dr.sc. Ljerka Jukić Matić, docent
e-mail: ljukic@mathos.hr
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku,
dr.sc. Ivan Matić, izvanredni profesor
e-mail: imatic@mathos.hr
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku,
Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek

Izdavač:
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku

Recenzenti:
dr.sc. Neven Grbac, izvanredni profesor,
Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku
dr.sc. Nikola Koceić - Bilan, izvanredni profesor,
Prirodoslovno-matematički fakultet, Odjel za matematiku, Sveučilište u Splitu

Lektor:
Marina Tomić, prof.

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140712069.

ISBN 978 – 953 – 8154 – 03 – 4

Ovaj udžbenik objavljuje se uz suglasnost Senata Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku pod brojem 16/17.

Tisak:
STUDIO HS Internet d.o.o., Osijek

PRIRUČNIK ZA NASTAVU MATEMATIKE

Ljerka Jukić Matić, Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

PREDGOVOR

Za sve one koji misle da znaju matematiku, kao i za sve one koji ju žele naučiti. Za sve one koji misle da matematika nije samo račun. Za sve one koji matematiku poštuju. Za sve one koji matematiku žele predavati, za sve one koji matematiku žele poučavati.

Za one koji su zapustili svoje matematičko obrazovanje, kako bi ga osvijestili. Za sve one koji svoje znanje žele proširiti. Za sve one koji su o matematici voljni čitati, za sve one koji ne žele literaturu na stranom jeziku.

Za sve one koji misle da znaju sve o nastavi u svojoj zemlji, za sve one koji su identificirali probleme u nastavi, za sve one koji znaju kako nastavu treba unaprijediti.

Za sve one koji su svoje matematičko obrazovanje žrtvovali na oltaru svakodnevnih obaveza, za sve one koje je rijeka života odvela nizvodno od matematike.

Za sve one koji cijene nastavnički poziv i za sve one koji ga podcjenjuju. Za sve one koji shvaćaju kako poučavajući produbljuju i vlastito znanje i za sve one koji će to tek shvatiti.

Za sve one koje ovaj materijal ne zanima, kako bi knjigom popunili policu. Predlažemo im da barem izgužvaju koju stranicu kako bi im gosti stekli dojam da su knjigu nekad barem prelistali.

Za sve one koji misle kako je ovakav materijal lako napisati, s ozbiljnom nadom u prestanak njihova zastranjivanja.

Za sve one kojima je teže nego drugima, barem u nekom segmentu. I za sve one kojima je lakše nego drugima: kako im je zasigurno inače dosadno, neka se zabave čitanjem.

Za sve one generacije koje su godinama bile poučavane iz nekoherentnih materijala i za sve one koji materijale pišu radi učenika i studenata, a ne radi sebe samih.

Za sve one koji ne odustaju od borbe s matematikom iako su svjesni kako su unaprijed izgubili, ali slave svaku, makar i malu, pobjedu nad njom.

Za sve sadašnje i buduće nastavnike matematike, s nadom da će iskoristiti sve što su učili i da će nadoknaditi sve što im je promaklo. Njihova su iskustva čvrsti temelji na kojima ovakvi udžbenici počivaju.

Autori

1

KOMPONENTE MATEMATIČKE SPOSOBNOSTI

Tijekom dvadesetog stoljeća značenje uspješnog matematičkog učenja doživjelo je neke pomake u odnosu na promjene u društvu i školovanju. U pedesetim i šezdesetim godinama dvadesetog stoljeća novi matematički pokret definirao je uspješno matematičko učenje ne samo kao vještinu računanja nego prvenstveno kao razumijevanja matematičke strukture i na apstraktnoj razini. Reforma pokreta tijekom osamdesetih i devedesetih godina dvadesetog stoljeća premjestila je naglasak na ono što nazivamo razvojem matematičkog potencijala koji obuhvaća zaključivanje, rješavanje problema, povezivanje matematičkih ideja i interdisciplinarnost matematike. Reakcije na prijedlog reforme istaknule su kao značajke matematičkog učenja važnost memoriranja, sposobnost računanja i mogućnosti dokazivanja matematičkih tvrdnji. Različiti su pogledi formulirali način po kojem bi se moglo prihvatiti ciljeve prema kojima treba biti usmjereno učenje matematike. U ovom ćemo poglavlju opisati vrste kognitivnih promjena koje želimo unaprijediti kod djece tako da mogu biti uspješna u učenju matematike. Kako nema termina koji u potpunosti obuhvaća sve aspekte stručnosti, kompetencije, znanja i vještina u matematici, matematička je vještina izabrana kako bi obuhvatila ono što vjerujemo da je potrebno za bilo koga da bi uspješno naučio matematiku.

