada se može pokazati ([1]) da je vjerojatnost propasti dana izrazom

$$\psi(u,c) = \frac{\lambda}{c\rho} e^{-(\rho - \frac{\lambda}{c})u}, \quad u > 0.$$

Kao što smo već rekli, eksponencijalna distribucija šteta je često nerealna pretpostavka u praktičnim situacijama. Tako će se i u sljedećem poglavlju pokazati da iznosi šteta pokazuju teške repove i mogu se dobro modelirati Paretovom distribucijom. U ovom slučaju izraz za vjerojatnost propasti se značajno komplicira.

Primjer 2.3. Pretpostavimo da je u Cramér-Lundbergovom modelu distribucija iznosa šteta Paretova (4) s parametrima $\kappa > 0$ i $\alpha > 1$ te je zadovoljen uvjet neto profita. Označimo

$$\rho = \frac{\lambda \kappa}{\alpha - 1}.$$

Tada je vjerojatnost propasti

$$\psi(u,c) = \int_0^\infty \frac{\frac{\rho}{c}(1 - \frac{\rho}{c})x^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)H(x,\alpha,c)} e^{-(1+\frac{u}{\kappa})x} dx, \tag{7}$$

gdje su Γ i H funkcije definirane s

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx,$$

$$H(x,\alpha,c) = \begin{cases} \left(1+(\alpha-1)\frac{\rho}{c}e^{-x}\operatorname{Ei}_\alpha(x)\right)^2 + \left(\pi\frac{\rho x^{\alpha-1}e^{-x}}{c\Gamma(\alpha-1)}\right)^2, & \text{ako je } \alpha = 2,3,\ldots \\ \left(1-\frac{\rho}{c}R(x,\alpha-1)\right)^2 + \left(\pi\frac{\rho x^{\alpha-1}e^{-x}}{c\Gamma(\alpha-1)}\right)^2, & \text{ako je } \alpha > 1 \text{ i } \alpha \neq 2,3,\ldots \end{cases}$$

pri čemu je

$$\operatorname{Ei}_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\left(\gamma + \ln x - \sum_{i=1}^{\alpha-1}\frac{1}{i}\right) + \sum_{i=0, i\neq\alpha-1}^{\infty}\frac{x^i}{(i-\alpha+1)i!}, \quad \alpha\in\mathbb{N},$$

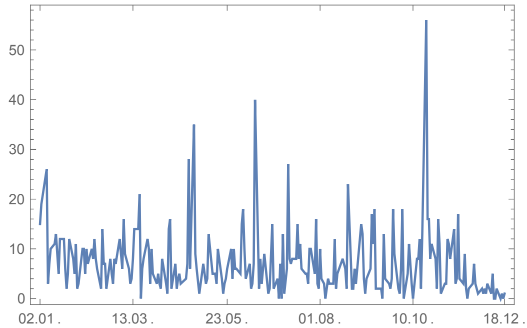
$$R(x,\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^i}{(\alpha-1)\cdots(\alpha-i)} - \frac{\pi u^\alpha e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}\cot(\pi\alpha), \quad \alpha\notin\mathbb{N}.$$

Prethodni rezultat objavljen je relativno nedavno, najprije za specijalni slučaj u [8] te općenito u [9]. Iako se vjerojatnost propasti može eksplicitno zapisati, u računanju konkretnih vrijednosti potrebno je numerički aproksimirati integrale i redove koji se pojavljuju u izrazu.

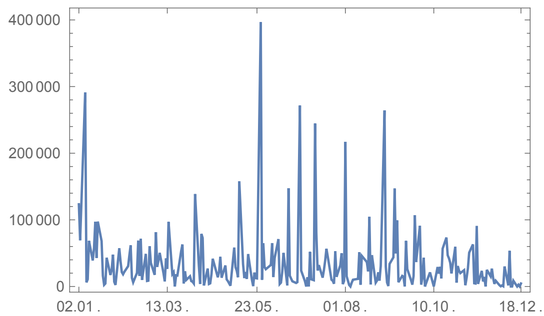
3 Modeliranje procesa rizika za portfelj polica osiguranja strojeva od loma

U ovom odjeljku ilustrirat ćemo uporabu Cramér-Lunbergovog modela na stvarnim podacima. Skup podataka sadrži podatke o dospjelim štetama iz portfelja polica osiguranja strojeva od loma za pravne osobe jednog osiguravajućeg društva s područja Republike Hrvatske u razdoblju od 2.1.2014. do 18.12.2014. Ukupno je bilo 1775 šteta i za svaku štetu raspolažemo s datumom dospijeća, odakle nam je onda poznat i broj dnevno pristiglih šteta koji je prikazan na slici 2.
Osim datuma dospijeća, za svaku pristiglu štetu raspolažemo i njenim iznosom. Na slici 3 prikazani su iznosi pristiglih šteta po danima u promatranom razdoblju.
Također, poznata nam je i zarađena tehnička premija do 1.1.2014. koja iznosi 4 538 639.00 kn.

