Grčko - kineski stil u teoriji brojeva

Ivan Matić, Domagoj Ševerdija

3. rujna 2009.

Sažetak

Opisujemo provođenje Euklidova algoritma na kineskom abakusu te izvodimo ograničenja provođenja tog postupka.

Ključne riječi: *abakus, Euklidov algoritam, ograničenja pri računanju.*

1 Uvod

Donald E. Knuth, jedan od vodećih svjetskih stručnjaka u računarstvu, tvorac TeX-a i otac brojnih matematičkih tehnika analize složenosti algoritama je u svom čuvenom djelu [2] napisao: 'Euklidov algoritam je pradjed svih algoritama, jer se radi o najstarijem netrivijalnom algoritmu koji je preživio do današnjih dana'. Navedeni algoritam se pojavljuje još u Euklidovim *Elementima*, napisanima oko 300-te godine prije Krista, preciznije u trećoj i desetoj knjizi kao niz od nekoliko propozicija. Napomenimo kako povijesni izvori navode da je Euklidov algoritam najvjerojatnije otkriven od strane nekog matematičara iz pitagorejske škole, a Euklid ga je u svojim *Elementima* sakupio među poznatim rezultatima.

Kineski abakus se ipak pojavljuje nešto kasnije, u 14-om stoljeću, no svejedno predstavlja prvo pomagalo pri računanju. Štoviše, bazirano upravo na principu kineskog abakusa su razvijeni i današnji kalkulatori. Zainteresirani čitatelj može detaljni opis kineskog abakusa i upute o njegovu korištenju pronaći u [4] i [6].

Osnovna ideja ovoga rada jest spojiti prve poznate pretke algoritama i računala - prikazati način korištenja Euklidova algoritma na kineskom abakusu (u daljnjem ćemo umjesto kineski abakus pisati samo abakus). Pokazati ćemo koliko upotrebljiva može biti kombinacija pradavnog algoritma i 'primitivne' računske sprave. Osim toga, kako je abakus ipak relativno ograničen u broju znamenki koje je na njemu moguće zapisati, detaljno iznosimo ograde na veličinu brojeva uključenih u primjenu Euklidova algoritma, što se može smatrati prirodnim nastavkom rezultata iznesenih u radu [4].

Ovim radom također želimo prikazati i još jedan edukativno - metodički aspekt abakusa, koji prezentira slikovit način usvajanja važnog algoritamskog postupka. Takav način pristupa približava teorijske postupka te otvara i mnoge daljnje mogućnosti i pitanja. Na neka od pitanja, koja se prirodno postavljaju prilikom rada na abakusu, dajemo odgovor u ovom članku. Metode korištene prilikom dokaza su elementarne i intuitivne, žive između osnova teorije brojeva, kombinatorike i elementarne matematike, te bi morale biti razumljive i studentima i profesorima i učenicima raznih uzrasta.

Opišimo detaljnije sadržaj članka: u slijedećemo poglavlju navodimo potrebne činjenice iz teorije brojeva te dajemo detaljan opis Euklidova algoritma, dok u narednom poglavlju opisujemo njegovu upotrebu na kineskom abakusu. U posljednja dva poglavlja najprije iznosimo ograde pri korištenju Euklidova algoritma na standardnom kineskom abakusu s 13 stupaca te generalizaciju ovih ograda u jednom interesantnom općem slučaju.

Autori su asistenti na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku.

2 Euklidov algoritam

Djeljivost je osnovni pojam u teoriji brojeva. Za cijele brojeve a i d, $d \neq 0$, kažemo da d dijeli a ili da je a djeljiv s d ako postoji cijeli broj b takav da vrijedi $a = d \cdot b$. To zapisujemo $d|a$. Ako a nije djeljiv s d, pišemo $d \nmid a$.

Neka su a i b cijeli brojevi. Broj c zovemo zajedničkim djeliteljem brojeva a i b ukoliko $c|a$ i $c|b$. Ako je $a^2 + b^2 > 0$, tada postoji konačno mnogo zajedničkih djelitelja brojeva a i b. Najvećeg među njima zovemo najveći zajednički djelitelj brojeva a i b, te ga označavamo s (a, b) ili s $NZD(a, b)$ (u stranoj literaturi je česta i oznaka $GCD(a, b)$). Očito je $(a, b) \geq 1$, a ukoliko se postiže prethodna jednakost za brojeve a i b kažemo da su relativno prosti.

Kako odrediti najveći zajednički djelitelj dvaju brojeva? Možemo se nadalje ograničiti na prirodne brojeve, te pokušajmo odrediti $(735, 495)$. Rastavom ovih brojeva na proste faktore dobivamo $735 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$ i $495 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Zajednički prosti faktori ovih brojeva su 3 i 5 pa je $(735, 495) = 3 \cdot 5 = 15$.

Ovaj pristup možemo i generalizirati, označimo u tu svrhu skup svih prostih brojeva s $\mathcal{P}$. Tada proizvoljan prirodan broj a možemo zapisati u obliku $a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(a)}$. Primijetimo kako je samo konačno mnogo nenegativnih cijelih brojeva $p^{\alpha_p(a)}$ veće od nule. Ako sada zapišemo prirodne brojeve a i b u prethodnom obliku, tj. $a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(a)}$ i $b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(b)}$, dobivamo

$$(a, b) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{min\{\alpha_p(a), \alpha_p(b)\}}.$$

No, unatoč točnosti ovog pristupa, kolika je njegova primjenjivost? Znamo kako ponekad već i za troznamenkaste brojeve nije lako odrediti jesu li prosti ili ne, dok rastav višeznamenkastih brojeva na proste faktore predstavlja i daleko veći zalogaj. Možemo li nekako izbjeći mukotrpno rastavljanje na proste faktore?

I upravo je na to pitanje odgovorio Euklid, još prije nekih 2300 godina. Preciznije, Euklidov algoritam služi upravo za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju prirodnih brojeva.

Kako bi opisali Euklidov algoritam, potreban nam je i slijedeći fundamentalni rezultat ([1], Teorem 1.1):

Teorem 2.1 (Teorem o dijeljenju s ostatkom)**.** *Neka su $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{N}$. Tada postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r, $0 \leq r < b$ takvi da je $a = qb + r$. Broj q se naziva kvocijentom cjelobrojnog dijeljenja, dok se broj r naziva ostatak pri dijeljenju.*

Opišimo sada Euklidov algoritam. Kako smo naveli i ranije, ograničavamo se na prirodne brojeve. Neka su, dakle, a i b prirodni brojevi. Možemo pretpostaviti da je $a \geq b$, u suprotnom ih zamijenimo. Primjenom prethodnog teorema dobivamo slijedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 \\
b &= q_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k \\
r_{k-1} &= q_{k+1} r_k.
\end{aligned}$$

Tvrdimo da tada vrijedi $(a, b) = r_k$, tj. najveći zajednički djelitelj brojeva a i b jednak je posljednjem ne-nul ostatku. Dokazat ćemo danu tvrdnju na dva načina:

Lako se vidi da za svaki $c \in \mathbb{Z}$ vrijedi $(a, b) = (a, b - ac)$. Time redom dobivamo:

$$(a, b) = (a - q_1 b, b) = (r_1, b) = (r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, r_2) = (r_1 - q_3 r_2, r_2) = (r_3, r_2) = \cdots = (r_k, 0) = r_k,$$

jer je $r_k > 0$.