Pet komponenata od kojih se sastoji matematička sposobnost jesu:

1. pojmovno razumijevanje koje predstavlja razumijevanje matematičkih pojmova, operacija i odnosa,

2. proceduralno znanje koje podrazumijeva vještine u fleksibilnom i učinkovitom obavljanju postupaka na odgovarajući način,

3. strateška kompetencija koja je sposobnost formuliranja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema,

4. prilagodljivo zaključivanje, tj. sposobnost logičkog razmišljanja, refleksije, objašnjavanja i opravdavanja,

5. produktivna dispozicija koja je uobičajena sklonost viđenja matematike kao razumne, korisne i vrijedne truda, zajedno s vjerovanjem u marljivost i vlastitu učinkovitost.

Navedene su komponente međusobno isprepletene i ovisne u razvoju sposobnosti u matematici. Matematička sposobnost nije jednodimenzionalno svojstvo i ne može se postići fokusiranjem na samo jednu ili dvije komponente. Da bi djeca stekla matematičku sposobnost, mora se od nastavnog programa zahtijevati bavljenje svim njegovim komponentama. Učenici bi trebali postajati sve vještiji u matematici kako se kreću od vrtića do osmog razreda. Ta im sposobnost treba omogućiti nošenje s matematičkim izazovima svakodnevnog života te nastavak učenja matematike u srednjoj školi i izvan nje. Navedenih pet komponenti daju okvir za razmatranje znanja, vještina, sposobnosti i vjerovanja koje čine matematičko znanje.

1.1 Pojmovno razumijevanje

Pojmovno razumijevanje predstavlja integrirano i funkcionalno shvaćanje matematičkih pojmova. Učenici s pojmovnim razumijevanjem znaju mnogo više od izoliranih činjenica i metoda, razumiju zašto je matematička ideja važna te prepoznaju kontekste u kojima je korisna. Takvi učenici organiziraju svoje znanje u povezanu cjelinu, što im omogućuje učenje novih pojmova povezujući ih s ranije naučenim pojmovima. Ako su učenici naučili činjenice i metode s razumijevanjem, tada su sposobni povezivati ih, lakše ih pamtiti i koristiti te ih mogu i rekonstruirati kada ih zaborave. Ako razumiju metodu, manje je vjerojatno da će pogrešno zapamtiti, mogu pratiti čega se sjećaju i pokušavati shvatiti ima li to smisla. Na taj način mogu pokušati objasniti metodu i ispraviti ju ukoliko je potrebno. Pojmovno razumijevanje ne mora nužno biti eskplicitno određeno. Učenici često razumiju prije nego što su u mogućnosti razumijevanje verbalizirati.

Pojmovno razumijevanje podržava i zadržavanje znanja, tj. retenciju. Ono omogućuje učenicima prikazivanje matematičke situacije na različite načine, gdje različiti prikazi mogu biti korisni za različite svrhe. Nužno je da učenici uoče kako se različiti prikazi povezuju jedni s drugima, koliko su slični i u čemu se razlikuju, kako bi doživjeli matematiku kao koherentnu cjelinu. Stupanj pojmovnog razumijevanja učenika povezan je s količinom i dosegom veza koje su stvorili.

