

Geometrija i Sherlock Holmes

Ljerka Jukić Matić, Ivan Matić, Matea Pavlović

1 Slučaj za detektiva

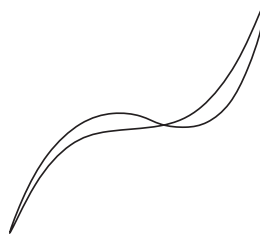
U zbirci kratkih priča *Pustolovine Sherlocka Holmesa*, koju je napisao britanski pisac Sir Arthur Conan Doyle, veliki detektiv i njegov pomoćnik, doktor Watson, proučavaju tragove bicikla poput onih na Slici 1. Razgovor između njih dvojice odvija se na ovaj način:

Sherlock Holmes: "Ovaj trag, kao što vidite, napravio je vozač koji je išao iz smjera škole."

dr. Watson: "Ili prema njoj?"

Holmes: "Ne, ne, dragi moj Watson. Dublje utisnuti trag, je naravno, napravio stražnji kotač na kojem počiva težina. Možete uočiti nekoliko mjesta na kojima je on prešao preko plićeg traga prednjeg kotača i izbrisao ga. Nesumnjivo je da je išao dalje od škole."

Sherlock Holmes je pristupio ovom problemu na vrlo prirodan način, ispitujući dubinu traga koji su ostavili kotači bicikla. Međutim, da je Sherlock Holmes imao veće znanje iz geometrije, mogao je odrediti smjer iz kojega je vozač došao bez podataka o dubini tragova. Ovo sada postaje vrlo izazovan problem koji možemo riješiti promatrajući geometriju okvira bicikla. Kotači bicikla u svakom trenutku dodiruju krivulju traga. U bilo kojem trenutku, smjer kretanja duž krivulje je tangencijalan na tu krivulju. Jednostavno nacrtamo tangentu na krivulju stražnjeg kotača. Ako se krećemo duž te krivulje prema mjestu gdje se nalazio prednji kotač,



Slika 1: Tragovi bicikla

presjeći ćemo krivulju prednjeg kotača. Udaljenost između točke na krivulji traga stražnjeg kotača i točke na krivulji traga prednjeg kotača zapravo je udaljenost kotača bicikla. Ako nacrtamo tangentu na pogrešnoj krivulji ili idemo u krivom smjeru, presjeći ćemo drugu krivulju, ali udaljenost između točaka na krivuljama prednjeg i stražnjeg kotača će varirati dok se krećemo duž krivulje tj. udaljenost između kotača bicikla neće biti stalna.

2 Teorije učenja

Gornja priča pokazuje nam kako geometriju možemo upotrijebiti i u najrazličitijim situacijama. Kao matematička disciplina, geometrija ima dugu povijest koja je blisko povezana s razvojem cjelokupne matematike. Ona je također dio svakodnevnog života i mnogih znanosti. Primjerice, od iznimne je važnosti u arhitekturi prilikom dizajniranja i izrade nacrtu građevina; u kemiji za istraživanje oblika molekula; u biologiji za određivanje izgleda proteina; koristi se u GPS tehnologiji za lociranje. . . No, mnoga istraživanja matematičkog obrazovanja (npr. [2]) pokazuju da učenici osobito ne vole geometriju i rješavanje geometrijskih problema, pogotovo u odnosu na druge grane matematike. Jedan od razloga svakako je zahtjevnost geometrije. Geometrija od učenika zahtijeva ne samo prepoznavanje geometrijskih objekata u određenim položajima, već i poznavanje definicija geometrijskih objekata i njihovih svojstava. Štoviše, nije dovoljno samo poznavati različita svojstva geometrijskih objekata, nego i moći ih primjeniti. A vrlo značajne su i vizualne vještine i dobro razvijeni prostorni zor. Vizualizacija i dodirivanje objekata korisni su načini za usvajanje apstraktnih geometrijskih pojmova u osnovnoj školi, a vizualno-prostorne vještine svakako su potrebne za mjerenje i procjenu. U nižim razredima osnovne škole razvija se matematički jezik za oblik i određivanje položaja, primjerice: u, između, ispod, pored, blizu, lijevo i desno. Učenje geometrije ovdje uključuje vizualizaciju, crtanje, kreiranje, komunikaciju i rješavanje problema vezanih uz dvodimenzionalne i trodimenzionalne objekte. U višim razredima osnovne škole i u srednjoj školi, učenici nastavljaju razvijati svoje vizualno mišljenje, zaključivanje i prostorni zor. Dalje istražuju svojstva i veze dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika uključujući mnogokute, poliedre, rotacijska tijela, krivulje drugog reda . . .