U drugom dokazu koristimo samo djeljivost - kako $(a, b)|a$ i $(a, b)|b$, iz prve jednakosti slijedi $(a, b)|r_1$. Na isti način iz druge jednakosti slijedi $(a, b)|r_2$. Ponavljanjem ovog postupka zaključujemo $(a, b)|r_k$, tj. $(a, b) \leq r_k$.

Nadalje, iz posljednje jednakosti slijedi da $r_k|r_{k-1}$, što, zajedno s pretposljednjom jednakosti povlači $r_k|r_{k-2}$. Nastavljajući ovaj proces, naposlijetku dobivamo $r_k|r_1$, $r_k|b$ i $r_k|a$. Sada znamo da je r_k djelitelj brojeva a i b, što povlači $r_k \leq (a, b)$. Dobivene dvije nejednakosti daju $(a, b) = r_k$.

Ilustrirajmo korištenje Euklidova algoritma na primjeru:

Primjer. *Odredimo* $(735, 495)$.

Redom imamo:
$735 = 1 \cdot 495 + 240$
$495 = 2 \cdot 240 + 15$
$240 = 16 \cdot 15$,
odakle slijedi $(735, 495) = 15$.

3 Provođenje Euklidova algoritma na abakusu

Osnovna značajka Euklidova algoritma (osim njegove točnosti, naravno) je upravo njegova jednostavnost. Baziran je na cjelobrojnom dijeljenju i dijeljenje je jedino što je potrebno kako bi se opisani postupak mogao provesti.

Postupak dijeljenja na abakusu je detaljno opisan u radu [4], poglavlju 3.4., te ga iz tog razloga ovdje nećemo ponavljati. Navesti ćemo jedino dodatna pojašnjenja potrebna pri provođenju Euklidova algoritma. Iako se Euklidov algoritam sastoji od samih dijeljenja, u svakom od koraka će se promijeniti i djeljenik i djelitelj te je potrebno precizirati kako iz postavki jednog dijeljenja na abakusu doći do slijedećeg koraka.

Neka su a, $b \in \mathbb{N}$, pretpostavimo da je $a \geq b$. Tada će u prvom dijeljenju a biti djeljenik, dok će b biti djelitelj. Dakle, na lijevih $\lfloor \log a \rfloor + 1$ stupaca abakusa je prikazan broj a, zatim slijedi prazan stupac, dok je na slijedećih $\lfloor \log b \rfloor + 1$ stupaca prikazan broj b (podsjetimo kako prirodan broj a ima upravo $\lfloor \log a \rfloor + 1$ znamenki). Naravno, pretpostavljamo kako je na abakusu moguće provesti dijeljenja broja a brojem b, što znači da smo u mogućnosti na abakusu zapisati i cjelobrojni kvocijent i svaki parcijalni produkt dobiven nakon određivanja pojedine znamenke kvocijenta te također ostaviti i po jedan prazan stupac između djelitelja i kvocijenta te između kvocijenta i parcijalnih produkata.

Nakon što izvršimo prvo dijeljenje, na stupcima s lijeve strane abakusa se nalazi ostatak pri dijeljenju (kojeg smo pri opisu algoritma označili s r_1), ispred kojega može biti i nekoliko praznih stupaca. Prije djelitelja b dolazi jedan prazan stupac, dok nakon djelitelja i još jednog praznog stupca na abakusu stoji zapis kvocijenta pri cijelobrojnom djeljenju, tj. q_1. Na stupcima s desne strane abakusa se nalazi zapis posljednjeg parcijalnog produkta. Dakle, nakon izvršenog prvog dijeljenja, na abakusu imamo zapisane i b i r_1 i q_1. Primijetimo kako za daljnje provođenje Euklidova algoritma q_1 nije potreban. U slijedećem koraku trebamo podijeliti b s r_1, pa ih moramo na abakusu zapisati u odgovarajućem poretku.

Tu se javlja i moguća poteškoća - moramo zamijeniti uloge od b i r_1, tj. moramo okrenuti njihov zapis tako da se na stupcima s lijeve strane abakusa nalazi zapis broja b, a zatim, nakon jednog praznog stupca, dolazi zapis broja r_1, što je upravo suprotno od trenutne situacije. Da kojim slučajem radimo na papiru, do ovakvih problema ne bi moglo doći, jer papir pruža dovoljno mjesta za zapisivanje brojeva. No, upravo ovakve, naizgled ograničavajuće, situacije iziskuju pronalaženje drugih mogućnosti korištenjem samo onoga čime raspolažemo, tj. samo i isključivo abakusa. U mogućnostima i potrebama za različitim mogućim pristupima i postupcima leži velika edukativna i metodička prednost rada na abakusu pred radom na računalu, kalkulatoru ili papiru (više o toj temi će se moći pročitati u [5]).

Svakako želimo izbjeći situaciju u kojoj bi morali pamtiti jedan od brojeva b ili r_1, kako bi ga mogli izbrisati s abakusa te na njegovo mjesto zapisati drugog. Prema tome, da bi lako i efikasno zamijenili mjesta zapisa navedenih brojeva, moramo jednog od njih zapisati prije nego ga izbrišemo, a jedino na što ga možemo zapisati je upravo - abakus.

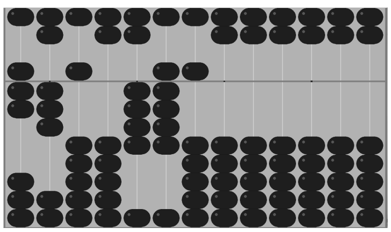
Primijetimo kako nakon zapisa broja b na abakusu preostaje još nekoliko stupaca. Na tim stupcima su prikazani kvocijent q_1 i jedan parcijalni produkt, oba irelevantni za daljnji postupak. Izbrišemo li zapise, na stupcima s desne strane abakusa možemo zapisati broj r_1, te ga izbrisati s lijeve strane i tamo prebaciti zapis broja b. Nakon toga izbrišimo i zapisa broja b te na odgovarajuće stupce preselimo zapis od r_1 i spremni smo za idući korak. Preostaje još provjeriti da li na stupcima desno od zapisa broja b raspolažemo s dovoljno mjesta za prikaz broja r_1.

Kako je dijeljenje bilo moguće provesti, nakon zapisa prve znamenke kvocijenta smo raspolagali s dovoljno mjesta da na stupcima s desne strane abakusa zapišemo i prvi parcijalni produkt, koji je veći ili jednak broju b, jer je dobiven množenja prve znamenke kvocijenta brojem b. S druge strane, kako je r_1 ostatak pri dijeljenju s b, mora vrijediti $r_1 < b$. Dakle, ako smo s desne strane prikaza broja b imali dovoljno mjesta da zapišemo broj koji je veći ili jednak od b, imamo dovoljno mjesta i za prikaz broja r_1.

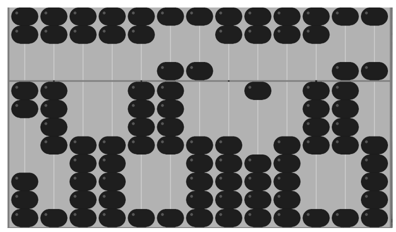
Primijetimo kako vrijedi i više - ako je na abakusu moguće dijeliti s brojem b, tada se desno od prikaza broja b moraju nalaziti barem $\lfloor \log b \rfloor + 4$ stupca.

