

Krešimir Burazin, Jelena Jankov, Ivana Kuzmanović, Ivan Soldo

PRIMJENE DIFERENCIJALNOG I
INTEGRALNOG RAČUNA FUNKCIJA
JEDNE VARIJABLE

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku

Osijek, 2017.

Izv. prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6
HR-31 000 Osijek

Jelena Jankov
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6
HR-31 000 Osijek

Doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6
HR-31 000 Osijek

Doc. dr. sc. Ivan Soldo
Odjel za matematiku
Sveučilište u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6
HR-31 000 Osijek

Izdavač:

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku

Recenzenti:

Prof. dr. sc. Kristian Sabo, Odjel za matematiku,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Izv. prof. dr. sc. Filip Najman, PMF-Matematički odsjek,
Sveučilište u Zagrebu

Lektorica:

Ivanka Ferčec, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske
i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140706029.

ISBN 978-953-6931-99-6

Ovaj udžbenik objavljuje se uz suglasnost Senata Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku pod brojem 3/17.

Ovaj udžbenik objavljuje se uz financijsku pomoć Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske.

©Krešimir Burazin, Jelena Jankov, Ivana Kuzmanović, Ivan Soldo, 2017.

Tisak: STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek

Predgovor

Većina ljudi nema točnu predožbu o tome što je matematika. Za mnoge je ona skup zadataka koje treba riješiti koristeći nekakve formule, koje same po sebi često ne razumiju. Kada završe obrazovanje, razina matematike koju koriste u svakodnevnom životu u boljim je slučajevima na razini osrednjeg srednjoškolskog znanja. Stoga često i ne doživljavaju matematiku kao nešto osobito korisno u životu, nesvjesni toga da svaki puta kada uzmu mobitel u ruke, sjednu u automobil, odu na liječnički pregled, ili pak dok spavaju u svome stanu na 16. katu nebodera zapravo koriste matematiku. Naravno, pojedinac ne mora znati kako mobitel, automobil, osobno računalo ili uređaj za magnetsku rezonancu rade da bi ih mogli koristiti, međutim neki ljudi moraju znati principe rada takvih uređaja kako bi ih mogli napraviti za sve ostale. A činjenica je da ih ne bi mogli napraviti bez matematike i to one *prave matematike* koja nije lista suhoparnih pravila i formula, nego mreža zanimljivih ideja isprepletenih u kreativan i moćan način razmišljanja koji nam izoštrava pogled na svijet u kojem živimo i omogućava da analiziramo i rješavamo razne probleme.

Ovaj sveučilišni udžbenik, kao i nastava iz kolegija *Primjene diferencijalnog i integralnog računa 1*, čije gradivo prati, trebao bi odškrinuti vrata svijeta primjena matematike u raznim aspektima ljudskog djelovanja, odnosno konkretno primjena diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable. Spomenuti kolegij izvodi se na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku i to na drugoj godini Sveučilišnog preddiplomskog studija matematike i drugoj godini Sveučilišnog integriranog nastavničkog studija matematike i informatike. Vjerujemo da bi predstavljeno gradivo moglo biti zanimljivo i studentima matematike drugih sveučilišta, kao i studentima drugih prirodnih ili tehničkih znanosti, pa i ekonomije i medicine. Zapravo svima koji trebaju znanja infinitezimalnog računa funkcija jedne varijable odnosno primjena istih.

Naglašavamo da ovo nije udžbenik iz diferencijalnog ili integralnog računa. Ovdje su prikazane primjene tih znanja na razne probleme koji dolaze iz fizike, kemije, biologije, ekonomije, medicine i nekih drugih znanosti. Prolazeći kroz razne primjere koji su ovdje prikazani čitatelj bi trebao polako nadograđivati svoju kulu znanja infinitezimalnog računa i njegove *interakcije* sa stvarnim svijetom. To uključuje prepoznavanje i

korištene fundamentalnih matematičkih koncepata, poput derivacije i integrala, u raznim područjima, što bi trebalo doprinijeti boljem razumijevanju tih pojmova s teorijskog aspekta, ali i daljnjem razvoju vještina potrebnih za njihove primjene u rješavanju novih problema.

Knjiga je podijeljena na dva veća poglavlja: *Derivacija i primjene*, te *Primjene integrala*. Svako poglavlje podijeljeno je na više manjih potpoglavlja unutar kojih se nakon teorijskog dijela s primjerima nalazi veći izbor zadataka. Neki zadaci detaljno su riješeni dok je za ostale dano samo krajnje rješenje i/ili uputa za rješavanje. Veliki broj zadataka i primjera ilustriran je odgovarajućim slikama. Kod svake od obrađenih tema trudili smo se istaknuti glavne ideje bez da idemo previše u tehničke detalje, ponekad i pod cijenu gubitka matematičke preciznosti. Glavni cilj bio nam je postići prepoznavanje matematičkih koncepata u raznim *stvarnim problemima*, te korištenje matematičkog alata (diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable) za rješavanje istih. Nadamo se da smo u tome uspjeli.

Zahvaljujemo se recenzentima koji su svojim komentarima doprinijeli kvaliteti teksta. Zahvaljujemo se doc.dr.sc. Domagoju Ševerdiji na izradi naslovne stranice ovog udžbenika te svima ostalima koji su na bilo koji način doprinijeli njegovom nastanku.

Zahvaljujemo se svim studentima Odjela za matematiku koji su nam ukazali na greške u prvoj verziji ovog udžbenika koja je bila objavljena kao nerecenzirani nastavni materijal na mrežnoj stranici kolegija *Primjene diferencijalnog i integralnog računa 1*. Uz iluzornu nadu da grešaka više nema, molimo sve čitatelje da nam jave ukoliko (kada) ih uoče.

U Osijeku, 27. rujna 2016.

Autori

Sadržaj

| | |
|---|------------|
| Predgovor | i |
| Sadržaj | iii |
| 1 Derivacija i primjene | 1 |
| 1.1 Matematički model | 1 |
| 1.2 Brzina kao mjera promjene i derivacija | 7 |
| 1.2.1 Zadaci | 8 |
| 1.3 Brzina u prirodnim i društvenim znanostima | 13 |
| Fizika | 13 |
| Kemija | 15 |
| Biologija | 16 |
| Ekonomija | 17 |
| 1.3.1 Zadaci | 18 |
| 1.4 Eksponencijalni rast i pad | 29 |
| 1.4.1 Zadaci | 31 |
| 1.5 Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije | 36 |
| 1.5.1 Zadaci | 44 |
| 1.6 Derivacija vektorske funkcije i primjene | 49 |
| 1.6.1 Zakrivljenost krivulje | 54 |
| 1.6.2 Gibanje točkaste mase u prostoru | 56 |
| 1.6.3 Keplerovi zakoni | 57 |
| 1.6.4 Zadaci | 60 |
| 1.7 Primjene ekstrema funkcije jedne varijable | 67 |
| 1.7.1 Optimizacijski problemi | 69 |
| 1.7.2 Zadaci | 71 |
| | iii |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2 | Primjene integrala | 81 |
| 2.1 | Primjene integrala u računanju duljina, površina i volumena | 81 |
| | Površina između grafova funkcija | 82 |
| | Volumen tijela kojemu je poznata površina poprečnih presjeka | 83 |
| | Volumen rotacijskog tijela | 84 |
| | Duljina luka krivulje | 89 |
| | Površina rotacijske plohe | 90 |
| 2.1.1 | Zadaci | 93 |
| 2.2 | Rad sile | 107 |
| 2.2.1 | Zadaci | 108 |
| 2.3 | Momenti i težište | 109 |
| 2.3.1 | Zadaci | 113 |
| 2.4 | Primjene u medicini | 116 |
| | Fluks | 116 |
| | Srčani minutni volumen | 117 |
| 2.4.1 | Zadaci | 119 |
| | Literatura | 121 |

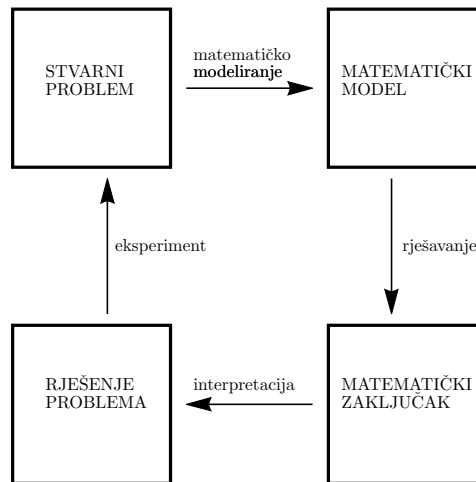
Derivacija i primjene

1.1 Matematički model

Razvojem modernih računala raste i potencijal za primjenu matematike u drugim znanostima, industriji te općenito realnom sektoru. Moglo bi se reći da primjena matematike doživljava svoj procvat u zadnjih tridesetak godina, iako toga većina ljudi, pa i samih matematičara, baš i nije svjesna. Promotrimo na primjer problem optimizacije prometnog toka na nekom raskrižju. Ukoliko se ne primjene razne matematičke i statističke metode, jedina alternativa je sagraditi nekoliko različitih raskrižja pa eksperimentom utvrditi koje je optimalno. Jasno je da to ne bi bio najbolji pristup rješavanju tog problema.

Pojam *primijenjena matematika* neraskidivo je vezan uz pojmove *matematičkog modela* i *matematičkog modeliranja*. Te je pojmove teško (i besmisleno) precizno matematički definirati; možemo reći da je matematički model neka vrsta matematičkog iskaza ili opisa nekog stvarnog problema koji nam na početku nije zadan u matematičkim terminima, dok upravo taj proces stvaranja matematičkog modela iz polaznog stvarnog problema nazivamo matematičko modeliranje.

Na slici 1.1, prikazana je gruba shema rješavanja stvarnih problema korištenjem matematičkih znanja. Vidimo da je prvi korak u tom procesu upravo matematičko modeliranje kojim smo polazni problem preveli u



Slika 1.1: Matematički model

neke matematičke termine, te na taj način dobili matematički model koji bi trebao predstavljati *dovoljno dobar* matematički opis polaznog problema. Što znači *dovoljno dobar*? Imajmo na umu da naš stvarni problem može biti izuzetno težak. Primjerice, želimo opisati i predvidjeti tok zraka oko avionskog krila s ciljem konstrukcije što štedljivijeg putničkog zrakoplova. To je općenito izuzetno težak problem, između ostalog i zato što u sebi sadrži pojave poput turbulencije koju moderna znanost još uvijek nije u stanju u potpunosti shvatiti i opisati. Stoga često u procesu modeliranja moramo uvesti razna pojednostavljenja, te na kraju matematički model koji dobijemo ne odgovara u potpunosti polaznome stvarnom problemu. O tome kako odlučiti je li neki matematički model *dovoljno dobar*, odnosno opisuje li dobro polazni stvarni problem, reći ćemo više kasnije.

U trenutku kada smo dobili matematički model (često neka funkcija ili jednadžba), pristupamo njegovom *rješavanju*. Taj proces također može biti težak (primjerice, ukoliko je model neka parcijalna diferencijalna jednadžba). Uz upotrebu računala, korištenjem numeričkih metoda za rješavanje, često je moguće dobiti samo približno rješenje.

Ovako dobiveno rješenje matematičkog modela potrebno je interpretirati, odnosno *prevesti* u termine polaznog problema. Na taj način dobi-

vamo rješenje našeg polaznog stvarnog problema.

Kada pokušavamo riješiti neki složeni polazni problem, obično u gornjem postupku napravimo više *grešaka*. Primjerice, u konstrukciji matematičkog modela više smo puta stvari pojednostavljivali ili smo pri rješavanju dobili samo približno rješenje. Prema tome, na kraju je potrebno utvrditi koliko rješenje koje smo mi dobili uistinu odgovara stvarnom rješenju. To se obično radi usporedbom našeg rješenja s eksperimentalnim podacima za stvarni problem. Ukoliko dobijemo podudaranje koje nas zadovoljava, onda naš model možemo koristiti za opis stvarnog problema. Ukoliko to nije slučaj, onda je potrebno poboljšati ili matematički model ili metode za njegovo rješavanje.

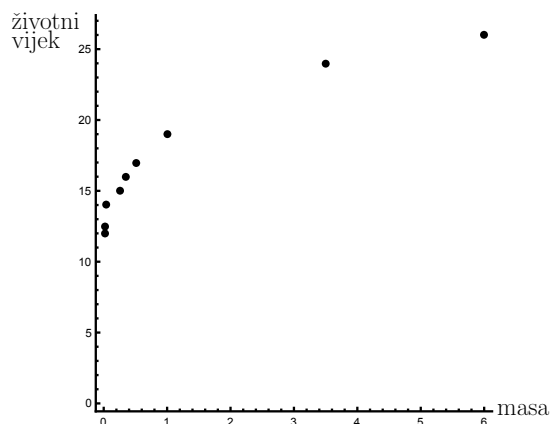
Pogledajmo kako taj cijeli proces izgleda na jednostavnom primjeru.

Primjer 1.1. [3, Primjer 2.1, a)]

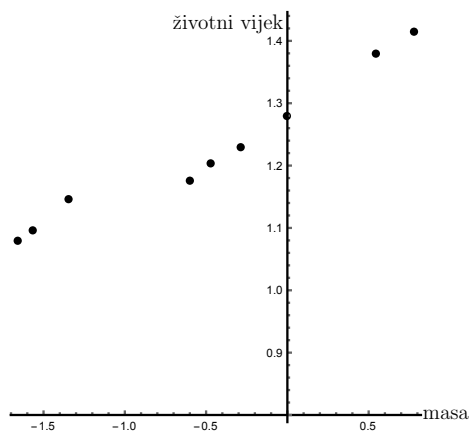
Ornitologe zanima postoji li neka jednostavna veza između mase određenih vrsta ptica i duljine njihova života. Višegodišnjim proučavanjem devet tipičnih europskih vrsta ptica utvrđen je njihov očekivani životni vijek. Ti podaci, zajedno s njihovom prosječnom masom, dani su u tablici 1.1, te je potrebno konstruirati neku jednostavnu elementarnu funkciju koja povezuje masu s duljinom života. Na taj način pokušalo bi se predvidjeti životni vijek i drugih vrsta ptica koje nisu bile obuhvaćene ovim istraživanjem.

| Vrsta ptice | Prosječna masa (kg) | Životni vijek (godine) |
|--------------|---------------------|------------------------|
| Zeba | 0.022 | 12 |
| Vrabac | 0.027 | 12.5 |
| Vodomar | 0.045 | 14 |
| Svraka | 0.25 | 15 |
| Kobac | 0.34 | 16 |
| Divlji golub | 0.52 | 17 |
| Sivi sokol | 1.0 | 19 |
| Roda | 3.5 | 24 |
| Zlatni orao | 6.0 | 26 |

Tablica 1.1: Podaci o masi i životnom vijeku ptica



Slika 1.2: Grafički prikaz podataka o masi i životnom vijeku ptica



Slika 1.3: Logaritmi podataka o masi i životnom vijeku ptica

Ukoliko podatke iz dane tablice nacrtamo u koordinatnom sustavu u ravnini (slika 1.9), otprilike ćemo dobiti ideju kako graf tražene funkcije treba izgledati. Ako s m označimo masu ptica, s l duljinu njihova života, a s f traženu funkciju, te uzmemo u obzir jednostavnu pretpostavku da je $f(0) = 0$, vidimo da je razumno pokušati pronaći f u obliku

$$l = f(m) = am^b,$$

pri čemu su a i b konstante koje treba nekako odrediti iz podataka. Ta funkcija predstavlja naš matematički model za ovaj primjer. Riješiti ga zapravo znači pronaći konstante a i b , pri čemu nam slika 1.9 jasno sugerira da je $b \in \langle 0, 1 \rangle$. U tu svrhu logaritmiramo gornji izraz (možemo uzeti logaritam s bilo kojom bazom), te dobivamo linearnu zavisnost veličina $\log l$ i $\log f(m)$:

$$\log l = \log f(m) = \log a + b \log m.$$

Dakle, zadatak nam je logaritme danih podataka, nacrtane u koordinatnom sustavu na slici 1.3, aproksimirati linearnom funkcijom. To je klasičan problem koji možemo riješiti nekom od standardnih metoda, poput metode najmanjih kvadrata ili metode najmanjih apsolutnih odstupanja [13]. Primjerice, metoda najmanjih kvadrata daje nam pravac

$$y = 0.1299x + 1.2859,$$

odnosno

$$\begin{aligned} b &= 0.1299 \approx 0.13, \\ \log a &= 1.2859, \end{aligned}$$

te konačno $a = 19.47$. Dakle, tražena funkcija je

$$l = f(m) = 19.47m^{0.13}.$$

Nećemo duboko ulaziti u samu interpretaciju rješenja. Jasno je da dobiveni rezultat ovisi o kvaliteti prikupljenih podataka, kao i o broju vrsta ptica koje su bile obuhvaćene tim istraživanjem. Isto tako, napomenimo da ukoliko bi iz slike 1.3 bilo vidljivo da se naši podaci baš i ne mogu dobro aproksimirati pravcem, to bi značilo da je naš polazni odabir funkcije f kao funkcije opće potencije zapravo loš, te bismo morali probati s nekom drugom klasom funkcija.

Zadatak 1.1. [3, Primjer 2.1., b)]

U atletskim utrkama neprestano se ruše svjetski rekordi i pobjednička vremena s utrka na olimpijskim igrama postaju u pravilu sve bolja. U tablicama 1.2 i 1.3 dane su olimpijske pobjednice, odnosno pobjednici, na utrci od 200m, zajedno s postignutim vremenima.

| Godina | Ime | Država | Vrijeme (s) |
|--------|---------------|---------|-------------|
| 1900. | W. Tewksbury | SAD | 22.2 |
| 1904. | A. Hahn | SAD | 21.6 |
| 1908. | R. Kerr | Kanada | 22.6 |
| 1912. | R. Craig | SAD | 21.7 |
| 1920. | A. Woodring | SAD | 22.0 |
| 1924. | J. Scholtz | SAD | 21.6 |
| 1928. | P. Williams | Kanada | 21.8 |
| 1932. | E. Tolan | SAD | 21.2 |
| 1936. | J. Owens | SAD | 20.7 |
| 1948. | M. Patten | SAD | 21.1 |
| 1952. | A. Stansfield | SAD | 20.7 |
| 1956. | R. Marrow | SAD | 20.6 |
| 1960. | L. Berruti | Italija | 20.5 |
| 1964. | H. Carr | SAD | 20.3 |
| 1968. | T. Smith | SAD | 19.83 |
| 1972. | V. Borsov | SSSR | 20.00 |
| 1976. | D. Quarrie | Jamajka | 20.23 |
| 1980. | P. Mennea | Italija | 20.19 |
| 1984. | C. Lewis | SAD | 19.80 |
| 1988. | J. DeLoach | SAD | 19.75 |
| 1992. | M. Marsh | SAD | 20.01 |
| 1996. | M. Johnson | SAD | 19.32 |
| 2000. | K. Kenteris | Grčka | 20.08 |

Tablica 1.2: Olimpijski pobjednici u utrci na 200 m i postignuta vremena

Korištenjem danih podatke konstruirajte odgovarajući matematički model i pokušajte odgovoriti na sljedeća pitanja:

- (i) Postoji li vrijeme u kojemu je nemoguće brže završiti utrku na 200 metara?
- (ii) Hoće li vremena koja postižu atletičarke uvijek biti lošija od vremena koje postižu atletičari?

| Godina | Ime | Država | Vrijeme (s) |
|--------|--------------------|------------------|-------------|
| 1948. | F. Blankers-Koen | Nizozemska | 24.4 |
| 1952. | M. Jackson | Australija | 23.7 |
| 1956. | B. Cuthbert | Australija | 22.4 |
| 1960. | W. Rudolph | SAD | 24.0 |
| 1964. | E. McGuire | SAD | 23.0 |
| 1968. | I. Szewinska | Poljska | 22.5 |
| 1972. | R. Stecher | Istočna Njemačka | 22.4 |
| 1976. | B. Eckert | Istočna Njemačka | 22.37 |
| 1980. | B. Wockel | Istočna Njemačka | 22.03 |
| 1984. | V. Brisco-Hooks | SAD | 21.81 |
| 1988. | F. Griffith-Joyner | SAD | 21.34 |
| 1992. | G. Torrence | SAD | 21.81 |
| 1996. | M-J. Perek | Francuska | 22.12 |
| 2000. | M. Jones | SAD | 20.84 |

Tablica 1.3: Olimpijske pobjednice u utrci na 200 m i postignuta vremena

1.2 Brzina kao mjera promjene i derivacija

Pojam derivacije funkcije jedan je od temeljnih pojmova matematičke analize. Nezavisno su ga uveli njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz¹, te engleski fizičar, matematičar i astronom Isaac Newton². Leibniz je na ideju došao proučavajući problem tangente na krivulju, dok je Newtona zanimala brzina gibanja tijela u nekom vremenskom trenutku.

Promotrimo malo preciznije Newtonov pristup: neka je dano tijelo koje se giba pravocrtno (npr. slobodan pad promatran sa zemljine površine). Na pravac po kojemu se tijelo giba uvedemo koordinatni sustav, te sa $s(t)$ označimo položaj tijela u trenutku t . Time je prirodno dana *funkcija položaja* $s: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. U vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ tijelo se pomakne za $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, te je prosječna brzina kretanja tijela u tom

¹Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1. srpnja 1646. - Hannover, 14. studenoga 1716.)

²Isaac Newton (Lincolnshire, 4. siječnja 1643. - London, 31. ožujka 1728.)

vremenskom intervalu jednaka

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Newton je *brzinu tijela u trenutku* t_0 definirao kao

$$v(t_0) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Danas gornji limes prepoznamo kao derivaciju funkcije s u trenutku t_0 , odnosno $v(t_0) = s'(t_0)$. Dakle, brzina je derivacija položaja, odnosno mjera promjene položaja tijela (veličine s) po jedinici vremena. Ovo je općenita interpretacija derivacije: za proizvoljnu funkciju (*veličinu*) f , njezina derivacija predstavlja mjeru promjene te veličine u odnosu na varijablu o kojoj ona ovisi. Kraće rečeno, *brzina* := *mjera promjene* = *derivacija*.

1.2.1 Zadaci

Zadatak 1.2. *Okrugli bazen polumjera 5 m puni se vodom brzinom od 3 kubična metra u minuti. Odredite brzinu kojom se mijenja visina vode u bazenu u ovisnosti o vremenu.*

Rješenje: Brzina kojom se mijenja visina vode u bazenu u trenutku t dana je s $\frac{dh}{dt}$, gdje je $h(t)$ visina vode u bazenu u trenutku t . Bazeni je oblika valjka, pa je volumen popunjenog dijela bazena u trenutku t dan s $V(t) = r^2\pi h(t) = 25\pi h(t)$, odakle dobivamo

$$\frac{dV}{dt} = 25\pi \frac{dh}{dt}.$$

Kako je zadano $\frac{dV}{dt} = 3 \text{ m}^3 / \text{min}$, to je $\frac{dh}{dt} = \frac{3}{25\pi} \text{ m} / \text{min}$.

Zadatak 1.3. *Kugla snijega topi se tako da se njezino oplošje smanjuje brzinom od $1 \text{ cm}^2 / \text{min}$. Odredite brzinu kojom se mijenja poluprijekor kugle u vremenu u trenutku kada je $r = 10 \text{ cm}$.*

Rješenje: Oplošje kugle snijega u trenutku t iznosi $O(t) = 4r(t)^2\pi$, pa je $\frac{dO}{dt} = 8r(t)\pi \frac{dr}{dt}$. U zadatku je zadano $\frac{dO}{dt} = -1 \text{ cm}^2 / \text{min}$, pri čemu negativan predznak dolazi zbog smanjenja, te je stoga $\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{8r(t)\pi} \text{ cm} / \text{min}$, odnosno za $r = 10 \text{ cm}$ je $\frac{dr}{dt} = \frac{-1}{80\pi} \text{ cm} / \text{min}$.

Zadatak 1.4. *Lopta se puni zrakom tako da njezin volumen raste brzinom $10 \text{ cm}^3/\text{s}$. Odredite brzinu kojom se mijenja radijus lopte u vremenu u trenutku kada je $r = 1 \text{ cm}$.*

Rješenje: $\frac{5}{2\pi} \text{ cm/s}$.

Zadatak 1.5. *Dvije paralelne stranice pravokutnika produljuju se brzinom 2 cm/s , dok se druge dvije stranice istovremeno skraćuju tako da je površina nastalog pravokutnika konstantna i iznosi 50 cm^2 . Odredite brzinu kojom se mijenja opseg pravokutnika u trenutku kada je duljina stranice koja se produljuje jednaka 5 cm . Povećava li se opseg ili se smanjuje?*

Rješenje: $\frac{dO}{dt} = -4 \text{ cm/s}$. Negativan predznak upućuje na to da se opseg smanjuje.

Zadatak 1.6. *Ljestve visine 15 m naslonjene su na vertikalni zid. Dno ljestvi lagano klizi po podu od zida brzinom 1 cm/s . Kojom brzinom vrh ljestvi klizi po zidu u trenutku kada se vrh ljestvi nalazi na visini 5 m ?*

Rješenje: Neka je x udaljenost dna ljestvi od zida i y visina na kojoj se nalazi vrh ljestvi. Prema Pitagorinom poučku je $x^2 + y^2 = 15^2$. Deriviranjem prethodne jednakosti dobivamo

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0.$$

U trenutku kada je $y = 5 \text{ m}$ imamo $x = \sqrt{15^2 - 5^2} = 10\sqrt{2} \text{ m}$, pa je tada $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -2\sqrt{2} \text{ cm/s}$ (pri čemu negativan predznak znači da se y smanjuje).

Zadatak 1.7. *Posuda oblika polukugle polumjera $R \text{ cm}$ puni se vodom konstantnom brzinom $a \text{ l/s}$. Odredite brzinu kojom se podiže nivo vode kada je nivo $h \text{ cm}$ i pokažite da je ona obrnuto proporcionalna površini gornjeg sloja tekućine.*

Uputa: Volumen kugline kapice iznosi $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$.

Rješenje: $\frac{dh}{dt} = \frac{1000a}{P} \text{ cm/s}$, gdje je P površina gornjeg sloja tekućine.

Zadatak 1.8. Automobili A i B prilaze pravokutnom raskrižju. Automobil A dolazi gibajući se u smjeru sjevera, a B prema zapadu. Kojom brzinom automobili prilaze jedan drugome kada je automobil A 300 m, a B 400 m udaljen od raskrižja, ako se A kreće brzinom 50 km/h, a B 60 km/h?

Rješenje: Označimo s x udaljenost automobila A, a s y udaljenost automobila B do raskrižja, te sa z udaljenost između automobila A i B. Tada je $\frac{dx}{dt} = -50 \text{ km/h}$, $\frac{dy}{dt} = -60 \text{ km/h}$ i treba odrediti $\frac{dz}{dt}$. Prema Pitagorinom poučku je $z^2 = x^2 + y^2$, što nakon deriviranja po vremenu daje

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right).$$

Kako je za $x = 300 \text{ m}$ i $y = 400 \text{ m}$ odgovarajući $z = \sqrt{x^2 + y^2} = 500 \text{ m}$, to je u tom trenutku $\frac{dz}{dt} = -78 \text{ km/h}$.

Zadatak 1.9. Dva su zrakoplova napustila zračnu luku. U danom trenutku zrakoplov A je 300 km sjeverno od zračne luke i kreće se u smjeru sjevera brzinom 200 km/h. Zrakoplov B je 400 km istočno od zračne luke i leti prema istoku brzinom 250 km/h. Odredite brzinu kojom se mijenja udaljenost između zrakoplova A i B u tom danom trenutku.

Rješenje: 320 km/h.

Zadatak 1.10. Dva automobila polaze na put s istog mjesta. Automobil A putuje prema jugu konstantnom brzinom 60 km/h, a automobil B prema zapadu konstantnom brzinom 25 km/h. Odredite brzinu kojom se mijenja udaljenost između automobila A i B nakon dva sata puta.

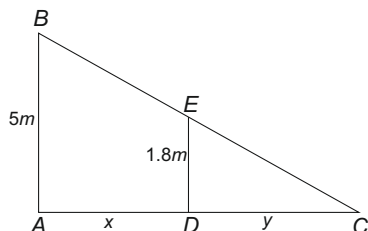
Rješenje: 65 km/h.

Zadatak 1.11. U podne brod A nalazi se 100 km zapadno od broda B. Brod A plovi prema jugu brzinom 35 km/h, a brod B prema sjeveru brzinom 25 km/h. Odredite brzinu kojom se mijenja udaljenost između brodova u 16 sati.

Rješenje: 55.38 km/h.

Zadatak 1.12. Ulično svjetlo nalazi se na stupu visine 5 m. Čovjek visine 1.8 m hoda pravocrtno od svjetla brzinom 1 m/s. Koliko se brzo giba vrh čovjekove sjene kada je udaljen 12 m od stupa?

Rješenje: Neka je x udaljenost čovjeka od stupa. Tada je $\frac{dx}{dt} = 1 \text{ m/s}$. Neka je y udaljenost čovjeka do vrha njegove sjene. Treba odrediti $\frac{d}{dt}(x + y)$ za $x = 12 \text{ m}$.



Slika 1.4: Grafički prikaz iz zadatka 1.12

Iz sličnih trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle DEC$ (slika 1.4) dobivamo $\frac{5}{1.8} = \frac{x+y}{y}$, odakle je $y = \frac{9}{16}x$, te je

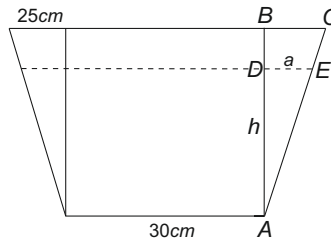
$$\frac{d}{dt}(x + y) = \frac{d}{dt}\left(\frac{25}{16}x\right) = \frac{25}{16} \frac{dx}{dt} = \frac{25}{16} \text{ m/s}.$$

Primijetimo da rezultat ne ovisi o udaljenosti čovjeka od stupa.