Kada govorimo o teorijama učenja geometrije, najpoznatija je van Hieleova teorija koja opisuje pet razina geometrijskog mišljenja. Ta teorija utjecala je na izradu kurikulumu za geometriju za osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje u raznim zemljama, a prvenstveno se odnosi na euklidsku geometriju:

1. *Prepoznavanje* - učenici su sposobni prepoznati i imenovati osnovne oblike kao što su trokut, četverokut ili krug, ali ne znaju njihova svojstva.

2. *Analiza* - učenici su sposobni opisati attribute ili svojstva osnovnih oblika i vrsta, klasificirati ih i nacrtati. Ne mogu povezivati termine kojima opisuju svojstva likova. Pri opisivanju nekog lika nabrajaju sva svojstva, ne mogu odrediti što je dovoljno za opis lika.
3. *Neformalna dedukcija* (redosljed) - učenici počinju uspostavljati odnose između svojstava oblika, prepoznaju slične oblike, prave pretpostavke i intuitivno izvode jednostavne zaključke. Znaju prepoznati što je dovoljno za opis geometrijskog lika.
4. *Formalna dedukcija* (zaključivanje) - ovdje se razvija ideja o minimalnom broju svojstava potrebnih za definiciju. Učenici prepoznaju odnose između svojstava i izvode logička zaključke. Razumiju značenje definicija i aksioma, izvode zaključke iz prethodno poznatih tvrdnji.
5. *Strogost* - učenici formiraju povezane nizove zaključaka i time opravdavaju svoja razmišljanja. Razumiju principe dokaza, na primjer dokaz po kontrapoziciji.

Učenici bi po završetku osnovne škole trebali biti na trećoj razini van Heieleove teorije, međutim, često se događa da učenici nisu ni na drugoj razini koja uključuje analizu objekata. Primjerice, učenici teško prepoznaju sukladne oblike ako su oni zarotirani. Zatim, neki će učenici reći za kvadrat da je romb ako je postavljen tako da mu vrhovi pokazuju prema gornjem i donjem rubu papira, umjesto najčešće orijentacije gdje su njegove stranice paralelne sa gornjim i donjim rubom papira. Paralelno s van Heielovim razinama učenja postoji i pet faza s odgovarajućim postupcima za svladavanje prethodno spomenutih razina. To su:

1. Informiranje – upoznavanje s materijalom kroz razgovor s učiteljem.
2. Usmjereno vođenje – učenici samostalno crtaju, prave, mjere ili rade nešto slično kako bi otkrili svojstva i odnose među objektima.
3. Objašnjavanje – učenici se trude svojim riječima objasniti ono do čega su samostalno došli, a učitelj ih upoznaje s terminima kojima mogu opisati to što su primijetili.
4. Slobodno usmjeravanje – primjena svega naučenog za rješavanje problema.
5. Integriranje – faza spajanja svih prethodnih znanja i pamćenje obrađenih informacija.

Ključni aspekt za razvoj geometrijskog mišljenja je invarijantnost, tj. nepromjenjivost odnosa ili svojstva prilikom dopuštenih transformacija. Kada učenici