Sada opisani postupak samo nastavljamo dok napokon ne dobijemo dijeljenje s ostatkom jednakim nuli. Tada će nekoliko stupaca s lijeve strane abakusa biti prazno, dok će se na prvim nepraznim stupcima (gledano slijeva) nalaziti upravo (a, b).

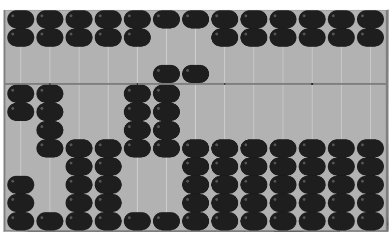
Na slijedećim slikama je prikazano provođenje Euklidova algoritma na abakusu s 13 stupaca, pomoću kojeg određujemo $(735, 495)$.



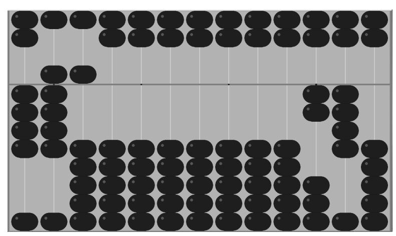
a) Početni prikaz brojeva 735 i 495.



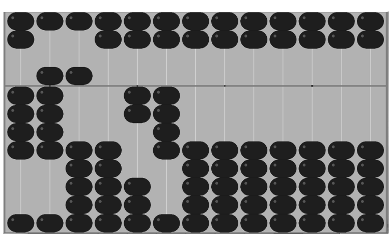
b) Završetak prvog dijeljenja: $240, 495, 1, 495$.



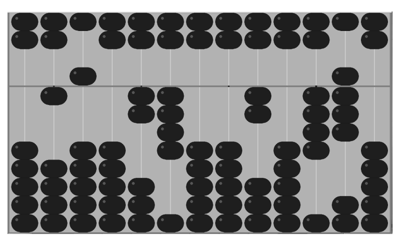
c) Slijedi zamjena mjesta 240 i 495 tehnikom pomoćnih stupaca.



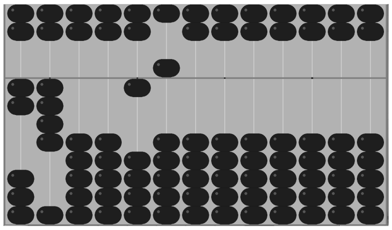
d) Korak zamjene: $495, 240$.



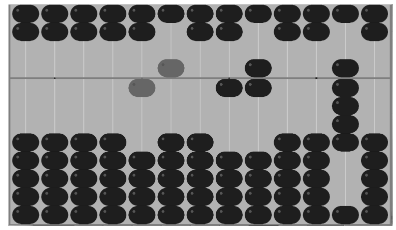
e) Završetak zamjene: $495, 240$.



f) Završetak drugog dijeljenja: $15, 240, 2, 480$.



g) Postavljamo slijedeće dijeljenje: 240, 15.



h) Završetak Euklidova algoritma, sivom bojom je označen (735, 495): 15,16,90.

4 Koliko se toga na abakusu može izračunati?

Računanje na abakusu je ograničeno brojem raspoloživih stupaca te nije za očekivati da na standardnom kineskom abakusu s 13 stupaca možemo odrediti najveći zajednički djelitelj brojeva koji imaju po 10-ak znamenki. Pokušat ćemo dati odgovor na pitanje - za dani prirodni broj a, koji je najveći broj b takav da na abakusu s 13 stupaca možemo odrediti (a, b)?

Naravno, ovo pitanje se može i generalizirati, tj. možemo tražiti ograničenja pri korištenju Euklidova algoritma na abakusu s n stupaca, gdje je n neki prirodan broj. U slijedećem poglavlju ćemo se kratko osvrnuti i na generalizaciju nekih posebnih slučajeva.

Neka je $a \in \mathbb{N}$. Želimo odrediti najveći prirodan broj b takav da je na abakusu s 13 stupaca provediv kompletan Euklidov algoritam za određivanje broja (a, b). Počnimo s ključnom općenitom lemom:

Lema 4.1. *Neka su a, b, n prirodni brojevi te neka je $a \geq b$. Ako na abakusu s n stupaca možemo provesti dijeljenje broja a brojem b, tada na istom abakusu možemo provesti i dijeljenje broja b ostatkom pri dijeljenju a s b.*

Dokaz. Jednostavnosti notacije radi, označimo s x broj znamenki broja a. Kako je $b \leq a$, slijedi da je broj znamenki broja b jednak $x - k$, za neki nenegativni cijeli broj k. Da bi mogli na abakusu podijeliti broj a brojem b, moraju biti zadovoljena slijedeća dva ključna uvjeta:

- Moramo biti u mogućnosti zapisati prvi parcijalni produkt, jedini parcijalni produkt za kojeg smo sigurni da je različit od nule, jer sve znamenke kvocijenta (osim vodeće) mogu biti jednake nuli. Za to nam je potrebno x stupaca za zapisa broja a, $x - k$ za zapis broja b, 3 prazna stupca, 1 stupac za zapis prve znamenke kvocijenta te barem još $x - k$ stupaca za zapis prvog parcijalnog produkta. Napomenimo da ne-nul parcijalni produkt ima ili $x - k$ ili $x - k + 1$ znamenki, jer je dobiven množenjem $x - k$-znamenkastog broja b prirodnim brojem manjim od 10. Ukupno, moramo imati barem $3x - 2k + 4$ stupca, tj. $3x - 2k + 4 \leq n$.

- Moramo biti u mogućnosti zapisati posljednji parcijalni produkt, koji može imati i samo jednu znamenku, tj. može biti jednak nuli. Za to nam je potrebno x za zapis broja a, $x - k$ za zapis broja b, 3 prazna stupca, barem k stupaca za zapis kvocijenta (koji ima ili k ili $k + 1$ znamenki) te barem jedan stupac za zapis posljednjeg parcijalnog produkta. Ukupno, slijedi $2x + 4 \leq n$.

Ostatak pri dijeljenju brojeva a i b je strogo manji od b, označimo taj broj s c, a njegov broj znamenki s $x - l$, gdje je $l \geq k$.

Pogledajmo uvjete potrebne za dijeljenje broja b brojem c:

Slično kao gore, za zapis prvog parcijalnog produkta potrebno nam je najviše $x - k + x - l + 3 + 1 + x - l + 1 = 3x - k - 2l + 5$ stupaca, što je strogo manje od n ukoliko je $l \geq 1$.

Kako bi mogli zapisati posljednji ne-nul parcijalni produkt, potrebno nam je $x-k$ stupaca za zapis broja b, $x-l$ stupaca za zapis broja c, 3 prazna stupca, najviše $l-k+1$ stupaca za zapis kvocijenta te najviše $x-l+1$ stupaca za zapis posljednjeg parcijalnog produkta, tj. ukupno nam je potrebno najviše $3x-2k-l+5$ stupaca. Ukoliko je $l \geq 1$, dobivamo da nam je potrebno najviše $3x-2k+4$ stupaca, što je manje ili jednako n.