Kako bismo procijenili vjerojatnost propasti osiguravatelja za ovaj portfelj polica, potrebno je procijeniti parametre procesa rizika pri čemu ćemo se fokusirati upravo na Cramér-Lundbergov model (2). Pretpostavljamo kako proces rizika kreće na početku 2014. godine, odnosno za $t = 0$ uzimamo 1.1.2014. godine pa će stoga inicijalni kapital biti upravo zarađena tehnička



Slika 2: Broj dnevno pristiglih šteta u razdoblju od 2.1.2014. do 18.12.2014.

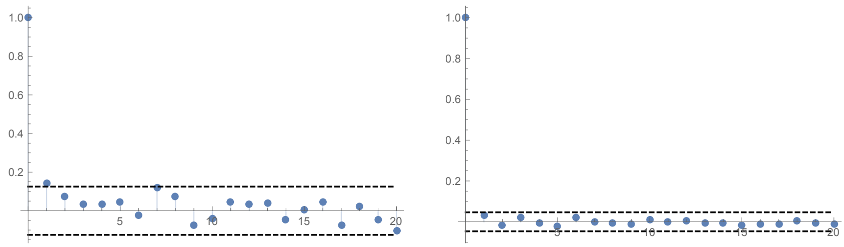


Slika 3: Iznosi pristiglih šteta po danima u razdoblju od 2.1.2014. do 18.12.2014.

premija do 1.1.2014, odnosno $u = 4\,538\,639.00$ kn. Prije procjene ostalih parametara, provjerit ćemo mogu li se podaci zaista modelirati Cramér-Lundbergovim modelom. Analiza je provedena korištenjem programskih paketa R i Mathematica.

3.1 Provjera pretpostavki modela

Cramér-Lundbergov model pretpostavlja kako je brojeći proces $\{N_t,\ t \geq 0\}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ, odakle iz same definicije Poissonovog procesa 2.1 proizlazi pretpostavka o nezavisnosti prirasta tog procesa. U okviru promatranog problema, slučajna varijabla N_t modelira broj šteta pristiglih do trenutka t, stoga će brojevi dnevno pristiglih šteta prikazani na slici 2 odgovarati prirastima Poissonovog procesa na jediničnim intervalima, odnosno realizacijama slučajnih varijabli $N_1,\ N_2 - N_1, \ldots$. Drugim riječima, potrebno je provjeriti nezavisnost slučajnih varijabli kojima se opisuje broj dnevno pristiglih šteta. Osim toga, model pretpostavlja kako su slučajne varijable $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ kojima modeliramo iznose pristiglih šteta nezavisne pa je i ovu pretpostavku potrebno provjeriti za dostupne podatke. Zbog prirode problema za očekivati je da će ove pretpostavke biti zadovoljene. Naime, s obzirom da štete uglavnom nastaju kod različitih osiguranika, njihov broj i iznos u većini slučajeva neće ovisiti o štetama nastalim nekog drugog dana.



(a) Uzoračka funkcija autokorelacije broja dnevno pristiglih šteta

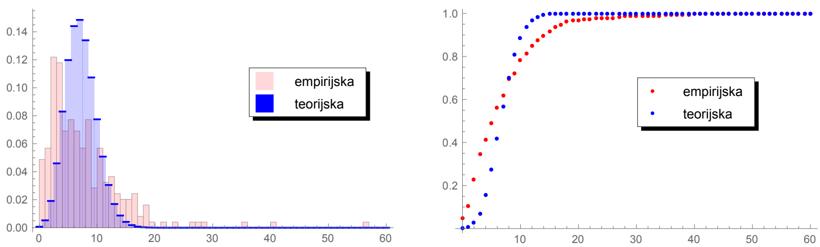
(b) Uzoračka funkcija autokorelacije iznosa pristiglih šteta