Slika 2: Šesterokut

razmatraju transformacije objekata, produbljuju svoje razumijevanje o sukladnosti, simetriji i svojstvima likova. Mnoga istraživanja (npr. Milin Šipuš i Čizmešija [6]) pokazuju da je malo pedagoškog truda uloženo u razvoj vizualnog zaključivanja, iako bi trebalo biti suprotno pogotovo zbog mogućnosti korištenja tehnologije. Istraživanja nadalje pokazuju i da neki učitelji pretpostavljaju da su ljudi rođeni s vještinama vizualnog mišljenja, te zbog toga neće obratiti dovoljno pozornosti na razvijanje tih vještina. S druge strane, neki učitelji pretpostavljaju da svi učenici ne mogu doći do određenih vizualnih vještina. Međutim, van Hieleove razine nisu vezane uz dob učenika, nego uz njihova iskustva u učenju geometrije. Da bi učenici mogli preći s jedne razine na drugu, moraju imati mnogo iskustva u kojima su aktivno bili uključeni u istraživanje geometrijskih objekata te iznošenje vlastih opažanja o obliku, svojstvima i vezama koje su uočili. Učenici u osnovnoj školi često će prepoznati likove i tijela prema njihovom izgledu prije nego po provjeravanju njihovih svojstava. Korištenje tehnologije, naročito programa dinamične geometrije, ukazalo je na potrebu da se napravi razlika između skice i konstrukcije jer su neki učenici skloni skicirati i provjeravati oblike s ovim alatima "od oka", a ne konstruirati i provjeravati koristeći svojstva. Nadalje, učenička iskustva često su ograničena na pravilne mnogokute tako da oni ne prepoznaju nepravilne ili nekonveksne mnogokute, nepravilne ili kose prizme, piramide i valjke. Primjerice, učenici ne prepoznaju da je lik na Slici 2. zapravo šesterokut.

3 Geometrijsko mišljenje

U matematičkom obrazovanju često govorimo o matematičkom mišljenju, a ovisno o matematičkoj disciplini koju proučavamo, možemo razlikovati primjerice algebarsko mišljenje, proporcionalno mišljenje, geometrijsko mišljenje... No, koje procese uključujemo u geometrijsko mišljenje? Smatra se da geometrijsko mišljenje uključuje tri vrste kognitivnih procesa: vizualizaciju, konstrukciju i zaključivanje, no Johnstone-Wilder i Mason [4] još pridaju važnost jeziku i komunikaciji koja je bitna za utvrđivanje značenja i razvijanje zaključivanja. Ovdje ćemo razmotriti navedene procese geometrijskog mišljenja.

3.1 Vizualizacija

Prije nego što kažemo nešto o vizualizaciji, pogledajmo sljedeći razgovor između dr. Watsona i Sherlocka Holmesa koji se odvija u romanu *Skandal u Češkoj*:

Sherlock Holmes: "Dr. Watson vi gledate i vidite, ali ne opažate. Razlika je jasna. Na primjer, često ste vidjeli stepenice koje iz hodnika vode u ovu sobu."

dr. Watson: "Često."

Holmes: "Koliko često?"

dr. Watson: "Pa, nekoliko stotina puta."

Holmes: "Onda, koliko?"

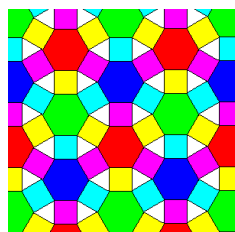
dr. Watson: "Koliko ih ima? Ja... ne znam."

Holmes: "Upravo tako! Niste primijetili. A ipak ste vidjeli. To je upravo moj zaključak. Sada, znam da postoji sedamnaest stepenica, jer sam ih i vidio i opazio."

Upravo nas ovaj razgovor uvodi u razliku između vidjeti i percipirati. Nije isto nešto vidjeti i uočiti određena svojstva. Vizualizacija uključuje sposobnost tumačenja i razumijevanja prikazanih informacija kao što je gledanje i prepoznavanje lika ili karakteristika lika ili tijela, tumačenje zemljopisnih karata ili izvođenje zaključaka o svojstvima neke funkcije iz skice njezina grafa. Ona također uključuje stvaranje slika iz apstraktnih ideja kao što je zamišljanje elipse ili zamišljanje kako se objekti pojavljuju iz različitih perspektiva, kako su objekti postavljeni međusobno, kako je dvodimenzionalni prikaz povezan s trodimenzionalnim objektima te predviđanje izgleda objekta nakon određenih transformacija. Te slike mogu biti mentalne ili skicirane uz pomoć papira i olovke ili tehnologije. U svakodnevnom životu možemo vizualizirati trodimenzionalne objekte i prostorne odnose, npr. možemo tumačiti dijagrame za montažu namještaja i strojeva, možemo tumačiti planove i projekte za izgradnju zgrada, možemo interpretirati šablone za šivanje odjevnih predmeta. Također, koristimo vizualnu projekciju i kad tumačimo karte za putovanje do željenog mjesta. Teškoće u vizualnoj interpretaciji kod učenika se javljaju kada ne raspoznaju iste detalje likova i tijela kao učitelj ili drugi učenici. Johnston-Wilder i Mason [4] preporučuju tri nastavne strategije za poboljšanje učeničke vizualizacije i geometrijskog zaključivanja: "reci što vidiš", "što je isto, a što različito" te "koliko različitih". Kod prve strategije učitelj s obzirom na zadanu sliku proziva učenika da kaže što vidi. Dok učenik govori što vidi, ili učenik ili učitelj pokazuje na tu pojedinost. U ovoj strategiji sudjeluju svi učenici i tako se dobiju višestruki pogledi na zadanu sliku, a pozornost se usmjerava na detalje koje inače učitelj može previdjeti. Na taj način može se razviti rasprava, fokusirajući se na pojedinosti koje su najvažnije za promatrani problem. Postoje mnoge situacije u kojima je strategija "što je isto, a što različito" korisna za razvijanje vizualizacije i geometrijskog zaključivanja, poput uspostavljanje odnosa između oblika kao što su četverokuti, ili utvrđivanje pojmova sličnosti i sukladnosti. Primjerice, na Slici 3 prikazana je