Pretpostavimo da učenici zbrajaju razlomke različitih nazivnika

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{7}.$$

Kako bi predstavili to zbrajanje, učenici mogu nacrtati sliku ili koristiti konkretne materijale različitih vrsta. Također mogu predstaviti traženi broj rečenicom $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=?$ u obliku priče. Mogu se vratiti na brojevni pravac prikazujući svaki razlomak kao segment i zbrojiti razlomke spajajući segmente. Svođenjem razlomaka na isti nazivnik, učenici mogu doći do zbroja i vidjeti novu veličinu na brojevnom pravcu. Dakle, učenici pomoću tih varijacija mogu raspravljati o sličnostima i razlikama prikaza, prednostima svakog prikaza te njihovoj povezanosti ukoliko daju isti odgovor.

Gotove tehnike, naučene napamet, mogu pružiti veze među pojmovima, što čini lakšim izvođenje matematičkih operacija, ali pri tome ne moraju dovesti do razumijevanja. Znanje naučeno s razumijevanjem pruža osnovu za stvaranje novih znanja i za rješavanje novih i nepoznatih problema. Kada učenici steknu pojmovno razumijevanje tada vide i vezu među pojmovima i postupcima. Primjerice, učenici koji razumiju mjesnu vrijednost i višeznamenkaste brojeve, za razliku od drugih koji to ne razumiju, lakše će doći do vlastitih postupaka za zbrajanje s potpisivanjem i usvojiti ispravne postupke za oduzimanje s potpisivanjem koje su im drugi prezentirali. Dakle, učenje kako zbrajati i oduzimati višeznamenkaste brojeve ne mora uključivati potpuno nove i nepovezane pojmove. Isto vrijedi i za množenje i dijeljenje višeznamenkastih brojeva.

Pojmovno razumijevanje pomaže učenicima izbjeći mnoge kritične pogreške koje se javljaju prilikom rješavanja problema, osobito pogreške u veličini dobivenog iznosa. Na primjer, ako učenici množe 9.83 i 7.65 i kao rezultat dobiju 7519.95, odmah mogu zaključiti da taj rezultat ne može biti točan. Znaju da je 10 pomnoženo s 8 jednako 80, pa tako umnožak dvaju brojeva manjih od 10 i 8 mora biti manji od 80. Učenici s pojmovnim razumijevanjem često trebaju manje učenja jer mogu vidjeti dublje sličnosti među površno nepovezanim situacijama.

Njihovo je razumijevanje sadržano u kompaktnim shemama međusobno povezanih činjenica i postupaka. Učenici mogu koristiti shemu ako trebaju objasniti principe, ako moraju promišljati o samom pojmu ili se upoznati s novim idejama.

Često je struktura učeničkog razumijevanja hijerarhijska, s jednostavnijim shemama pojmova upakiranim u složenije. Kako shema znanja može učiniti učenje lakšim, promotrimo primjer sheme znanja kakvu učenik može razviti za zbrajanje cijelih brojeva. Ako učenici razumiju da je zbrajanje komutativno (tj. da, na primjer, vrijedi $3 + 5 = 5 + 3$), njihovo učenje osnovnih kombinacija u zbrajanju smanjeno je gotovo za polovicu. Korištenjem svog znanja u drugim odnosima, poput zbrajanja jednakih brojeva ($5 + 5$ ili $6 + 6$), mogu dodatno smanjiti broj kombinacija u zbrajanju koje trebaju naučiti. Kako su mala djeca sklona usvojiti zbrajanje jednakih brojeva prilično rano, mogu ih koristiti za stvaranje usko povezanih suma. Na primjer, mogu vidjeti da je $6 + 7$ samo za jedan više od $6 + 6$. Takvi odnosi olakšavaju učenicima učenje novih kombinacija, jer stvaraju novo znanje umjesto oslanjanja na učenje napamet.