Zadatak 1.13. *Pojilo za stoku duljine 10 m ima poprečni presjek u obliku jednakostraničnog trapeza s osnovicama duljine 30 cm i 80 cm te visine 50 cm. U pojilo se ulijeva voda brzinom $0.2 \text{ m}^3/\text{min}$. Odredite brzinu kojom se mijenja nivo vode u pojilu kada je voda duboka 30 cm.*

Rješenje: Označimo s P površinu, a s h visinu poprečnog presjeka ispunjenog dijela pojila. Neka je dulja osnovica ispunjenog dijela duljine $0.3 + 2a$ metara (slika 1.5). Kako je duljina pojila 10 m, to je volumen ispunjenog dijela jednak $V = 10P$, gdje je $P = \frac{1}{2}(0.3 + 0.3 + 2a) \cdot h = (a + 0.3) \cdot h$. Sličnost trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ daje $\frac{a}{h} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$, te je $a = 0.5h$. Sada je volumen ispunjenog dijela pojila jednak $V = 10(0.5h + 0.3)h = 3h + 5h^2$. Kako je $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$, to je $\frac{dh}{dt} = \frac{0.2}{3+10h}$, odnosno za $h = 0.3 \text{ m}$ je $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{30} \text{ m/min}$.

Zadatak 1.14. *Spremnik vode oblika je kružnog stošca s bazom polumjera 2 m i visine 4 m s vrhom prema dolje. Ako se spremnik puni vodom brzinom $2 \text{ m}^3/\text{min}$,*



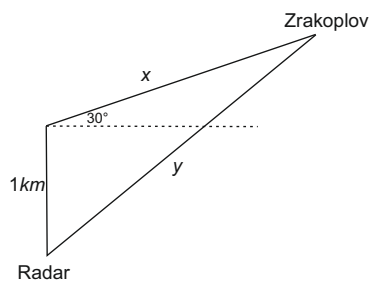
Slika 1.5: Grafički prikaz iz zadatka 1.13

odredite brzinu kojom se mijenja visina vode u spremniku u ovisnosti o vremenu u trenutku u kojemu je visina popunjenog dijela spremnika 3 m.

Rješenje: Kako je $\frac{dh}{dt} = \frac{8}{\pi h^2}$, za $h = 3$ m brzina promjene visine jednaka je $8/(9\pi) \approx 0.28$ m/min.

Zadatak 1.15. Zrakoplov leti konstantnom brzinom od 300 km/h prema gore pod kutom od 30° u odnosu na tlo. Na visini 1 km prelijeće iznad radara na tlu. Odredite brzinu promjene udaljenosti zrakoplova i radara jednu minutu nakon prelijetanja.

Rješenje: Neka je x udaljenost zrakoplova od mjesta prelijetanja iznad radara te y udaljenost zrakoplova do radara (slika 1.6).



Slika 1.6: Grafički prikaz iz zadatka 1.15

Primjenom kosinusovog poučka dobivamo

$$y^2 = x^2 + 1^2 - 2x \cos 120^\circ = x^2 + x + 1.$$

Deriviranjem prethodne jednakosti dobivamo $2y \frac{dy}{dt} = (2x + 1) \frac{dx}{dt}$, odnosno

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2x + 1}{2y} \frac{dx}{dt}.$$

Kako je jednu minutu nakon prelijetanja $x = \frac{300}{60} = 5 \text{ km}$, to je $y = \sqrt{25 + 5 + 1} = \sqrt{31} \text{ km}$, pa i $\frac{dy}{dt} \approx 296 \text{ km/h}$.

1.3 Brzina u prirodnim i društvenim znanostima

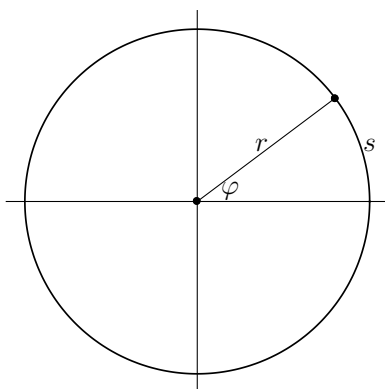
Pogledajmo kako se koncept brzine, odnosno derivacije pojavljuje u raznim prirodnim i društvenim pojavama i problemima.

Fizika

U prethodnom poglavlju proučavali smo pravocrtno gibanje tijela i uveli pojam brzine tijela u trenutku t kao derivacije funkcije položaja: $v(t) = s'(t)$. Na analogan način definiraju se *akceleracija* ili *ubrzanje tijela u trenutku t* , kao $a(t) = v'(t)$, te *trzaj tijela u trenutku t* kao $j(t) = a'(t)$. Osnovna mjerna jedinica za duljinu je metar (m), za vrijeme sekunda (s), pa stoga brzinu tijela mjerimo u m/s , akceleraciju u m/s^2 , a trzaj u m/s^3 .

Na sličan način možemo promatrati i kružno gibanje tijela, ili preciznije *materijalne točke*, odnosno gibanje koje se odvija po kružnici. Takvo gibanje lakše je opisati pomoću pripadnih *kutnih veličina*: kružnicu po kojoj se tijelo giba smjestimo u koordinatni sustav u ravnini tako da je središte kružnice ujedno i ishodište koordinatnog sustava.

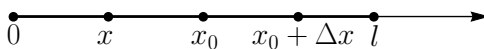
Tada je položaj tijela u trenutku t jedinstveno određen kutom $\varphi(t)$ koji spojnica tijela s ishodištem zatvara s pozitivnim dijelom osi Ox . Sada kutnu brzinu definiramo kao *promjenu kuta po vremenu*: $\omega(t) = \varphi'(t)$. Kako kut mjerimo u radijanima (rad), to je mjerna jedinica za kutnu brzinu *radijan u sekundi* (rad/s). Ako sa $s(t)$ označimo duljinu luka kružnice koji odgovara kutu $\varphi(t)$, kao na slici 1.7, onda je $s(t) = \varphi(t) \cdot r$, gdje je r radijus kružnice po kojoj se tijelo giba. Uočimo da funkcija s mjeri put koji tijelo prelazi pri gibanju. Stoga je brzina tijela dana s $v(t) = s'(t) =$



Slika 1.7: Kružno gibanje materijalne točke

$\varphi'(t) \cdot r = \omega(t) \cdot r$, što daje vezu između kutne i *linearne (obodne) brzine*. Analogna veza vrijedi između *kutne akceleracije* $\alpha(t) = \omega'(t)$ (mjerna jedinica rad/s^2) i *tangencijalne akceleracije* $a_{\text{tan}}(s) := v'(t) = \alpha(t) \cdot r$.

Promotrimo sada nešto drugačiji problem: neka je dan *tanki ravni štapa duljine l* , kao na slici 1.8. Pri tome riječ *tanki* znači da ga shvaćamo kao jednodimenzionalni objekt, odnosno možemo ga prikazati krivuljom, dok *ravni* znači da za tu krivulju možemo uzeti neki segment, poput $[0, l]$.

Slika 1.8: Tanki ravni štapa duljine l

Označimo s $m(x)$ *masu* dijela $[0, x] \subseteq [0, l]$ danog štapa. Još u osnovnoškolskoj fizici definirali smo *gustoću (mase)* tijela kao omjer njegove mase i volumena. Međutim, u slučaju našeg štapa ne možemo govoriti o volumenu jer se radi o jednodimenzionalnom objektu. Stoga promatramo *linernu gustoću mase* koju definiramo kao omjer mase i duljine tijela. Pre-

ciznije, *srednja linearna gustoća mase* dijela $[x_0, x_0 + \Delta x] \subseteq [0, l]$ dana je izrazom

$$\frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

Sada, slično kao pojam brzine u danom trenutku, definiramo *linearnu gustoću mase u točki* $x_0 \in [0, l]$ kao

$$\rho(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x} = m'(x_0).$$

Ukoliko je funkcija gustoće $\rho : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ konstantna, onda kažemo da je štap *homogen*, a u suprotnom da je *nehomogen*. Kako je osnovna mjerna jedinica za masu kilogram (*kg*), to linearnu gustoću mase mjerimo u *kg/m*.

Pojam derivacije pojavljuje se i u elektromagnetizmu: *jakost struje* definira se kao *promjena količine naboja po jedinici vremena*. Dakle, ako s $Q(t)$ označimo količinu naboja, a s $I(t)$ jakost struje u trenutku t , onda je $I(t) := Q'(t)$. Mjerna jedinica za količinu naboja je Coulomb³ (*C*), a za jakost struje Amper⁴ (*A*), te je očito $A := C/s$.

Kemija

Promotrimo kemijsku reakciju u kojoj spajanjem *jedne molekule reaktanta A i jedne molekule reaktanta B nastaje jedna molekula produkta C*. Simbolički to možemo zapisati kao $A + B \rightarrow C$. Koncentraciju reaktanata i produkta mjerimo u *molima po litri (mol/l)* i označavamo s $[A]$, $[B]$ i $[C]$. Pri tome je $1 \text{ mol} = 6.022 \cdot 10^{23}$ molekula, a litra (*l*) je mjerna jedinica za volumen: $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$. Brzina kemijske reakcije definira se kao $[C]'(t) = -[A]'(t) = -[B]'(t)$.

Za općenitije reakcije oblika $aA + bB \rightarrow cC + dD$, kada iz a molekula reaktanta A i b molekula reaktanta B nastaje c molekula produkta C i d molekula produkta D (na primjer $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ za reakciju u kojoj iz dvije molekule vodika i jedne molekule kisika nastaju dvije molekule vode), brzina kemijske reakcije definira se kao

$$-\frac{1}{a}[A]' = -\frac{1}{b}[B]' = \frac{1}{c}[C]' = \frac{1}{d}[D]'$$

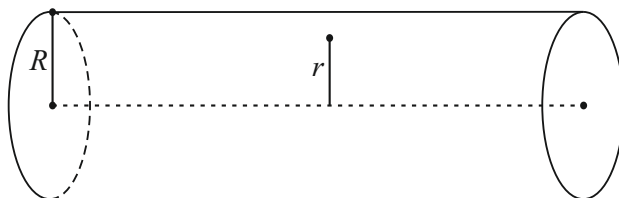
³Charles-Augustin de Coulomb (Angouleme, 14. lipnja 1736. - Pariz, 23. kolovoza 1806.), francuski fizičar.

⁴André-Marie Ampère (Lyon, 20. siječnja 1775. - Marseille, 10. lipnja 1836.), francuski fizičar i matematičar.

Biologija

Ako s $N(t)$ označimo broj jedinki neke populacije u trenutku t , onda je brzina rasta populacije u trenutku t dana s $N'(t)$. Uočimo da je broj jedinki neke populacije u načelu prirodan broj, odnosno $\text{Im } N \subseteq \mathbb{N}$, pa samim time N nije derivabilna funkcija. Stoga se kod proučavanja brzine rasta populacije obično promatra neka glatka aproksimacija funkcije N (koju isto označavamo), što ima smisla za neke velike populacije, poput bakterija.

Primjer koji slijedi uvršten je pod biologiju, mada je jako povezan i s fizikom, te s medicinom: promotrimo tok krvi kroz cilindričnu krvnu žilu radijusa R .



Slika 1.9: Krvna žila

Krv se obično modelira kao *viskoznan nekompresibilan fluid*. Pri tome *nekompresibilan* znači da prilikom tlačenja ne mijenja svoj volumen, a *viskoznan* da postoji trenje između slojeva fluida koje se opire njegovom toku. Prema modelu koji je prvi izveo Poiseulle⁵ 1840. godine, tok je *laminaran*, tj. brzina toka u danoj točki ovisi samo o udaljenosti r te točke od središta žile i dana je izrazom

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

gdje je P pad tlaka (razlika tlakova na krajevima žile), η koeficijent (*dina-*

⁵Jean Léonard Marie Poiseuille (22. travnja 1797. – 26. prosinca 1869.), francuski fizičar i fiziolog.

mičke) viskoznosti krvi i l duljina žile. Mjerna jedinica za tlak je Pascal⁶ (Pa) i $1Pa = 1N/m^2 = 1kg/(ms^2)$, gdje je Newton (N) mjerna jedinica za silu: $1N = 1kg\ m/s^2$. Već smo rekli da je viskoznost mjera trenja između slojeva fluida; mjerna jedinica je *Pascal sekunda* ($Pa\ s$) i za krv ona iznosi od 0,003 do 0,004 $Pa\ s$. Viskoznost ne treba miješati s gustoćom. Obično se kaže da je primjerice maslinovo ulje *gušće od vode* kako bismo time objasnili činjenicu da ulje *teče sporije od vode*. Istina je da je ulje zapravo rjeđe od vode (što lako vidimo iz toga što *ulje pliva na vodi*), ali ima veću viskoznost (0,081 $Pa\ s$) od vode ($8,94 \cdot 10^{-4}Pa\ s$) i zato *sporije teče*. Napomenimo još da se viskoznost obično smanjuje povećanjem temperature i da su ovi podaci mjereni na približno sobnoj temperaturi.

Iz gornje formule vidljivo je da je brzina toka najveća na sredini krvne žile (kada je $r = 0$), dok na rubovima krvne žile (kada je $r = R$) ona iznosi 0. Pomoću takozvanog *gradijenta brzine*

$$v'(r) = \frac{-Pr}{2\eta l},$$

možemo mjeriti kako se mijenja brzina toka krvi u odnosu na udaljenost promatrane točke od središta krvne žile.

Ekonomija

Neka je $C(x)$ trošak tvrtke za proizvodnju x komada nekog proizvoda. Funkcija C obično se naziva *funkcija troška*. Uočimo da je njezina prirodna domena skup prirodnih brojeva. Da bismo ju mogli derivirati, potrebno ju je proširiti na skup realnih brojeva (ili njegov *dobar* podskup), te tako dolazimo do pojma *marginalnog troška* koji definiramo kao $C'(x)$. Iz definicije derivacije dobivamo

$$C(n+1) \approx C(n) + C'(n),$$

odakle iščitavamo značaj marginalnog troška: ukoliko trenutno proizvodimo n komada proizvoda, marginalni trošak daje nam približni porast troškova proizvodnje koji bismo imali kada bismo željeli proizvodnju povećati za 1 proizvod. U raznim modelima često se za funkciju troška

⁶Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19. lipnja 1623. - Pariz, 19. kolovoza 1662.), francuski filozof, matematičar i fizičar.

uzima $C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, gdje prvi član u sumi označava troškove koji ne ovise o proizvodnji, poput troškova revizije ili održavanja, drugi član označava troškove vezane za cijenu sirovina potrebnih za proizvodnju, dok zadnja dva člana označavaju troškove koji nešto brže rastu s povećanjem proizvodnje, poput cijene prekovremenog rada.

Zajedničko svim primjerima u ovom potpoglavlju je da se u njima pojavljuje promjena neke veličine u odnosu na varijablu o kojoj ona ovisi, što odgovara matematičkom pojmu *derivacije*. Mogli bismo nastaviti dalje sa sličnim pojmovima u drugim znanostima, poput brzine učenja u psihologiji, brzine širenja glasina u sociologiji, ili pak brzine hlađenja lave u geologiji. Sve su to posebni slučajevi matematičkog koncepta derivacije koji dobro ilustriraju poznatu Fourierovu⁷ izjavu: *Matematika uspoređuje različite pojave i otkriva tajne analogije koje ih ujedinjuju.*

1.3.1 Zadaci

Zadatak 1.16. Čestica se giba po pravcu s funkcijom položaja (u metrima)

$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t, \quad t \geq 0.$$

- Odredite brzinu gibanja čestice u trenutku $t = 3$ s.
- Odredite trenutke u kojima čestica miruje.
- Odredite vremenske intervale u kojima se čestica giba prema naprijed.
- Izračunajte ukupnu duljinu puta koji je čestica prešla u prvih 8 s gibanja.
- Odredite akceleraciju čestice u trenutku $t = 3$ s.
- Odredite vremenske intervale u kojima čestica usporava, ubrzava, giba se konstantnom brzinom.
- Grafički prikažite položaj, brzinu i akceleraciju za $t \in [0, 8]$.

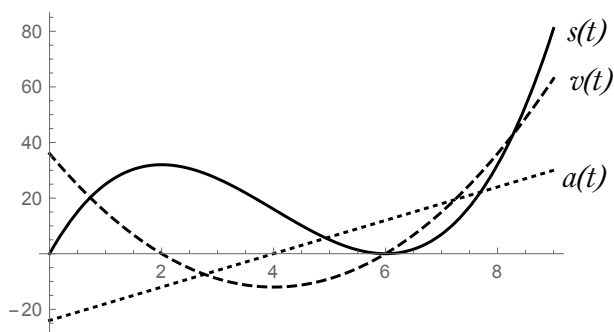
⁷Jean Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21. ožujka 1768. - Pariz, 16. svibnja 1830.) francuski matematičar i fizičar.

Rješenje:

- a) Brzina gibanja čestice u trenutku t je $v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 24t + 36$, pa u trenutku $t = 3$ s iznosi $v(3) = -9$ m/s.
- b) Čestica miruje u trenucima t u kojima je $v(t) = 0$, odnosno za koje je $3t^2 - 24t + 36 = 0$, tj. u trenucima $t_1 = 2$ s i $t_2 = 6$ s.
- c) Čestica se giba prema naprijed u trenucima u kojima je $v(t) > 0$, odnosno $3t^2 - 24t + 36 > 0$, tj. za $t < 2$ ili $t > 6$.
- d) Prijedeći put treba razdvojiti na put u intervalima $[0, 2)$, $\langle 6, 8]$ u kojima se giba prema naprijed i $\langle 2, 6)$ u kojemu se giba prema natrag:
- Na intervalu $[0, 2)$ prijedeći put je $|s(2) - s(0)| = |32 - 0| = 32$ m prema naprijed,
 - Na intervalu $\langle 2, 6)$ prijedeći put je $|s(6) - s(2)| = |0 - 32| = 32$ m prema natrag,
 - Na intervalu $\langle 6, 8]$ prijedeći put je $|s(8) - s(6)| = |32 - 0| = 32$ m prema naprijed.

Stoga je ukupna duljina prijedenog puta jednaka 96 m.

- e) Akceleracija čestice je $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 6t - 24$, pa je akceleracija u trenutku $t = 3$ s jednaka $a(3) = -6$ m/s².
- f) Kako je $a(t) = 6t - 24$, to je $a(t) > 0$ za $t > 4$, $a(t) = 0$ za $t = 4$ i $a(t) < 0$ za $t < 4$.
- Brzina je konstantna kada je $a(t) = 0$, tj. u trenutku $t = 4$ s.
 - Čestica ubrzava u trenucima kada su a i v istog predznaka, tj. za $t \in \langle 2, 4)$ (oba negativna) i $t > 6$ (oba pozitivna).
 - Čestica usporava u trenucima kada su a i v suprotnog predznaka, tj. za $t \in [0, 2)$ i $t \in \langle 4, 6)$.
- g) Grafički prikaz položaja, brzine i akceleracije za $t \in [0, 8]$ dan je na slici 1.10.



Slika 1.10: Grafički prikaz položaja, brzine i akceleracije u zadatku 1.16

Zadatak 1.17. Čestica se giba po pravcu s funkcijom položaja (u metrima)

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t \text{ m}, \quad t \geq 0.$$

- Odredite vremenske intervale u kojima se s povećava i u kojima se s smanjuje.
- Odredite vremenske intervale u kojima se brzina povećava i u kojima se brzina smanjuje.
- Izračunajte ukupnu duljinu puta koji je čestica prešla u prvih 5 s gibanja.

Rješenje:

- s raste za $t < 2$ i $t > 4$, a pada za $t \in \langle 2, 4 \rangle$;
- v se povećava za $t > 3$, a smanjuje za $t < 3$;
- ukupni prijeđeni put je 28 m.

Zadatak 1.18. Čestica se giba po pravcu s funkcijom položaja $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t - 5 \text{ m}$, $t \geq 0$. Odredite vremenske intervale u kojima čestica ubrzava, usporava i giba se konstantnom brzinom.

Rješenje: Čestica ubrzava za t iz intervala $\langle \frac{1}{2}, \frac{7}{4} \rangle$ i $\langle 3, +\infty \rangle$, usporava za t iz intervala $[0, \frac{1}{2}]$ i $\langle \frac{7}{4}, 3 \rangle$, a giba se konstantnom brzinom u trenutku $t = \frac{7}{4} \text{ s}$.

Zadatak 1.19. *Lopta je bačena vertikalno uvis brzinom 80 m/s i njezina visina u trenutku t je $h(t) = -16t^2 + 80t$ metara.*

- a) *Kolika je maksimalna visina koju lopta postiže?*
- b) *Kolika je brzina lopte kada je na visini 96 m prilikom gibanja prema gore i prema dolje?*

Rješenje:

- a) *Lopta postiže najveću visinu u trenutku u kojemu je brzina jednaka nuli. Kako je $v(t) = h'(t) = -32t + 80$, to je $v(t) = 0$ za $t = 2.5 \text{ s}$, te je $h_{max} = h(2.5 \text{ s}) = 100 \text{ m}$.*
- b) *Odredimo najprije trenutke u kojima je $h(t) = 96 \text{ m}$. Iz jednadžbe $-16t^2 + 80t = 96$ dobivamo da su to trenuci $t_1 = 2 \text{ s}$ i $t_2 = 3 \text{ s}$ (u trenutku t_1 lopta je na visini 96 m na svom putu prema gore, a u trenutku t_2 je na visini 96 m na putu prema dolje). Sada je $v(t_1) = 16 \text{ m/s}$ i $v(t_2) = -16 \text{ m/s}$.*

Zadatak 1.20. *Čestica se rotira u smjeru obrnutom od smjera kretanja kazaljke na satu tako da je prijeđeni kut u trenutku t dan s $\theta(t) = t^3/50 - t$ radijana, $t \geq 0$. Odredite prijeđeni kut, kutnu brzinu ω i kutnu akceleraciju α u trenutku $t = 10 \text{ s}$.*

Rješenje: Jednostavnim uvrštavanjem imamo da je prijeđeni kut nakon 10 s jednak $\theta = 10 \text{ rad}$. Nadalje, kutna brzina dana je s $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{3t^2}{50} - 1$, dok je kutna akceleracija $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{6t}{50}$. Za $t = 10$ je $\omega = 5 \text{ rad/s}$ i $\alpha = \frac{6}{5} \text{ rad/s}^2$.

Zadatak 1.21. *Rotirajući zamašnjak koji se usporava kočnicom za t sekundi zakrene se za kut $\varphi(t) = a + bt - ct^2$ rad pri čemu su a , b i c pozitivne konstante. Odredite kutnu brzinu i ubrzanje rotacije. Nakon koliko će se vremena zamašnjak zaustaviti?*

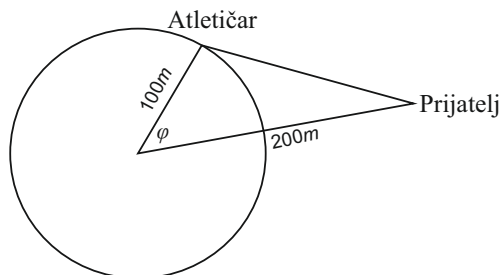
Rješenje: $\omega = b - 2ct$, $\alpha = -2c$, zaustavit će se nakon $\frac{b}{2c} \text{ s}$.

Zadatak 1.22. Čovjek hoda pravocrtno po stazi brzinom 4 m/s . Stazu snima rotirajuća nadzorna kamera postavljena na udaljenosti 20 m od staze koja je u početnom trenutku usmjerena okomito na stazu. Od trenutka kada čovjek prođe ispred kamere, ona ga počinje pratiti rotirajući se. Odredite brzinu promjene kuta otklona kamere iz početnog položaja u trenutku kada je čovjek nakon prolaska ispred kamere prešao 15 m .

Rješenje: Brzina promjene kuta otklona kamere jednaka je 0.128 rad/s .

Zadatak 1.23. Atletičar trči na kružnoj stazi radijusa 100 m konstantnom brzinom 7 m/s . Njegov prijatelj stoji udaljen 200 m od središta staze. Odredite brzinu kojom se mijenja udaljenost između prijatelja u trenutku kada je udaljenost između njih 200 m .

Rješenje: Označimo udaljenost između prijatelja u trenutku t s $l(t)$ te odgovarajući središnji kut kružne staze s φ (slika 1.11).



Slika 1.11: Grafički prikaz iz zadatka 1.23

Tada primjenom kosinusovog poučka dobivamo

$$l^2 = 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cdot \cos \varphi = 50\,000 - 40\,000 \cos \varphi.$$

Deriviranjem prethodne jednakosti dobivamo $2l \frac{dl}{dt} = 40\,000 \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$. Označimo sa s duljinu kružnog luka koji odgovara kutu φ . Tada je $s = r \cdot \varphi = 100\varphi$ pa je $7 = \frac{ds}{dt} = 100 \frac{d\varphi}{dt}$, odnosno $\frac{d\varphi}{dt} = 0.07$. Za $l = 200 \text{ m}$ je $\cos \varphi = \frac{1}{4}$, te je $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Stoga za $l = 200 \text{ m}$ je $\frac{dl}{dt} = \frac{7\sqrt{15}}{4} \text{ m/s}$.

Zadatak 1.24. Velika kazaljka sata duga je 8 cm , a mala 4 cm . Odredite brzinu kojom se mijenja udaljenost između vrhova kazaljki u 13 h .

Rješenje: Tražena brzina je -18.5 cm/h .

Zadatak 1.25. Masa prvih x metara žice je $3x^2$ kilograma. Odredite linearnu gustoću za $x = 1$, te odredite gdje je gustoća najmanja, a gdje najveća.

Rješenje: S $m(x) = 3x^2$ dana je masa dijela žice $[0, x]$. Tada je linearna gustoća nehomogene žice u točki x jednaka $\rho(x) = \frac{dm}{dx} = 6x$, pa je $\rho(1) = 6 \text{ kg/m}$. Gustoća je rastuća linearna funkcija od x . Stoga je najmanja gustoća na početku žice, a najveća na kraju žice.

Zadatak 1.26. Frekvencija titranja žice violine je

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

gdje je L duljina žice, T je napetost, a ρ linearna gustoća žice. Odredite brzinu kojom se mijenja frekvencija u ovisnosti o

- duljini (pri čemu su T i ρ konstantni),
- napetosti (pri čemu su L i ρ konstantni),
- linearnoj gustoći (pri čemu su T i L konstantni).

Rješenje:

$$\text{a) } \frac{df}{dL} = -\frac{1}{2L^2} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

$$\text{b) } \frac{df}{dT} = \frac{1}{4L\sqrt{\rho T}},$$

$$\text{c) } \frac{df}{d\rho} = -\frac{1}{4L\rho} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Zadatak 1.27. Sila F koja djeluje na tijelo mase m i brzine v dana je s

$$F = \frac{d}{dt}(mv).$$

Ako je m konstanta, onda je $F = m \cdot \frac{dv}{dt} = ma$. U teoriji relativnosti masa čestice ovisi o brzini na sljedeći način

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdje je m_0 masa čestice u stanju mirovanja, a c brzina svjetlosti. Dokažite da je

$$F = \frac{m_0 \cdot a}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}(mv) = m \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dm}{dt} \\ &= m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot a + vm_0 \cdot \frac{-1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-2v}{c^2} \frac{dv}{dt} \\ &= m_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} a \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{m_0 \cdot a}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.28. Količina naboja koji prolazi kroz poprečni presjek vodiča u trenutku t dana je s $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$ C. Odredite jakost električne struje u trenutku $t = 1$ s. U kojem je trenutku jakost struje najmanja?

Rješenje: Jakost električne struje dana je s $I(t) = \frac{dQ}{dt} = 3t^2 - 4t + 6$. Stoga je $I(1) = 5$ A. Kako je I kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom, minimum se postiže u apscisi tjemena pripadne parabole, tj. za $t = \frac{2}{3}$ s.

Zadatak 1.29. Boyleov⁸ zakon određuje da je umnožak volumena i tlaka idealnog plina konstantan pod uvjetom da je temperatura konstantna, odnosno $p \cdot V = k$ gdje je V volumen plina, p tlak plina i k konstanta.

⁸Robert Boyle (Lismore, 25. siječnja 1627. – London, 30. prosinca 1691.)

- a) Odredite brzinu kojom se mijenja volumen plina u ovisnosti o tlaku.
- b) Plin u zatvorenoj posudi tlači se na konstantnoj temperaturi 10 min. Smanjuje li se volumen brže na početku ili na kraju tlačenja?
- c) Izotermalna kompresibilnost mjeri kako brzo volumen opada u ovisnosti o rastu tlaka u odnosu na trenutni volumen pri konstantnoj temperaturi i dana je s $\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$. Odredite izotermalnu kompresibilnost plina.

Rješenje:

- a) Promjena volumena plina u ovisnosti o tlaku je $\frac{dV}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{k}{p} \right) = -\frac{k}{p^2}$.
- b) Kako je $\frac{dV}{dp} = -\frac{k}{p^2}$, zaključujemo da kako raste p , to se $|\frac{dV}{dp}|$ smanjuje. To znači da se volumen brže smanjuje na početku tlačenja.
- c) $\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{-k}{p^2} = \frac{k}{V \cdot p \cdot p} = \frac{k}{k \cdot p} = \frac{1}{p}$.

Zadatak 1.30. Promatramo kemijsku reakciju u kojoj je jedna molekula produkta C sastavljena od jedne molekule reaktanta A i jedne molekule reaktanta B. Na početku kemijske reakcije koncentracija reaktanata iznosila je $[A] = [B] = a$ mol/l. Koncentracija produkta [C] u trenutku t dana je sa $[C](t) = \frac{a^2 kt}{akt+1}$, gdje je k konstanta.