Slika 3: Prikazi kocke



Slika 4: Popločavanje

kocka u različitim položajima. Ovdje se lako može upotrijebiti strategija "što je isto, a što različito". Neki prikazi pokazuju očuvanje duljina bridova, a neki prikazuju očuvanje paralelnosti pravaca. Strategija „koliko je različitih“ je također korisna za utvrđivanje svojstava geometrijskih oblika i pojmova sukladnosti.

Učenici imaju velikih problema kod zamišljanja izometrijskih transformacija tj. transformacija koje čuvaju oblika nepromijenjenima, kao što su simetrije, translacije i rotacije. Neki učenici imaju krive predodžbe o ovim transformacijama. Digitalna tehnologija omogućava razvoj razumijevanja o transformacijama i pomaže kod uklanjanja postojećih zabluda. Učenici mogu iskoristiti tehnologiju za transformiranje jednog oblika u drugi. Tu se možemo poslužiti i nestandardnim zadacima poput popločavanja ravnine i prostora [1]. Stavljanjem pločica u određeni uzorak ili kreiranjem mozaika, učenici razvijaju dublje razumijevanje sukladnosti. Primjerice, zadatak može biti pronaći koje su dvodimenzionalne ili trodimenzionalne pločice korištene u popločavanju ili naći različite uzorke popločavanja koje se mogu napraviti pomoću jednog ili dva oblika pločica (Slika 4). U ovakvim zadacima učenike treba poticati da opisuju transformacije koje su korištene za kreiranje mozaika te da stvaraju pretpostavke o svojstvima tih oblika uključujući i nepravilne oblike u popločavanjima. Sam rad s fizičkim predmetima možda ne postigne željene ishode učenja jer učenici moraju zamisliti što se događa kako bi to zaista i razumjeli [4]. Upravo je ukazivanje na određene dijelove i odnose važno za razvijanje učeničkog mišljenja.

3.2 Zaključivanje

”Podatci! Podatci! Podatci!” viknuo je nestrpljivo. ”Ne mogu napraviti cigle bez gline!”

Pustolovine Shelocka Holmesa, Sir Arthur Conan Doyle

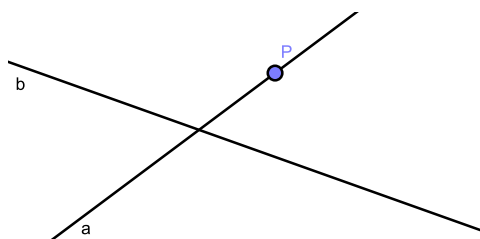
Sherlock Holmes nije, poput današnjih detektiva u kriminalističkim serijama, posjedovao različite oblike tehnologije koji bi mu pomogli riješiti zločin. A zanimljivo je da je mnoge zločine riješio iz udobnosti svoje sobe, sjedeći u omiljenoj fotelji. Sherlock Holmes odlikovao se posebnim oblikom zaključivanja, a to je dedukcija. Nakon što je proanalizirao poznate činjenice, korištenjem dedukcije uspio bi otkriti tko je zločinac i u tome se ne bi prevario. Deduktino zaključivanje, baš kao i analiza, karakteristični su za geometriju i rješavanje geometrijskih problema. U priči *Skica u grimizu*, Sherlock Holmes opisuje kako deduktivan način zaključivanja nije svojstven mnogima, zbog čega ljudi prave značajne greške čak i u svakodnevnom životu. Gledano s metodičkog stajališta, učenici se ne rađaju s tom vještinom zaključivanja, nego je ona posljedica vježbe. Učiteljeva pomoć je vrlo značajna kod razvijanja te vještine zaključivanja. Učiteljev zadatak je da omogući učenicima dovoljan broj primjera kroz koje učenik sam treba proći, ali uz njegovo vodstvo. To ne znači da se učenicima trebaju prezentirati rješenja nego ih poticati na zaključivanje. Geometrijski dokazi su zapravo pojednostavljene problemske situacije koje pomažu razviti korisne strategije pronalaženja i pretraživanja postojećeg znanja.