Slika 4: Uzoračke funkcije autokorelacije

Nezavisnost niza podataka možemo proučavati kroz uzoračku funkciju autokorelacije. Za nezavisan niz, ona bi trebala biti približno jednaka nuli u svim točkama osim u nuli. Na slici 4(a) prikazana je uzoračka funkcija autokorelacije broja dnevno pristiglih šteta uz pouzdani interval nekoreliranog niza. Možemo uočiti kako ona nije bitno različita od nule pa stoga nema razloga sumnjati u postojanje korelacije. Slutnja je opravdana Ljung-Boxovim testom za koji p-vrijednost iznosi 0.61 pa stoga na razini statističke značajnosti 0.05 nemamo razloga odbaciti hipotezu o nekoreliranosti broja dnevno pristiglih šteta. Iako to ne znači nužno i nezavisnost, zbog prirode problema nadalje pretpostavljamo kako su brojevi dnevno pristiglih šteta nezavisni.

Na slici 4(b) prikazana je uzoračka funkcija autokorelacije iznosa pristiglih šteta. I ovdje možemo uočiti kako ona nije bitno različita od nule ni na jednom koraku što opravdava i Ljung-Boxov test uz p-vrijednost 0.66. Opet, iako to ne znači nužno i nezavisnost, prirodno je pretpostaviti kako su iznosi šteta međusobno nezavisni.

Osim nezavisnosti, Cramér-Lundbergov model pretpostavlja i kako su prirasti na jediničnim intervalima jednako distribuirani te imaju Poissonovu distribuciju s nekim parametrom λ. Usporedba empirijske distribucije podataka o broju dnevno pristiglih šteta i odgovarajuće Poissonove distribucije s procijenjenim parametrom λ prikazana je na slici 5. Nepoznati parametar λ može se jednostavno procijeniti kao aritmetička sredina uzorka. Dobivena vrijednost je 7.215 što između ostalog predstavlja procjenu očekivanog broja šteta u jednom danu. Slika 5(a) prikazuje histogram podataka i teorijske relativne frekvencije, dok slika 5(b) daje usporedbu empirijske i teorijske funkcije distribucije. Iako podudaranje nije savršeno, pretpostavit ćemo da se broj šteta može dobro aproksimirati Poissonovom distribucijom.



(a) histogram

(b) funkcija distribucije

Slika 5: Usporedba empirijske i Poissonove distribucije za broj dnevno pristiglih šteta

U okviru Cramér-Lundbergovog modela preostaje još analizirati distribuciju niza iznosa šteta $(X_n, n \in \mathbb{N})$ pa ćemo se u sljedećem pododjeljku posvetiti pronalaženju adekvatne distribucije koja dobro opisuje iznose pristiglih šteta i procjeni odgovarajućih parametara.

3.2 Analiza distribucije iznosa šteta

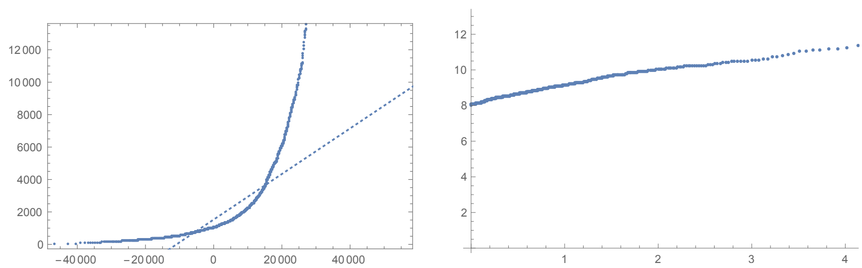
Kao što je već spomenuto, iznosi šteta često pokazuju karakteristike podataka s teškim repovima. Takvo svojstvo analizirat ćemo i za dostupni niz podataka. QQ-graf na slici 6(a) prikazuje uzoračke kvantile u odnosu na kvantile standardne normalne distribucije. Zakrivljenost grafa upućuje na asimetričnost distribucije dok jednako tako naslućujemo kako se radi o distribuciji s desnim repom težim nego kod normalne distribucije.