- a) Odredite brzinu kemijske reakcije u trenutku t .
- b) Ako je $[C] = x$, pokažite da je $\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2$.
- c) Što se događa s koncentracijom i brzinom reakcije za $t \rightarrow +\infty$?

Rješenje:

a) $\frac{d[C]}{dt} = \frac{a^2 k}{(akt+1)^2}$.

b) Kako je

$$a - x = a - \frac{a^2 kt}{akt+1} = \frac{a}{akt+1}'$$

to je

$$k(a-x)^2 = \frac{a^2 k}{(akt+1)^2} = \frac{d[C]}{dt}.$$

c) Najprije promotrimo što se događa s koncentracijom. Kako je

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [C] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 kt}{akt + 1} = \frac{a^2 k}{ak} = a,$$

zaključujemo da koncentracija produkta teži izjednačavanju s koncentracijom reaktanata na početku reakcije. Za brzinu reakcije vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d[C]}{dt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2 k}{(akt + 1)^2} = 0.$$

Dakle, brzina reakcije smanjuje se i nakon dovoljno vremena reakcija efektivno završava.

Zadatak 1.31. U posudu koja sadrži 10 l vode ulijeva se otopina koja sadrži 0.3 kg soli po litri, brzinom od 3 l u minuti. Otopina se potpuno izmiješa i istovremeno istječe iz posude brzinom od također 3 l u minuti. Odredite brzinu promjene količine soli u otopini (izraženu preko mjere količine soli u danom trenutku).

Rješenje: Neka je količina soli u otopini u trenutku t jednaka $x(t)$. Tada je $x'(t) = -0.3x(t) + 0.9$.

Zadatak 1.32. U ribnjaku se nalazi određeni broj jedinki neke vrste ribe koja se redovito lovi. Brzina promjene populacije ribe dana je s

$$\frac{dN}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{N_c} \right) N(t) - \beta N(t),$$

gdje je r_0 stopa nataliteta ribe, N_c najveći broj jedinki koji ribnjak može podnijeti (kapacitet ribnjaka) i β postotak ulovljene ribe. Populacija je stabilna (u ravnoteži) ako vrijedi $\frac{dN}{dt} = 0$ (dakle, kada stopa rasta nije niti pozitivna niti negativna). Ako ribnjak može podnijeti 10 000 jedinki ribe, stopa nataliteta ribe je 5 % te postotak ulovljene ribe 4 %, pronađite stabilnu razinu populacije.

Rješenje: Izjednačavanjem $\frac{dN}{dt} = 0$ dobivamo

$$\beta N(t) = r_0 \left(1 - \frac{N(t)}{N_c} \right) N(t),$$

odakle nakon dijeljenja s $N(t)r_0$ lako slijedi $N(t) = N_c \left(1 - \frac{\beta}{r_0}\right)$. Uvrštavanjem $N_c = 10\,000$, $r_0 = 5\% = 0.05$ i $\beta = 4\% = 0.04$, dobivamo $N(t) = 2000$.

Zadatak 1.33. U proučavanju ekosustava, modeli "predator-plijen" često se koriste za proučavanje odnosa među vrstama. Tako se odnos među populacijama kanadskih vukova $W(t)$ i losova $C(t)$ može opisati s

$$\frac{dC(t)}{dt} = aC(t) - bC(t)W(t), \quad \frac{dW(t)}{dt} = -cW(t) + dC(t)W(t).$$

Neka je $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ i $d = 0.00001$. Odredite sve parove $(C(t), W(t))$ takve da su populacije vukova i losova u ravnoteži.

Rješenje: Populacija će biti u ravnoteži ako vrijedi $\frac{dC(t)}{dt} = 0$ i $\frac{dW(t)}{dt} = 0$, odnosno za parove $(0, 0)$ i $(5000, 50)$.

Zadatak 1.34. Promotrimo krunu žilu polumjera $R = 0.01$ cm, duljine $l = 3$ cm s padom tlaka $P = 300$ Pa i viskoznošću $\eta = 0.003$ Pa · s. Odredite brzinu toka krvi i gradijent brzine na udaljenosti $r = 0$ cm, $r = 0.005$ cm i $r = 0.01$ cm od središta krunne žile.

Rješenje: Brzina toka krvi dana je s $v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$, te je $v(0) = 0.8333$ cm/s, $v(0.005) = 0.625$ cm/s i $v(0.01) = 0$ cm/s. Nadalje,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

te je $v'(0) = 0$ (cm/s)/cm, $v'(0.005) = -83,3334$ (cm/s)/cm i $v'(0.01) = -166,6668$ (cm/s)/cm.

Zadatak 1.35. Trošak proizvodnje x kvadratnih metara nekog platna je

$$C(x) = 0.0005x^3 - 0.1x^2 + 12x + 1200 \$.$$

- Odredite $C'(200)$ i objasnite značenje dobivenog broja. Što taj broj predviđa?
- Usporedite predviđeni i stvarni trošak proizvodnje dvjestoprvog kvadratnog metra platna.

Rješenje:

- Marginalni trošak jednak je $C'(x) = 0.0015x^2 - 0.2x + 12$, te je $C'(200) = 32 \text{ \$/m}^2$. Dobiveni broj interpretira se kao stopa rasta troška u odnosu na broj predviđenih jedinica za $x = 200$.
- Predviđeni trošak proizvodnje 201. kvadratnog metra platna je $C'(200) = 32 \text{ \$/m}^2$, dok je stvarni trošak jednak $C(201) - C(200) \approx 32.20 \text{ \$}$.

Zadatak 1.36. Trošak proizvodnje $C(x)$ (u milijunima eura) za proizvodnju x komada jednog tipa zrakoplova godišnje je

$$C(x) = 6 + 2\sqrt{x+1}, \quad x \geq 0.$$

Pomoću marginalnog troška predvidite trošak proizvodnje šesnaestog zrakoplova i dobiveni rezultat usporedite sa stvarnim troškom.

Rješenje: Predviđeni trošak je 0.25 mil. eura, a stvarni trošak je 0.2462 mil. eura.

Zadatak 1.37. Neka je $p(x)$ broj proizvedenih proizvoda kada radi x radnika u postrojenju. Tada je prosječna produktivnost postrojenja

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}.$$

- Odredite $A'(x)$ i objasnite zašto kompanija zapošljava nove radnike kada je $A'(x) > 0$.
- Dokažite da ako je $p'(x)$ veći od prosječne produktivnosti, onda je $A'(x) > 0$.

Rješenje:

- $A'(x) = \frac{xp'(x) - p(x)}{x^2}$. Kada je $A'(x) > 0$, onda $A(x)$ raste, odnosno raste prosječna produktivnost u ovisnosti o broju radnika.
- Neka je $p'(x)$ veći od prosječne produktivnosti, tj. $p'(x) > A(x)$. Tada je $p'(x) > \frac{p(x)}{x}$, odnosno $xp'(x) - p(x) > 0$, odakle slijedi $\frac{xp'(x) - p(x)}{x^2} > 0$. Dakle, $A'(x) > 0$.

1.4 Eksponencijalni rast i pad

Neka je *brzina promjene veličine y proporcionalna samoj veličini y* . Drugim riječima, ako y ovisi o (vremenskoj) varijabli t , dobivamo da je (u svakom trenutku)

$$y'(t) = ky(t), \quad (1.1)$$

gdje je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pripadna konstanta proporcionalnosti (u slučaju $k = 0$ dobivamo da je y konstanta, što je manje zanimljivo). Uočimo da (1.1) možemo zapisati i kao

$$k = \frac{y'(t)}{y(t)},$$

što nam zapravo govori da je *relativna brzina promjene veličine y konstantna*.

U većini primjena y je nenegativna funkcija, pa za $k > 0$ slijedi da je i $y' \geq 0$, odnosno funkcija y raste. U tom slučaju gornji izraz nazivamo zakon prirodnog rasta. Slično, kada je $k < 0$, y pada, pa govorimo o zakonu prirodnog pada. Primijetimo da je zakon prirodnog rasta/pada zapravo diferencijalna jednadžba za (nepoznatu) funkciju y .

Pokušajmo pronaći rješenje te diferencijalne jednadžbe: lako se može provjeriti da je to svaka eksponencijalna funkcija oblika $y = Ce^{kt}$, za proizvoljnu konstantu $C \in \mathbb{R}$. Ukoliko u rješenje uvrstimo $t = 0$, dobivamo

$$y(0) = Ce^{0t} = C,$$

odnosno C je vrijednost funkcije y u *početnom trenutku*. Slijedi da je rješenje jednadžbe (1.1) dano s

$$y(t) = y(0)e^{kt},$$

pa vidimo da *zakon prirodnog rasta/pada* (1.1) zapravo podrazumijeva *eksponencijalni rast* odnosno *pad* promatrane veličine. Brojni su modeli gdje se takav zakon pojavljuje, kao što ćemo vidjeti iz idućih primjera.

Primjer 1.2. (Malthusov⁹ model rasta populacije) *Ovim modelom pokušava se opisati broj jedinki $N(t)$ neke populacije (npr. ljudi, neke vrste životinja ili biljaka, bakterija) u trenutku t , a temelji se na postulatu koji kaže da je brzina*

⁹Thomas Robert Malthus (Rookery, 16. veljače 1766. - Bath, 23. prosinca 1834.), engleski demograf i politički ekonomist.

rasta populacije u nekom trenutku proporcionalna broju jedinki u tom trenutku. Ovdje se očito radi o prirodnom zakonu rasta

$$N'(t) = kN(t),$$

odnosno vrijedi

$$N(t) = N(0)e^{kt},$$

gdje $k > 0$ nazivamo biološki potencijal.

Pokušajmo ovim modelom predvidjeti koliko će stanovnika živjeti na Zemlji 2020. godine. Da bismo to učinili, moramo nekako odrediti koliko je $N(0)$, te k . To radimo na temelju dostupnih (povijesnih) podataka o broju stanovnika Zemlje. Primjerice, znamo da je 1950. godine bilo $2.56 \cdot 10^9$ stanovnika, a znamo da ih je 1960. bilo $3.04 \cdot 10^9$. Stoga, kao polazni trenutak u našem modelu uzimamo 1950. godinu, odnosno $N(0) = 2.56 \cdot 10^9$. Tada je, za proizvoljni $t \geq 0$, $N(t) = 2.56 \cdot 10^9 \cdot e^{kt}$, pa kako 1960. godina odgovara trenutku $t = 10$, slijedi da je

$$N(10) = 3.04 \cdot 10^9 = 2.56 \cdot 10^9 \cdot e^{10k}.$$

Odatve dobivamo da je

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{304}{256} \approx 0.017185,$$

odnosno

$$N(t) = 2.56 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017185t}. \quad (1.2)$$

Kako bismo provjerili opisuje li ovaj model dobro rast broja stanovnika Zemlje, trebalo bi usporediti poznate podatke o broju stanovnika u proteklim godinama s predviđanjima koja daje funkcija (1.2) (to ostavljamo kao zadatak za vježbu). Što se tiče samog predviđanja broja ljudi na Zemlji 2020. godine, uvrštavanjem $t = 70$ u (1.2) dobivamo

$$N(70) = 2.56 \cdot e^{70 \cdot 0.017185} \approx 8.524 \cdot 10^9.$$

Dakle, očekujemo populaciju od približno 8.5 milijardi stanovnika.

Uočimo da Malthusov model predviđa eksponencijalni rast populacije. Jasno je da to dugoročno nije moguće, te da broj stanovnika Zemlje ne može neograničeno rasti. Nedostatci ovog modela su što on ne uzima u obzir postojanje gornje ograde za broj jedinki koje stanište (Zemlja) može prehraniti, kao ni postojanje

prirodnih neprijatelja ili događaje poput prirodnih katastrofa (koje je teško predvidjeti) koji bitno utječu na smanjenje brojnosti populacije. Zapravo, Malthusov model opisuje rast populacije u idealnim uvjetima, te se često koristi za opisivanje nekih populacija (poput bakterija) u laboratorijskim uvjetima.

Primjer 1.3 (Neprekinuto ukamaćivanje). Pretpostavimo da smo ulog od A_0 novca stavili na štednju s godišnjom kamatnom stopom od $r \cdot 100\%$. Ukoliko se ukamaćivanje radi na godišnjoj bazi, onda nakon t godina naš ulog vrijedi $A_0(1+r)^t$. Međutim, obično se ukamaćivanje vrši u kraćim vremenskim intervalima (polugodišnje, kvartalno, mjesečno ili dnevno). Ukoliko se vrši n puta godišnje, nakon t godina vrijednost naše investicije iznosit će $A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, pri čemu je obično $n \in \{2, 4, 12, 365\}$. Sada zamislimo da se naš ulog ukamaćuje u vrlo kratkim vremenskim intervalima, odnosno da je n velik. Preciznije, promatramo što se događa kada $n \rightarrow +\infty$:

$$A(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}} \right)^{rt} = A_0 e^{rt},$$

te ovdje govorimo o neprekinutom ukamaćivanju. Uočimo da je $A'(t) = rA_0e^{rt} = rA(t)$, odnosno brzina rasta uloga u nekom trenutku proporcionalna je njegovom iznosu u tom trenutku.

Brojni su primjeri u kojima se pojavljuje zakon prirodnog rasta/pada, poput zakona radioaktivnog raspada koji glasi: brzina radioaktivnog raspada proporcionalna je količini neraspadnute tvari, ili recimo Newtonovog zakona hlađenja/grijanja tijela: brzina hlađenja tijela proporcionalna je razlici temperatura između tijela i okoline. O njima će biti nešto više riječi u zadacima koji slijede.

1.4.1 Zadaci

Zadatak 1.38. Broj jedinki neke vrste mijenja se relativnom brzinom promjene od 0.7944 članova po danu. Ako su u početku postojala dva člana te vrste, odredite broj članova nakon 10 dana.

Rješenje: Zadano je $0.7944 = \frac{N'(t)}{N(t)} = k$. Stoga dobivamo

$$N(t) = N(0)e^{kt} = 2e^{0.7944t},$$

te je $N(10) = 2e^{7.944} \approx 5637$.

Zadatak 1.39. *Populacija jedinki vinske mušice u početku se sastoji od 100 jedinki i raste brzinom proporcionalnoj broju jedinki. Nakon sat vremena postoji 420 jedinki.*

- Odredite broj jedinki nakon t sati.
- Odredite broj jedinki nakon 2 dana.
- Kada će broj jedinki biti jednak 20 000?

Rješenje:

- Broj jedinki iznosi $N(t) = N(0)e^{kt} = 100e^{kt}$. Kako nakon jednog sata ima 420 jedinki, to je $420 = N(1) = 100e^k$, odakle slijedi $k = \ln 4.2$. Stoga je $N(t) = 100 \cdot 4.2^t$.
- Nakon 2 dana je $N(48) = 8.24 \cdot 10^{31}$.
- Kako bismo odredili kada će broj jedinki biti jednak 20 000, potrebno je riješiti jednadžbu $100 \cdot 4.2^t = 20\,000$, odakle slijedi $t = \frac{\ln 200}{\ln 4.2} = 3.7$ h.

Zadatak 1.40. *U tablici 1.4 nalaze se podaci o broju stanovnika u SAD-u u razdoblju od 1960. do 2000. godine.*

| Godina | milijuna stanovnika |
|--------|---------------------|
| 1960. | 189 |
| 1970. | 203 |
| 1980. | 227 |
| 1990. | 250 |
| 2000. | 275 |

Tablica 1.4: Broj stanovnika u SAD-u

Korištenjem Malthusovog modela i broja stanovnika za

1960. i 1970. god.

b) 1980. i 1990. god.

pokušajte predvidjeti broj stanovnika za 2000. godinu. Usporedite dobiveni rezultat sa stvarnim brojem stanovnika te godine.

Rješenje: a) $N(2000) = 251.5$ mil. b) $N(2000) = 275.3$ mil.

Zadatak 1.41. Ako je uloženo 3000 kn s kamatnom stopom 5%, odredite vrijednost uloga po isteku 5. godine ako je ukamaćivanje

a) mjesečno,

b) godišnje,

c) neprekidno, te odredite brzinu rasta uloga na početku prve godine.

Rješenje:

a) $A(5) = 3000 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 3850.08$ kn,

b) $A(5) = 3000 \cdot (1 + 0.05)^5 = 3828.84$ kn,

c) $A(5) = 3000e^{0.05 \cdot 5} = 3852.08$ kn. Brzina rasta uloga na početku 1. godine je $A'(0) = rA(0) = 150$ kn/god.

Zadatak 1.42. Uložen je iznos od A_0 kuna uz neprekidno ukamaćivanje s godišnjom kamatnom stopom $r\%$. Koliko je vremena potrebno da se uloženi iznos udvostruči? Koliko iznosi kamatna stopa ako se početni ulog udvostruči za 9 godina?

Rješenje: $t = \frac{100 \ln 2}{r}$, $r = 7.7$.

Zadatak 1.43. Vrijeme poluraspada radija je 1590 godina. Promatramo uzorak radija koji ima masu 100 mg.

a) Odredite jednadžbu kojom je opisana masa promatranog uzorka radija nakon t godina.

b) Odredite masu uzorka nakon 1000 godina.

c) Kada će masa uzorka biti jednaka 30 mg?

Rješenje:

- a) Prema zakonu radioaktivnog raspada, masa uzorka radija koja preostaje nakon t godina je $m(t) = m(0)e^{kt}$. Vrijeme poluraspada daje nam jednačbu $100e^{1590k} = \frac{1}{2} \cdot 100$, iz čega slijedi da je $k = -\frac{\ln 2}{1590}$, te je $m(t) = 100 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{1590}} = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{1590}}$.
- b) $m(1000) = 64.6 \text{ mg}$.
- c) Vremenski trenutak u kojemu će masa biti 30 mg dobivamo kao rješenje jednačbe $30 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{1590}}$, odnosno $t \approx 2762 \text{ god}$.

Zadatak 1.44. *Uzorak radona radioaktivno se raspada tako da nakon 3 dana masa uzorka iznosi 58% polazne mase.*

- a) *Odredite vrijeme poluraspada uzorka radona.*
- b) *Odredite koliko je dana potrebno da masa uzorka dostigne 10% polazne mase.*

Rješenje:

- a) Vrijeme poluraspada je $t = 3.82$ dana.
- b) Potrebno je $t = 12.68$ dana.

Zadatak 1.45. *Boca soka sobne temperature 22°C stavljena je u hladnjak na temperaturu od 6°C . Nakon pola sata sok se ohladio na 16°C .*

- a) *Kolika će biti temperatura soka nakon t minuta u hladnjaku?*
- b) *Koliko traje hlađenje na 10°C ?*

Rješenje:

- a) Neka je $T(t)$ temperatura soka nakon t minuta u hladnjaku, $T(0) = 22^\circ\text{C}$ temperatura soka prije početka hlađenja i $T_0 = 6^\circ\text{C}$ temperatura u hladnjaku. Prema Newtonovom zakonu hlađenja tijela slijedi $T'(t) = k(T(t) - T_0)$. Uvedemo li supstituciju $y(t) = T(t) - T_0$, dobivamo $T'(t) = y'(t)$, pa je $y'(t) = ky(t)$, odnosno $y(t) = y(0)e^{kt}$, što u konačnici daje $T(t) = T_0 + (T(0) - T_0)e^{kt}$. Iz $T(30) = 16$, dobivamo $k = -0.01567$. Stoga je $T(t) = 6 + 16e^{-0.01567t}$.

b) Iz jednadžbe $T(t) = 10$ dobivamo $t \approx 1h 28min$.

Zadatak 1.46. Termometar koji pokazuje temperaturu $25^\circ C$ stavljen je u hladnjak na konstantnu temperaturu $5^\circ C$. Nakon 3 minute termometar pokazuje temperaturu $15^\circ C$. Koliku će temperaturu pokazivati termometar nakon 10 minuta? Nakon koliko minuta će termometar pokazati temperaturu $6^\circ C$?

Rješenje: $T(10) = 6.98523$, $t = 12.97$ min.

Zadatak 1.47. Tijelo temperature $80^\circ C$ koje se nalazi u prostoriji temperature $20^\circ C$ ohladit će se za 20 s na $60^\circ C$. Kolika će biti temperatura tijela nakon 50 s?

Rješenje: $T(50) = 41.77^\circ C$.

Zadatak 1.48. Pri istraživanju ubojstva u 1.30 sati nađeno je tijelo temperature $32.5^\circ C$ u prostoriji temperature $20^\circ C$. Nakon sat vremena temperatura tijela iznosila je $30.3^\circ C$. Ako za normalnu temperaturu tijela uzmemo $37^\circ C$, odredite vrijeme zločina.

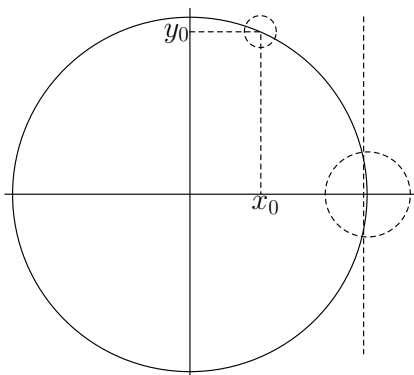
Rješenje: Neka je $T(t)$ temperatura tijela t minuta nakon smrti, te x vrijeme proteklo od smrti do trenutka kada je tijelo nađeno. Tada je $T(0) = 37^\circ C$, $T_0 = 20^\circ C$, $T(x) = 32.5^\circ C$ i $T(x + 60) = 30.3^\circ C$, te je $T(t) = 17e^{kt} + 20$. Iz podataka za $T(x)$ i $T(x + 60)$, dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 32.5 &= 17e^{kt} + 20, \\ 30.3 &= 17e^{k(x+60)} + 20, \end{aligned}$$

odakle dobivamo $k = -0.00323$ i $x \approx 1h 35$ min. Slijedi da je tijelo nađeno 1h i 35 min nakon ubojstva, odnosno da se ubojstvo dogodilo u 23.55 sati.

1.5 Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije

Ponekad se u primjenama pojavljuju funkcije koje nisu zadane eksplicitnom formulom, nego u nekom drugom obliku. Sada ćemo vidjeti kako možemo računati derivaciju takve funkcije. To naravno ovisi o tome na koji je način funkcija zadana: implicitno, parametarski ili u polarnim koordinatama. Pogledajmo primjerice jednadžbu kružnice $x^2 + y^2 = 25$.



Slika 1.12: Kružnica

Iz slike 1.12 vidljivo je da ta kružnica ne predstavlja graf funkcije, jer neke paralele s Oy -osi sijeku kružnicu u više od jedne točke. Međutim, ukoliko ne promatramo cijelu kružnicu, nego samo njezin dio koji se nalazi unutar dovoljno male okoline točke (x_0, y_0) kružnice (kao na slici), onda taj dio zaista je graf funkcije. Zapravo, za (x_0, y_0) kao na slici možemo za taj *dio* uzeti cijelu gornju polukružnicu i funkciju čiji je ona graf možemo eksplicitno zapisati formulom $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Ukoliko se točka koju promatramo nalazi u donjoj poluravnini, onda bismo ispred korijena imali još predznak minus. Ovo možemo napraviti za sve točke kružnice osim za $(-5, 0)$ i $(5, 0)$. Naime koliko god malu okolinu tih točaka uzeli i dalje će biti pravaca koji će dio kružnice koji se nalazi unutar te okoline sijeći u dvije točke.

Općenito, promatramo sve točke (*krivulju*) ravnine koje zadovoljavaju

37 1.5. Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije

jednadžbu $F(x, y) = 0$, za danu realnu (C^1) funkciju F definiranu na otvorenome skupu u \mathbb{R}^2 , i neku točku (x_0, y_0) te krivulje. Prema teoremu o implicitno zadanoj funkciji [16, teorem 11.1], ako je $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$, onda je lokalno oko točke (x_0, y_0) izrazom $F(x, y) = 0$ definirana jedinstvena funkcija $y = f(x)$. Preciznije, postoji otvoren interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i jedinstvena funkcija $f \in C^1(I)$, takva da je

$$(\forall x \in I) \quad F(x, f(x)) = 0.$$

Naravno, teorem o implicitno zadanoj funkciji samo nam tvrdi da takav f postoji i ništa ne govori o tome koji je eksplicitni izraz za f . Usprkos tome, možemo naći izraz za derivaciju funkcije f : deriviranjem gornjeg izraza po x varijabli i primjenom formule za složeno deriviranje dobivamo

$$\partial_1 F(x, f(x)) \cdot 1 + \partial_2 F(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0,$$

odakle slijedi

$$f'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, f(x))}{\partial_2 F(x, f(x))}. \quad (1.3)$$

Ukoliko ovaj izraz još jednom deriviramo (uz pretpostavku da je F , a time i f klase C^2), dobivamo izraze za derivacije višeg reda:

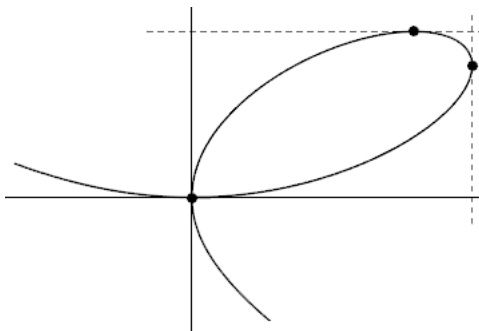
$$f''(x) = -\frac{[\partial_{11}^2 F(x, f(x)) + \partial_{12}^2 F(x, f(x))f'(x)]\partial_2 F(x, f(x))}{(\partial_2 F(x, f(x)))^2} + \frac{\partial_1 F(x, f(x))[\partial_{21}^2 F(x, f(x)) + \partial_{22}^2 F(x, f(x))f'(x)]}{(\partial_2 F(x, f(x)))^2}.$$

Napomena 1.1. *Uvjet $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$ iz teorema o implicitno zadanoj funkciji zapravo govori da tangenta na (nivo-) krivulju $F(x, y) = 0$ u točki (x_0, y_0) nije paralelna s y -osi. To lako slijedi iz toga što je vektor smjera te tangente dan s $\vec{v} = \partial_1 F(x_0, y_0)\vec{i} + \partial_2 F(x_0, y_0)\vec{j}$.*

Napomena 1.2. *Uočimo da je za prethodni primjer kružnice $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, te da je $\partial_2 F(x, y) \neq 0$, u svim točkama kružnice, osim u $(-5, 0)$ i $(5, 0)$. Stoga teorem o implicitnoj funkciji možemo primijeniti za sve točke osim tih dviju, što je u skladu s prijašnjim zaključcima.*

Napomena 1.3. Analogno smo se mogli pitati na okolini koje je točke izrazom $F(x, y) = 0$ x zadan kao funkcija varijable y . Tada i dalje vrijedi rezultat teorema o implicitno zadanoj funkciji, uz pretpostavku da je $\partial_1 F(x_0, y_0) \neq 0$, odnosno da tangenta na (nivo-) krivulju $F(x, y) = 0$ u točki (x_0, y_0) nije paralelna s x -osi.

Primjer 1.4. Promotrimo Descartesov¹⁰ list implicitno dan s $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ i pokušajmo pronaći točke u kojima su tangente na tu krivulju paralelne s koordinatnim osima.



Slika 1.13: Decartesov list

Ako označimo $F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$, onda iz $\partial_1 F(x, y) = 3x^2 - 6y = 0$ slijedi $y = \frac{x^2}{2}$, pa uvrštavanjem u jednadžbu Descartesovog lista dobivamo

$$x^3(x^3 - 16) = 0.$$

Sada lako zaključujemo da postoje dvije točke $(0, 0)$ i $(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$ u kojima je tangenta paralelna s x -osi (vidi sliku 1.13). Na njihovoj okolini Descartesov list nije graf funkcije $y \mapsto x(y)$, dok na okolini svih ostalih točaka to je. Tada derivaciju takve funkcije lako možemo izračunati na sličan način kao i (1.3), te dobivamo

$$\frac{dx}{dy} = x'(y) = \frac{y^2 - 2x}{2y - x^2}.$$

Analogno možemo pronaći točke u kojima je tangenta paralelna s y -osi: to su $(0, 0)$ i $(2\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})$. Na okolinama svih ostalih točaka Descartesov list je graf

¹⁰René Descartes, 31. ožujka 1596. - Stockholm, 11. veljače 1650.), francuski filozof, fizičar i matematičar; utemeljitelj analitičke geometrije.

39 1.5. Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije

funkcije $x \mapsto y(x)$, te vrijedi

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

Promotrimo sada ravninsku krivulju danu svojom parametrizacijom

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\y &= \psi(t),\end{aligned}$$

za $t \in [a, b]$, gdje su φ i ψ funkcije klase C^1 . Primjerice, jedna parametrizacija kružnice dana je s

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t,\end{aligned}$$

za $t \in [0, 2\pi]$.