Ponekad deduktivno zaključivanje nije moguće primjeniti, no postoje i drugi načini zaključivanja. Ali jedno je sigurno. Zaključiti znači razumjeti, objasniti i dokazati [3]. Ovo nam govori da učitelji trebaju stvoriti sigurno i poticajno okruženje za razgovaranje, slušanje, ispitivanje, objašnjavanje i dokazivanje. Zapravo, učenici bi trebali samostalno stvarati smislene pretpostavke, primjerice da određena svojstva nekog objekta vrijede u danim uvjetima. Također, važno ih je pohvaliti kada preoblikuju svoje pretpostavke kao posljedicu eksperimentiranja ili rasprave sa svojim vršnjacima. Takvo okruženje poticajno je za razvoj matematičkog mišljenja. Ponekad se objašnjavanje odnosa čini očito ili intuitivno, no intuitivno zaključivanje prethodi formalnom zaključivanju, a primjećivanje elemenata i odnosa među njima razvija tijekom zaključivanja. Možemo reći da je intuicija zapravo teorija koja potiče donošenje zaključka.

Promotrimo sljedeći primjer:

Dana su dva pravca a i b koji se sijeku i točka P koja leži na jednom od njih (Slika 5). Konstruirajte kružnicu kojoj su tangente pravci a i b , i koja sadrži točku P . Objasnite svoje rješenje.

Kakav tijek zaključivanja bismo željeli razviti kod učenika? Najprije, učenici bi se trebali dosjetiti da je tangenta okomita na radijus kružnice. Zatim slijedi



Slika 5: Pravci koji se sijeku

konstrukcija okomice koja prolazi točkom P . Sada bi učenici trebali zaključiti da će središte kružnice ležati na toj okomici. Zatim bi učenici trebali zaključiti da će središte kružnice ležati i na simetrali kuta kojeg zatvaraju pravci pa slijedi konstrukcija simetrale kuta. Sjecište okomice i simetrale određuje središte kružnice. Ako koristimo programe dinamične geometrije, učenici mogu i eksperimentirati. Mogu konstruirati pravac okomit na donji pravac i pomicanjem dovesti ga do središta a kao završetak zadatka, trebali bi razmotriti leži li središte kružnice na simetrali kuta između dva zadana pravca. Time je ujedno zadatak riješen. Ovaj zadatak bi bilo dobro provesti kao aktivnost u paru gdje će učenici, kroz zajedničko zaključivanje, doći do rješenja. Učenici najbolje razvijaju zaključivanje kroz raznovrsne aktivnosti poput međusobnog komuniciranja, objašnjavanja drugima i sebi onoga što vide, što su otkrili i što oni misle. Problemi koji se mogu razmatrati pomoću dinamične geometrije pružaju učenicima priliku za komunikaciju, objašnjavanje, uvjeravanje i pomažu razvijati vještinu dokazivanja.