Preostaje još ispitati slučaj $l = 0$. Kako je $l \geq k$, dobivamo $k = 0$ i $x = x-k = x-l$, tj. brojevi a, b i c imaju pa jednako mnogo znamenki. Tada je za dijeljenje broja a brojem b i za dijeljenje broja b brojem c potreban identičan broj stupaca, koji je jednak $3x+4$ ($3x$ za zapis djeljenika, djelitelja te prvog i jedinog parcijalnog produkta, 3 slobodna stupca i 1 stupac za zapis kvocijenta) te je prvo dijeljenje moguće ako i samo ako je moguće drugo. Ovim je tvrdnja leme dokazana. ■

Iz prethodne leme proizlazi bitna činjenica - ako smo u mogućnosti na abakusu provesti prvi korak Euklidova algoritma, tada smo u mogućnosti provesti i čitav algoritam!

Sada možemo i preformulirati prethodno postavljeni problem: za $a \in \mathbb{N}$, treba odrediti najveći broj b koji možemo na abakusu podijeliti s a, dok u slučaju da takav ne postoji treba odrediti najveći broj b kojim možemo na abakusu podijeliti broj a. Očito, ukoliko za $a \in \mathbb{N}$ ne postoji niti jedan $b \in \mathbb{N}$ za koji je moguće na abakusu podijelite a s b, tada ne postoji niti jedan b koji je na abakusu moguće podijeliti s a, jer bi takav b morao biti veći ili jednak a,

Kako bi odgovorili na ovo pitanje, promatrati ćemo nekoliko odvojenih slučajeva:

(I) Neka je $a \geq 10000$. Takav broj ima barem 5 znamenki. Za dijeljenje broja a s brojem od x znamenki nam je potrebno barem $5+x+5-x+3+1 = 14$ stupaca (jer kvocijent ima barem $5-x$, a posljednji parcijalni produkt barem jednu znamenku). Dakle, na standardnom kineskom abakusu s 13 stupaca nije moguće podijeliti broj a niti s jednim brojem, te za ovakav a ne postoji niti jedan $b \in \mathbb{N}$ za koji je moguće odrediti (a, b).

Do istog zaključka smo mogli doći i korištenjem Propozicije 4.4 iz [4].

(II) Neka je $1000 \leq a \leq 9999$. Pretpostavimo da postoji $b \in \mathbb{N}$ takav da na abakusu s 13 stupaca možemo podijeliti b s a. Tada je $b \geq a$. Ako b ima više od 4 znamenke, iz slučaja (I) slijedi da je za ovo dijeljenje potrebno barem 14 stupaca. Dakle, b mora imati točno 4 znamenke. Nakon određivanja vodeće znamenke kvocijenta, prvi parcijalni produkt će imati također 4 znamenke te je za zapis potrebno $4+4+4+1+3 = 16$ stupaca. Slijedi da traženi b ne postoji. Dakle, najveći b za koji možemo odrediti (a, b) je upravo najveći b kojim možemo podijeliti a. Takvi brojevi b su opisani u [4], poglavlje 4.3.

(III) Neka je $100 \leq a \leq 999$. Odredimo koliko najviše znamenki može imati broj koji na abakusu možemo podijeliti s a. Označimo traženi broj znamenki s x. Za zapis djeljenika, broja a, prve znamenke kvocijenta, prvog parcijalnog produkta i tri prazna stupca, potrebno nam je barem $x+3+1+3+3 = 10+x$ stupaca. Kako raspolažemo s 13 stupaca, slijedi da je $x \leq 3$. Konačno rješenje ovog slučaja je dano u slijedećoj propoziciji:

Propozicija 4.2. *Neka je $100 \leq a \leq 999$. Tada na abakusu s 13 stupaca možemo podijeliti broj 999 brojem a.*

Dokaz: Primijetimo kako je cjelobrojni kvocijent dobiven pri dijeljenju brojeva 999 i a jednoznamenkast, točnije jednak je $\lfloor \frac{999}{a} \rfloor$. Iz tog razloga se dijeljenje sastoji od samo jednog koraka te imamo i samo jedan parcijalni produkt, koji je troznamenkast (jednak $\lfloor \frac{999}{a} \rfloor \cdot a$). Za provođenje opisanog kratkog dijeljenja nam je potrebno $3+3+1+3+3 = 13$ stupaca, točno koliko i imamo. ■

Odatle slijedi da je traženi najveći broj b za koji možemo odrediti (a, b) jednak 999.

(IV) Neka je $10 \leq a \leq 99$. Sada smo u prilici tražiti najveći b koji možemo na abakusu podijeliti s a. Kao i ranije, lako se može vidjeti da b može najviše biti četveroznamenkast.

Kako maksimizirati b? Traženi b će biti veći što je kvocijent $q = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ veći pa ćemo i preko najvećeg kvocijenta dobiti najveći mogući b. Kvocijenti koje možemo dobiti dijeljenjem četveroznamenkastog broja s a imaju ili dvije ili tri znamenke, nama očito više odgovara druga mogućnost. Proučiti ćemo precizno postupak dijeljenja kako bi dobili dodatnu informaciju o najvećem ostvarivom troznamenkastom kvocijentu q.

Na zapis brojeva a, b i standardna tri prazna stupca smo potrošili ukupno 9 stupaca. Prema tome, nakon što odredimo prvu znamenku kvocijenta nam preostaju još tri slobodna stupca za zapis prvog parcijalnog produkta, koji i može imati najviše tri znamenke. Dakle, u prvom koraku nema nikakvih ograničenja.

Nadalje, nakon što odredimo drugu znamenku kvocijenta nam preostaju svega dva stupca za zapis drugog parcijalnog produkta. Odatle slijedi da umnožak druge znamenke kvocijenta i broja a mora biti manji od 100.

Napokon, nakon što odredimo treću i posljednju znamenku kvocijenta preostaje samo jedan prazan stupac za zapis trećeg parcijalnog produkta. Kako je $a \geq 10$, zaključujemo da treća znamenka kvocijenta mora biti jednaka nuli.

Iz dobivenih podataka ćemo odrediti najveći mogući kvocijent q. Definiramo $x = \lfloor \frac{9999}{a} \rfloor$. Očito je $101 \leq x \leq 999$, a x je upravo najveći prirodan broj koji množenjem s a daje umnožak manji od 10000. Kako bi dobili najveći mogući kvocijent koji nama odgovara, moramo znamenke jedinica i desetica broja x preurediti u skladu s prethodnim uvjetima.

Neka je $z_1 = \lfloor \frac{x}{100} \rfloor$ i $z_2 = \lfloor \frac{x - z_1 \cdot 100}{10} \rfloor$ (z_1 je znamenka stotica, dok je z_2 znamenka desetica broja x). Definiramo $z_2' = \min\{\lfloor \frac{99}{a} \rfloor, z_2\}$. Sada je $q = z_1 \cdot 100 + z_2' \cdot 10$ najveći odgovarajući kvocijent. Preostaje još odrediti najveći b. Dobiveni kvocijent q dobivamo cjelobrojnim dijeljenjem s a svakog od brojeva $a \cdot q + k$, $0 \leq k \leq a - 1$. Najveći četveroznamenkasti među tim brojevima je traženi b.