1.2 Proceduralno znanje

Proceduralno znanje odnosi se na poznavanje postupaka, prepoznavanje kada i kako te postupke koristiti i vještine da se ti postupci obave fleksibilno, točno i učinkovito. Proceduralno znanje podržava i analizu sličnosti i razlika među metodama izračuna. Ove metode uključuju mentalne metode nalaženja određenih suma, razlika, umnožaka ili kvocijenata, kao i metode koje koriste kalkulatore, računala ili druge manipulativne materijale. Učenici trebaju biti učinkoviti i točni u obavljanju osnovnih računskih operacija s cijelim brojevima, poput $6 + 7, 17 - 9, 8 \cdot 4$ i tako dalje, bez korištenja tablica ili drugih pomagala. Također trebaju znati smislen, učinkovit i točan način za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje višeznamenkastih brojeva, kako napamet tako i pomoću olovke i papira. Dobro pojmovno razumijevanje mjesne vrijednosti u dekadskom sustavu podržava razvoj proceduralnog znanja kod računanja s višeznamenkastim brojevima. Proceduralno znanje također pomaže pri procjeni rezultata korištenog postupka. Mnogi zadaci koji uključuju primjenu matematičkog znanja u svakodnevnom životu zahtijevaju sposobnost snalaženja s algoritmima za računanje, bilo napamet ili u pisanom obliku. Kako bi se stvorili alati za računanje, neki su algoritmi važni kao pojmovi sami za sebe, što opet pokazuje vezu između pojmovnog razumijevanja i proceduralnog znanja pri računanju s višeznamenkastim brojevima. Važno je da računalni postupci budu učinkoviti, da se upotrijebe točno i da daju ispravne odgovore i točne rezultate. Učenici bi trebali moći koristiti različite mentalne strategije za množenje s 10, 20 ili 300 (ili bilo koje potencije ili višekratnika od 10). Također bi trebali moći, primjerice, odrediti sumu brojeva 199 i 67 ili umnožak brojeva 4 i 26 koristeći se brzim mentalnim strategijama umjesto oslanjanja na papir i olovku.

Kako se situacije često razlikuju ovisno o točnosti traženog odgovora, ponekad je i sama procjena dovoljno dobra, kao primjerice pri određivanju napojnice u restoranu. No, ponekad je uporaba kalkulatora ili računala prikladnija od korištenja papira i olovke, kao u slučaju popunjavanja poreznog obrasca. Dakle, učenici trebaju biti vješti u uporabi različitih računalnih pomagala te trebaju znati odabrati prikladno pomagalo za određenu situaciju. Razumijevanje čini vještine učenja jednostavnijim, manje osjetljivim na uobičajene greške i manje sklonim zaboravljanju. Po istoj logici, potrebna je određena razina vještine kako bi se s razumijevanjem naučili brojni matematički pojmovi, a upotreba postupaka može pomoći osnažiti i razviti traženo razumijevanje. Na primjer, učenicima je često teško razumjeti računanje s višeznamenkastim brojevima ako nisu stekli određenu razinu vještine u računanju s jednoznamenkastim brojevima. Isto tako, jednom kad učenici nauče postupke bez potrebnog razumijevanja, može im biti teško uključiti se u aktivnosti koje zahtijevaju razumijevanje razloga na kojima se postupak temelji. Bez dovoljne razine proceduralnog znanja učenici imaju problema s produbljivanjem vlastitog razumijevanja matematičkih pojmova ili pri rješavanju matematičkih problema.

Ukoliko se pažnja posebno posvećuje razradi rezultata kojih bi se trebali podsjetiti ili koje treba izračunati, učenici često neće moći uočiti važne odnose. Učenici trebaju praksu vještina kako ne bi bili zakinuti za razvoj svog razumijevanja. Kada vježbaju postupke koje ne razumiju, postoji opasnost da će ih pogrešno usvojiti, čime se dodatno otežava učenje. Čest je primjer da učenici prilikom oduzimanja višeznamenkastih brojeva na svakoj od mjesnih vrijednosti oduzimaju manju znamenku od veće, čime općenito dobivaju pogrešan rezultat, jer bi, na primjer, dobili kako je $262 - 148 = 126$, umjesto 114. Ukoliko učenici uče oduzimati s razumijevanjem, tada rijetko čine takvu pogrešku, ali ako uče bez razumijevanja trebaju puno vježbe kako ne bi zaboravili korake. Ako razumiju postupak, vjerojatno neće zaboraviti ključne korake i moći će ih uspješno rekonstruirati kada im zatrebaju.