3.3 Jezik i komunikacija

Postoje mnogi novi izrazi koje učenici uče i koriste u geometriji, a to su osim imena oblika, također i nazivi za svojstva u geometriji. Učenike može zbuniti značenje matematičkih pojmova, posebno kada isti termin u drugom kontekstu poprima drugačije značenje. Nepoznavanje matematičke terminologije u geometriji može ometati učenje. U radu [8] prikazan je upravo takav slučaj. Učenici u sedmom razredu dobili su radni listić koji zahtijeva korištenje dinamične geometrije za istraživanje vanjskih kutova mnogokuta. Niz uputa na radnom listiću navodio je učenike da nacrtaju peterokut s vanjskim kutovima, a zatim da izmjere veličinu kutova prije razvlačenja figure. Nakon toga učenici su trebali razvlačiti peterokut da vide što se događa sa zbrojem vanjskih kutova tog peterokuta. Na listiću je također bilo ostavljeno mjesto gdje su učenici trebali napisati svoju pretpostavku. Jedna od uputa je glasila: "Pomiči dijelove peterokuta i provjeri mijenja li se zbroj. Pri tom pazite da peterokut ostane konveksan." Učenici nisu znali što moraju napraviti jer nisu razumjeli značenja riječi konveksan i pretpostavka. Ovo pokazuje kako je

važno objasniti učenicima značenje pojmova i izraza u zadatku. Ovdje je učitelj prije početka aktivnosti trebao s učenicima raspraviti o zahtjevima zadatka.

Rasprava o pojmovima važna je za razvoj smislenog geometrijskog mišljenja jer nakon sata gdje se koristilo podučavanje po modelu prenošenja znanja, neki učenici pogađaju što je učitelj htio reći. Uspješniji pristup uključuje suradnju i međusobnu komunikaciju učenika o matematičkim idejama i pojmovima koji se koriste za opis, objašnjavanje ili pretpostavljanje tih ideja. Učenici trebaju razmatrati i druge točke gledišta kako bi sami sebi razjasnili značenje ideja, a također i kako bi postigli zajedničko mišljenje o tim idejama.

3.4 Konstruiranje

U stvarnom svijetu, graditelji se ne pouzdaju u metodu mjerenja "od oka". Kako bi se uvjerali da je njihova građevina pravokutnog oblika, graditelji ne mjere samo duljine stranica te građevine, nego mjere i duljinu dijagonala. Ovo je nužno kako bi bili sigurni da će izgrađeni zidovi zatvarati pravi kut. Mjerenjem dijagonala graditelji dobivaju potrebne podatke bez mjerenja kutova. Dijagonale moraju biti jednake duljine. To je nužan kriterij kako bi se uvjerali da je izgrađeni paralelogram zapravo pravokutnik. Upravo je takvo oslanjanje na svojstva karakteristično za geometriju. Prije svega, u geometriji je važno je razlikovati skicu od konstrukcije. Konstrukcija je teoretski objekt koji je izgrađen pomoću geometrijskih svojstava. Tradicionalni pribor za konstruiranje u geometriji su šestar i ravnalo. Razni programi dinamične geometrije, poput Sketchpada i Geogebre, korisni su za konstrukcije i razvijanje geometrijskog mišljenja. Savijanje papira je također korisno, a poželjno ga je koristiti u kombinaciji s programom dinamične geometrije.

Programi dinamične geometrije omogućuju lako mijenjanje položaja ucrtanih objekata tako da odnosi među njima ostanu sačuvani. Učitelji trebaju biti svjesni da učenici ponekad koriste te programe radije za crtanje oblika "od oka" ili "prostom rukom", nego pomoću geometrijskog alata koji je uključen u izbornik programa za konstruiranje oblika. Oblici koje učenici kreiraju "od oka" ne ostanu kvadrati ili pravokutnici kada im, primjerice, povučemo vrhove ili stranice. Učenje može biti ograničeno i zbog toga što učenici ne znaju koristiti dinamične aspekte programa za istraživanje oblika. Učitelji trebaju pomoći učenicima da razlikuju crtanje "od oka" ili "prostom rukom" od konstruiranja likova pomoću programskih alata. Poznavanje programa će unaprijediti znanja i vještine učenika i s vremenom se one trebaju nadograđivati. U početku se učenicima mogu ponuditi već napravljeni oblici koje će koristiti za istraživanje. Primjerice, u nekom od programa dinamične geometrije učenicima se mogu dati dvije dužine različitih duljina koje se sijeku. Učenici mogu konstruirati i četverokut koristeći zadane dužine kao dijagonale. Pomicanjem jedne od tih zadanih dužina, učenici trebaju zaključiti što se mijenja, a što ostaje nepromijenjeno. Bolji pristup ovom zadatku bio bi postavljanje niza pitanja tipa "Što