Dakle, $b = \min\{a(q+1) - 1, 9999\}$.

Na primjer, za $a = 81$ dobivamo $x = 123$, $q = 110$ te $b = 8990$.

(V) Neka je $1 \leq a \leq 9$. Slično kao u prethodnom slučaju, tražimo najveći b s kojim možemo podijeliti a. Taj b će ponovno biti četveroznamenkast. Opet želimo odrediti najveći ostvarivi kvocijent, za koji nam najviše odgovara da također bude četveroznamenkast. Kako dijelimo s brojem manjim od 10, slijedi da će svi parcijalni produkti biti najviše dvoznamenkasti. Odatle direktno dobivamo kako nema nikakvih uvjeta na prve tri znamenke kvocijenta, dok četvrta mora biti takva da u produktu s brojem a daje broj manji od 10.

Neka je opet $x = \lfloor \frac{9999}{a} \rfloor$, $z_1 = \lfloor \frac{x}{10} \rfloor$ te $z_2 = x - z_1 \cdot 10$. Definirajmo $z_2' = \min\{\lfloor \frac{9}{a} \rfloor, z_1\}$, čime osiguravamo $z_2' \cdot a < 10$. Najveći odgovarajući kvocijent je $q = z_1 \cdot 10 + z_2'$. Kako bi odredili i traženi broj b, odaberimo najveći četveroznamenkasti broj koji pri dijeljenju s a daje cjelobrojni kvocijent q.

Jasno, $b = \min\{a(q+1) - 1, 9999\}$.

Za $1 \leq a \leq 9$, u slijedećoj tablici navodimo najveće prirodne brojeve b za koje se na abakusu s 13 stupaca može odrediti (a, b).

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	9999	9989	9999	9971	9959	9971	9953	9935	9999

Primijetimo kako iz prethodnih primjera proizlazi da veličina broja b ne ovisi toliko o veličini broja a, koliko o njegovim svojstvima djeljivosti, tj. ne možemo tvrditi da će b biti veći što je a veći ili manji.

5 Generalizacija slučaja (III)

U svakom od slučajeva (II) - (V) iz prethodnog poglavlja je za promatrani a postojao neki b za koji je moguće na abakusu odrediti (a, b) korištenjem Euklidova algoritma. Primijetimo kako u slučajevima (II), (IV) i (V) najveći takav b ovisi o a, tj. b nije jednak za sve brojeve a promatrane u tim slučajevima. Za $1 \leq a \leq 99$ smo čak i eksplicitno opisali kako iz a dobiti b. Nasuprot tome stoji interesantni slučaj (III), prema kojem je najveći broj b za koji možemo odrediti (a, b) na abakusu s 13 stupaca jednak za sve troznamenkaste brojeve a (štoviše, jednak je najvećem troznamenkastom broju).

Prirodno je zapitati se u čemu je posebnost toga slučaja te vrijedi li navedeno svojstvo i općenito. A po čemu su uopće specifični troznamenkasti brojevi na abakusu s 13 stupaca? Primijetimo kako za svaki prirodni broj a, koji je manji od 10000 (ili, za svaki prirodni broj s najviše 4 znamenke) postoji prirodni b ($b \leq a$) kojim je moguće a podijeliti na abakusu s 13 stupaca. No, za četveroznamenkasti broj a ne postoji prirodan broj b koji je na abakusu s 13 stupaca moguće podijeliti s a. Dakle, posebnost troznamenkastih brojeva je slijedeća - oni su najveći brojevi koji pri dijeljenju na abakusu s 13 stupaca mogu biti djelitelji.

Generalizirajmo ovaj rezultat, tj. odredimo koliko najviše znamenki mogu imati brojevi koji pri dijeljenju na abakusu s n stupaca, $n \in \mathbb{N}$, mogu biti djelitelji. Označimo traženi broj znamenki s x. Odsad pa nadalje ćemo abakusom smatrati kineski abakus s n stupaca. Da bi broj s x znamenki mogao biti djelitelj prilikom netrivijalnog dijeljenja, djeljenik mora imati barem x znamenki. Dakle, za zapis djeljenika i djelitelja nam je potrebno najmanje $2x$ stupaca. Upravo ćemo najmanji mogući broj stupaca potreban za dijeljenje s x-znamenkastim brojem dobiti uzmemo li da i djeljenik ima točno x znamenki. Kako je kvocijent pri dijeljenju dvaju x-znamenkastih brojeva jednoznamenkast, slijedi da pri ovakvom dijeljenju imamo samo jedan parcijalni produkt, koji je također x-znamenkast. Ukupno su nam za zapis opisanog dijeljenja potrebna $3x+4$ stupca, tj. da bi se na abakusu moglo provesti dijeljenje x-znamenkastim brojem mora vrijediti nejednakost $3x \leq n-4$. Dakle, najveći x za koji se na abakusu može provesti dijeljenje x-znamenkastim brojem jednak je $\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor$. Za $n = 13$ dobivamo da je najveći x jednak upravo 3.

Prethodni izraz za najveći x ovisi o ostatku koji broj n daje pri dijeljenju s 3. Zato promatramo 3 odvojena slučaja, u kojim ćemo za x-znamenkasti broj a odrediti najveći b za koji je na abakusu moguće odrediti (a, b).

(i) $n = 3k+1$

U ovom slučaju je $x = k-1$. Kako postupak dijeljenja nije moguć na abakusu s manje od 7 stupaca, pretpostavljamo $k \geq 2$. Neka je $10^{x-1} \leq a < 10^x$. Odredimo koliko najviše znamenki može imati broj koji možemo podijeliti s a. Za zapis broja a, prve znamenke kvocijent, 3 prazna stupca i prvog parcijalnog produkta, potrebno je barem $2x+4 = 2k+2$ stupaca. Dakle, za zapis djeljenika preostaje svega $n-2x+4 = k-1 = x$ stupaca. Očito traženi najveći broj b može imati najviše x znamenki, a na isti način kao i ranije dolazimo do zaključka kako svaki x-znamenkasti broj možemo na abakusu podijeliti s a. Odatle direktno slijedi kako je najveći b za koji možemo na abakusu odrediti (a, b) jednak najvećem x-znamenkastom broju, tj.

$$b = 10^{\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor} - 1.$$

Za $n = 13$, dobivamo $k = 4$ i $b = 999$, isto kao u prethodnom poglavlju.

(ii) $n = 3k+2$

U ovom slučaju je ponovno $x = k-1$. Pretpostavimo opet $k \geq 2$ te neka je $10^{x-1} \leq a < 10^x$. Za dijeljenje broja od $x+2$ znamenki brojem a su nam već u prvom koraku potrebna $2x+2$ stupca za zapis tih brojeva, 3 prazna stupca, jedan stupac za zapis prve znamenke kvocijenta te barem x stupaca za zapis prvog parcijalnog produkta - ukupno $3x+6$ stupaca, no $3x+6 = 3k+3 > n$. Dakle, broj koji možemo podijeliti s a mora imati manje od $x+2$ znamenki.