Slično kao ranije, možemo se pitati na okolinama kojih točaka naša krivulja predstavlja graf funkcije $y = f(x)$, ili, ekvivalentno tome, u kojim točkama krivulje tangenta na krivulju nije paralelna s y -osi. Kako je vektor smjera tangente na krivulju u točki $(\varphi(t), \psi(t))$ dan s $v = \varphi'(t)i + \psi'(t)j$ (vidi iduću točku za pojašnjenje), slijedi da su to one točke u kojima je $\varphi'(t) \neq 0$. U tom slučaju derivaciju funkcije f možemo dobiti derivirajući jednakost

$$\psi(t) = f(\varphi(t)),$$

što daje

$$f'(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Naravno, dobiveni izraz odgovara i formalnom računu s derivacijama kao razlomcima, po kojemu je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

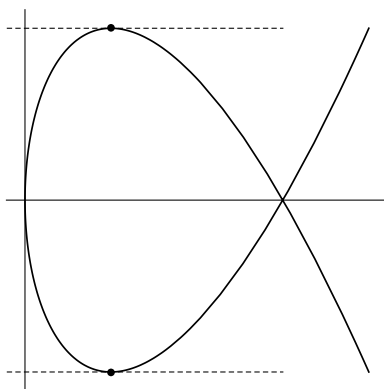
Derivirajući taj izraz još jedanput dobivamo

$$f''(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)},$$

odakle slijedi izraz za drugu derivaciju funkcije f (uz dodatnu pretpostavku da su φ i ψ klase C^2):

$$f''(\varphi(t)) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

Napomena 1.4. Gore smo napomenuli da je vektor smjera tangente na krivulju u točki $(\varphi(t), \psi(t))$ dan s $v = \varphi'(t)i + \psi'(t)j$. To je točno ukoliko taj vektor nije nul-vektor i tada lako možemo identificirati točke u kojima su tangente paralelne s osima: tangenta na krivulju točki $(\varphi(t), \psi(t))$ paralelna je s x -osi ukoliko je $\psi'(t) = 0$ i $\varphi'(t) \neq 0$, odnosno s y -osi ukoliko je $\varphi'(t) = 0$ i $\psi'(t) \neq 0$. Međutim, kada je $\psi'(t) = 0$ i $\varphi'(t) = 0$ (odnosno $v = 0$), krivulja i dalje može imati tangentu. Da bismo utvrdili smjer tangente u tom slučaju, potrebno je proučavati ponašanje kvocijenta $\frac{\psi'}{\varphi'}$ na okolini promatrane točke, kao što je to napravljeno u primjeru 1.7.



Slika 1.14: Parametarski zadana krivulja $x = t^2, y = t^3 - 3t, t \in \mathbb{R}$

Primjer 1.5. Neka je krivulja zadana svojom parametrizacijom

$$\begin{aligned} x &= t^2, \\ y &= t^3 - 3t, \end{aligned}$$

41 1.5. Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije

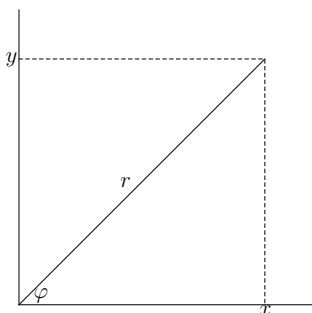
za $t \in \mathbb{R}$. Iz $\frac{dx}{dt} = 2t$ i $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$ lako slijedi da je tangenta na krivulju paralelna s y -osi za $t = 0$, odnosno u točki $(0, 0)$, i u svim ostalim točkama je

$$\frac{dy}{dx}(t^2) = \frac{3t^2 - 3}{2t}.$$

Slično, tangenta na krivulju paralelna je s x -osi za $t = \pm 1$, odnosno u točkama $(1, \pm 2)$, te u svim ostalim točkama vrijedi

$$\frac{dx}{dy}(t^3 - 3t) = \frac{2t}{3t^2 - 3}.$$

Računanje drugih derivacija ostavljamo za vježbu. Što se iz njih može zaključiti o konveksnosti i konkavnosti promatranih funkcija? Usporedite zaključke sa slikom 1.14.



Slika 1.15: Polarne koordinate

Krivulje u ravnini možemo zadati i pomoću polarnih koordinata, u kojima promatramo udaljenost r dane točke od ishodišta koordinatnog sustava, te kut φ kojeg spojnica točke s ishodištem zatvara s pozitivnim dijelom x -osi (vidi sliku 1.15). Veza između kartezijevih i polarnih koordinata promatrane točke dana je s

$$x = r \cos \varphi, \tag{1.4}$$

$$y = r \sin \varphi. \tag{1.5}$$

1.5. Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije 42

Krivulju možemo zadati u polarnim koordinatama na način da zadamo r kao funkciju od φ : $r = r(\varphi)$, za $\varphi \in [\alpha, \beta]$. To možemo učiniti eksplicitno izrazom $r = g(\varphi)$ ili implicitno s $G(r, \varphi) = 0$, za neke funkcije g i G . Tada iz (1.4-1.5) dobivamo parametrizaciju tako zadane krivulje:

$$\begin{aligned}x &= r(\varphi) \cos \varphi, \\y &= r(\varphi) \sin \varphi,\end{aligned}$$

za $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Dalje možemo postupati kao ranije, pa je primjerice y zadan kao funkcija varijable x u svim točkama u kojima je

$$(r(\varphi) \cos \varphi)' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \neq 0,$$

i tada je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(r(\varphi) \sin \varphi)'}{(r(\varphi) \cos \varphi)'} = \frac{r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi}.$$

Primjer 1.6. Promotrimo krivulju zadanu u polarnim koordinatama s $r = 2 \cos \varphi$, za $\varphi \in [0, \pi]$. Tada je njezina parametrizacija dana s

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos^2 \varphi, \\y &= 2 \cos \varphi \sin \varphi.\end{aligned}$$

Iz osnovnih trigonometrijskih formula za dvostruki kut lako prepoznamo da je

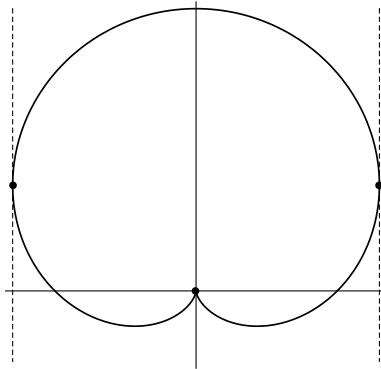
$$\begin{aligned}x &= 1 + \cos(2\varphi), \\y &= \sin(2\varphi),\end{aligned}$$

za $\varphi \in [0, \pi]$, odnosno da se radi o kružnici $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Identificiranje točaka u kojima tangente nisu paralelne s koordinatnim osima, te računanje $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dx}{dy}$ ostavljamo za vježbu.

Primjer 1.7. Promotrimo krivulju poznatu pod nazivom kardioida, danu u polarnim koordinatama s $r = 1 + \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Iz samog izgleda te krivulje dane na slici 1.16, lako je naslutiti zašto se baš tako zove.

Njena parametrizacija dana je s

$$\begin{aligned}x &= (1 + \sin \varphi) \cos \varphi, \\y &= (1 + \sin \varphi) \sin \varphi.\end{aligned}$$



Slika 1.16: Kardioida

Lako se provjeri da je

$$\frac{dx}{d\varphi} = (1 + \sin \varphi)(1 - 2 \sin \varphi) = 0,$$

za $\varphi \in \{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$. U svim ostalim točkama lokalno je definiran y kao funkcija varijable x , te vrijedi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \varphi(1 + 2 \sin \varphi)}{(1 + \sin \varphi)(1 - 2 \sin \varphi)}.$$

Analogno je

$$\frac{dy}{d\varphi} = \cos \varphi(1 + 2 \sin \varphi) = 0,$$

za $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$, te je u svim ostalim točkama lokalno definiran x kao funkcija varijable y , i

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(1 + \sin \varphi)(1 - 2 \sin \varphi)}{\cos \varphi(1 + 2 \sin \varphi)}.$$

Uočimo da su tangente paralelne s y -osi u točkama za koje je $\varphi \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$, a paralelne s x -osi u točkama za koje je $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$, dok su u točki $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{dx}{d\varphi}$ i $\frac{dy}{d\varphi}$ jednaki nuli. Stoga je potrebno dodatno ispitivanje ponašanja njihovog

kvocijenta oko točke $\frac{3\pi}{2}$: korištenjem L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} &= \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{1 + 2 \sin \varphi}{1 - 2 \sin \varphi} \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ &= -\frac{1}{3} \lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} = +\infty. \end{aligned}$$

Analogno je

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = -\infty,$$

pa zaključujemo da u točki za koju je $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (a to je ishodište) krivulja ima tangentu paralelnu s y-osi.

1.5.1 Zadaci

Zadatak 1.49. Odredite jednadžbu tangente na

- kardioidu $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ u točki $(0, \frac{1}{2})$,
- krivulju $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ u njezinim sjecištima s ordinatom,
- astroidu $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ u njezinim sjecištima s pravcem $y = x$,
- elipsu $x^2 + 4y^2 = 16$ u točki u prvom kvadrantu koja raspolavlja odsječak tangente između koordinatnih osi.

Rješenje:

- a) Neka je $F(x, y) = x^2 + y^2 - (2x^2 + 2y^2 - x)^2$. Tada je

$$y' = -\frac{\partial_1 F(x, y)}{\partial_2 F(x, y)} = -\frac{2x - 2(2x^2 + 2y^2 - x)(4x - 1)}{2y - 2(2x^2 + 2y^2 - x)4y}.$$

U danoj točki imamo $y' = 1$ te je jednadžba tražene tangente $y - \frac{1}{2} = x - 0$, odnosno $y = x + \frac{1}{2}$.

- b) $y = 3 - x$ i $y = x - 1$,

c) $y = -x \pm \frac{a}{\sqrt{2}},$

d) $y = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}x.$

Zadatak 1.50. Dokažite da je tangenta u točki P na središnju kružnicu okomita na radijus \overline{OP} .

Rješenje: Promatramo središnju kružnicu radijusa r s jednadžbom $x^2 + y^2 = r^2$. U točkama $(0, -r)$ i $(0, r)$ tvrdnja očigledno vrijedi. U ostalim točkama je $y' = -\frac{x}{y}$, te je koeficijent smjera tangente na promatranu kružnicu u točki $P(x_0, y_0)$ dan s $k = -\frac{x_0}{y_0}$. S druge strane, koeficijent smjera pravca OP je $\frac{y_0}{x_0} = -\frac{1}{k}$, odakle jasno slijedi da su tangenta i radijus okomiti.

Zadatak 1.51. Dokažite da je zbroj duljina odsječaka na koordinatnim osima koje odsijeca proizvoljna tangenta na krivulju $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ jednak c .

Uputa: Odrediti sjecišta s koordinatnim osima tangente na krivulju $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$.

Zadatak 1.52. Za dvije krivulje kažemo da su okomite ako su njihove tangente u svim točkama presjeka tih krivulja međusobno okomite. Za dane familije krivulja dokažite da je svaka krivulja jedne familije okomita na svaku krivulju druge familije, ako je:

a) $x^2 + y^2 = r^2$ i $ax + by = 0, \quad r > 0, a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b \neq 0,$

b) $y = cx^2, x^2 + 2y^2 = k, \quad k > 0, c \in \mathbb{R}.$

Rješenje: b) Za $y = cx^2$ je $y' = 2cx$, a za $x^2 + 2y^2 = k$ u sjecištima je $y' = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2cx^2} = -\frac{1}{2cx}$, pa je za $c \neq 0$ evidentna okomitost. Ako je $c = 0$, onda je krivulja $y = cx^2$ pravac $y = 0$, a taj pravac siječe elipsu $x^2 + 2y^2 = k$ u točkama $(\sqrt{k}, 0)$ i $(-\sqrt{k}, 0)$ u kojima elipsa ima tangente paralelne s y -osi.

Zadatak 1.53. Odredite $\frac{d^2y}{dx^2}$ ako je:

a) $x^2 - y^2 = a^2,$

b) $\operatorname{arctg} y = x + y,$

c) $x^2 + xy + y^2 = a^2.$

Rješenje:

a) $y'' = -\frac{a^2}{y^3},$

b) $y'' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5},$

c) $y'' = -\frac{6a^2}{(x+2y)^3}.$

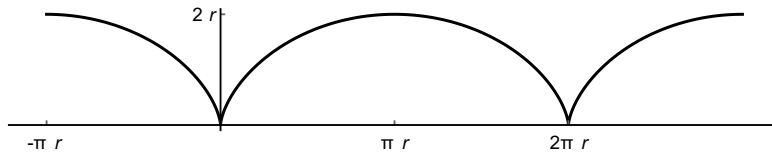
Zadatak 1.54. Cikloida je parametarski zadana s

$$x(\varphi) = r(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y(\varphi) = r(1 - \cos \varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

a) Odredite jednadžbu tangente na cikloidu u točki za koju je $\varphi = \frac{\pi}{3}.$

b) U kojim je točkama tangenta na cikloidu paralelna s koordinatnim osima?



Slika 1.17: Cikloida

Rješenje:

a) Kako je $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)}$, to za $\varphi = \frac{\pi}{3}$ dobivamo $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Nadalje, za $\varphi = \frac{\pi}{3}$ je $x = r(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$ i $y = \frac{r}{2}$. U konačnici, jednadžba tražene tangente je $y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2})$, odnosno $y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}r\pi}{3} + 2r$.

47 1.5. Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije

- b) Tangenta je paralelna s x -osi ako je $\frac{dy}{dx} = 0$, odnosno $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ i $\frac{dx}{d\varphi} \neq 0$.
Kako je

$$\frac{dy}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

i

$$\frac{dx}{d\varphi} \neq 0 \Leftrightarrow \cos \varphi \neq 1 \Leftrightarrow \varphi \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

to je tangenta paralelna s x -osi u točkama za koje je $\varphi = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Odgovarajuće točke na cikloidi su $((2k + 1)r\pi, 2r)$, $k \in \mathbb{Z}$ (vidi sliku 1.17).

Nadalje, $\frac{dx}{dy} = 0$, odnosno $\frac{dx}{d\varphi} = 0$ i $\frac{dy}{d\varphi} \neq 0$, se ne postiže. Ostalo je još provjeriti slučaj kada je $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = 0$. Korištenjem L'Hospitalovog pravila, dobivamo da je

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2n\pi^+} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 2n\pi^+} \operatorname{ctg} \varphi = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2n\pi^-} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 2n\pi^-} \operatorname{ctg} \varphi = -\infty,$$

odakle zaključujemo da su tangente u točkama $(2nr\pi, 0)$ paralelne s y -osi.

Zadatak 1.55. *Odredite jednadžbu tangente na parametarski zadanu krivulju u točki određenoj danom vrijednosti parametra:*

a) $x(t) = 3e^t, y(t) = 5e^{-t}, t \in \mathbb{R}$ za $t = 0$,

b) $x(\varphi) = 3 \cos^4 \varphi, y(\varphi) = 3 \sin^4 \varphi, \varphi \in \mathbb{R}$ za $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Rješenje:

a) $5x + 3y = 30$,

b) $2x + 2y = 3$.

Zadatak 1.56. *Neka je krivulja zadana svojom parametrizacijom*

$$x(t) = t^2 - 1,$$

$$y(t) = t^3 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.5. Derivacija implicitno, parametarski i polarno zadane funkcije 48

Odredite u kojim su točkama tangente na danu krivulju paralelne s x -osi, a u kojima s y -osi.

Rješenje: Tangente su paralelne s x -osi za $t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, a s y -osi za $t = 0$.

Zadatak 1.57. Odredite za koje je vrijednosti parametra t parametarski zadana funkcija $x(t) = e^t$, $y(t) = te^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, strogo konveksna.

Rješenje: Za $t \in \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$.

Zadatak 1.58. Odredite jednadžbu krivulje u polarnim koordinatama ako je ona u kartezijevim koordinatama zadana s:

a) $y = 1 + 3x$,

b) $x^2 + y^2 = 2cx$, $c \in \mathbb{R}$.

Rješenje:

a) Uvrstimo li u danu jednadžbu u kartezijevim koordinatama $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, odmah dobivamo $r = \frac{1}{\sin \varphi - 3 \cos \varphi}$,

b) $r = 2c \cos \varphi$.

Zadatak 1.59. Odredite jednadžbu krivulje u kartezijevim koordinatama ako je ona u polarnim koordinatama zadana s:

a) $r = 2 \cos \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$,

b) $r^2 \cos 2\varphi = 1$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Rješenje:

a) Iskoristimo li jednakost $x^2 + y^2 = r^2$ i zapišemo li $r^2 = r \cdot 2 \cos \varphi = 2x$, dobivamo da je jednadžba krivulje u kartezijevim koordinatama $x^2 + y^2 = 2x$, odnosno $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

b) Jednadžba krivulje je $x^2 - y^2 = 1$.

Zadatak 1.60. Odredite točke na krivulji u kojima su tangente paralelne s koordinatnim osima ako je krivulja zadana s:

$$a) r = 1 + \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$b) r = 3 \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Rješenje:

a) Parametrizacija dane krivulje je $x(\varphi) = r \cos \varphi = \cos \varphi(1 + \cos \varphi)$, $y(\varphi) = r \sin \varphi = \sin \varphi(1 + \cos \varphi)$. Nadalje je $\frac{dy}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi(1 + \cos \varphi) - \sin^2 \varphi = (2 \cos \varphi - 1)(\cos \varphi + 1) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$, dok je $\frac{dx}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow -\sin \varphi(1 + \cos \varphi) - \cos \varphi \sin \varphi = -\sin \varphi(2 \cos \varphi + 1) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\}$. Tangente su paralelne s x -osi u onim točkama u kojima je $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ i $\frac{dx}{d\varphi} \neq 0$, tj. u točkama $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$ i $(\frac{3}{2}, \frac{5\pi}{3})$. Tangente su paralelne s y -osi u onim točkama u kojima je $\frac{dx}{d\varphi} = 0$ i $\frac{dy}{d\varphi} \neq 0$, tj. u točkama $(2, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3})$ i $(\frac{1}{2}, \frac{4\pi}{3})$. Još preostaje za ispitati točke za koje je $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dx}{d\varphi} = 0$, tj. $\varphi = \pi$, odnosno točka $(0, \pi)$. Kako je $\lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{dy}{dx} = 0$, to je u točki $(0, \pi)$ tangenta paralelna s x -osi.

b) Tangente su paralelne s x -osi u točkama $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$ i $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4})$. Tangente su paralelne s y -osi u točkama $(3, 0)$ i $(0, \frac{\pi}{2})$.

1.6 Derivacija vektorske funkcije i primjene

Vektorska funkcija jedne varijable funkcija je koja za domenu ima neki podskup I realnih brojeva (najčešće interval), a za kodomenu \mathbb{R}^d , za neki prirodan broj $d \geq 2$. Svaka vektorska funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ jedinstveno je određena s d realnih funkcija $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, koje čine njene *komponente*:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_d(t)), \quad t \in I.$$

Derivacija vektorske funkcije definira se, analogno kao za realne funkcije, kao

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

u onim točkama $t_0 \in I$ za koje gornji limes ima smisla i gdje postoji. Lako se može vidjeti da je vektorska funkcija derivabilna u točki t_0 ako i samo ako su sve njezine komponente derivabilne u toj točki. Tada je

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_d(t_0)).$$

Ukoliko je poznata derivacija f' u svakoj točki domene, onda se integracijom može pronaći f , do na konstantu. Pri tome se integral vektorske funkcije $g = (g_1, g_2, \dots, g_d) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definira po komponentama, odnosno

$$\int_a^b g(t) dt := \left(\int_a^b g_1(t) dt, \int_a^b g_2(t) dt, \dots, \int_a^b g_d(t) dt \right).$$

Poznata *pravila deriviranja* linearne kombinacije, produkta i kompozicije funkcija vrijede i za vektorske funkcije: za skalarnu funkciju f , vektorske funkcije u, v i skalare α, β vrijedi

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v)' &= \alpha u' + \beta v', \\ (fu)' &= f'u + fu', \\ (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v', \\ (u \times v)' &= u' \times v + u \times v', \\ (u \circ f)' &= (u' \circ f)f'. \end{aligned}$$

Preciznije, ukoliko u nekoj točki postoje sve derivacije s desne strane znaka jednakosti u gornjim izrazima, onda u toj točki postoji i derivacija izraza s lijeve strane znaka jednakosti, te vrijedi dana jednakost.

Klasični primjer vektorske funkcije je parametrizacija neke krivulje: ako krivulju Γ u \mathbb{R}^3 čine sve točke oblika

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in [a, b], \\ z &= \xi(t) \end{aligned}$$

tada vektorsku funkciju $r := (\varphi, \psi, \xi) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazivamo parametrizacija krivulje Γ . Lakše možemo opisati geometrijsko značenje derivacije takve funkcije ukoliko umjesto točaka promatramo pripadne radij-vektore, odnosno funkciju $r = \varphi i + \psi j + \xi k$. Često ćemo radij-vektore

identificirati s pripadnim točkama, uz korištenje iste oznake. Tada je lako vidjeti da za $t_0, t \in [a, b]$, izraz

$$\frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$$

odgovara vektoru smjera sekante koja krivulju Γ siječe u točkama $r(t_0)$ i $r(t)$. Kako *prijelazom na limes* $t \rightarrow t_0$ *sekanta prelazi u tangentu*, to

$$r'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = \varphi'(t_0)i + \psi'(t_0)j + \zeta'(t_0)k$$

predstavlja *vektor smjera tangente na krivulju Γ u točki $r(t_0)$* , uz pretpostavku da postoji $r'(t_0) \neq 0$. U tom je slučaju vektorska jednadžba tangente dana s

$$t \longmapsto r(t_0) + (t - t_0)r'(t_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

a odavde lako možemo izvesti njezinu parametarsku jednadžbu

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0), \\ y &= \psi(t_0) + (t - t_0)\psi'(t_0), \\ z &= \zeta(t_0) + (t - t_0)\zeta'(t_0), \end{aligned}$$

te kanonsku jednadžbu

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z - \zeta(t_0)}{\zeta'(t_0)}.$$

Na sličan način možemo dobiti jednadžbu tangente na ravninsku krivulju $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ (u gornjim izrazima uzmemo $\zeta \equiv 0$). Tada je eksplicitna jednadžba tangente (za $\varphi'(t_0) \neq 0$) dana s

$$y = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)) + \psi(t_0).$$

Iz uvjeta okomitosti na tangentu lako vidimo da normala na ravninsku krivulju u istoj točki ima smjer vektora $v(t_0) = -\psi'(t_0)i + \varphi'(t_0)j$ (uočimo da je tada $r'(t_0) \cdot v(t_0) = 0$), te joj je vektorska jednadžba dana s

$$t \longrightarrow v(t_0) + (t - t_0)r'(t_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

parametarska s

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t_0) - (t - t_0)\psi'(t_0), \\y &= \psi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0),\end{aligned}$$

a eksplicitna jednadžba (za $\psi'(t_0) \neq 0$) s

$$y = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - \varphi(t_0)) + \psi(t_0).$$

Za krivulju $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ na sličan način možemo proučavati *normalnu ravninu*. To je ona ravnina koja prolazi kroz točku $r(t_0)$ dane krivulje i okomita je na tangentu, odnosno *tangencijalni vektor* $r'(t_0)$. Iz same definicije slijedi da je jednadžba normalne ravnine dana s

$$\varphi'(t_0)(x - \varphi(t_0)) + \psi'(t_0)(y - \psi(t_0)) + \zeta'(t_0)(z - \zeta(t_0)) = 0.$$

Tu ravninu razapinju bilo koja dva linearno nezavisna vektora koja joj pripadaju. Međutim, često je korisno izabrati dva vektora koja zajedno s jediničnim vektorom smjera tangente čine ortonormiranu bazu za \mathbb{R}^3 . Ukoliko s

$$T(t) := \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

označimo *jedinični tangencijalni vektor* u točki $r(t)$, deriviranjem izraza

$$T(t) \cdot T(t) = 1$$

dobivamo $T(t) \cdot T'(t) = 0$, što znači da su $T'(t)$ i $T(t)$ međusobno okomiti, odnosno da $T'(t)$ leži u normalnoj ravnini. Pripadni jedinični vektor

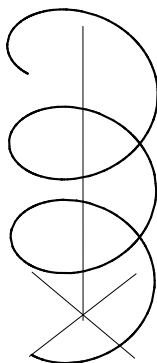
$$N(t_0) := \frac{T'(t_0)}{|T'(t_0)|}$$

naziva se *jedinični glavni normalni vektor* u točki $r(t_0)$. Vektor $B(t_0) := T(t_0) \times N(t_0)$, koji također leži u normalnoj ravnini u točki $r(t_0)$, nazivamo *jedinični binormalni vektor* u točki $r(t_0)$. Očito je da vektori $T(t_0)$, $N(t_0)$ i $B(t_0)$ čine ortonormiranu bazu za \mathbb{R}^3 , te $N(t_0)$ i $B(t_0)$ razapinju normalnu ravninu na Γ u točki $r(t_0)$. Ravninu razapetu s $T(t_0)$ i $N(t_0)$ nazivamo *oskulacijska*¹¹ *ravnina*. Njezina je važnost u tome što ona skoro pa sadrži krivulju Γ u okolini točke $r(t_0)$.

¹¹osculare (lat.) = ljubiti

Napomena 1.5. Vektori T, N i B definirani su pomoću parametrizacije r k r i u o l j e Γ . Međutim, može se pokazati da oni ne ovise o izboru parametrizacije, te ih možemo shvatiti kao funkcije $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$, ukoliko je Γ dovoljno glatka tako da ti vektori postoje u svakoj točki [1].

Primjer 1.8. Pronađimo tangencijalni, normalni i binormalni vektor, te jednadžbu tangente i normale ravnine za kružnu zavojnicu $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ u točki $P(1, 0, 0)$.



Slika 1.18: Kružna zavojnica

Iz $r'(t) = -\sin t i + \cos t j + k$ te $|r'(t)| = \sqrt{2}$ dobivamo

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t i + \cos t j + k).$$

Sada lako slijedi $T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t i - \sin t j)$, te $|T'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, odakle dobivamo $N(t) = -\cos t i - \sin t j$. Sada je

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t i - \cos t j + k),$$

a kako točki P odgovara $t = 0$, slijedi

$$T(P) = \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k), \quad N(P) = -i, \quad B(P) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-j + k).$$

Konačno, tangenta je dana s $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, a normalna ravnina jednadžbom $y + z = 0$.

1.6.1 Zakrivljenost krivulje

U ovome dijelu želimo precizno definirati pojam *zakrivljenost krivulje* koji je donekle jasan na intuitivnoj razini: to je *mjera promjene smjera krivulje*. Konkretnije, mjerit ćemo promjenu tangencijalnog vektora u odnosu na duljinu luka krivulje.

Definicija 1.1. Neka je $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ dovoljno glatka krivulja i $r : [a, b] \rightarrow \Gamma$ njena parametrizacija, te $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$. Broj

$$\kappa(P) := \frac{|T'(t_0)|}{|r'(t_0)|}$$

nazivamo *zakrivljenost krivulje* Γ u točki P .

Napomena 1.6. Može se pokazati da definicija pojma zakrivljenosti ne ovisi o izboru parametrizacije. Zaista, ako je Γ dovoljno glatka krivulja (ima C^2 parametrizaciju koja je injekcija i čija derivacija nigdje nije nula) i $r_i : [a_i, b_i] \rightarrow \Gamma$, $i = 1, 2$, dvije glatke parametrizacije te krivulje. Tada postoji monotona bijekcija $\rho : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$, takva da je $r_1 = r_2 \circ \rho$ (odnosno, $\rho = r_2^{-1} \circ r_1$). Zbog monotonosti je $\rho' > 0$ ili $\rho' < 0$, što uz $r'_1(t) = r'_2(\rho(t))\rho'(t)$ povlači

$$T_1(t) = \frac{r'_1(t)}{|r'_1(t)|} = \frac{r'_2(\rho(t))\rho'(t)}{|r'_2(\rho(t))\rho'(t)|} = \pm \frac{r'_2(\rho(t))}{|r'_2(\rho(t))|} = \pm T_2(\rho(t)),$$

odakle slijedi

$$T'_1(t) = \pm T'_2(\rho(t))\rho'(t),$$

te konačno

$$\kappa_1(P) = \frac{|T'_1(t)|}{|r'_1(t)|} = \frac{|\pm T'_2(\rho(t))\rho'(t)|}{|r'_2(\rho(t))\rho'(t)|} = \frac{|T'_2(\rho(t))|}{|r'_2(\rho(t))|} = \kappa_2(P),$$

odnosno κ ne ovisi o izboru parametrizacije.

Primjer 1.9. Parametrizacija kružnice polumjera a dana je s $r(t) = a \cos t i + a \sin t j$, $t \in [0, 2\pi]$, pa redom dobivamo

$$\begin{aligned} r'(t) &= -a \sin t i + a \cos t j, & |r'(t)| &= a, \\ T(t) &= -\sin t i + \cos t j, \\ T'(t) &= -\cos t i - \sin t j, & |T'(t)| &= 1. \end{aligned}$$

Stoga je zakrivljenost kružnice polumjera a u svakoj njenoj točki jednaka $\kappa = \frac{1}{a}$.

Često je korisno izraziti zakrivljenost samo u terminima parametrizacije krivulje. Kako bismo to učinili, najprije uočimo da za parametrizaciju $r = (\varphi, \psi, \xi)$ iz

$$|r'(t)| = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \xi'(t)^2}$$

dobivamo

$$\frac{d}{dt} |r'(t)| = \frac{1}{2} \frac{2\varphi'(t)\varphi''(t) + 2\psi'(t)\psi''(t) + 2\xi'(t)\xi''(t)}{|r'(t)|} = \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{|r'(t)|}.$$

Sada iz jednakosti $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$, koja vrijedi za proizvoljne vektore a, b, c , te pravila za deriviranje produkta slijedi

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{r'(t)}{|r'(t)|} \right) = -1 \cdot \frac{1}{|r'(t)|^2} \cdot \frac{r'(t) \cdot r''(t)}{|r'(t)|} r'(t) + \frac{1}{|r'(t)|} r''(t) \\ &= \frac{|r'(t)|^2 r''(t) - (r'(t) \cdot r''(t)) r'(t)}{|r'(t)|^3} \\ &= \frac{r'(t) \times (r''(t) \times r'(t))}{|r'(t)|^3}, \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$\begin{aligned} |T'(t)| &= \frac{1}{|r'(t)|^3} \cdot |r'(t)| |r''(t) \times r'(t)| \sin \angle(r'(t), r''(t) \times r'(t)) \\ &= \frac{|r''(t) \times r'(t)|}{|r'(t)|^2}, \end{aligned}$$

te konačno

$$\kappa = \frac{|r''(t) \times r'(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

1.6.2 Gibanje točkaste mase u prostoru

U prijašnjim poglavljima promatrali smo pravocrtno gibanje tijela mase m , te smo položaj tijela opisivali *skalarnom funkcijom* s , preko koje smo onda uveli pojmove brzine, akceleracije i trzaja. Ukoliko se radi o složenijem (nepravocrtnom) gibanju, onda položaj tijela možemo opisati pomoću njegovih koordinata u prostoru, odnosno pomoću *vektorske funkcije položaja* r . Pojam brzine, akceleracije i trzaja definira se analogno kao kod pravocrtnog gibanja:

$$v(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h} = r'(t) \text{ je brzina,}$$

$$a(t) = v'(t) = r''(t) \text{ akceleracija, a } j(t) = a'(t) \text{ trzaj.}$$

Uočimo da su to sada sve vektorske funkcije, te da r predstavlja parametrizaciju krivulje po kojoj se tijelo giba.