ako ...?”. Na primjer, ”Što ako se zadane dužine koje se sijeku raspolavljaju?“ ili ”Što ako se zadane dužine sijeku pod pravim kutom?“ Takva pitanja su izuzetno važna, a dobro osmišljene aktivnosti usmjerit će pažnju učenika na svojstva lika koja se ne mijenjaju. Pitanje ”Što se događa s likom?“ je pitanje koje može stvoriti dugačke opise o liku pa zbog toga učitelji trebaju koristiti preciznija pitanja poput ”Što ostaje isto, a što se mijenja?”, koja daju sažet i nedvosmislen odgovor. Takvo pitanje navodi učenike da pronađu elemente lika koji se ne mijenjaju tj. bitna i osnovna svojstva objekta kojeg proučavaju i korisna su za razrednu raspravu.

Dobro je koristiti već napravljene oblike ili datoteke u ranim fazama učenja korištenja programa dinamične geometrije (preporuke prema [2]):

- kada su učenici u fazi prepoznavanja oblika i svojstava, ali ne razumiju njihove međusobne odnose (van Hiele, razina 2),
- kada za nastavne ciljeve koje učenici moraju postići nije potrebno konstruiranje pojedinih oblika
- kada je konstrukcija presložena.

Učitelji bi trebali poticati i ohrabrivati učenike da konstruiraju:

- kada steknu povjerenje i vještine upravljanja programom,
- kada razumiju sva svojstva zadanih oblika i imaju ideje kako međusobno povezati ta svojstva,
- kada proces konstrukcije dovodi do planiranih ishoda nastavne teme,
- kada konstrukcija pruža izazov vrijedan truda učenika,
- za otvorene tipove zadataka.

4 I za kraj

Slavni detektiv Sherlock Holmes nedavno se vratio na filmska platna, ovaj put u američkoj ekranizaciji. No, ova ekranizacija ne ocrtava detektiva u svojoj pravoj veličini. Novi Holmes velikom se dijelom oslanja se na fizičku snagu, a ne samo na one karakteristike koje su ga u djelima Sir Arthura Conana Doylea učinile bezvremenskim. Holmesova trajna kvaliteta ne leži u vještini predviđanja mogućih protivnikovih udaraca dvadeset poteza ranije, nego se očituje u njegovoj iznimnoj sposobnosti korištenja znanja iz širokog spektra znanosti, njegovom logičkom mišljenju i ustrajnosti da poveže naoko nepovezane informacije u jedinstvenu sliku

da bi razriješio intelektualne zgonetke. Iako nije zamišljen kao matematičar, gledano iz ove perspektive, Sherlock Holmes posjedovao je ključne osobine matematičara, i zaista, bio bi izuzetan primijenjeni matematičar, čijim primjerom se vrijedi poslužiti prilikom matematičkog obrazovanja. Možda je i sam Sir Arthur Conan Doyle bio toga svjestan, izgradivši lik najvećeg Holmesova neprijatelja, Napolena zločina Jamesa Moriartyja, upravo na temeljima karakteristika analognih Holmesovima, ali i sasvim suprotnih pobuda te kao - sveučilišnog profesora matematike.

Literatura

- [1] A. Čižmešija, R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*, Zbornik radova 4. Kongresa nastavnika matematike, Zagreb, HMD i Školska knjiga, 2010., 143 – 162.
- [2] V. Goose, G. Stillman, C. Vale, *Teaching Secondary school mathematics*, Allen and Unwin, Australija, 2008.
- [3] R. Hershkowitz, *About reasoning in geometry*, In C. Mammana and V. Villani (eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, Dordrecht, Kluwer, 1998., 29–37.
- [4] S. Johnston-Wilder, J. Mason *Developing thinking in geometry*, London, Open University, 2005.
- [5] K. Jones, *Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems*, In C. Mammana and V. Villani (eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*, Dordrecht, Kluwer, 1998., 78–83.
- [6] Ž. Milin Šipuš, A. Čižmešija, *Spatial Ability of Students of Mathematics Education in Croatia Evaluated by the Mental Cutting Test*, Ann. Math. Inform. 40 (2012), 203-216.
- [7] M. Pavlović: *Kako učiti i podučavati geometriju*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2014.
- [8] D. Rasmussen, S. Rasmussen, D. Bennett, *Teaching geometry with The Geometer's Sketchpad: Teaching notes and sample activities*, Berkeley, CA, Key Curriculum Press, 1995.