Utvrditi da neki uzorak dolazi iz distribucije s teškim repovima nije jednostavan statistički problem. Postoji niz metoda za ovu svrhu, a jedna od njih je QQ-graf logaritmiranih podataka još poznat i kao Zipfov graf. Osnovna ideja Zipfovog grafa najjasnije se vidi na primjeru Paretove distribucije. Ako je X slučajna varijabla s Paretovom distribucijom s parametrima $\alpha > 0$ i $\kappa > 0$, tada $P(X > x)/(\kappa^\alpha x^{-\alpha}) \to 1$ kada $x \to \infty$, što označavamo s $P(X > x) \sim \kappa^\alpha x^{-\alpha}$. Zato je

$$P(\ln X > x) = P(X > e^x) \sim \kappa^\alpha e^{-\alpha x}$$

kada $x \to \infty$, odnosno $\ln X$ će imati približno eksponencijalnu distribuciju. Zipfov graf je QQ-graf u kojem se uspoređuju kvantili logaritmiranih podataka s kvantilima eksponencijalne distribucije. Ako uzorak dolazi iz distribucije s teškim repom, tada će graf biti približno linearan.

Na slici 6(b) prikazan je Zipfov graf za podatke o štetama. Jasna linearnost grafa ukazuje na distribuciju s teškim repom pa ćemo iznose šteta modelirati Paretovom distribucijom.



(a) QQ-graf uz normalnu distribuciju

(b) Zipfov graf

Slika 6: Analiza distribucije iznosa šteta

Preostaje još procijeniti nepoznate parametre Paretove distribucije α i κ. Metodom maksimalne vjerodostojnosti dobivene su procjene $\alpha = 1.737$ uz standardnu grešku procjene u iznosu od 0.101 i $\kappa = 3423.89$ uz standardnu grešku procjene u iznosu od 286.35. U tablici 1 dane su procjene parametara Cramér-Lundbergovog modela.

Tablica 1: Vrijednosti procijenjenih parametara

u	λ	α	κ
4 538 639.00	7.215	1.737	3423.89

3.3 Procjena vjerojatnosti propasti

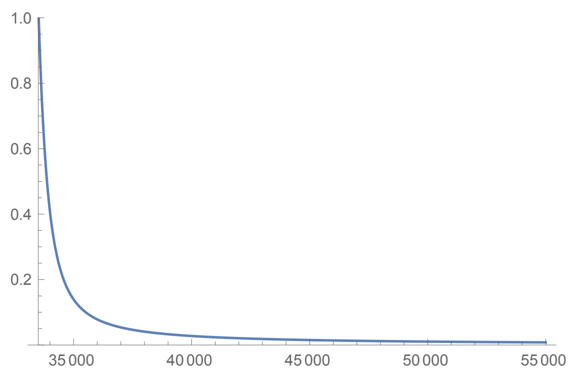
Ono što nije poznato na osnovu dostupnih podataka jest stopa c po kojoj osiguravatelj naplaćuje premije od osiguranika. Stopu c smatrat ćemo varijablom koja je pod utjecajem osiguravatelja te izborom cijene premija osiguravatelj može kontrolirati svoje prihode i utjecati na vjerojatnost propasti.

Kako bi izbjegao sigurnu propast, osiguravatelj najprije mora odabrati c tako da je zadovoljen uvjet neto profita. Veličina šteta ima Paretovu distribuciju pa uvjet neto profita (6) zbog (5) ima oblik

$$c > \lambda E X_1 = \lambda \frac{\kappa}{\alpha - 1} \approx 33520.91.$$

Dakle, da bi uopće bio u mogućnosti izbjeći sigurnu propast osiguravatelj mora dnevno prikupiti barem 33 520.91 kn premija.

Na osnovu procijenjenih vrijednosti parametara iz tablice 1, možemo izračunati vjerojatnost propasti $\psi(u, c)$ koristeći izraz (7). Kako je poznato da je $u = 4\,538\,639.00$, ψ promatramo kao funkciju stope uplata c. Na slici 7 prikazana je procjena vjerojatnosti propasti u ovisnosti o stopi uplata premija c koristeći (7) za vrijednosti $c > 33\,520.91$, jer u protivnom je propast sigurna ($\psi(u, c) = 1$).