Prema prethodnom, preostaje nam odrediti najveći $x+1$-znamenkasti broj koji možemo podijeliti s a. Označit ćemo taj broj s b, kao i ranije. Očito cjelobrojni kvocijent $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ ima ili jednu ili dvije znamenke. Kako mi želimo odrediti najveći b, odgovara nam situacija u kojoj kvocijent ima dvije znamenke. Ispitajmo pobliže koji su nužni uvjeti da bi ovakvo dijeljenje bilo moguće.

Nakon zapisa brojeva a i b (koji ukupno imaju $2x+1$ znamenki), prve znamenke kvocijenta te ostavljanja tri prazna stupca, preostaje nam još $n-2x-5 = 3k+2-2k+2-5 = k-1 = x$ stupaca. Dakle, da bi ovo dijeljenje bilo moguće, produkt prve znamenke kvocijenta i broja a mora imati x znamenki. No, odmah slijedi i kako nam nakon određivanja druge znamenke kvocijenta (ujedno i posljednje) preostaje samo $x-1$ stupaca za zapis drugog parcijalnog produkta, što direktno povlači da druga znamenka kvocijenta mora biti nula (inače bi parcijalni produkt imao barem x znamenki). No, i ovakav zapis je moguć jedino ukoliko je $x-1 > 0$, tj. ukoliko je $k \geq 3$.

Prema tome, moramo zasebno komentirati slučaj $k = 2$ i $n = 8$, u kojem kvocijent ne može biti dvoznamenkast. Tada je $x = 1$ te za $1 \leq a \leq 9$ trebamo, u stvari, odrediti najveći b takav da su kvocijent pri cjelobrojnom dijeljenju b s a i parcijalni produkt oba jednoznamenkasti. Preciznije, trebamo odrediti najveći b za koji je $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor < 10$ i $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor \cdot a < 10$. Odmah slijedi kako je $b = \lfloor \frac{9}{a} \rfloor \cdot a + a - 1$.

Vratimo se sada slučaju $k \geq 3$. Najprije trebamo odrediti najveći kvocijent q čija je znamenka jedinica jednaka nuli, dok znamenka desetica pomnožena s a ne mijenja broj znamenki broja a. Odatle je $q = 10 \cdot q_1$, gdje je $q_1 = \lfloor \frac{10^x - 1}{a} \rfloor$. Kao što smo komentirali i u prethodnom poglavlju, b je najveći $x+1$-znamenkasti broj za koji vrijedi $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor = q$. Jasno,

$$b = \min\{a(q+1) - 1, 10^{x+1} - 1\}.$$

(iii) $n = 3k$

U ovom slučaju je $x = k - 2$. Pretpostavimo da je $k \geq 3$, neka je $10^{x-1} \leq a < 10^x$. Provjerimo pod kojim uvjetima možemo $x+2$-znamenkasti broj podijeliti brojem a. Kako želimo pronaći najveći takav broj pretpostavit ćemo i da je kvocijent najveći mogući, tj. da je troznamenkast. Za zapis ovih dvaju brojeva, 3 prazna stupca i zapis prve znamenke kvocijenta nam je potrebno $2x + 6 = 2k + 2$ stupaca, te nam preostaju još $n - 2k - 2 = k - 2$ stupca, upravo dovoljno za zapis broja a. Dakle, produkt vodeće znamenke kvocijent i broja a mora imati x znamenki. No, već sada možemo vidjeti kako će nam, nakon određivanja druge i treće znamenke kvocijenta za zapis daljnjih parcijalnih produkata preostati manje od x stupaca, što povlači kako preostale dvije znamenke kvocijenta moraju biti jednake nuli. Osim toga, da bi uopće mogli zapisati situaciju nakon određivanja posljednje znamenke kvocijenta nam je potrebno $2x+9 = 2k+5$ stupaca. Kako raspolažemo s ukupno $3k$ stupaca, ovakvo dijeljenje je moguće ukoliko je $k \geq 5$. Preostaje nam zasebno promotriti dvije specijalne situacije:

- $k = 3$ daje $n = 9$ i $x = 1$. Traženi broj b može biti najviše dvoznamenkast. Za dvoznamenkasti djeljenik, na isti način kao i ranije se može vidjeti da za prvi parcijalni produkt imamo dva raspoloživa stupca, dok za drugi parcijalni produkt imamo samo jedan. Definirajmo $q_1 = \lfloor \frac{\lfloor \frac{99}{a} \rfloor}{10} \rfloor$ i $q_2 = \lfloor \frac{99}{a} \rfloor - 10 \cdot q_1$. Neka je $q_2' = \min\{q_2, \lfloor \frac{9}{a} \rfloor\}$. Primijetimo da je q_1 najveći prirodni broj za koji je $q_1 \cdot 10 \cdot a < 100$, dok je q_2' najveći prirodan broj za koji vrijedi i $q_2' \cdot a < 10$ i $(q_1 \cdot 10 + q_2') \cdot a < 100$. Odatle je najveći mogući kvocijent q jednak $10 \cdot q_1 + q_2'$ te $b = \min\{a \cdot (q+1) - 1, 99\}$.

- $k = 4$ povlači $n = 12$ i $x = 2$. Sada djeljenik može imati najviše 4 znamenke, no u tom slučaju kvocijent mora biti dvoznamenkast. Pretpostavimo li da djeljenik ima 4 znamenke, slijedi da prvi parcijalni produkt mora biti dvoznamenkast, dok drugi parcijalni kvocijent mora biti jednak nuli. Dakle, b će imati 4 znamenke za one brojeve a za koji vrijedi $\lfloor \frac{99}{a} \rfloor \cdot 10 \cdot a + a - 1 \geq 1000$. Lakim računom dobivamo da je dano svojstvo zadovoljeno za $a = 11, 33, 48, 49, 91 + i, 0 \leq i \leq 8$, za koje je traženi b redom jednak $1000, 1022, 1007, 1028, 1000 + 11 \cdot i, 0 \leq i \leq 8$.

  Za ostale $10 \leq a \leq 90$ je traženi broj b najviše troznamenkast. Na isti način kao i prije, vidimo da se u ovom slučaju jedini uvjet postavlja na drugu parcijalni produkt, koji mora biti dvoznamenkast. Neka je $q_1 = \lfloor \frac{\lfloor \frac{999}{a} \rfloor}{10} \rfloor$ i $q_2 = \lfloor \frac{999}{a} \rfloor - 10 \cdot q_1$. Definirajmo $q_2' = \min\{q_2, \lfloor \frac{99}{a} \rfloor\}$. Stavimo $q = q_1 \cdot 10 + q_2'$, odakle napokon slijedi $b = \min\{999, (a+1) \cdot q - 1\}$.

Ukoliko je $k \geq 5$, stavimo $q_1 = \lfloor \frac{10^x - 1}{a} \rfloor$. Tada je $q = 100 \cdot q_1$ najveći ostvarivi kvocijent, dok je $b = \min\{a(q+1) - 1, 10^{x+2} - 1\}$ najveći b za koji se može odrediti (a, b).