Ukoliko nam je u svakom trenutku poznata sila F koja djeluje na tijelo, onda iz drugog Newtonovog aksioma: $F(t) = ma(t)$ možemo pronaći akceleraciju. U daljnjem ćemo tekstu malo bolje proučiti svojstva akceleracije: ako označimo $v(t) = |v(t)|$, $a(t) = |a(t)|$, tada iz $T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{v(t)}{v(t)}$, slijedi $v(t) = v(t)T(t)$. Deriviranjem tog izraza dobivamo

$$a(t) = v'(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t).$$

Kako je $T'(t) = |T'(t)|N(t)$, gdje je N normalni vektor, a iz definicije zakrivljenosti je $|T'(t)| = \kappa(t)v(t)$, to slijedi $T'(t) = \kappa(t)v(t)N(t)$. Uvrštavanjem u gornji izraz za akceleraciju dobivamo

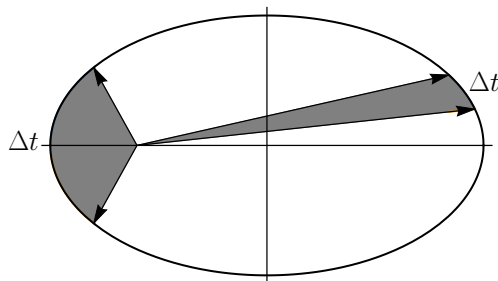
$$a(t) = v'(t)T(t) + \kappa(t)v^2(t)N(t).$$

Time smo akceleraciju rastavili na tangencijalnu i normalnu komponentu. Uočimo da $a(t)$ leži u oskulacijskoj ravnini, te da uz normalnu komponentu stoji član $\kappa(t)v^2(t)$. Ukoliko zamislimo da je naše tijelo automobil koji prolazi kroz zavoj na cesti, onda to možemo interpretirati na sljedeći način: bočna akceleracija, pa i sila na vozača i putnike u automobilu, proporcionalna je zakrivljenosti zavoja κ i kvadratu brzine v^2 .

1.6.3 Keplerovi zakoni

Proučavajući podatke preciznih astronomskih opažanja koja je obavio danski astronom Tycho Brahe¹², Kepler¹³ je uočio da putanje kretanja planeta oko Sunca nisu kružne, kao što se tada pretpostavljalo, nego da su oblika elipse. Također je uočio i neke druge zakonitosti po kojima se planeti gibaju, te je sve formulirao u tri najznačajnija zakona kinematike Sunčeva sustava, koji su danas poznati kao *tri Keplerova zakona*:

1. Svi planeti gibaju se po elipsama kojima je Sunce jedno od žarišta.
2. Radij-vektor Sunce-planet prelazi u jednakim vremenskim razmacima jednake površine.
3. Kvadrati ophodnih vremena planeta proporcionalni su kubovima njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.



Slika 1.19: Ilustracija drugog Keplerovog zakona

Dok je tvrdnja prvog zakona jasna, druga dva možda zahtijevaju dodatno pojašnjenje: ukoliko Sunce smjestimo u ishodište koordinatnog sustava, a s $r(t)$ označimo radij-vektor točke u kojoj se planet nalazi u trenutku t , tada drugi Keplerov zakon tvrdi da površina lika omeđenog radij-vektorima $r(t)$ i $r(t + \Delta t)$, te dijelom elipse po kojoj se planet kretao od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$, ne ovisi o t , nego samo o Δt (vidi sliku 1.19).

¹²Tycho Brahe (Knudstrup, 14. prosinca 1546. - Prag, 24. listopada 1601.), danski astronom i znanstvenik.

¹³Johannes Kepler (Weil der Stadt kraj Stuttgarta, 27. prosinca 1571. - Regensburg, 15. studenoga 1630.), njemački astronom, matematičar i astrolog.

Da bismo shvatili treći Keplerov zakon, dovoljno je reći da je *ophodno vrijeme planeta* ono vrijeme koje je potrebno planetu da *obiđe punu elipsu oko Sunca*, dok je *srednja udaljenost planeta od Sunca* zapravo duljina velike poluosi elipse po kojoj se planet giba.

Pokazalo se da svi Keplerovi zakoni vrijede i za sustave satelita svakog planeta, pa i općenito za sve sustave u Svemiru, pri čemu je konstanta proporcionalnosti iz trećega zakona različita za različite sustave. Više od stoljeća kasnije Isaac Newton je u svom najpoznatijem djelu *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* iz 1687. proučavao Keplerove zakone, te tako postavio poznati *Newtonov zakon gravitacije* koji kaže da se dva tijela privlače uzajamno silom koja je proporcionalna umnošku njihovih masa, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti. Preciznije, privlačna sila kojom masa M privlači masu m jednaka je

$$F = -G \frac{Mm}{r^3} r = -G \frac{Mm}{r^2} r_0, \quad (1.6)$$

gdje je r vektor koji spaja mase M i m , $r = |r|$ njegova duljina, $r_0 = \frac{r}{r}$ pripadni jedinični vektor, a $G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$ gravitacijska konstanta.

U istom djelu Newton je pokazao da se Keplerovi zakoni mogu izvesti iz njegovog drugog aksioma gibanja te zakona gravitacije. Pokažimo kako se može izvesti prvi Keplerov zakon, dok druga dva ostavljamo za vježbu: promotrimo, kao i prije, koordinatni sustav sa Suncem u ishodištu, s r označimo radij-vektor planeta, s M masu Sunca, te s m masu planeta. Najprije ćemo pokazati da se gibanje planeta odvija u ravnini. Sila kojom Sunce djeluje na planete dana je s (1.6), dok je prema drugom Newtonovom aksiomu ona jednaka $F = ma = mr''$. Stoga je $a = -\frac{GM}{r^3} r$, iz čega slijedi da su vektori a i r paralelni, te je $r \times a = 0$. Odavde slijedi da je

$$\frac{d}{dt} (r \times v) = r' \times v + r \times v' = v \times v + r \times a = 0,$$

što povlači da je $r \times v = h$ konstantan vektor različit od nul-vektora (ako je $r \times v = 0$, onda je r paralelan s v , odnosno planet se giba pravocrtno prema Suncu, što empirijski znamo da nije točno). Dakle, $r(t)$ je okomit na h za svaki t , što povlači da planet leži u ravnini kroz ishodište kojoj je h vektor normale, odnosno giba se po ravninskoj krivulji.

Preostalo je pokazati da je ta krivulja elipsa sa žarištem u ishodištu: iz

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{r}_0 \times (r\mathbf{r}_0)' = r\mathbf{r}_0 \times (r\mathbf{r}_0' + r'\mathbf{r}_0) \\ &= r^2(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0') + rr'(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0) = r^2(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0') \end{aligned}$$

slijedi da je

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{h} &= -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r}_0 \times (r^2 \mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0') = -GM\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_0') \\ &= -GM[(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0')\mathbf{r}_0 - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{r}_0']. \end{aligned}$$

Kako je $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0 = 1$, a

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_0) = 0,$$

to slijedi da je $\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{r}_0'$. Odavde slijedi $(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{r}_0'$, pa integracijom dobivamo da je $\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{r}_0 + \mathbf{c}$, za neki konstantan vektor \mathbf{c} .

Sada ćemo odabrati pogodan koordinatni sustav. Naime, do sada smo jedino koristili činjenicu da se Sunce nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, dok koordinatne osi nismo specificirali. Sada ćemo odabrati koordinatni sustav čiji vektor \mathbf{k} (z -os) ima smjer vektora \mathbf{h} , što odmah povlači da se planet giba u xy -ravnini. Budući da su vektori \mathbf{r}_0 i $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ okomiti na \mathbf{h} , slijedi da je to i $\mathbf{c} = \mathbf{v} \times \mathbf{h} - GM\mathbf{r}_0$, odnosno \mathbf{c} leži u xy -ravnini. Stoga možemo odabrati vektor \mathbf{i} (x -os) koordinatnog sustava takav da ima smjer vektora \mathbf{c} . Tada je

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GMr + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = GMr + rc \cos \varphi, \quad (1.7)$$

gdje je $c = |\mathbf{c}|$, a φ kut koji zatvaraju \mathbf{r} i \mathbf{c} . Uočimo da smo koordinatni sustav odabrali na način da (r, φ) predstavljaju polarne koordinate planeta u xy -ravnini. S druge strane je

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2, \quad (1.8)$$

gdje je $h = |\mathbf{h}|$. Sada iz (1.7) i (1.8) slijedi da je $GMr + rc \cos \varphi = h^2$, odnosno, u kartezijevim koordinatama, $GM\sqrt{x^2 + y^2} = h^2 - cx$, iz čega kvadriranjem dobivamo jednadžbu elipse¹⁴. Time je pokazan prvi Keplerov zakon.

¹⁴Zapravo, u ovisnosti o veličini konstante c dobivena krivulja je elipsa, hiperbola ili parabola. Empirijski je poznato da putanja planeta ne može biti hiperbola niti parabola jer bi u tom slučaju planet "izletio" iz Sunčevog sustava.

1.6.4 Zadaci

Zadatak 1.61. *Odredite tangencijalni, normalni i binormalni vektor, te jednadžbu tangente, normalne i oskulacijske ravnine u točki $T_0 = (0, \pi, -2)$ za krivulju danu parametrizacijom $r = (2 \sin 3t, t, 2 \cos 3t)$.*

Rješenje: Očigledno točki $T_0 = (0, \pi, -2)$ odgovara vrijednost parametra $t_0 = \pi$. Tangencijalni vektor je $r'(t) = 6 \cos 3t \mathbf{i} + \mathbf{j} - 6 \sin 3t \mathbf{k}$, s pripadnom duljinom $|r'(t)| = \sqrt{37}$, te je jedinični tangencijalni vektor dan s $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{37}}(6 \cos 3t \mathbf{i} + \mathbf{j} - 6 \sin 3t \mathbf{k})$, odnosno $\mathbf{T}(\pi) = \frac{1}{\sqrt{37}}(-6, 1, 0)$. Nadalje je $\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{37}}(-18 \sin 3t \mathbf{i} - 18 \cos 3t \mathbf{k})$ i $|\mathbf{T}'(t)| = \frac{18}{\sqrt{37}}$, te je normalni vektor dan s $\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = (-\sin 3t, 0, -\cos 3t)$, odnosno $\mathbf{N}(\pi) = (0, 0, 1)$. Binormalni vektor jednak je

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{37}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 \cos 3t & 1 & -6 \sin 3t \\ -\sin 3t & 0 & -\cos 3t \end{vmatrix},$$

odnosno $\mathbf{B}(\pi) = \frac{1}{\sqrt{37}}(1, 6, 0)$.

Normalna ravnina u točki T_0 dana je s $-6(x - 0) + 1(y - \pi) + 0(z + 2) = 0$, odnosno $6x - y + \pi = 0$.

Oskulacijska ravnina u točki T_0 dana je s $1(x - 0) + 6(y - \pi) + 0(z + 2) = 0$, odnosno $x + 6y - 6\pi = 0$.

Tangenta u točki T_0 dana je s

$$\begin{aligned} x &= -6t + 6\pi \\ y &= t, & t &\in \mathbb{R}. \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Zadatak 1.62. *Odredite jednadžbu tangente i normalne ravnine na krivulju danu parametrizacijom $r = (t - 2, 3t^2 + 1, 2t^3)$ u točki u kojoj krivulja siječe yz ravninu.*

Rješenje: Jednadžba tangente je $\frac{x}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}$, a jednadžba normalne ravnine je $x + 12y + 24z - 540 = 0$.

Zadatak 1.63. U kojoj je točki na krivulji

$$\begin{aligned}x(t) &= t^3 \\y(t) &= 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\z(t) &= t^4\end{aligned}$$

normalna ravnina paralelna s ravninom $6x + 6y - 8z = 1$?

Rješenje: Dvije su ravnine paralelne ako i samo ako su njihovi normalni vektori kolinearni. Vektor normale na normalnu ravninu u točki $r(t)$ je tangencijalni vektor $r'(t) = (3t^2, 3, 4t^3)$, a na ravninu $6x + 6y - 8z = 1$ je $(6, 6, -8)$. Sada traženu točku $r(t)$ (odnosno vrijednost parametra t) određujemo iz uvjeta kolinearnosti, odnosno da u traženoj točki postoji $k \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(3t^2, 3, 4t^3) = k(6, 6, -8),$$

iz kojeg dobivamo $t = -1$, odnosno tražena točka je $(-1, -3, 1)$.

Zadatak 1.64. Dokažite da se krivulje zadane parametrizacijama $r_1(t) = (2 - t, -1/t, 2t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ i $r_2(t) = (1 + t, \sin t - 1, 2 \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ sijeku u točki $(1, -1, 2)$ pod pravim kutom.

Uputa: Krivulje se u nekoj točki sijeku pod pravim kutom ako i samo ako su im normalni vektori u toj točki međusobno okomiti.

Zadatak 1.65. Odredite jednadžbu normalne ravnine u točki $(1, 1, 1)$ na krivulju koja je sjecište ploha $x = y^2$ i $z = x^2$.

Rješenje: Parametrizacija krivulje koja je sjecište ploha $x = y^2$ i $z = x^2$ dana je s $r(t) = (t^2, t, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$. Kako je $r'(t) = (2t, 1, 4t^3)$ i točki $(1, 1, 1)$ odgovara vrijednost parametra $t = 1$, to iz $r'(1) = (2, 1, 4)$ dobivamo jednadžbu tražene normalne ravnine $2(x - 1) + (y - 1) + 4(z - 1) = 0$, odnosno $2x + y + 4z - 7 = 0$.

Zadatak 1.66. Dokažite da tangente na krivulju zadanu parametrizacijom $r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, u svim točkama sijeku xy ravninu pod istim kutom.

Uputa: Kut između pravca i ravnine jednak je kutu između vektora smjera pravca i ortogonalne projekcije vektora smjera pravca na tu ravninu.

Zadatak 1.67. Odredite zakrivljenost krivulje zadane parametrizacijom

a) $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ u točki $(0, 0, 0)$,

b) $r(t) = (t - \frac{3}{2} \sin t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ u točki za koju je $t = \pi$.

Rješenje:

a) Zakrivljenost krivulje računamo korištenjem formule $\kappa(t) = \frac{|r''(t) \times r'(t)|}{|r'(t)|^3}$.

Kako je $r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $|r'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$ i $r''(t) = (0, 2, 6t)$,
to je

$$r''(t) \times r'(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 6t \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = -6t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

pa je $|r''(t) \times r'(t)| = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$. Dakle, $\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$,
pa u točki $(0, 0, 0)$ imamo $\kappa(0) = 2$.

b) $\kappa(\pi) = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{29^3}}$.

Zadatak 1.68. Na osnovi formule za zakrivljenost krivulje parametrizirane vektorskom funkcijom odredite formulu za zakrivljenost krivulje u ravnini zadane u kartezijevim koordinatama s $y = f(x)$.

Rješenje: Funkciji $y = f(x)$ možemo pridružiti vektorsku funkciju $r(x) = xi + f(x)j$. Tada je $r'(x) = i + f'(x)j$, $r''(x) = f''(x)j$ i $r'(x) \times r''(x) = f''(x)k$, odnosno

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Zadatak 1.69. Na osnovi formule za zakrivljenost krivulje parametrizirane vektorskom funkcijom izvedite formulu za zakrivljenost krivulje u ravnini zadane u polarnim koordinatama.

Rješenje: $\kappa(\varphi) = \frac{|2r(\varphi)'^2 - r(\varphi)r(\varphi)'' + r(\varphi)^2|}{(r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2)^{3/2}}$.

Zadatak 1.70. Vektorska funkcija položaja čestice u prostoru dana je s $r(t) = (t^2, e^t, te^t)$. Odredite brzinu i akceleraciju čestice u trenutku $t = 2$.

Rješenje: Kako je $v(t) = r'(t) = (2t, e^t, (1+t)e^t)$ i $a(t) = v'(t) = r''(t) = (2, e^t, (2+t)e^t)$, to je $v(2) = (4, e^2, 3e^2)$ i $a(2) = (2, e^2, 4e^2)$.

Zadatak 1.71. Čestica se počinje gibati s početnim položajem $r(0) = (1, 0, 0)$ i početnom brzinom $v(0) = (1, -1, 1)$. Njezino ubrzanje u trenutku t iznosi $a(t) = (4t, 6t, 1)$. Odredite brzinu i položaj čestice u trenutku t .

Rješenje: Kako je $v'(t) = a(t)$, to je $v(t) = \int a(t) dt = \int (4ti + 6tj + k) dt = 2t^2i + 3t^2j + tk + C$. Kako je zadano $v(0) = i - j + k$, to je $i - j + k = C$, te je na poslijetku $v(t) = (2t^2 + 1)i + (3t^2 - 1)j + (t + 1)k$.

Nadalje, iz $r'(t) = v(t)$ je $r(t) = \int v(t) dt = (\frac{2}{3}t^3 + t)i + (t^3 - t)j + (\frac{1}{2}t^2 + t)k + C$. Kako je zadano $r(0) = i$, to je $i = C$, te je $r(t) = (\frac{2}{3}t^3 + t + 1)i + (t^3 - t)j + (\frac{1}{2}t^2 + t)k$.

Zadatak 1.72. Krenuši iz mirovanja, materijalna točka se giba po pravcu tako da joj je akceleracija proporcionalna vremenu proteklom od početka gibanja. Koliki je prevaljeni put nakon 8 s gibanja ako je nakon 4 s brzina čestice 8 m/s?

Rješenje: $r(8) = 85.3$ m.

Zadatak 1.73. Odredite silu koja djeluje na česticu mase m ako ona ima funkciju položaja $r(t) = t^3i + t^2j + t^3k$.

Rješenje: Prema drugom Newtonovom zakonu je $F = ma = mr''$. Stoga na česticu djeluje sila $F(t) = 6mti + 2mj + 6mtk$.

Zadatak 1.74. Sila od 20 N djeluje u smjeru vektora k na česticu mase 4 kg. Prije početka djelovanja sile čestica se nalazila u ishodištu koordinatnog sustava i imala početnu brzinu $v(0) = i - j$. Odredite vektor položaja čestice u trenutku t .

Rješenje: Sila koja djeluje na tijelo je $F(t) = 20k$. Kako je $F(t) = ma(t) = 4a(t)$, to je $a(t) = 5k$. Nadalje je $r'(t) = v(t) = \int a(t) dt = 5tk + C$, a iz $v(0) = i - j$ dobivamo $C = i - j$, odnosno $r'(t) = i - j + 5tk$. Nadalje je $r(t) = \int r'(t) dt = ti - tj + \frac{5}{2}t^2k + C$. Budući da je čestica gibanje započela iz ishodišta, dobivamo $0 = r(0) = C$, odnosno $r(t) = ti - tj + \frac{5}{2}t^2k$.

Zadatak 1.75. Čestica mase m giba se kružno konstantnom kutnom brzinom ω pri čemu je vektorska funkcija položaja dana s $r(t) = a \cos \omega t i + a \sin \omega t j$. Odredite silu koja djeluje na česticu i dokažite da je usmjerena prema ishodištu koordinatnog sustava.

Rješenje: Prema drugom Newtonovom zakonu je $F(t) = mr'' = -m\omega^2 r(t)$. Vidimo da je sila kolinearna s vektorom $-r$, što znači da je usmjerena prema ishodištu koordinatnog sustava.

Zadatak 1.76. Funkcija položaja čestice dana je $s(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + bt^2 \mathbf{k}$, gdje su $a, b, \omega \in \mathbb{R}$ konstantni. Dokažite da iznos brzine $v(t)$ raste s vremenom i da je akceleracija $a(t)$ konstantna.

Rješenje: $v(t) = \sqrt{a^2\omega^2 + 4b^2t^2}$ je rastuća funkcija; $a(t) = \sqrt{a^2\omega^4 + 4b^2}$.

Zadatak 1.77. Čestica mase m giba se s funkcijom položaja $r(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$. Ako je p količina gibanja ($p = mv$), odredite $r \times p$ i $r \cdot p$.

Rješenje: $r \times p = mab\omega \mathbf{k}$, $r \cdot p = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2) \sin 2\omega t$.

Zadatak 1.78. Točkasta masa P giba se po središnjoj kružnici radijusa r konstantnom brzinom v . Dokažite da ako se P giba kutnom brzinom ω i kutnom akceleracijom α , onda je $v = r\omega$ i $a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$.

Rješenje: Prisjetimo se da je veza $v = r\omega$ već dana u poglavlju 1.3. Sada ćemo ju i formalno dokazati. Vektorska funkcija položaja točkaste mase P dana je s $r(\varphi) = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j}$. Stoga je

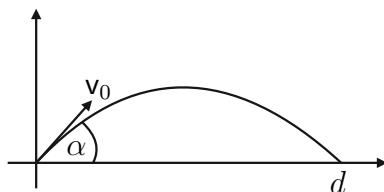
$$\begin{aligned} v(\varphi) &= -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{i} + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{j} \\ &= -r\omega \sin \varphi \mathbf{i} + r\omega \cos \varphi \mathbf{j}, \end{aligned}$$

odnosno $v = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2 \varphi + r^2\omega^2 \cos^2 \varphi} = r\omega$. Slično je

$$a(\varphi) = (-r\omega^2 \cos \varphi - r\alpha \sin \varphi) \mathbf{i} + (-r\omega^2 \sin \varphi + r\alpha \cos \varphi) \mathbf{j},$$

odnosno $a = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\alpha^2} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$.

Zadatak 1.79. Projektil je ispaljen s tla pod kutom α u odnosu na tlo i s početnom brzinom v_0 . Pod pretpostavkom da je otpor zraka zanemario i da je jedina sila koja djeluje na gibanje sila teža, odredite funkciju položaja $r(t)$ projektila. Pod kojim kutom projektil treba biti ispaljen da bi mu se maksimizirao domet (prevaljeni put u horizontalnom smjeru)?



Slika 1.20: Kosi hitac

Rješenje: Postavimo koordinatni sustav xOy s ishodištem u mjestu ispaljivanja projektila kao na slici 1.20.

Na tijelo djeluje jedino sila teža. Stoga je $F = ma = -mgj$, odnosno $a = -gj$. Stoga je $v(t) = \int a(t) dt = -gtj + C$. Kako je $C = v(0) = v_0$, to je $v(t) = -gtj + v_0$, odnosno $r(t) = \int v(t) dt = -\frac{1}{2}gt^2j + tv_0 + C$. Kako je $0 = r(0) = C$, dobivamo $r(t) = -\frac{1}{2}gt^2j + tv_0$. Neka je $v_0 = |v_0|$. Tada je $v_0 = v_0 \cos \alpha i + v_0 \sin \alpha j$, pa je $r(t) = v_0 t \cos \alpha i + (v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2)j$. Domet se dostiže u trenutku kada je vertikalna komponenta položaja jednaka nuli, odnosno za $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, i jednak je horizontalnoj komponenti položaja u tom trenutku, odnosno $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Domet je maksimalan za $\sin 2\alpha = 1$, odnosno za $\alpha = \pi/4$.

Zadatak 1.80. Tijelo pada slobodno s visine $H = 10$ m. U trenutku kada je počelo padati, drugo je tijelo ispaljeno s tla pod kutom φ prema prvom tijelu. Na visini $h = 5$ m tijela su se sudarila. Horizontalna udaljenost od mjesta ispaljivanja do mjesta sudara je $d = 2$ m. Odredite početnu brzinu v_0 i kut φ pod kojim je ispaljeno drugo tijelo.

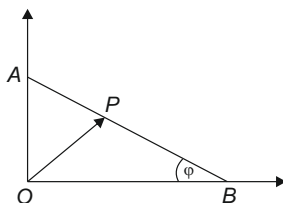
Uputa: Postavimo li koordinatni sustav xOy s ishodištem u mjestu ispaljivanja drugog tijela, onda je položaj prvog tijela dan s $r_1(t) = di + (H - \frac{1}{2}gt^2)j$, a drugog s $r_2(t) = v_0 t \cos \varphi i + (v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2}gt^2)j$. U trenutku sudara je $r_1(t) = r_2(t) = di + H/2j$.

Rješenje: $v_0 = 10.1$ m/s, $\varphi = 78.6^\circ$.

Zadatak 1.81. Ljestve AB duljine a naslonjene su na vertikalni zid OA . Ljestve padaju na način da podnožje B ljestava klizi po podlozi konstantnom brzinom v_0 . Dokažite da središte ljestvi opisuju luk kružnice sa središtem u O radijusa $a/2$.

Odredite brzinu središta ljestvi u trenutku kada je podnožje B udaljeno $b < a$ od zida.

Rješenje: Označimo središte ljestvi s točkom P , s $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$ radij-vektor točke P u trenutku t , te s $\varphi(t)$ kut koji u trenutku t ljestve zatvaraju s podlogom (vidi sliku 1.21).



Slika 1.21: Dužina \overline{AB} predstavlja ljestve koje klize

Tada je

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2}a(\cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}), \end{aligned}$$

odnosno točka P kreće se po kružnici radijusa $a/2$ sa središtem u O .

Brzina središta ljestvi dana je s $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}a(-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{i} + \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{j})$. Odredimo $\sin\varphi$ i $\frac{d\varphi}{dt}$ koji odgovaraju trenutku kada je podnožje B udaljeno za b od zida. Kako je zadano da B klizi po podlozi konstantnom brzinom v_0 , dobivamo da je

$$v_0 \mathbf{i} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} = \frac{d}{dt}(a \cos\varphi \mathbf{i}) = -a \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{i},$$

odnosno da je $\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v_0}{a \sin\varphi}$. Stoga je u trenutku kada je B na udaljenosti b od zida

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v_0}{a \sin\varphi} = -\frac{v_0}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Konačno, brzina središta ljestvi u trenutku kada je podnožje B udaljeno za b od zida iznosi

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}v_0\left(i - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}j\right),$$

odnosno $\frac{dr}{dt} = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{av_0}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$.

1.7 Primjene ekstrema funkcije jedne varijable

Prisjetimo se najprije pojmova (*lokalnih i globalnih*) ekstrema funkcije: kažemo da je $x_0 \in S$ *točka (globalnog) minimuma* funkcije $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ukoliko je $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in S$, i tada se vrijednost $f(x_0)$ naziva *minimum* funkcije f . Slično se definira i *točka lokalnog minimuma* funkcije f , s tim da se u definiciji zahtijeva da nejednakost $f(x_0) \leq f(x)$ vrijedi samo za točke x iz neke okoline točke x_0 , i tada se $f(x_0)$ naziva *lokalni minimum* funkcije f . *Točke (lokalnog i globalnog) maksimuma* definiraju se analogno, s tim da se promijeni znak nejednakosti u gornjim izrazima. (*Lokalni ekstrem* funkcije naziv je za (lokalni) minimum ili (lokalni) maksimum funkcije, te se slično koristi pojam *točka (lokalnog) ekstrema* za točku (lokalnog) minimuma ili točku (lokalnog) maksimuma.

Prije nego što krenemo s primjenama ekstrema, prisjetimo se kako možemo pronaći (lokalne) ekstreme funkcije. U tu svrhu korisni su nam *Bolzano-Weierstrassov teorem* koji tvrdi da *neprekinuta funkcija na kompaktu dostiže svoje ekstreme*, kao i *Teorem o nužnom uvjetu lokalnog ekstrema*: ukoliko $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem u x_0 i $f'(x_0)$ postoji, onda je $f'(x_0) = 0$.

Ta dva teorema osnova su *algoritma* za pronalazak ekstrema neprekinute funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Naime, prema *Bolzano-Weierstrassovom teoremu* takva funkcija ima točke minimuma i maksimuma, koje se nalaze ili na rubu segmenta (točke a i b), ili unutar $\langle a, b \rangle$. U drugom su slučaju to onda i točke lokalnog ekstrema, te možemo primijeniti *Teorem o nužnom uvjetu lokalnog ekstrema*. Sada možemo zapisati *algoritam* za pronalazak ekstrema neprekinute funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

1. Pronaći stacionarne točke (one točke $x \in \langle a, b \rangle$ u kojima je $f'(x) = 0$ ili $f'(x)$ ne postoji).

2. Izračunati vrijednosti funkcije f u stacionarnim točkama i krajevima segmenta $[a, b]$ i usporediti dobivene vrijednosti te zaključiti koja je najmanja, odnosno najveća.

Napomena 1.7. *Napomenimo da funkcija može imati beskonačno mnogo stacionarnih točaka. U tom slučaju 2. korak ne može se provesti, te je potrebno provesti detaljnije proučavanje takve funkcije.*

Napomena 1.8. *Ukoliko interval na kojemu promatramo funkciju f nije zatvoren, primjerice ukoliko želimo pronaći ekstreme funkcije $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, tada se može dogoditi da funkcija nema minimum ili maksimum, što ovisi o asimptotskom ponašanju funkcije f oko točke a . Tada je potrebno izračunati*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

te na osnovu dobivene vrijednosti provesti zaključivanje.

Primjer 1.10. *Pronađimo ekstreme funkcije $f(x) = x^2 + |x - 1|$ na*

a) $[0, 2]$,

b) $[0, \infty)$.