Slika 7: Procjena vjerojatnosti propasti u ovisnosti o stopi uplata premija c

U tablici 2 prikazane su odabrane vrijednosti stope uplata premije c koje daju neke karakteristične vrijednosti vjerojatnosti propasti.
Usporedimo li minimalnu cjelobrojnu vrijednost konstantne stope uplata premija c za koju je zadovoljen uvjet neto profita i koja iznosi 33 521.00 s vrijednostima iz tablice 2 , možemo uočiti kako povećanje stope uplata premija

Tablica 2: Vjerojatnosti propasti za određene vrijednosti c

stopa uplata premija c	vjerojatnost propasti
33 570.00	≈ 0.9
33 870.00	≈ 0.5
35 500.00	≈ 0.1
37 230.00	≈ 0.05
50 670.00	≈ 0.01

na samo 33 870.00, što je povećanje prihoda od premija u iznosu od otprilike 10 470.00 kn mjesečno, upola smanjuje vjerojatnost propasti. Ukoliko osiguravajuće društvo ima primjerice 1500 osiguranika po policama ovakvog tipa, to bi značilo da povećanje premija za otprilike samo 10.00 kn mjesečno upola smanjuje rizik od insolventnost osiguravajućeg društva u ovom portfelju polica osiguranja. No, sam postupak određivanja optimalne visine premija je složen proces pri čemu se koriste kombinacije upravljanja financijskim rizikom i rizikom osiguranja. Stoga je ovo samo jedna gruba procjena minimalne stope uplata premija sa stajališta modeliranja vjerojatnosti propasti.

4 Zaključak

Iako jednostavan, Cramér-Lundbergov model može se uspješno primijeniti na brojnim primjerima kao što je to učinjeno u odjeljku 3. Razlog prilagodljivosti Cramér-Lundbergovog modela leži u broju parametara te slobodi izbora distribucije veličine šteta. Ipak, u nekim situacijama pretpostavke modela mogu biti previše restriktivne za primjenu. Iz tog razloga, od vremena Craméra i Lundberga, predložen je cijeli niz modela koji na različite načine poopćavaju klasični model.

Primjerice, *Sparre Andersenov model* dobije se ako u Cramér-Lunbergovom modelu za brojeći proces šteta umjesto Poissonovog procesa odaberemo tzv. proces obnavljanja. Prema teoremu 2.1 međudolazna vremena Poissonovog procesa imaju eksponencijalnu distribuciju. Procesi obnavljanja su brojeći procesi koji mogu imati proizvoljnu distribuciju međudolaznih vremena. Ovo poopćenje pruža još više mogućnosti u modeliranju kroz slobodu izbora distribucije trenutaka nastanka šteta. Za više detalja vidjeti [1] i [7].

S druge strane, proces rizika (2) je kombinacija linearnog drifta i složenog Poissonovog procesa i kao takav spada u klasu *Lévyjevih procesa* – procesa sa stacionarnim i nezavisnim prirastima. Tako se za proces rizika može izabrati i neki drugi Lévyjev proces. Za primjere vidjeti [6], te [4] i [5].

U pododjeljku 2.2 vidjeli smo da već i za klasični model eksplicitno izračunavanje vjerojatnosti propasti može biti vrlo komplicirano. U općenitijim modelima taj je problem još više izražen i eksplicitni izrazi poznati su samo u rijetkim slučajevima. Istraživanja u ovom smjeru i dalje su aktualna i redovito dolazi do novog napretka. Osim vjerojatnosti propasti, u zadnjih dvadesetak godina proučavaju se i druge veličine vezane uz propast. To su primjerice: vrijeme propasti, deficit u propasti, višak u trenutku neposredno prije propasti i minimum neposredno prije propasti. Poznavanje distribucije ovih veličina može dodatno pomoći poslovnim odlukama osiguravajućih kuća.

Literatura

[1] S. Asmussen, H. Albrecher, *Ruin probabilities*, World Scientific, Singapore, 2010.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[3] H. Cramér, *Historical review of Filip Lundberg's works on risk theory*, Scandinavian Actuarial Journal 3(1969), 6-12

[4] A.E. Kyprianou, *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, Springer, Berlin, 2006.

[5] A.E. Kyprianou, *Gerber–Shiu risk theory*, Springer, Berlin, 2013.

[6] A. Leko, *Modeliranje vjerojatnosti propasti Lévyjevim procesima*, diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2015.

[7] T. Mikosch, *Non-life insurance mathematics: an introduction with the Poisson process*, Springer, Berlin, 2009.

[8] C.M. Ramsay, *A solution to the ruin problem for Pareto distributions*, Insurance: Mathematics and Economics 33(1) (2003), 109-116

[9] C.M. Ramsay, *Exact waiting time and queue size distributions for equilibrium M/G/1 queues with Pareto service*, Queueing Systems 57(4) (2007), 147-155

[10] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2000.