Zaokružit ćemo ovu cjelinu interesantnim teoremom, pri dokazu kojega važnu ulogu igra iduća lema:

Lema 5.1. *Neka je $x \in \mathbb{N}$. Ako je $10^x \leq b \leq 9 \cdot (10^x - 1) \cdot (10^x - 2)$ tada postoji $10^{x-1} \leq a < 10^x$ takav da je znamenka jedinica broja $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ različita od nule.*

Dokaz. Dokažimo najprije slijedeću tvrdnju - ako je $\frac{b}{10^{x-1}} - \frac{b}{10^x - 1} < 8$, tada je $b < 10^x$. Iz dane nejednakosti slijedi $b < 8 \cdot \frac{10^{x-1}(10^x - 1)}{10^x - 10^{x-1} - 1}$. Dalje je $10^x - 8 \cdot \frac{10^{x-1}(10^x - 1)}{10^x - 10^{x-1} - 1} = \frac{10^{x-1}}{10^x - 10^{x-1} - 1}(10^{x+1} - 9 \cdot 10^x - 2) > 0$ iz čega tvrdnja slijedi.

Odavde slijedi kako zasigurno nisu svi kvocijenti $\frac{b}{a}$ sadržani u intervalu duljine 1, što znači da, ukoliko svi kvocijenti $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ imaju zadnju znamenku jednaku, razlika nekih od kvocijenata pri dijeljenju broja b dvama uzastopnim brojevima mora biti veća od 9.

Pretpostavimo da postoji $10^{x-1} \leq a < 10^x - 1$ takav da je $\frac{b}{a} - \frac{b}{a+1} < 1$ te neka je a_1 najmanji takav. Možemo pretpostaviti da je $a_1 > 10^{x-1}$, jer bi inače razlika svih kvocijenata pri dijeljenju uzastopnim brojevima bila manja od 1 pa nikako ne bi mogli svi završavati istom znamenkom. Kada bi svi kvocijenti $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ imali jednaku zadnju znamenku, moralo bi vrijediti $\frac{b}{a_1 - 1} - \frac{b}{a_1} > 9$ i $\frac{b}{a_1} - \frac{b}{a_1 + 1} < 1$. Iz ovih dviju nejednakosti slijedi $8a_1 < 10$, tj. $a_1 = 1$, što je nemoguće.

Dakle, nužan uvjet da svi kvocijenti $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ imaju jednaku znamenku jedinica jest $\frac{b}{10^x - 2} - \frac{b}{10^x - 1} > 9$ (tada se i svi preostali uzastopni kvocijenti razlikuju za barem 9), odakle slijedi tvrdnja leme.

Pokazat ćemo i da tvrdnja ne vrijedi općenito. Zaista, za dani $x \in \mathbb{N}$, definirajmo

$$\pi = 10 \cdot \prod_{j=10^{x-1}}^{10^x - 1} j.$$

Očito je znamenka jedinica svakog od brojeva $\frac{\pi}{a}$, $10^{x-1} \leq a < 10^x$ jednaka nuli. Štoviše, i znamenka jedinica svakog od brojeva $\lfloor \frac{\pi + i}{a} \rfloor$ je jednaka nuli, gdje je $0 \leq i < 10^{x-1}$ i $10^{x-1} \leq a < 10^x$. Primijetimo kako smo u slučaju $x > 1$ mogli iz definicije od π izbaciti prvi faktor 10, te da je $\pi > 10^{10^x - 10^{x-1}}$. ■

Teorem 5.2. *Neka su $x, n \in \mathbb{N}$, uz $x \geq 3$. Najveći $b \in \mathbb{N}$, $b \leq 9 \cdot (10^x - 1) \cdot (10^x - 2)$, za kojega je moguće na abakusu s n stupaca odrediti (a, b), jednak je za sve $10^{x-1} \leq a \leq 10^x - 1$ ako i samo ako vrijedi ili $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ i $x = \lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor$, ili $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ i $x = \frac{n}{3} - 1$.*

Dokaz. Ako je $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ i $x = \lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor$, iz slučajeva (i) - (iii) slijedi kako je najveći b jednak za sve x-znamenkaste a.

Ako je $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ i $x = \frac{n}{3} - 1$, pokažimo kako svaki $10^{x-1} \leq a \leq 10^x - 1$ možemo podijeliti s $10^{x-1} - 1$. Primijetimo kako je kvocijent pri cjelobrojnom dijeljenju ovakvog broja a s $10^{x-1} - 1$ ili jednoznamenkast ili jednak 10, jer je $11 \cdot (10^{x-1} - 1) = 10(10^{x-1} - 1) + 10^{x-1} - 1 = 10^x - 10 + 10^{x-1} - 1 > 10^x - 1$. Ako je kvocijent jednoznamenkast, za provođenje dijeljenja nam je potrebno najviše $x + x - 1 + x + 1 + 3 = 3x + 3 = n$ stupaca, dok se u slučaju dvoznamenkastog kvocijenta dijeljenje sastoji od dva koraka. U prvom koraku nam je potrebno $x + x - 1 + x - 1 + 1 + 3 = 3x + 2$ stupaca (prva znamenka kvocijenta je jednaka 1), dakle svakako manje od n; dok nam je u drugom koraku potrebno $x + x - 1 + 2 + 1 + 3 = 2x + 5$ stupaca (druga znamenka kvocijenta je jednaka 0), što je manje od n ukoliko je $x \geq 2$, no navedeno dijeljenje nema smisla za $x = 1$. Dakle, dijeljenje je u svakom slučaju moguće.

Osim toga, pokažimo kako niti u ovoj situaciji nismo u mogućnosti podijeliti niti jedan x-znamenkasti broj brojem većim od $10^{x-1} - 1$. Za takvo dijeljenje nam je potrebno x stupaca za zapis djeljenika, x stupaca za zapis djelitelja, 3 prazna stupca, 1 stupac za zapis kvocijenta i x stupaca za zapis jedinog parcijalnog produkta. Ukupno $3x + 4$ stupca, što je veće od n.

Neka je sada najveći odgovarajući b jednak za sve $10^{x-1} \leq a \leq 10^x - 1$. Dokažimo najprije da broj b mora imati isti broj znamenki kao i broj a, osim u slučaju kada je $n = 3k$ i $x = \frac{n}{3} - 1$.

Pretpostavimo prvo da je broj znamenki od b manji od x, jednak $x - l$, $l \in \mathbb{N}$. Trebat ćemo slijedeću lemu:

Lema 5.3. *Neka je $10^{x-l-1} \leq b < 10^{x-l}$, $l \in \mathbb{N}$. Tada postoji $10^{x-1} \leq a < 10^x$ takav da je znamenka jedinica broja $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ različita od nule.*

Dokaz. Pretpostavimo da je broj $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ djeljiv s 10 za sve $10^{x-1} \leq a < 10^x$. Tada je i znamenka jedinica broja $\lfloor \frac{10^{x-1}}{b} \rfloor$ jednaka nuli, a broj $10^{x-1} + b < 10^x$. Tada je posljednja znamenka broja $\lfloor \frac{10^{x-1}+b}{b} \rfloor = \lfloor \frac{10^{x-1}}{b} + 1 \rfloor = \lfloor \frac{10^{x-1}}{b} \rfloor + 1$ jednaka 1, što je u kontradikciji s pretpostavkom. ■

Prema prethodnoj lemi, postoji a za koji je posljednji parcijalni produkt različit od nule. Na sličan način se može vidjeti da postoji i a takav da kvocijent $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ nije djeljiv s 10 i ima $l+1$ znamenki. Prema tome, da bi dijeljenje svih brojeva $10^{x-1} \leq a \leq 10^x - 1$ brojem b bilo ostvarivo, moramo imati na raspolaganju barem $x + x - l + l + 1 + x - l + 3 = 3x - l + 4$ stupca.