Pronađimo najprije stacionarne točke funkcije f . U $x = 1$ f nema derivaciju. Za $x > 1$ je $f(x) = x^2 + x - 1$, odnosno $f'(x) = 2x + 1 = 0$ za $x = -\frac{1}{2}$ (što je očito manje od 1). Za $x < 1$ imamo $f(x) = x^2 - x + 1$, te $f'(x) = 2x - 1 = 0$ za $x = \frac{1}{2}$. Zaključujemo da su 1 i $\frac{1}{2}$ jedine stacionarne točke funkcije f . Sada iz $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ zaključujemo da na intervalu $[0, 2]$ f ima minimum u $\frac{1}{2}$, a maksimum u 2 , dok na $[0, +\infty)$ f ima minimum u 2 , a maksimum ne postoji.

Provjeriti je li stacionarna točka x_0 zaista i točka lokalnog ekstrema funkcije f možemo i pomoću informacija o rastu, odnosno padu funkcije f . Naime, ako lijevo od x_0 funkcija pada, a desno od x_0 funkcija raste, onda je očito x_0 točka lokalnog minimuma. Slično, u obrnutoj situaciji imamo točku lokalnog maksimuma. Poteškoća je u tome što općenito nije jednostavno provjeriti gdje funkcija raste, odnosno pada. Međutim, ukoliko

o funkciji f imamo dodatnu informaciju da je diferencijabilna na $\langle a, b \rangle$, tada možemo koristiti kriterij rasta i pada diferencijabilne funkcije: ako je $f' > 0$ na $\langle c, d \rangle$, onda je f strogo rastuća funkcija na $\langle c, d \rangle$, a ako je $f' < 0$, onda je f strogo padajuća na $\langle c, d \rangle$. Na osnovu toga, lako možemo izvesti *Teorem o dovoljnom uvjetu lokalnog ekstrema (preko 1. derivacije)*: ako je $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna, x_0 stacionarna točka, i $\varepsilon > 0$ takav da je $f' > 0$ na $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ te $f' < 0$ na $\langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$, onda je x_0 točka lokalnog maksimuma funkcije f . Sličan zaključak može se izvesti i za ostale kombinacije rast/pad lijevo/desno od x_0 , što je simbolički zapisano u tablici 1.5.

| | $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ | $\langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$ | |
|------|--|--|----------------------|
| f' | + | - | lokalni maksimum |
| f' | - | + | lokalni minimum |
| f' | + | + | nije lokalni ekstrem |
| f' | - | - | nije lokalni ekstrem |

Tablica 1.5: Dovoljan uvjet lokalnog ekstrema preko 1. derivacije

Dovoljan uvjet ekstrema može se izraziti i preko druge derivacije promatrane funkcije: neka je f'' neprekidna na $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ i x_0 stacionarna točka. Ukoliko je $f''(x_0) > 0$, onda se u točki x_0 postiže lokalni minimum. Ako je $f''(x_0) < 0$, postiže se lokalni maksimum, a u slučaju $f''(x_0) = 0$, da bi se izveo zaključak, moraju se promatrati derivacije višeg reda (ako postoje).

1.7.1 Optimizacijski problemi

Zadace optimizacije pojavljuju se zapravo svuda oko nas – kada god trebamo napraviti nešto na *optimalan* način. Naravno, najprije treba razjasniti što to znači optimalno za danu zadaću. Na kraju se problem najčešće svodi na minimizaciju ili maksimizaciju neke funkcije, koju obično zovemo *funkcija troška*, kao što ćemo vidjeti u idućim primjerima.

Primjer 1.11. *Potrebno je napraviti cilindričnu posudu (kojoj je baza krug) volumena 1 l tako da se za njezinu izradu potroši najmanje moguće materijala. Drugim riječima, pitamo se koji to kružni cilindar volumena 1 l ima najmanje oplošje, odnosno želimo minimizirati oplošje $P = 2r^2\pi + 2rh\pi$ uz uvjet da je volumen*

$V = r^2\pi h = 1000 \text{ cm}^3$, gdje je r radijus baze valjka, a h njegova visina. Iz ovog uvjeta lako preko r izlučimo h , te dobivamo da je oplošje samo funkcija radijusa

$$P(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{1000}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}, \quad r > 0.$$

Želimo pronaći točku minimuma te glatke funkcije $P : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Iz nužnog uvjeta ekstrema

$$P'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

dobivamo jedinstvenu stacionarnu točku $r = \left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.42 \text{ cm}$. Da se radi o lokalnom minimumu vidimo iz dovoljnog uvjeta ekstrema

$$P''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0.$$

Kako je $\lim_{r \rightarrow 0^+} P(r) = +\infty$ i $\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = +\infty$, zaključujemo da je to ujedno i točka globalnog minimuma.

Dakle, tražena posuda ima radijus baze $r \approx 5.42 \text{ cm}$ i visinu $h \approx 10.84 \text{ cm}$.

Primjer 1.12. Prema Fermatovom¹⁵ principu zraka svjetlosti putovat će od točke A u zraku do točke B u vodi po putu koji minimizira potrebno vrijeme za dolazak do točke B . Dokažimo Snellov¹⁶ zakon:

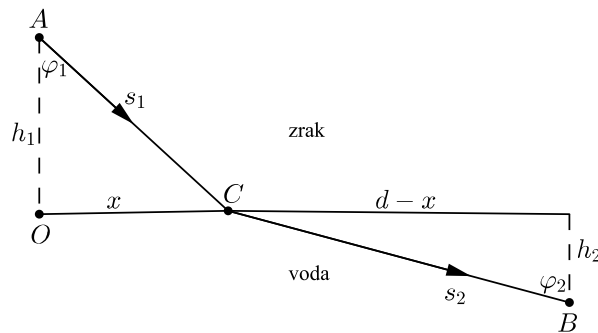
$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

gdje je v_1 brzina svjetlosti u zraku, v_2 brzina svjetlosti u vodi, φ_1 kut upada, a φ_2 kut loma svjetlosti, kao na slici 1.22.

U tu svrhu najprije uvedimo koordinatni sustav tako da x -os predstavlja granicu između zraka i vode, te da točke A i B imaju koordinate $A(0, h_1)$, $B(d, h_2)$. Nadalje, s $C(x, 0)$ označimo točku na x -osi u kojoj zraka ulazi u vodu, te s s_1 i s_2

¹⁵Pierre de Fermat (17. kolovoza 1601. - 12. siječnja 1665.), francuski matematičar i pravnik.

¹⁶Willebrord Snellius (rođen kao Willebrord Snel van Royen) (1580. - Leiden, 30. listopada 1626.), nizozemski astronom i matematičar.



Slika 1.22: Snellov zakon

duljine dužina \overline{AC} i \overline{BC} , redom, kao na slici 1.22. Tada je vrijeme koje je potrebno svjetlosti da prevali put od točke A do točke B dano s

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}}{v_2}.$$

Prema Fermatovom principu, x je točka minimuma funkcije t , pa iz nužnog uvjeta ekstrema imamo

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} = 0.$$

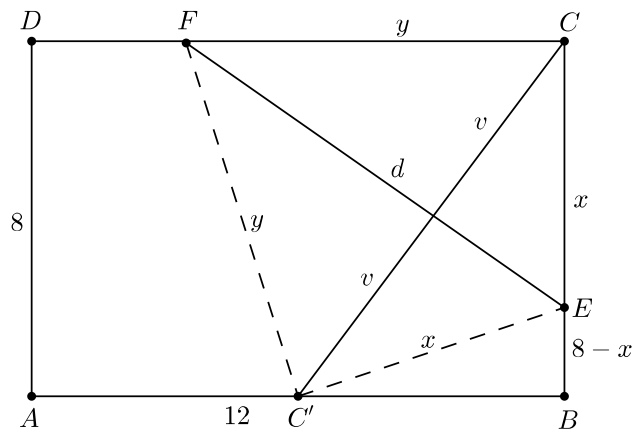
Kako iz pravokutnih trokuta na slici 1.22 dobivamo

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \sin \varphi_1 \quad \& \quad \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} = \sin \varphi_2,$$

to slijedi $\frac{\sin \varphi_1}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2}{v_2}$, odnosno $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

1.7.2 Zadaci

Zadatak 1.82. Papir pravokutnog oblika dimenzija 12×8 cm presavijte tako da točka C dođe na mjesto točke C', kao na slici 1.23, tako da duljina dužine savijanja \overline{EF} bude najkraća moguća.



Slika 1.23: Papir

Sa slike 1.23 vidimo da je $\triangle ECF \cong \triangle EC'F$, pa je $P(\triangle ECF) = \frac{dv}{2} = \frac{xy}{2}$, što povlači $v = \frac{xy}{d}$. Isto tako, iz Pitagorinog poučka za pravokutne trokute $\triangle EC'B$ i $\triangle C'BC$ dobivamo

$$(2v)^2 - 8^2 = |C'B|^2 = x^2 - (8-x)^2 = 16x - 64,$$

odnosno $v^2 = 4x$, što zajedno povlači $y^2 = \frac{4d^2}{x}$.

Iz trokuta $\triangle ECF$ je $y^2 = d^2 - x^2$, te konačno dobivamo $d^2 = \frac{x^3}{x-4}$.

Kako se točke minimuma za d i d^2 podudaraju (uočimo i da je nužno $x \in \langle 4, 8 \rangle$), iz nužnog uvjeta ekstreme dobivamo

$$\frac{d(d^2)}{dx} = \frac{3x^2(x-4) - x^3}{(x-4)^2} = \frac{2x^2(x-6)}{(x-4)^2} = 0,$$

odnosno $x = 6$ jedina je stacionarna točka funkcije d^2 na $\langle 4, 8 \rangle$. Lako se može vidjeti da je to ujedno i točka minimuma, te da je pripadni $d_{\min} = \sqrt{108} \approx 10.39$ cm.

Zadatak 1.83. Upravitelj zgrade sa 100 stanova zna iz iskustva da će svi stanovi biti iznajmljeni ukoliko je mjesečna najamnina po stanu jednaka 800 eura. Istraživanja tržišta ukazuju na to da će za svako povećanje cijene najma za 10 eura u

prosjeku jedan stan ostati neiznajmljen. Upravitelj treba odrediti najamninu koja maksimizira profit.

Ukoliko s x označimo povećanje cijene stanarine, onda je ukupni prihod dan s kvadratnom funkcijom

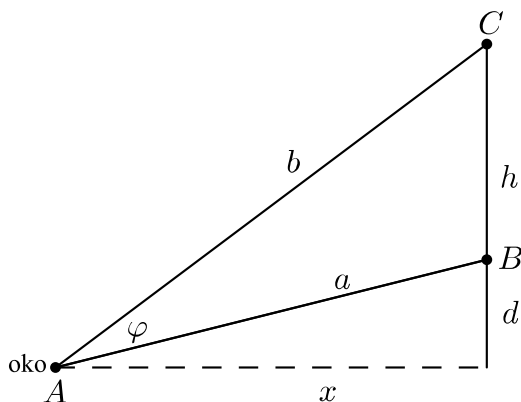
$$P(x) = (800 + x) \cdot \left(100 - \frac{x}{10}\right) = 80000 + 20x - \frac{x^2}{10}.$$

Za $x = 100$ vrijedi

$$P'(x) = 20 - \frac{2x}{10} = 0,$$

pa je to očito točka maksimuma (tjeme parabole koja je otvorena prema dolje). Slijedi da je profit najveći ako je cijena najamnine stana jednaka 900 eura.

Zadatak 1.84. Slika u galeriji visine je h i obješena je tako da je donji kraj slike za d viši od oka promatrača. Koliko daleko od slike promatrač treba stati da bi imao najbolji pogled (odnosno da je kut φ na slici 1.24 najveći mogući)?



Slika 1.24: Slika u galeriji

Iz slike 1.24 se lako vidi da je

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ab \sin \varphi = \frac{1}{2}hx,$$

odnosno $\sin \varphi = \frac{hx}{ab}$. Kako je $a^2 = x^2 + d^2$, te $b^2 = x^2 + (h + d)^2$, to slijedi

$$\sin \varphi = \frac{hx}{ab} = \frac{hx}{\sqrt{(x^2 + d^2)(x^2 + (h + d)^2)}}.$$

Iz geometrijskih razloga očito je da je $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, a kako je na tom intervalu sinus strogo rastaća funkcija, to φ ima maksimalnu vrijednost kada i $\sin \varphi$. Iz nužnog uvjeta ekstrema

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin \varphi)}{dx} &= \frac{h \cdot \sqrt{(x^2 + d^2)(x^2 + (h + d)^2)} - hx \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x(x^2 + (h + d)^2) + 2x(x^2 + d^2)}{\sqrt{(x^2 + d^2)(x^2 + (h + d)^2)}}}{(x^2 + d^2)(x^2 + (h + d)^2)} \\ &= h \cdot \frac{d^2(h + d)^2 - x^4}{[(x^2 + d^2)(x^2 + (h + d)^2)]^{\frac{3}{2}}} = 0 \end{aligned}$$

dobivamo jedinstvenu stacionarnu točku $x = \sqrt{d(h + d)}$ na $\langle 0, +\infty \rangle$.

Zbog $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \varphi = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \varphi = 0$ slijedi da je u pitanju lokalni i globalni maksimum.

Zadatak 1.85. Farmer ima 240 m ograde i želi ograditi dio polja koji graniči s ravnom rijekom. Želi da ograđeni dio bude pravokutnog oblika i da graniči s rijekom (ograda prema rijeci nije potrebna). Odredite dimenzije ograđenog polja koje ima maksimalnu površinu.

Rješenje: Označimo duljine stranica ograđenog dijela s x i y , pri čemu jednu stranu duljine y omeđuje rijeka. Tada je površina polja $P = xy$, a kako je $2x + y = 240$, to površinu možemo zapisati kao funkciju jedne varijable $P(x) = x(240 - 2x)$, $x \in \langle 0, 120 \rangle$. Sada je $P'(x) = 240 - 4x$, te je jedina stacionarna točka $x_0 = 60$. Kako je $P''(60) < 0$, to je $x_0 = 60$ točka lokalnog maksimuma. Kako je nadalje $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 120^-} P(x) = 0$, slijedi da je x_0 točka globalnog maksimuma. Dakle, maksimalna površina postiže se za duljine stranica $x = 60$ m, $y = 120$ m i iznosi 7200 m².

Zadatak 1.86. Dostupno je 12 m² materijala za izradu kutije kvadratnog dna i otvorenog vrha. Odredite dimenzije kutije koja se može napraviti od dostupnog materijala, a koja ima najveći volumen.

Rješenje: Neka je a duljina stranice baze kutije i h visina kutije. Tada je volumen kutije dan s $V = a^2h$. Kako je oplošje kutije $O = a^2 + 4ah$, a dostupno je 12 m² materijala, to je $h = \frac{12 - a^2}{4a}$. Stoga je funkcija koju treba maksimizirati $V(a) = a^2 \cdot \frac{12 - a^2}{4a} = 3a^2 - \frac{1}{4}a^3$, $a \in \langle 0, +\infty \rangle$. Kako je $V'(a) = 3 - \frac{3}{4}a^2$, to je stacionarna točka $a_0 = 2$. Nadalje je $V''(a) = -\frac{3}{2}a$,

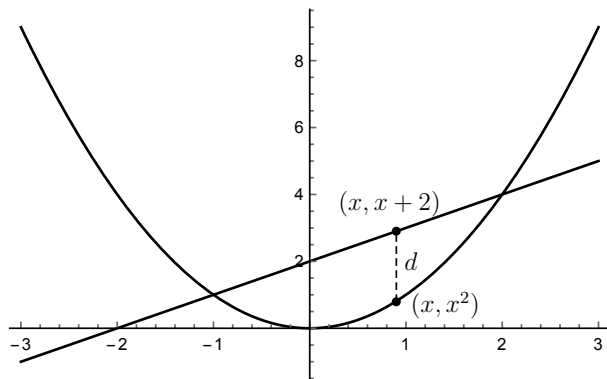
te je $V''(a_0) < 0$, pa je a_0 točka lokalnog maksimuma, a iz $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(a) = 0$ i $\lim_{a \rightarrow +\infty} V(a) = -\infty$ slijedi da je a_0 ujedno i točka globalnog maksimuma. Dakle, volumen je maksimalan za bazu s duljinom stranice $a = 2$ i visinom $h = 1$ i iznosi $V(2) = 4 \text{ m}^3$.

Zadatak 1.87. *Potrebno je napraviti sanduk volumena 10 m^3 s otvorenim vrhom čije je dno pravokutnik kod kojega je jedna stranica dvostruko dulja od druge. Kvadratni metar materijala od kojega se pravi sanduk stoji 60 kn. Odredite minimalnu cijenu izrade takvog sanduka.*

Rješenje: Dimenzije sanduka koji ima minimalno oplošje (a onda i cijenu izrade) su 1.96 m , 3.92 m i 1.3 m , a odgovarajuća cijena je 1379.36 kn .

Zadatak 1.88. *Odredite najveću vertikalnu udaljenost između pravca $y = x + 2$ i parabole $y = x^2$ na segmentu $[-1, 2]$.*

Rješenje: Dani pravac i parabola sijeku se u točkama s apscisama -1 i 2 . Prema tome, dani segment $[-1, 2]$ upravo odgovara dijelu grafa na kojemu je pravac iznad parabole (vidi sliku 1.25).



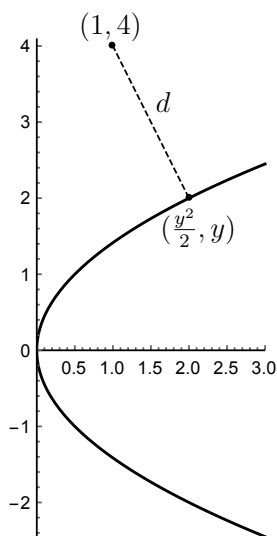
Slika 1.25: Vertikalna udaljenost između pravca $y = x + 2$ i parabole $y = x^2$

Stoga vertikalna udaljenost pravca i parabole na danom segmentu iznosi $d(x) = x + 2 - x^2$. Kako je $d'(x) = 1 - 2x$, to je $x_0 = 1/2$ jedina stacionarna točka. Nadalje, kako je $d(-1) = d(2) = 0$ i $d(1/2) = 9/4$,

to je $x_0 = 1/2$ točka u kojoj se postiže najveća udaljenost koja iznosi $d(1/2) = 9/4$.

Zadatak 1.89. Odredite točku na paraboli $y^2 = 2x$ koja je najbliža točki $(1, 4)$.

Rješenje: Točke na paraboli su oblika $(y^2/2, y)$, $y \in \mathbb{R}$, pa je udaljenost točke $(1, 4)$ do točke na paraboli dana s $d(y) = \sqrt{(\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2}$ (vidi sliku 1.26). Kako funkcije d i $f := d^2$ postižu minimum u istim toč-



Slika 1.26: Točka na paraboli $y^2 = 2x$ koja je najbliža točki $(1, 4)$

kama, nadalje tražimo točku minimuma funkcije $f(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2$, $y \in \mathbb{R}$. Kako je $f'(y) = y^3 - 8$, to je stacionarna točka $y_0 = 2$. Kako je $f''(y) = 3y^2$ i $f''(y_0) > 0$, to se u $y_0 = 2$ postiže lokalni minimum funkcije f , odnosno d . Lako se provjeri da je to ujedno i točka globalnog minimuma. Odgovarajuća točka na paraboli je $(2, 2)$, a najmanja udaljenost iznosi $d(2) = \sqrt{5}$.

Zadatak 1.90. Odredite točke na elipsi $4x^2 + y^2 = 4$ koje su najudaljenije od točke $(1, 0)$.

Rješenje: Tražene točke su $(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ i $(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3})$.

Zadatak 1.91. *Odredite duljine stranica pravokutnika maksimalne površine koji se može upisati u kružnicu radijusa r .*

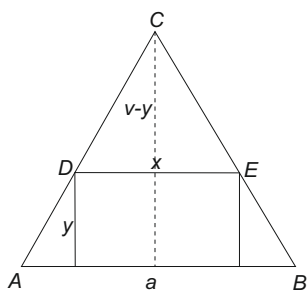
Rješenje: Označimo duljine stranica traženog pravokutnika s x i y . Tada je $x^2 + y^2 = (2r)^2$, odnosno $y = 2\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$. Sada je površina pravokutnika dana s $P(x) = 2x\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$, $x \in [0, 2r]$. Kako je $P'(x) = \frac{2r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}}$, to su stacionarne točke u danom intervalu $x_1 = r\sqrt{2}$ koja je nultočka od P' i $x_2 = 2r$ u kojoj P' ne postoji. Kako je $P(0) = P(2r) = 0$ i $P(r\sqrt{2}) = 2r^2 > 0$, to se maksimum funkcije f postiže za stranice duljina $x = y = r\sqrt{2}$ i iznosi $2r^2$.

Zadatak 1.92. *Odredite duljinu osnovice a i visinu v jednakokračnog trokuta najveće površine, koji se može upisati u kružnicu radijusa r .*

Rješenje: Duljina osnovice je $a = \sqrt{3}r$, dok visina iznosi $v = 3r/2$.

Zadatak 1.93. *Odredite duljine stranica pravokutnika maksimalne površine koji se može upisati u jednakostranični trokut duljine stranice a ako jedna stranica pravokutnika leži na bazi trokuta.*

Rješenje: Neka su duljine stranica pravokutnika x i y (vidi sliku 1.27). Primijetimo da su po K-K-K poučku o sličnosti trokuta trokuti $\triangle ABC$ i

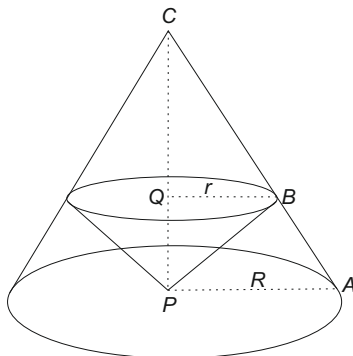


Slika 1.27: Pravokutnik upisan u jednakostranični trokut

$\triangle DEC$ slični, iz čega slijedi da je $(v - y) : v = x : a$, gdje je $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ visina trokuta $\triangle ABC$. Sada je $y = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$, odnosno površina upisanog pravokutnika iznosi $P(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(a - x)$, $x \in \langle 0, a \rangle$. Kako je $P'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - 2x)$, to je jedina stacionarna točka $x_0 = a/2$. Kako je nadalje $P''(x_0) < 0$, to je x_0 točka lokalnog maksimuma, a zbog $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} P(x) = 0$ također je i točka globalnog maksimuma. Dakle, za $x = a/2$, $y = \sqrt{3}a/4$ funkcija P postiže globalni maksimum koji iznosi $P(a/2) = \sqrt{3}a^2/8$.

Zadatak 1.94. Stožac visine h upisan je u stožac visine $H > h$ tako da je vrh upisanog stošca u središtu baze većeg stošca. Dokažite da upisani stožac ima najveći volumen kada je $h = \frac{1}{3}H$.

Rješenje: Neka mali stožac ima bazu polumjera r , a veliki polumjera R . Primijetimo da uz oznake sa slike 1.28, prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta je $\triangle QBC \sim \triangle PAC$, odakle dobivamo da je $r : R = (H - h) : H$, odnosno $h = \frac{H}{R}(R - r)$.



Slika 1.28: Stožac visine h upisan u stožac visine H

Sada je volumen upisanog stošca $V(r) = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{\pi H}{3R}r^2(R - r)$, $r \in \langle 0, R \rangle$. Kako je $V'(r) = \frac{\pi H}{3R}(2rR - 3r^2)$, to je jedina stacionarna točka $r_0 = \frac{2R}{3}$. Nadalje je $V''(r_0) < 0$, pa se za $r = \frac{2R}{3}$, odnosno za $h = \frac{1}{3}H$, postiže lokalni maksimum za koji se lako provjeri da je ujedno i točka globalnog maksimuma.

Zadatak 1.95. *Odredite polumjer r baze i visinu h stošca minimalnog volumena koji je opisan oko sfere polumjera 8 cm.*

Rješenje: Traženi polumjer je $r = 12$, a visina iznosi $h = 24$ cm.

Primjene integrala

2.1 Primjene integrala u računanju duljina, površina i volumena

Pojmovi duljine, površine i volumena intuitivno su uglavnom jasni. Međutim, precizno definirati te pojmove i precizno ih računati za neke dane objekte (*krivulje, plohe ili tijela*) baš i nije jednostavno. Ilustrirajmo to na primjeru površine: ukoliko je dan lik čiju površinu želimo izračunati pravokutnik, onda nam je poznato (i intuitivno prihvatljivo) da njegovu površinu možemo izračunati kao produkt duljina njegovih stranica. Korištenjem te činjenice lako možemo dokučiti kako izračunati površinu nekih drugih ravninskih likova, poput trokuta, paralelograma ili pravilnog mnogokuta. Međutim, što ako imamo ravninski lik koji je *omeđen krivuljama koje nisu dužine*? U tom slučaju mogli bismo pokušati naš lik *aproksimirati s puno malih pravokutnika*, na način da površina lika bude približno jednaka sumi površina tih pravokutnika. Ukoliko bismo našu aproksimaciju *profinjivali, na limesu* bismo očekivali dobiti broj koji bi odgovarao upravo površini našeg lika. Upravo smo, doduše vrlo grubo, opisali osnovnu ideju integrala, koji zapravo nije ništa drugo nego neka specifična vrsta limesa. Naime, sama definicija Riemannovog integrala obično je u udžbenicima motivirana željom da se izračuna *površina ispod grafa* dane

omeđene funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, koja je (u slučaju kad je funkcija integrabilna) dana s

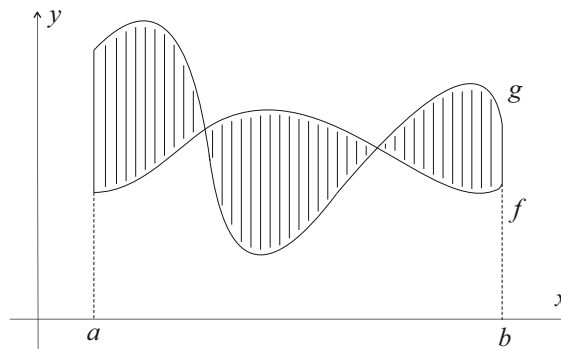
$$P = \int_a^b f(t) dt.$$

U ostatku ovog potpoglavlja vidjet ćemo kako se Riemannov integral može koristiti i za računanje površina složenijih likova i ploha, te računanje duljina i volumena. No, najprije se prisjetimo vjerojatno najbitnijeg teorema za računanje samih (određenih) integrala, a to je Newton-Leibnizova formula:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

gdje je F primitivna funkcija neprekinute funkcije f (tj. takva da je $F' = f$). Newton-Leibnizova formula uistinu je fascinatan i pomalo iznenađujući teorem, koji povezuje dva naizgled potpuno odvojena dijela matematičke analize: diferencijalni i integralni račun.

Površina između grafova funkcija



Slika 2.1: Površina između grafova funkcija f i g

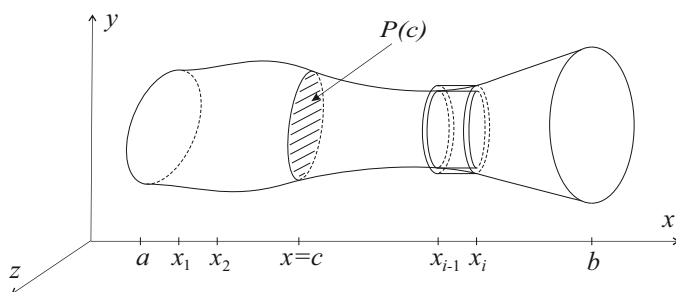
Ukoliko imamo zadane dvije integrabilne funkcije $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kao na slici 2.1, onda je lako vidjeti da je *površina između njihovih grafova*

dana s

$$P = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt.$$

Volumen tijela kojemu je poznata površina poprečnih presjeka

Neka je dana funkcija $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koja opisuje površinu presjeka tijela s ravninama okomitim na x-os. Preciznije, $P(c)$ je površina ravninske plohe koju dobijemo presjekom našeg tijela s ravninom $x = c$, za $c \in [a, b]$, kao na slici 2.2.



Slika 2.2: Volumen tijela poznate površine poprečnog presjeka

Tada je volumen našeg tijela dan s

$$V = \int_a^b P(x) dx. \quad (2.1)$$

Kako bismo se u to uvjerali, barem na intuitivnoj razini, napravimo najprije razdiobu segmenta $[a, b]$:

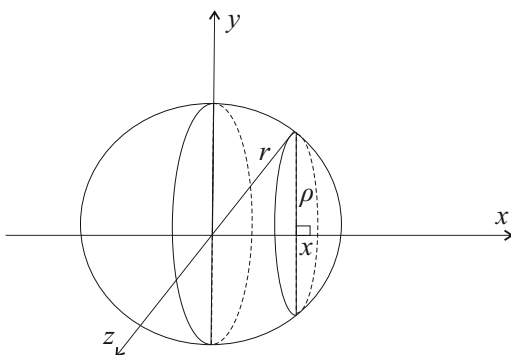
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Sada traženi volumen možemo aproksimirati sumom volumena odgovarajućih malih cilindara:

$$V \approx \sum_{i=1}^n P(x_i)(x_i - x_{i-1}),$$

a kako ova suma zapravo predstavlja integralnu sumu funkcije P , to odgovarajućim profinjivanjem razdiobi *na limesu* dobivamo baš gornji integral.

Primjer 2.1. Pokažimo da je volumen kugle radijusa r dan s $\frac{4}{3}r^3\pi$.