Lema 5.4. *Na abakusu s $3x - l + 4$ stupca je moguće podijeliti broj 10^{x-1} brojem 10^{x-l}, ukoliko je $l \geq 2$.*

Dokaz. Broj 10^{x-1} ima x, dok broj 10^{x-l} ima $x - l + 1$ znamenki. Za zapis prve znamenke kvocijenta (koja je jednaka jedan) i prvog parcijalnog produkta (koji je jednak 10^{x-1}) nam je potrebno $3x - 2l + 6$ stupaca, što je manje od $3x - l + 4$ ukoliko je $l \geq 2$. Pošto su sve preostale znamenke kvocijent jednake nuli, ako imamo dovoljno stupaca za zapis posljednjeg parcijalnog produkte, svakako ih imamo dovoljno i za zapis prethodnih. Za zapis posljednjeg parcijalnog produkta, nakon određivanja posljednje znamenke kvocijenta, nam je potrebno $2x + 5$ stupaca. $2x + 5$ nije veće od $3x - l + 4$ ukoliko je $x - l \geq 1$, što svakako vrijedi. ■

Dakle, ukoliko je $l \geq 2$, broj 10^{x-1} možemo podijeliti brojem većim od b, pa u tom slučaju b neće biti jednak za sve brojeve s x znamenki.

Prokomentirajmo još i mogućnost $l = 1$. Za dijeljenje brojeva $a \in \{10^{x-1}, \ldots, 10^x - 1\}$ brojem b od $x - 1$ znamenki su potrebna barem $3x + 3$ stupca (po x za zapis djeljenika i parcijalnog produkta, $x - 1$ za zapis djelitelja, 1 za zapis kvocijenta i 3 slobodna stupca). Ukoliko ili broj stupaca n nije djeljiv s 3 ili je $x < \frac{n}{3} - 1$, slijedi da je $n \geq 3x + 4$, što je broj stupaca dovoljan za dijeljenje x-znamenkastog broja samim sobom. Dakle, niti u jednom slučaju različitom od navedenog u iskazu teorema, najveći broj b ne može biti jednak za sve brojeve a koji imaju jednak broj znamenki.

Sada pretpostavimo da je broj znamenki broja b veći od x, jednak $x + l$, $l \in \mathbb{N}$. Dakle, $b \geq 10^x$. U daljnjem je ključna pretpostavka $b \leq 9 \cdot (10^x - 1) \cdot (10^x - 2)$, jer tada iz Leme 5.1 slijedi kako postoji barem jedan $10^{x-1} \leq a < 10^x$ takav da je znamenka jedinica broja $\lfloor \frac{b}{a} \rfloor$ različita od nule, te će pri dijeljenju broja b brojem a zadnji parcijalni produkt biti različit od nule.

Za dijeljenje broja b takvim brojem a su potrebna ukupno barem $3x + 2l + 4$ stupca ($x + l$ za zapis broja b, x za zapis broja a, $l + 1$ za zapis kvocijenta, barem x za zapis posljednjeg parcijalnog produkta i 3 prazna stupca).

Lema 5.5. *Ako $x \geq 3$, tada je na abakusu s $3x + 2l + 4$ stupca moguće podijeliti broj 10^{x+l} brojem 10^{x-1}.*

Dokaz. Zaista, za provođenje prvog koraka tog dijeljenja, potreban je $x + l + 1$ stupac za zapis broja 10^{x+l}, x stupaca za zapis broja 10^{x-1}, 1 stupac za zapis broja 1 (prve znamenka kvocijenta) te x stupaca za zapis prvog parcijalnog produkta (jednakog opet 10^{x-1}). Uz 3 prazna stupca, ovo čini ukupno $3x + l + 5$ stupaca, koliko i imamo, jer je $l \in \mathbb{N}$.

Kako su sve preostale znamenke kvocijenta jednake nuli, svaki od preostalih parcijalnih produkata je jednoznamenkast. Dakle, ukoliko možemo zapisati zadnjeg, možemo zapisati i sve prethodne.

Za zadnji korak navedenog dijeljenja nam je potreban $x + l + 1$ stupac za zapis broja 10^{x+l}, x stupaca za zapis djelitelja 10^{x-1}, $l + 2$ stupca za zapis kvocijenta 10^{l+1}, jedan stupac za zapis posljednjeg parcijalnog produkta jednakog nuli te tri prazna stupca; ukupno $2x + 2l + 7$. Ako je $x \geq 3$, možemo provesti kompletno dijeljenje. ■

Iz ove leme slijedi kako za barem jedan x-znamenkasti broj a postoji broj veći od b koji možemo podijeliti s a te b ne može biti jednak za sve $10^{x-1} \leq a < 10^x$.

Sada znamo kako, osim u slučaju $n = 3k$, $x = \frac{n}{3} - 1$ i $l = 1$, traženi najveći broj b, ako postoji, mora imati jednak broj znamenaka kao i broj a, tj. b mora biti x-znamenkast.

Dijeljenje dvaju x-znamenkastih brojeva se sastoji iz samo jednog koraka, a za njegov zapis su potrebna ukupno $3x + 4$ stupca (primijetimo kako kvocijent ima jednu, a parcijalni produkt x znamenki). Ako ili broj stupaca n nije oblika $3k + 1$ ili je x različito od $\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor$, broj stupaca je strogo veći od $3x + 4$.

Lema 5.6. *Na abakusu s $3x + 5$ stupaca je moguće podijeliti broj 10^x brojem 10^{x-1}, uz uvjet $x \geq 2$.*

Dokaz: Kako je kvocijent pri ovo dijeljenju jednak 10, ono se sastoji iz dva koraka. Na isti način kao ranije, dobivamo da je za zapis prvog koraka potrebno $3x + 5$, dok je za zapis drugog koraka potrebno $2x + 7$ stupaca, te je time lema dokazana. ■

Iz ove leme napokon slijedi kako su jedini slučajevi u kojima će najveći broj b za koji je na abakusu s n stupaca moguće odrediti (a, b) biti jednak za sve x-znamenkaste brojeve a, upravo oni navedeni u iskazu teorema. Time je dokaz Teorema 5.2 završen. ■

Napomenimo kako korištenjem prikazanih elementarnih metoda nismo bili u mogućnosti dobiti bolje ocijene od onih iznesenih u iskazu teorema.

Literatura

[1] Andrej Dujella: *Uvod u teoriju brojeva*, skripta

[2] Donald E. Knuth: *The Art of Computer Programming*, Volumes 1–4, Addison-Wesley Professional

[3] Lee Kai - Chen: *How to learn Lee's abacus*, by Lee's abacus correspondence school, Taipei, Taiwan, China.

[4] I. Matić, D. Ševerdija, S. Škorvaga: *Numerička ograničenja kineskog abakusa*, Osječki matematički list (prihvaćeno za objavljivanje)

[5] I. Matić, D. Ševerdija: *Metodički aspekti abakusa*, u pripremi

[6] http://www.mathos.hr/˜dseverdi/Abacus_web/