Slika 2.3: Kugla polumjera r

Uistinu, presjek kugle s ravninom okomitom na x -os koja prolazi kroz točku $(x, 0)$, gdje je $x \in [-r, r]$, krug je radijusa ρ koji zadovoljava $\rho^2 = r^2 - x^2$ (vidi sliku 2.3), pa je i površina tog kruga dana s $P(x) = \rho^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$. Prema (2.1) volumen kugle jednak je

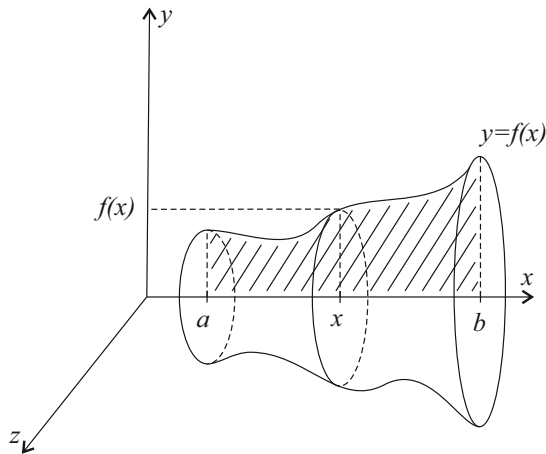
$$V = \int_{-r}^r (r^2 - x^2)\pi dx = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Volumen rotacijskog tijela

Korištenjem (2.1) lako možemo izvesti formulu za volumen tijela koje nastaje rotacijom površine ispod grafa funkcije $y = f(x)$ oko x -osi, za $x \in [a, b]$, kao na slici 2.4.

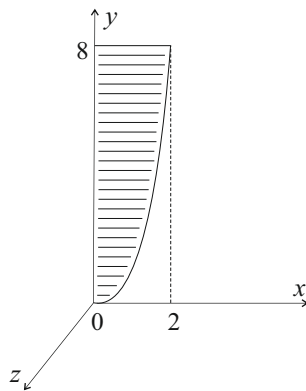
Naime, poprečni presjeci tako dobivenog tijela s ravninama okomitim na apscisu krugovi su radijusa $f(x)$, pa je pripadna površina dana s $f^2(x)\pi$, $x \in [a, b]$. Stoga je volumen tog tijela jednak

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2.2)$$

Slika 2.4: Tijelo nastalo rotacijom površine ispod grafa funkcije f

Slične se formule mogu izvesti i za rotaciju oko ostalih osi, što ostavljamo za vježbu.

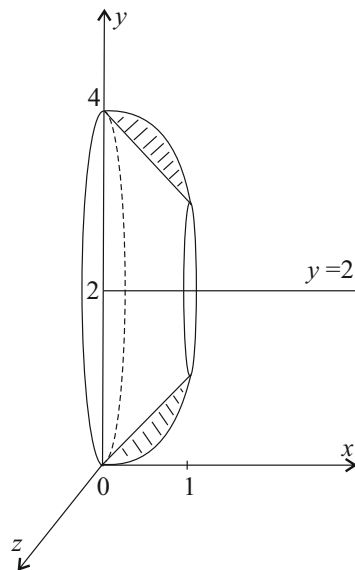
Primjer 2.2. *Odredimo volumen tijela koje nastaje rotacijom oko y -osi područja omeđenog krivuljama $y = x^3$, $x = 0$ i $y = 8$ u xy -ravnini. Dano tijelo i područje čijom rotacijom nastaje dani su na slici 2.5, odakle vidimo da je dano područje određeno grafom funkcije $y = x^3$, $x \in [0, 2]$.*

Slika 2.5: Područje omeđeno krivuljama $y = x^3$, $x = 0$ i $y = 8$

Kako se radi o rotaciji oko y -osi, potrebno je zapisati x kao funkciju varijable y : $x = y^{\frac{1}{3}}$, $y \in [0, 8]$, te slično kao u (2.2) dobivamo

$$V = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{96\pi}{5}.$$

Primjer 2.3. Odredimo volumen tijela dobivenog rotacijom područja xy -ravnine koje se nalazi između krivulja $y = x$ i $y = x^2$ oko pravca $y = 2$ u xy -ravnine. Dano područje i tijelo dani su na slici 2.6 iz koje je vidljivo da traženi volumen možemo dobiti kao razliku volumena tijela nastalih rotacijom parabole $y = x^2$ i pravca $y = x$, za $x \in [0, 1]$.



Slika 2.6: Tijelo nastalo rotacijom područja omeđenog krivuljama $y = x$ i $y = x^2$ oko pravca $y = 2$

Međutim, da bismo mogli koristiti formulu poput (2.2) rotacija se mora vršiti oko neke od koordinatnih osi, pa stoga uvodimo novi, translaterani koordinatni

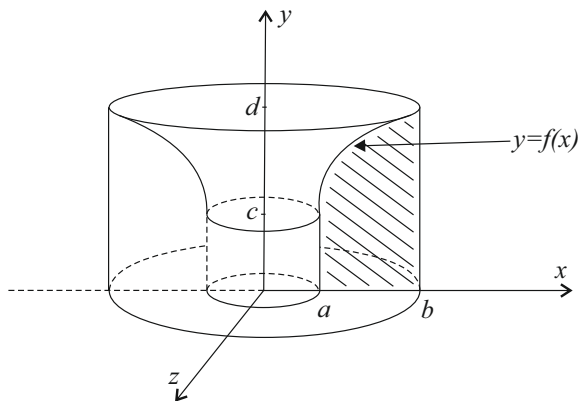
sustav:

$$\begin{aligned}x' &= x, \\y' &= y - 2, \\z' &= z,\end{aligned}$$

te se sada rotacija vrši oko x' -osi novog koordinatnog sustava. U njemu jednadžbe naših krivulja glase: $y' = x' - 2$ i $y' = x'^2 - 2$, $x' \in [0, 1]$, pa iz (2.2) lako dobivamo

$$V = \pi \int_0^1 [(x'^2 - 2)^2 - (x' - 2)^2] dx' = \frac{8\pi}{15}.$$

U primjeru 2.2 računali smo volumen tijela dobivenog rotacijom oko y -osi područja ispod grafa funkcije $y = f(x)$ i postupili na način da zapišemo x kao funkciju varijable y : $x = f^{-1}(y)$ te koristili formulu tipa (2.2). U tom primjeru lako je bilo naći f^{-1} , što ne mora uvijek biti slučaj. Stoga ćemo sada vidjeti kako izračunati volumen tako dobivenog rotacijskog tijela bez eksplicitnog računanja funkcije f^{-1} : pretpostavimo da je $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ glatka (C^1) bijekcija i pronađimo volumen tijela koje nastaje rotacijom područja ispod grafa funkcije $x \mapsto y = f(x)$ oko y -osi kao na slici 2.7.



Slika 2.7: Tijelo nastalo rotacijom oko y -osi područja koje se nalazi ispod grafa funkcije $x \mapsto y = f(x)$

Iz slike 2.7 vidimo da traženi volumen možemo dobiti ukoliko od volumena kružnog cilindra s radijusom baze b visine d oduzmemo volumen cilindra s radijusom baze a visine c i volumen tijela koje nastaje rotacijom oko y -osi područja ispod grafa funkcije $y \mapsto x = f^{-1}(y)$, $y \in [c, d]$:

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \pi \int_c^d (f^{-1})^2(y) dy.$$

Nakon zamjene varijabli $y = f(x)$ (pri čemu prelazimo na integraciju po $[a, b]$ i formalno $dy = f'(x) dx$) dobivamo

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \pi \int_a^b [f^{-1}(f(x))]^2 f'(x) dx = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \pi \int_a^b x^2 f'(x) dx,$$

te parcijalnom integracijom zadnjeg integrala, uz $u = x^2$ i $v' = f'$, pa posljedično $u = 2x$, $v = f$ slijedi

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \pi b^2 f(b) + \pi a^2 f(c) + 2\pi \int_a^b x f(x) dx,$$

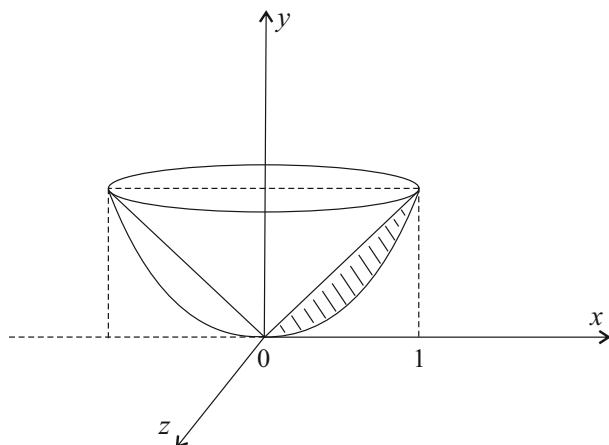
te konačno

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (2.3)$$

Napomena 2.1. Gornji postupak može se na sličan način provesti i ukoliko funkcija f nije bijekcija, nego primjerice po dijelovima monotona, pa time i po dijelovima bijekcija.

Primjer 2.4. Izračunajmo volumen tijela dobivenog rotacijom oko y -osi područja između krivulja $y = x$ i $y = x^2$ u xy -ravnini, kao na slici 2.8: prema (2.3) je

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2) dx = \dots = \frac{\pi}{6}.$$



Slika 2.8: Tijelo nastalo rotacijom oko y -osi područja omeđenog krivuljama $y = x$ i $y = x^2$

Duljina luka krivulje

Prisjetimo se da je duljina luka po dijelovima glatke krivulje Γ dana s

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \xi'^2(t)} dt, \quad (2.4)$$

gdje je

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t), \quad t \in [a, b], \\ z &= \xi(t) \end{aligned}$$

neka njena parametrizacija. Kao poseban slučaj, duljina grafa po dijelovima glatke funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dana je s

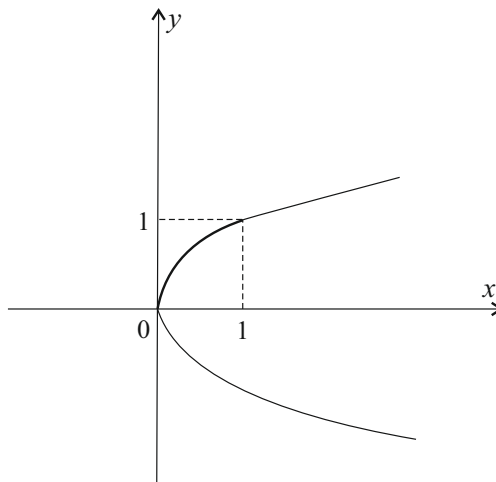
$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (2.5)$$

Primjer 2.5. Izračunajmo duljinu luka parabole $y^2 = x$ od točke $(0, 0)$ do točke $(1, 1)$. Prema (2.5) je

$$l(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2} dy,$$

odakle zamjenom varijabli $y = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t$ (i formalno $dy = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t dt$) dobivamo

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{\operatorname{arsh} 2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} t dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 2} \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 t dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 2} \frac{\operatorname{ch}(2t) + 1}{4} dt \\ &= \left(\frac{\operatorname{sh}(2t)}{8} + \frac{1}{4} t \right) \Big|_{t=0}^{\operatorname{arsh} 2} = \frac{1}{8} \operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh} 2) + \frac{1}{4} \operatorname{arsh} 2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

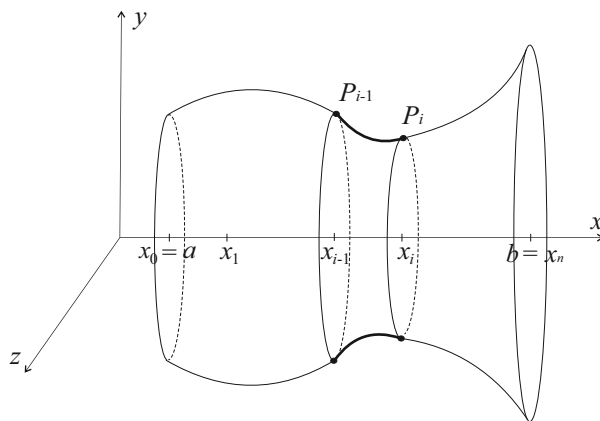


Slika 2.9: Parabola $y^2 = x$

Površina rotacijske plohe

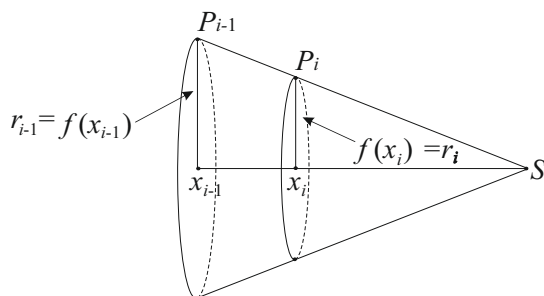
Pogledajmo sada kako možemo izračunati površinu plohe dobivene rotacijom grafa funkcije $x \mapsto y = f(x) > 0$, $x \in [a, b]$, oko x -osi: kao i prije,

neka je $\rho = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ razdioba segmenta $[a, b]$, te $P_i = (x_i, f(x_i))$. Ravnine kroz točke $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ okomite na x -os dijele plohu na *trake* (vidi sliku 2.10).



Slika 2.10: Rotacijska ploha

Površinu i -te trake aproksimiramo s pripadnom konusnom trakom prikazanom na slici 2.11, čija je izvodnica $\overline{P_{i-1}P_i}$. Iz tehničkih razloga pretpostavimo dodatno da je $f(x_i) < f(x_{i-1})$ i vrh odgovarajućeg stošca označimo sa S , kao na slici 2.11.



Slika 2.11: Konusna traka

Uz oznake $r_i := f(x_i)$, $l_i := |P_{i-1}P_i|$, $l'_i := |P_iS|$, te $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$,

površina i -te trake dana je kao razlika površina plašteva stožaca s vrhom u točki S i bazama r_{i-1} i r_i :

$$P_i^i = \pi r_{i-1}(l_i + l'_i) - \pi r_i l'_i = \pi r_{i-1} l_i + \pi l'_i (r_{i-1} - r_i).$$

Iz sličnosti pravokutnih trokuta na slici 2.11 dobivamo $\frac{l'_i}{r_i} = \frac{l_i + l'_i}{r_{i-1}}$, odnosno $(r_{i-1} - r_i)l'_i = r_i l_i$, što povlači

$$P_i^i = \pi r_{i-1} l_i + \pi r_i l_i = \pi |P_{i-1} P_i| (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i,$$

za neki $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Ovdje smo $|P_{i-1} P_i|$ aproksimirali s *infinitesimalno malim dijelom luka* $\sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i$, a $f(x_{i-1}) + f(x_i)$ s $2f(x_i^*)$. Sada je

$$P \approx \sum_{i=1}^n P_i^i \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x_i,$$

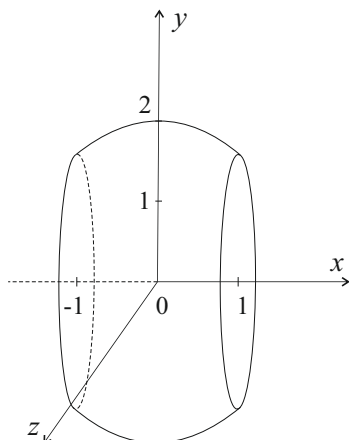
i predstavlja integralnu sumu za funkciju $x \mapsto 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Stoga traženu površinu možemo računati po formuli

$$P := \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b 2\pi f ds.$$

Napomena 2.2. Uočimo da smo u jednom trenutku pretpostavili da je $f(x_i) < f(x_{i-1})$. Ta pretpostavka nije ograničavajuća, a dokaz toga ostavljamo za vježbu. Slično je i s početnom pretpostavkom da je f pozitivna funkcija.

Primjer 2.6. Izračunajmo površinu plohe dobivene rotacijom dijela kružnice $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, oko osi x , prikazane na slici 2.12: prema prethodno izvedenoj formuli je

$$P = \int_{-1}^1 2\pi \sqrt{4 - x^2} \left(1 + \frac{x^2}{4 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 8\pi.$$



Slika 2.12: Ploha dobivena rotacijom dijela kružnice $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, oko osi x

2.1.1 Zadaci

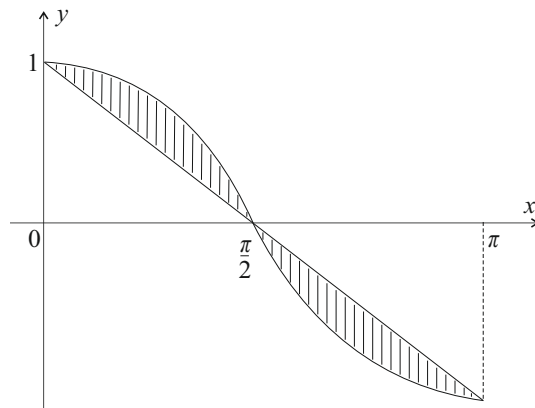
Zadatak 2.1. Skicirajte područje omeđeno danim krivuljama i odredite njegovu površinu ako je:

- $y = \cos x, y = 1 - \frac{2}{\pi}x,$
- $y = \sqrt{x + 3}, y = \frac{x+3}{2},$
- $y = x - 1, y^2 = 2x + 6,$
- $x = 2y^2, x = 4 + y^2,$
- $y = \frac{1}{x^2}, y = x, y = \frac{1}{8}x.$

Rješenje:

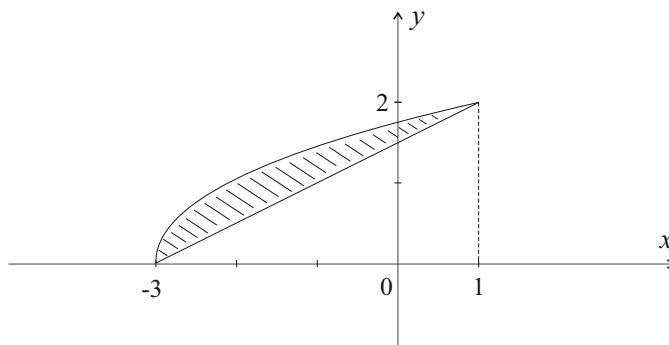
a) Apscise točaka presjeka danih krivulja su $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi$. Prema tome, površina područja određenog tim krivuljama i prikazanog na slici 2.13 jednaka je

$$P = \int_0^{\pi} \left| \cos x - \left(1 - \frac{2}{\pi}x\right) \right| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - 1 + \frac{2}{\pi}x \right) dx = \dots = 2 - \frac{\pi}{2}.$$



Slika 2.13: Područje omeđeno krivuljama $y = \cos x, y = 1 - \frac{2}{\pi}x$

b) Područje određeno danim krivuljama prikazano je na slici 2.14.

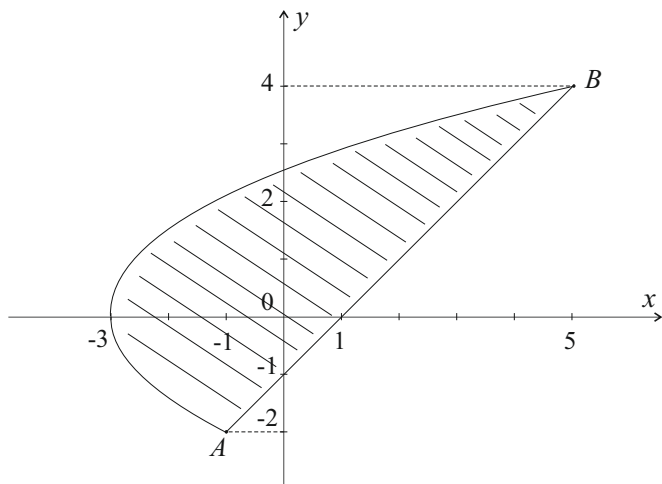


Slika 2.14: Područje omeđeno krivuljama $y = \sqrt{x+3}, y = \frac{x+3}{2}$

Računanjem apscisa točaka presjeka tih krivulja dobivamo $x_1 = -3, x_2 = 1$. Stoga je površina dobivenoga područja jednaka

$$P = \int_{-3}^1 \left(\sqrt{x+3} - \frac{x+3}{2} \right) dx = \dots = \frac{4}{3}.$$

c) Točke presjeka danih krivulja su $A = (-1, -2)$ i $B = (5, 4)$, a područje određeno tim krivuljama prikazano je na slici 2.15.



Slika 2.15: Područje omeđeno krivuljama $y = x - 1$, $y^2 = 2x + 6$

Kako se u ovome primjeru prirodno nameće integracija po varijabli y , površina danog područja jednaka je

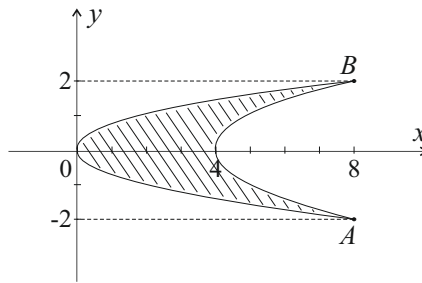
$$P = \int_{-2}^4 \left(y + 1 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right) dy = \int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4 \right) dy = \dots = 18.$$

d) Kako su točke presjeka danih krivulja $A = (8, -2)$ i $B = (8, 2)$, površina područja prikazanog na slici 2.16, jednaka je

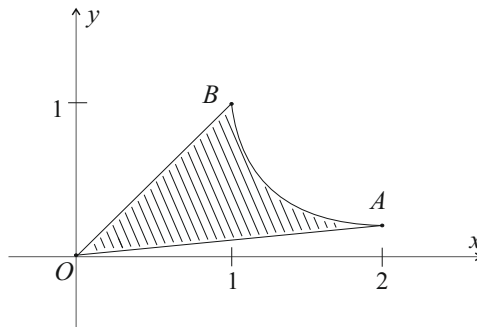
$$P = \int_{-2}^2 (4 + y^2 - 2y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = \dots = \frac{32}{3}.$$

e) Točke presjeka danih krivulja su $O = (0, 0)$, $A = (2, \frac{1}{4})$ i $B = (1, 1)$. Prema tome, površina područja prikazanog na slici 2.17, jednaka je

$$P = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{8}x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}x \right) dx = \dots = \frac{3}{4}.$$



Slika 2.16: Područje omeđeno krivuljama $x = 2y^2$, $x = 4 + y^2$



Slika 2.17: Područje omeđeno krivuljama $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = \frac{1}{8}x$

Zadatak 2.2. Skicirajte područje omeđeno danim krivuljama i odredite njegovu površinu ako je:

- $y = |x^2 - 1|$, $y = 3$,
- $y^2 - 2y - 2 = 2x$, $y = x + 1$,
- $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$,
- $y = -x^2 + 4x - 3$ i tangente u točkama $A(0, -3)$ i $B(3, 0)$ te parabole,
- $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

Rješenje:

a) $P = 8,$

b) $P = \frac{16}{3},$

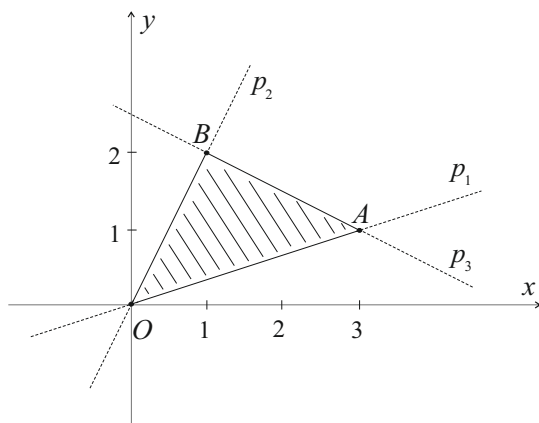
c) $P = 9,$

d) $P = \frac{9}{4},$

e) $P = \frac{(e-1)^2}{e}.$

Zadatak 2.3. Primjenom integralnog računa izračunajte površinu trokuta s vrhovima $O = (0,0), A = (3,1), B = (1,2).$

Rješenje: Jednadžbe pravaca na kojima leže stranice trokuta $\triangle OAB$ su:



Slika 2.18: Trokut $\triangle OAB$

$$p_1 : y = \frac{1}{3}x,$$

$$p_2 : y = 2x,$$

$$p_3 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Dakle, površina trokuta $\triangle OAB$ prikazanog na slici 2.18, jednaka je

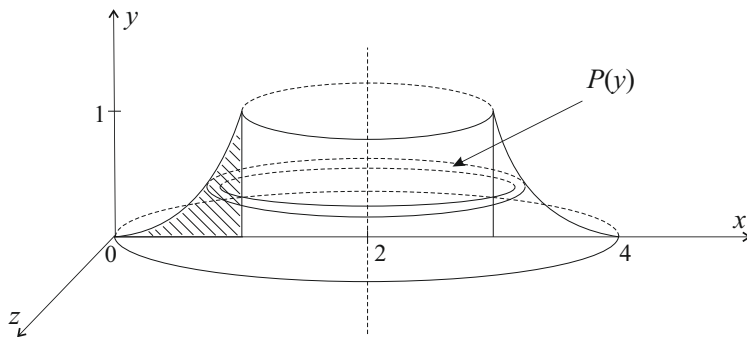
$$P = \int_0^1 \left(2x - \frac{1}{3}x\right) dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{1}{3}x\right) dx = \dots = \frac{5}{2}.$$

Zadatak 2.4. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom sljedećih područja:

- područje omeđeno krivuljama $y = x^3, y = 0, x = 1$ u xy -ravnini, rotira oko osi $x = 2$;
- područje omeđeno krivuljama $y = x^2, x = y^2$ u xy -ravnini, rotira oko osi $y = 1$.

Rješenje:

a)



Slika 2.19: Tijelo nastalo rotacijom oko osi $x = 2$ područja omeđenog krivuljama $y = x^3, y = 0, x = 1$

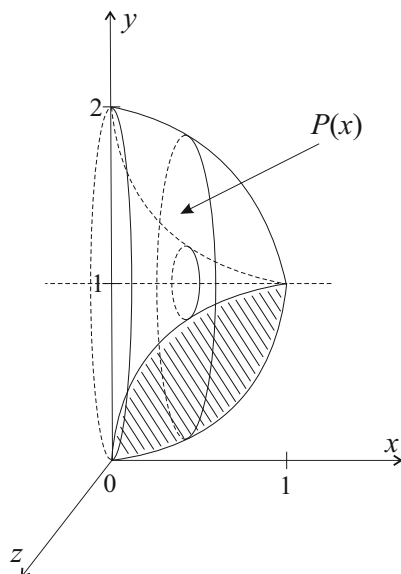
Kako je površina poprečnog presjeka tijela na slici 2.19 s ravninama okomitim na y -os jednaka

$$P(y) = (2 - \sqrt[3]{y})^2\pi - 1^2\pi,$$

zaključujemo

$$V = \int_0^1 P(y) dy = \dots = \frac{3\pi}{5}.$$

b)



Slika 2.20: Tijelo nastalo rotacijom oko osi $y = 1$ područja omeđenog krivuljama $y = x^2, x = y^2$

Površina poprečnog presjeka tijela na slici 2.20 s ravninama okomitim na x -os jednaka je

$$P(x) = (1 - x^2)^2\pi - (1 - \sqrt{x})^2\pi.$$

Dakle,

$$V = \int_0^1 P(x) dx = \dots = \frac{11\pi}{30}.$$

Zadatak 2.5. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom sljedećih područja:

- a) područje omeđeno krivuljama $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ u xy -ravnini, rotira oko osi $y = -\frac{1}{2}$;

2.1. Primjene integrala u računanju duljina, površina i volumena 100

- b) područje omeđeno krivuljama $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -x + \frac{3}{2}$ u xy -ravnini, rotira oko x -osi.

Rješenje:

- a) $V = \pi + \frac{\pi^2}{4}$,
b) $V = 56.94$.

Zadatak 2.6. Primjenom formule (2.3) odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom sljedećih područja:

- a) područje omeđeno krivuljama $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$ u xy -ravnini, rotira oko y -osi;
b) područje omeđeno krivuljama $x = 1 + (y - 2)^2$, $x = 2$ u xy -ravnini, rotira oko x -osi;
c) područje omeđeno krivuljama $y = 4x - x^2$, $y = 3$ u xy -ravnini, rotira oko osi $x = 1$;
d) područje omeđeno krivuljama $y = \sqrt{x - 1}$, $y = 0$, $x = 5$ u xy -ravnini, rotira oko osi $y = 3$.

Rješenje:

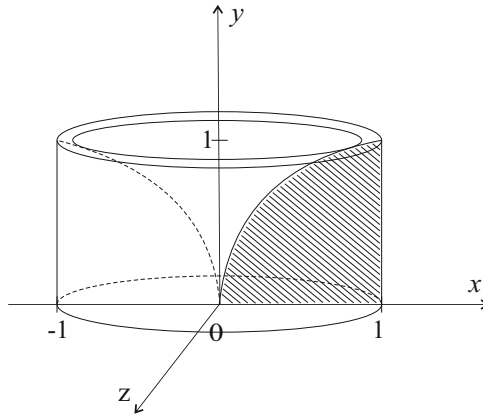
- a) Volumen tijela na slici 2.21 jednak je

$$V = \int_0^1 x \sqrt[3]{x} dx = \dots = \frac{6\pi}{7}.$$

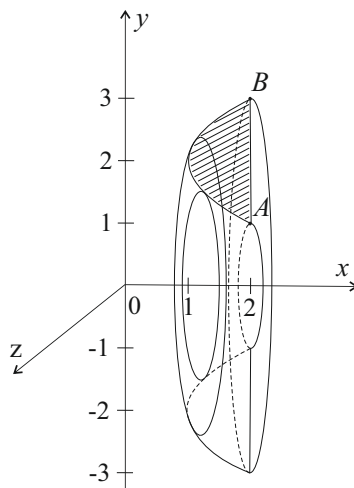
b) Kako bismo grafički prikazali tijelo koje nastaje takvom rotacijom, potrebno je izračunati točke presjeka danih krivulja: dobivamo točke $A = (2, 1)$ i $B = (2, 3)$.

Stoga volumen tijela prikazanog na slici 2.22 iznosi

$$V = 2\pi \int_1^3 y(1 - (y - 2)^2) dy = \dots = \frac{16\pi}{3}.$$



Slika 2.21: Tijelo nastalo rotacijom oko y -osi područja omeđenog krivuljama $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = 1$

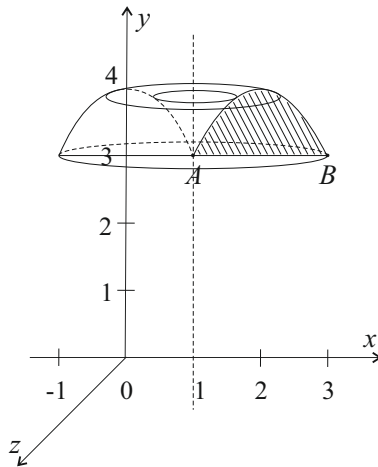


Slika 2.22: Tijelo nastalo rotacijom oko x -osi područja omeđenog krivuljama $x = 1 + (y - 2)^2, x = 2$

c) Za točke presjeka danih krivulja dobivamo $A = (1, 3)$ i $B = (3, 3)$.

Prema tome, volumen tijela prikazanog na slici 2.23 jednak je

$$V = 2\pi \int_1^3 (x-1)(4x-x^2-3) dx = \dots = \frac{8\pi}{3}.$$



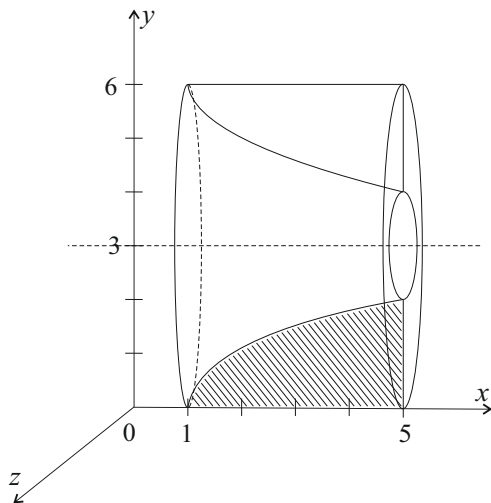
Slika 2.23: Tijelo nastalo rotacijom oko osi $x = 1$ područja omeđenog krivuljama $y = 4x - x^2$, $y = 3$

d) Dobiveno tijelo prikazano je na slici 2.24, a volumen tijela jednak je

$$V = 2\pi \int_0^2 (3-y)(4-y^2) dy = \dots = 24\pi.$$

Zadatak 2.7. Primjenom formule (2.3) odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom sljedećih područja:

- područje omeđeno krivuljama $y = \sin(x - \pi) + 2$, $y = 2$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ u xy -ravnini, rotira oko osi $x = \pi$;
- područje omeđeno krivuljama $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ u xy -ravnini, rotira oko y -osi;



Slika 2.24: Tijelo nastalo rotacijom oko osi $y = 3$ područja omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 5$

- c) područje omeđeno krivuljama $y = x^4$, $y = 0$, $x = 1$ u xy -ravnini, rotira oko osi $x = 2$;
- d) područje omeđeno krivuljama $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ u xy -ravnini, rotira oko osi $y = 1$.

Rješenje:

a) $V = 2\pi^2$,

b) $V = 3\pi^2 - 2\pi$,

c) $V = \frac{7\pi}{15}$,

d) $V = \frac{5\pi}{14}$.

Zadatak 2.8. Odredite duljinu luka

- a) krivulje $y^2 = x^3$ između točaka $A = (1, 1)$, $B = (4, 8)$;

2.1. Primjene integrala u računanju duljina, površina i volumena 104

b) krivulje parametrizirane s $r(t) = \cos t i + \sin t j + t k$ od točke $A = (1, 0, 0)$ do točke $B = (1, 0, 2\pi)$.

Rješenje:

a) Uočimo kako je $y > 0$ između točaka A i B , pa je $y = x^{\frac{3}{2}}$ i $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Stoga je

$$l = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}).$$

b) Slijedi $r'(t) = -\sin t i + \cos t j + k$, $t \in [0, 2\pi]$, pa je

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Zadatak 2.9. Parametrizirajte krivulju $r(t) = \cos t i + \sin t j + t k$ s obzirom na duljinu luka od točke $A = (1, 0, 0)$ u smjeru rasta od t .

Rješenje: Prisjetimo se da je $\frac{ds}{dt} = |r'(t)|$, pa je

$$s(t) = \int_0^t |r'(u)| du = \sqrt{2}t,$$

odakle slijedi $t = \frac{s(t)}{\sqrt{2}}$. Prema tome,

$$r(t) = r\left(\frac{s(t)}{\sqrt{2}}\right) = \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) i + \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) j + \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) k.$$

Zadatak 2.10. Odredite duljinu luka

a) krivulje $y = \ln \sin x$ između točaka $A = \left(\frac{\pi}{3}, \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i $B = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$;

b) krivulje parametrizirane s $r(t) = \cos^3 t i + \sin^3 t j$ za $t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$.

Rješenje:

a) $l = \frac{1}{2} \ln 3$.

b) Iz $r'(t) = -3 \cos^2 t \sin t \mathbf{i} + 3 \sin^2 t \cos t \mathbf{j}$, slijedi

$$l = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t} dt = 3 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t \cos t| dt = \dots = \frac{9}{2}.$$

Zadatak 2.11. Odredite opseg lika koji je omeđen krivuljama $y^3 = x^2$ i $y = \sqrt{2 - x^2}$.

Rješenje: $O \approx 5.102$.

Zadatak 2.12. Odredite površinu plohe nastale rotacijom:

a) grafa funkcije $y = e^x$, $x \in [0, 1]$, oko osi x ;

b) kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, oko pravca $y = r$.

Rješenje:

a) Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &= \pi(e\sqrt{1 + e^2} + \ln(e + \sqrt{1 + e^2}) - \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

b) Jednadžba gornje polukružnice jednaka je $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, pa je

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Nadalje, jednadžba donje polukružnice jednaka je $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ i

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Prema tome, površina plohe dobivene rotacijom dane kružnice može se dobiti kao suma površina ploha dobivenih rotacijom gornje i donje polukružnice, tj. $P = P_1 + P_2$, gdje je

$$\begin{aligned} P_1 &= 2\pi \int_{-r}^r (r - \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_0^r (r - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 4\pi \int_0^r \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} - r \right) dx, \end{aligned}$$

i slično

$$P_2 = 4\pi \int_0^r \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} + r \right) dx.$$

Dakle,

$$P = 8\pi \int_0^r \left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) dx = 4\pi^2 r^2.$$

Zadatak 2.13. *Odredite površinu plohe nastale rotacijom:*

- grafa funkcije $y = x^3$, $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, oko osi x ;
- grafa funkcije $y = \sin 2x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, oko osi x .

Rješenje:

- $P = \frac{196}{729}\pi$,
- $P = \frac{\pi}{2}(2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2))$.

2.2 Rad sile

Do sada smo integralni račun primjenjivali za rješavanje nekih *geometrijskih problema*. Međutim, integrali imaju široku primjenu u mnogim problemima koji nisu *čisto matematički*, a jedna od njih je i za računanje *rada sile*. Za početak, pretpostavimo da na tijelo cijelo vrijeme u istom smjeru djeluje konstantna sila F , pod utjecajem koje se tijelo pravocrtno giba i prijeđe put d . Tada se *rad* te sile definira kao $W := Fd$ (mjerna jedinica Nm=Joule). Uočimo da je rad zapravo *energija*.

Primjer 2.7. *Izračunajmo koliki je rad potreban da bi se teret težak 1.2 kg digao s podloge na stol visine 0.7 m: sila potrebna da bi se teret mogao dići jednaka je pripadnoj sili gravitacije $F = mg = 1.2 \cdot 9.8 = 11.76\text{N}$, pa je pripadni rad jednak $W = Fd = 11.76 \cdot 0.7 \approx 8.2\text{J}$.*

Pretpostavimo sada da na tijelo djeluje sila (cijelo vrijeme u istom smjeru) uslijed koje tijelo prijeđe put koji odgovara segmentu $[a, b]$, s tim da sila nije konstantna, nego je njen iznos u svakoj pojedinoj točki puta određen funkcijom $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Da bismo sada izračunali rad, napravimo subdiviziju $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ segmenta $[a, b]$ i na svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$ silu aproksimiramo s njenom vrijednošću $f(x_i^*)$ u nekoj točki $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Tada je rad sile na tom podsegmentu puta približno jednak $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$, odnosno na cijelom putu $[a, b]$:

$$W \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Budući da je gornji izraz integralna suma za funkciju f , to rad sile ima smisla definirati kao

$$W := \int_a^b f(x) dx.$$

Primjer 2.8. *Ako je poznato da je potrebna sila od 40 N da bi se opruga prirodne duljine 10 cm rastegnula na 15 cm, izračunajmo koliko je rada potrebno da bi se opruga rastegnula s 15 na 18 cm: prema Hookovom zakonu sila opruge jednaka je produktu koeficijenta elastičnosti k i produljenja opruge x iz čega za $x = 5\text{ cm}$ i $f = 40\text{N}$ dobivamo da je $k = 800\text{N/m}$, odnosno sila opruge dana je s $f(x) =$*

$800 \cdot x$. Stoga je traženi rad dan s

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x \, dx = 1.56 \text{ J.}$$

2.2.1 Zadaci

Zadatak 2.14. Rad veličine 2J potreban je za rastezanje opruge prirodne duljine 30 cm do duljine 42 cm. Koliki rad treba uložiti da bi se opruga rastegnula s 35 cm na 40 cm duljine? Ako na oprugu djelujemo silom od 30 N, koliko će ona biti rastegnuta u odnosu na svoju prirodnu duljinu?

Rješenje: Kako je prema Hookovom zakonu $f(x) = kx$, gdje je k koeficijent elastičnosti opruge, iz

$$\int_0^{0.12} kx \, dx = 2$$

slijedi $k = 277.78 \text{ N/m}$. Prema tome, rad potreban za rastezanje opruge s 35 cm do 40 cm duljine jednak je

$$W = \int_{0.05}^{0.1} f(x) \, dx = 277.78 \int_{0.05}^{0.1} x \, dx = 1.04 \text{ J.}$$

Djelovanjem na oprugu silom od 30 N, opruga će se rastegnuti za

$$x = \frac{277.78}{30} = 9.26 \text{ cm.}$$

Zadatak 2.15. Prirodna duljina opruge iznosi 40 cm. Da bi opruga bila rastegnuta na 60 cm, potrebna je sila od 50 N. Odredite rad potreban za rastezanje opruge do 50 cm.

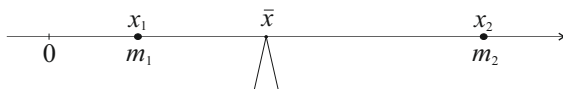
Rješenje: $W = 1.25 \text{ J}$.

Zadatak 2.16. Rad veličine 0.24 J potreban je za rastezanje opruge prirodne duljine 10 cm do duljine od 14 cm. Koliki rad treba uložiti da bi se opruga rastegnula s 17 na 20 cm duljine?

Rješenje: $W = 0.765 \text{ J}$.

2.3 Momenti i težište

Osnovni cilj ovoga poglavlja je izvesti formule za računanje *centra mase* (*težišta*) i momenata tanke ploče. Za početak, krenimo s jednostavnijom situacijom: pretpostavimo da je dan sustav kojeg čine tanka šipka zanemarive mase, na čijim su krajevima pričvršćene mase m_1 i m_2 . Nadalje, neka je x -os postavljena u smjeru šipke, te neka su koordinate prve i druge mase x_1 , odnosno x_2 . Želimo naći koordinatu \bar{x} točke sa svojstvom da oslanjanjem šipke u toj točki dobijemo *klackalicu u ravnoteži*, kao na slici 2.25. Tu točku nazivamo centar mase (sustava koji se sastoji od masa m_1 i m_2 na danim pozicijama).



Slika 2.25: Centar mase sustava

Da bismo odredili \bar{x} , koristit ćemo *Arhimedov zakon poluge* prema kojemu je poluga u ravnoteži ukoliko su produkti masa i njihovih udaljenosti od točke oslonca jednaki. Dakle,

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}),$$

odakle lako dobivamo koordinatu težišta:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}.$$

Veličine m_1x_1 i m_2x_2 nazivaju se *momenti masa* m_1 , odnosno m_2 , a $M := m_1x_1 + m_2x_2$ *moment sustava u odnosu na ishodište*.

Općenitije, ukoliko imamo $n \in \mathbf{N}$ masa m_1, \dots, m_n na pozicijama x_1, \dots, x_n , lako se može provjeriti da je koordinata težišta dana s

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m}, \quad (2.6)$$

gdje je

$$M := \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

moment sustava u odnosu na ishodište, a

$$m := \sum_{i=1}^n m_i$$

ukupna masa sustava. Iz (2.6) slijedi $M = m\bar{x}$, što možemo interpretirati na sljedeći način: *ukoliko se cjelokupna masa sustava premjesti u težište, moment sustava se ne mijenja.*

Promotrimo sada sustav koji se sastoji od $n \in \mathbf{N}$ masa m_1, \dots, m_n koje se nalaze na pozicijama $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ u ravnini. Povučemo li analogiju s prethodnom situacijom,

$$M_y := \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

možemo definirati kao *moment sustava u odnosu na y-os, te*

$$M_x := \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

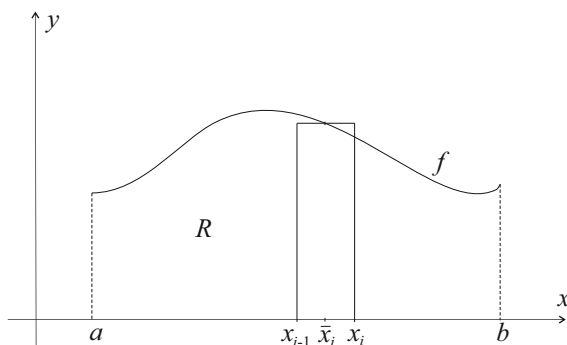
kao *moment sustava u odnosu na x-os.* Ti momenti opisuju *tendenciju sustava za rotacijom oko y-osi, odnosno x-osi.* Sada, kao i prije, koordinate težišta možemo izraziti u terminima momenata i ukupne mase sustava m :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

čime smo uvažili princip po kojemu se momenti ne mijenjaju premještanjem ukupne mase u ishodište.

Još općenitiji slučaj je tanka, homogena ploča R (konstantne površinske gustoće mase ρ) koja se nalazi ispod grafa funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ kao na slici 2.26. Ovdje ćemo se koristiti i takozvanim *principom simetrije*: ako je R simetrična u odnosu na pravac l , onda se težište nalazi na l , što za posljedicu ima da je težište pravokutnika u sjecištu dijagonala.

Da bismo pronašli težište i momente ploče R , najprije uzmimo ekvidistantnu razdiobu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ segmenta $[a, b]$, te označimo s $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ širinu svakog segmenta te razdiobe, a s $\bar{x}_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ središte i -tog segmenta. Težište i -tog pravokutnika je u točki $(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i))$ i



Slika 2.26: Homogena ploča R ispod grafa funkcije f

masa mu je jednaka produktu gustoće i površine: $\rho f(\bar{x}_i)\Delta x$. Stoga je i moment oko y -osi jednak $M_y^i = \rho f(\bar{x}_i)\Delta x \bar{x}_i$. Sada moment ploče R možemo aproksimirati s

$$M_y \approx \sum_{i=1}^n \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x,$$

što je integralna suma za funkciju $x \mapsto \rho x f(x)$. Stoga ima smisla moment sustava u odnosu na y -os definirati kao

$$M_y := \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

Slično možemo zaključiti i za momente u odnosu na x -os:

$$M_x^i = \rho f(\bar{x}_i)\Delta x \cdot \frac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho \frac{1}{2}(f(\bar{x}_i))^2 \Delta x,$$

što povlači

$$M_x \approx \sum_{i=1}^n \rho \frac{1}{2}(f(\bar{x}_i))^2 \Delta x,$$

i posljedično

$$M_x := \frac{1}{2}\rho \int_a^b f^2(x) dx.$$

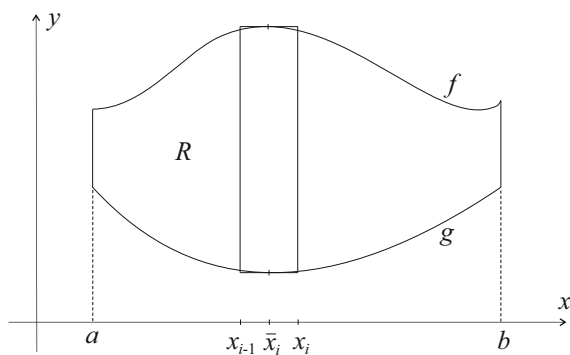
Korištenjem ponovo principa po kojemu se momenti ne mijenjaju premještanjem cjelokupne mase u težište, slijedi da koordinate težišta (\bar{x}, \bar{y}) zadovoljavaju $m\bar{x} = M_y$ i $m\bar{y} = M_x$, gdje je

$$m = \rho P = \rho \int_a^b f(x) dx$$

ukupna masa ploče R . Odavdje lako dobivamo izraze za koordinate težišta:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Uočimo da one ne ovise o gustoći ρ nego samo o funkciji f , odnosno geometriji ploče.



Slika 2.27: Homogena ploča R između grafova funkcija f i g .

Ako se područje R nalazi između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdje je $f(x) \geq g(x)$ kao na slici 2.27, na sličan način može se pokazati kako su

koordinate težišta (\bar{x}, \bar{y}) dane s

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x(f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}.$$

2.3.1 Zadaci

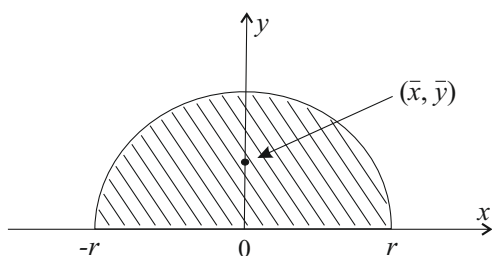
Zadatak 2.17. Odredite koordinate težišta tanke homogene ploče oblika gornje polukružnice polumjera r .

Rješenje: Prema principu simetrije slijedi $\bar{x} = 0$. Kako je jednadžba gornje polukružnice jednaka $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, slijedi

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \frac{1}{2} r^2 \pi.$$

Prema tome,

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \int_{-r}^r f^2(x) dx}{\int_{-r}^r f(x) dx} = \frac{1}{r^2 \pi} \int_{-r}^r |r^2 - x^2| dx = \frac{2}{r^2 \pi} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4r}{3\pi}.$$



Slika 2.28: Homogena ploča oblika gornje polukružnice polumjera r

Dakle, koordinate težišta su $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{4r}{3\pi})$.

Zadatak 2.18. *Odredite koordinate težišta područja omeđenog krivuljom $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ smještenog u prvom i drugom kvadrantu koordinatnog sustava.*

Rješenje: $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{8}{3\pi})$.

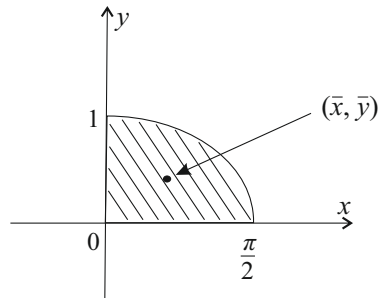
Zadatak 2.19. *Odredite koordinate težišta područja omeđenog krivuljama:*

a) $y = \cos x, y = 0, x = 0$, koje se nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sustava;

b) $y = x, y = x^2$.

Rješenje:

a)



Slika 2.29: Područje prvog kvadranta omeđeno krivuljama $y = \cos x, y = 0, x = 0$

Površina područja prikazanog na slici 2.29 jednaka je

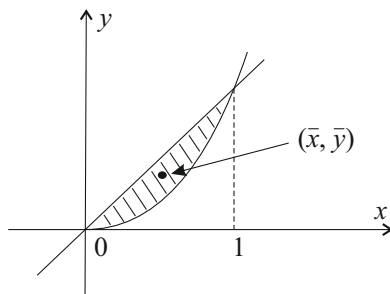
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1.$$

Prema tome,

$$\bar{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{8}.$$

b)

Slika 2.30: Područje omeđeno krivuljama $y = x, y = x^2$

Zbog

$$\int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$$

zaključujemo kako je

$$\bar{x} = 6 \int_0^1 x(x - x^2) dx = \frac{1}{2},$$

$$\bar{y} = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{2}{5}.$$

Zadatak 2.20. Odredite koordinate težišta područja omeđenog krivuljama:

a) $y = x^2, y = \sqrt{x};$

b) $y = \ln x, x = 1, x = e, y = 0.$

Rješenje:

a) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{9}{20}, \frac{9}{20}),$

$$\text{b) } (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{e^2+1}{4}, \frac{e-2}{2}\right).$$

Zadatak 2.21. Dokažite da je težište trokuta u sjecištu težišnica toga trokuta.

2.4 Primjene u medicini

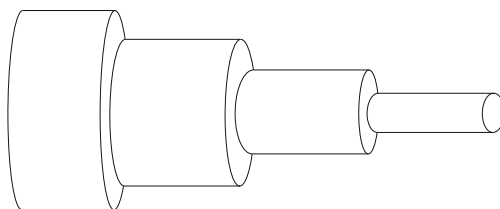
Fluks

U poglavlju 1.3 promatrali smo laminarni tok viskoznog nekompresibilnog fluida (krvi) kroz cilindričnu cijev (krvnu žilu) radijusa R i zaključili da je brzina toka jednaka

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

gdje je $r \in [0, R]$ vertikalna udaljenost točke u kojoj promatramo tok od centra cijevi, P pad tlaka, a η viskoznost fluida.

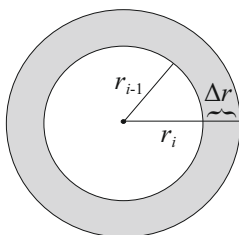
Sada ćemo izračunati pripadni *fluks*, koji se definira kao *volumen fluida koji protječe kroz poprečni presjek u jedinici vremena*. To radimo tako da jednoliko podijelimo radijus na više manjih dijelova $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n = R$, označimo $\Delta r := r_i - r_{i-1}$, te brzinu fluida na $[r_{i-1}, r_i]$ aproksimiramo s konstantnom vrijednošću $v(r_i)$. Tada je približni volumen fluida koji protječe kroz poprečni presjek u jedinici vremena jednak volumenu tijela danog na slici 2.31.



Slika 2.31: Tijelo čiji volumen aproksimira volumen fluida

Kako je približna površina prstena s radijusima r_{i-1} i r_i prikazanoga na slici 2.32 dana sa

$$P_i = r_i^2\pi - r_{i-1}^2\pi = \pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = \pi(r_i + r_{i-1})\Delta r \approx 2\pi r_i\Delta r,$$



Slika 2.32: Poprečni presjek krvne žile

to je taj volumen jednak

$$V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi r_i v(r_i) \Delta r,$$

što predstavlja integralnu sumu za funkciju $r \mapsto 2\pi r v(r)$. Stoga je fluks jednak

$$F = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l} (R^2 - r^2) dr = \dots = \frac{P\pi}{8\eta l} R^4.$$

Dobiveni izraz naziva se *Poiseuilleov zakon* po kojemu je fluks proporcionalan četvrtoj potenciji radijusa.

Srčani minutni volumen

*Srčani minutni volumen*¹ definira se kao volumen krvi koju srce ispumpa u jedinici vremena (izražen obično u l/min). Iz te definicije jasno je da se zapravo radi o fluksu kroz aortu. Za mjerenje srčanoga minutnog volumena koristi se postupak pod nazivom *metoda razrjeđivanja boje*² koji radi po sljedećem principu: boja se ubrizgava u desnu pretklijetku, odakle ide do pluća, pa preko lijeve pretklijetke i klijetke u aortu u koju se smjesti *senzor* koji mjeri koncentraciju boje u jednakim vremenskim razmacima sve dok u nekom trenutku T ona ne dostigne vrijednost približno jednaku nuli.

¹eng. cardiac output

²eng. dye dilution method

Ako s $c(t)$ označimo koncentraciju boje u trenutku $t \in [0, T]$, napravimo ekvidistantnu razdiobu segmenta $[0, T]$: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ i označimo $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, tada je masa boje koja proteče kroz senzor u intervalu $[t_{i-1}, t_i]$ približno jednaka $c(t_i)F\Delta t$, gdje je F fluks toka na $[0, T]$. Sada je ukupna masa boje koja proteče kroz senzor približno jednaka

$$\sum_{i=1}^n c(t_i)F\Delta t,$$

što predstavlja odgovarajuću integralnu sumu. Zaključujemo da je ukupna količina boje A jednaka

$$A = F \int_0^T c(t) dt.$$

Budući da je A poznat u startu (masa boje koju smo ubrizgali), a $\int_0^T c(t) dt$ može se procijeniti iz mjerenja koncentracije, to iz gornjeg izraza lako dobivamo koliki je fluks.

Primjer 2.9. 5 mg boje ubrizgano je u srce, a u tablici 2.1 dana su mjerenja koncentracije boje u aorti u svakoj sekundi.

| t | $c(t)$ u mg/l |
|-----|---------------|
| 0 | 0 |
| 1 | 0.4 |
| 2 | 2.8 |
| 3 | 6.5 |
| 4 | 9.8 |
| 5 | 8.9 |
| 6 | 6.1 |
| 7 | 4.0 |
| 8 | 2.3 |
| 9 | 1.1 |
| 10 | 0 |

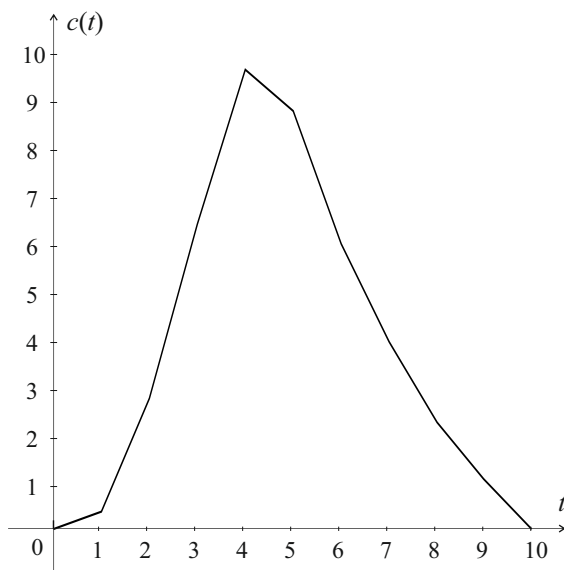
Tablica 2.1: Koncentracija boje u aorti

Procijenimo srčani minutni volumen: poznato nam je da je $A = 5 \text{ mg}$ i $T = 10 \text{ s}$, a iz tablice 2.1 možemo pomoću trapezne formule izračunati približnu vrijednost integrala

$$\int_0^{10} c(t) dt \approx 41.9 \text{ mg s/l}.$$

Uočimo da ovdje zapravo računamo površinu ispod grafa po dijelovima linearne funkcije dane na slici 2.33. Sada lako dobivamo

$$F = \frac{5}{41.9} \approx 0.12 \text{ l/s} = 7.2 \text{ l/min}.$$



Slika 2.33: Graf funkcije $t \mapsto c(t)$

2.4.1 Zadaci

Zadatak 2.22. 6 mg boje ubrizgano je u desnu pretklijetku srca. Koncentracija boje u mg/l dana je sa $c(t) = 20te^{-0.6t}$, $t \in [0, 10]$, gdje je t mjereno u sekundama. Odredite srčani minutni volumen.

Rješenje: Uočavamo kako je $A = 6, T = 10$ i vrijedi

$$\int_0^T c(t) dt = 20 \int_0^{10} te^{-0.6t} dt = \frac{20}{0.36}(-7e^{-6} + 1).$$

Prema tome,

$$F = \frac{6}{\frac{20}{0.36}(-7e^{-6} + 1)} \approx 0.109 \text{ l/s} = 6.54 \text{ l/min.}$$

Zadatak 2.23. 0.3 mg boje ubrizgano je u desnu pretklijetku srca. Koncentracija boje u mg/l dana je sa $c(t) = (t^2 + 1)e^{-2t}, t \in [0, 10]$, gdje je t mjereno u sekundama. Odredite srčani minutni volumen.

Rješenje: $F = 0.4 \text{ l/min.}$

Zadatak 2.24. 0.5 mg boje ubrizgano je u desnu pretklijetku srca. Koncentracija boje u mg/l dana je sa $c(t) = \frac{1}{25}\sqrt{100 - t^2}, t \in [0, 10]$, gdje je t mjereno u sekundama. Odredite srčani minutni volumen.

Rješenje: $F = 0.159 \text{ l/min.}$

Literatura

- [1] B. E. Blank, S. G. Krantz, *Calculus: Multivariable*, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 2011
- [2] B. P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986
- [3] D. Edwards, M. Hamson, *Guide to Mathematical Modelling*, 2nd edition, Palgrave Mathematical Guides, Antony Rowe Ltd Chippenham, Wiltshire, 2001
- [4] P. Kulišić et al., *Riješeni zadaci iz mehanike i topline*, Školska knjiga, Zagreb, 1991
- [5] S. Kurepa, *Matematička analiza 1 (funkcije jedne varijable)*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990
- [6] S. Kurepa, *Matematička analiza 2 (diferenciranje i integriranje)*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989
- [7] M. Lovrić, *Vector Calculus*, Addison-Wesley Publ. Ltd., Don Mills, Ontario, 1997
- [8] V. P. Minorski, *Zbirka zadataka više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971
- [9] J. D. Murray, *Mathematical Biology I: An introduction*, New York, Springer, 2002
- [10] J. Pickles, *Applied mathematics by Example: Theory*, Jeremy Pickles & Ventus Publishing ApS, 2010

-
- [11] J. Pickles, Applied mathematics by Example: Exercises, Jeremy Pickles & Ventus Publishing ApS, 2010
 - [12] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw-Hill, Book Company, 1964
 - [13] R. Scitovski, Numerička matematika, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 1999
 - [14] M. R. Spiegel, Schaum's Theory and Problems of Theoretical Mechanics, McGraw-Hill, 1967
 - [15] J. Stewart, Calculus 7th Edition, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008
 - [16] Š. Ungar, Matematička analiza 3, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2002