Kada uče s razumijevanjem, učenici mogu doći do viših razina vještine nego što bi mogli postići samo praksom. Ako su učenici koristili pogrešne postupke tijekom nekoliko godina, onda nastava koja zahtijeva razumijevanje može biti manje učinkovita. Tek će s vremenom i vježbom prestati korištenje netočnih i neučinkovitih metoda.

Ukoliko se odmah počne učiti s razumijevanjem, učenje će biti učinkovitije. Učenicima je učenje novih tema teže kada ne povezuju prethodno naučene pojmove i vještine s novom temom, često vjeruju da drugačiji zadaci zahtijevaju različite postupke. Takvo uvjerenje može se pojaviti već među djecom u nižim razredima, primjerice pri učenju različitih postupaka za oduzimanje u različitim slučajevima, poput $124 - 23$ i $124 - 33$.

Kada učenici uče bez razumijevanja, često odvajaju ono što se događa u školi od onoga što se događa izvan nje te pri tome jedan skup postupaka koriste za rješavanje problema izvan škole, dok druge postupke uče i koriste u školi, bez uočavanja njihovog međusobnog odnosa. Time ograničavaju sposobnosti primjene naučenog u školi na rješavanje svakodnevnih problema. Učenici koji uče postupke bez razumijevanja najčešće primijenjuju samo memorirane postupke u naučenom obliku, dok učenici koji uče s razumijevanjem mogu mijenjati ili prilagoditi postupke kako bi ih lakše koristili ovisno o danoj situaciji. Primjerice, učenici s ograničenim razumijevanjem zbrajanja koristili bi papir i olovku da za zbrajanje brojeva 598 i 647, dok učenici s boljim razumijevanjem mogu prepoznati da je 598 samo za 2 manji od 600, pa bi mogli zbrojiti 600 i 647 te zatim oduzeti 2 od dobivenog zbroja.

1.3 Strateška kompetencija

Ova se komponenta matematičke sposobnosti odnosi na sposobnost formuliranja matematičkih problema, njihova prikaza i rješavanja. Strateška je kompetencija sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama. Uz dobro vladanje brojevima, odnosno numeričku pismenost, naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Matematička kompetencija uključuje sposobnost i volju za korištenjem različitih matematičkih načina mišljenja (logičko i prostorno) i prikazivanja (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni). Iako se u školi učenicima često za rješavanje zadaju specifični problemi, izvan škole susreću situacije u kojima je zapravo dio poteškoće shvatiti što je problem. Učenici trebaju formulirati problem tako da pri njegovom rješavanju mogu koristiti matematiku. Trebaju iskustvo i praksu u formuliranju problema, kao i u njegovom rješavanju. Trebali bi znati razne oblike strategija, kao i koje strategije mogu biti korisne za rješavanje specifičnog problema. Na primjer, od učenika šestog razreda može se tražiti da postave problem na temu omiljenog restorana brze prehrane. Pitanja bi mogla biti povezana s cijenom, primjerice, jesu li meniji preskupi i što im je od ponude najdraže ili najmanje drago, koliko poslužavnika koriste, koliko se osvježavajućih napitaka ondje proda u jednom danu ili kako se izgled restorana može poboljšati. Kada učenici formuliraju problem, njihov je prvi korak u rješavanju predstaviti ga matematički na neki način, bilo brojčano, simbolički, verbalno ili grafički. Kada prikazuju problemsku situaciju trebaju prvo izgraditi mentalnu sliku osnovnih postavki tog problema. Postati strateški kompetentan uključuje izbjegavanje metode dohvaćanja brojeva (u kojoj učenik postavi brojeve za obavljanje aritmetičkih operacija) u odnosu na metode koje stvaraju model problema (u kojoj učenik konstruira mentalni model varijabli i odnosa opisanih u problemu). Da bi učenici ispravno prikazali problem, najprije moraju razumjeti situaciju, uključujući njezine ključne značajke. Trebaju stvoriti matematički prikaz problema koji uključuje temeljne matematičke elemente i zanemaruje nevažne značajke. Taj korak može biti olakšan stvaranjem skice, zapisom jednadžbe ili stvaranjem nekog drugog materijalnog prikaza. Pretpostavimo da je dan sljedeći problem koji se sastoji od dvaju koraka:

Primjer 1.3.1. *MINA prodaje gorivo za* 8.81 *kn po litri. To je za* 5 *lipa manje od goriva na Pifonu. Koliko košta* 6 *litara goriva na Pifonu?*

Da bi si prikazali taj problem, učenici se u zajedničkoj površnoj metodi usredotočuju na brojeve u problemu i koriste takozvane ključne riječi kako bi odredili potrebne aritmetičke operacije. Na primjer, količine 8.81 *kn i* 5 *lipa slijede ključnu riječ manje, sugerirajući da učenik treba dodati* 5 *lipa na* 8.81 *kuna da dobije* 8.87 *kuna, dok ključne riječi koliko i* 6 *litara sugeriraju da* 6 *treba pomnožiti s rezultatom, što daje* 52.86 *kuna.*

Vještiji učenički pristup od prikazanog u Primjeru 1.3.1 bio bi izgraditi model problema, odnosno mentalni model situacije opisane u problemu. Model problema nije sam po sebi vizualna slika, nego bilo koji oblik mentalnog prikaza koji održava strukturne odnose među varijablama u problemu. U izgradnji problemskog modela učenici trebaju biti oprezni s veličinama u problemu: važno je da veličine prikazuju mentalno, razlikujući što je poznato od onoga što treba naći, odnosno od nepoznatog. Da bi učenici shvatili prve dvije rečenice, mogu, na primjer, zamisliti brojevni pravac i pronaći na njemu svaku cijenu litre goriva kako bi riješili problem.

Učenici ne samo da trebaju biti u mogućnosti izraditi prikaze pojedinih situacija već također trebaju vidjeti da neki prikazi imaju zajedničke matematičke strukture. Početnici u rješavanju matematičkih problema skloni su uočiti sličnosti samo u površinskim značajkama problema, poput znakova ili scenarija opisanih u samom problemu, dok se oni iskusniji više usredotočuju na strukturne odnose unutar problema, tražeći naznake kako bi problem mogao biti riješen. Od učenika se može tražiti, primjerice, da utvrde koliko različitih skupina od po 5 blokova može biti napravljeno koristeći crvene i zelene blokove ili se može tražiti da odrede na koliko različitih načina mogu biti pripremljeni hamburgeri sa ili bez svakog od sljedećih priloga: kečap, luk, kiseli krastavci, salata i rajčica. Početnici neće vidjeti povezanost između tih problema, dok će oni iskusniji uočiti kako se radi o odabirima iz različitih skupina, samo je razlika u broju skupina koje su na raspolaganju, tj. dvije ili pet.

Kako bi učenici uspješno riješili problem, moraju naučiti oblikovati mentalne prikaze problema, otkriti matematičke odnose u problemu te osmisliti nove metode rješavanja kada je to potrebno. Fleksibilnost je temeljna karakteristika potrebna u procesu rješavanja problema, a razvija se kroz proširivanje potrebnog znanja za rješavanje nerutinskih problema, daleko više nego prilikom rješavanja rutinskih problema. Rutinski su problemi oni čiji postupak rješavanja učenik zna iz dosadašnjeg iskustva. Kad se učenik suoči s rutinskim problemom, zna ispravnu metodu rješavanja te je u mogućnosti primijeniti ju. Rutinski problemi zahtijevaju reproduktivno mišljenje; učenik treba samo reproducirati i primijeniti poznati postupak rješavanja. Na primjer, za većinu je odraslih pronalaženje umnoška 567 i 46 rutinski problem jer znaju postupak za množenje višeznamenkastih brojeva. Nasuprot tomu nalaze se nerutinski problemi za koje učenik unaprijed ne zna korisnu metodu rješavanja. Oni zahtijevaju produktivno razmišljanje jer učenik treba doći do načina na koji će riješiti problem. Promotrimo za većinu odraslih nerutinsku vrstu problema kakvu često nalazimo u novinama ili časopisima:

Primjer 1.3.2. *U skladištu trgovine Vesela pedala nalazi se ukupno* 36 *bicikala i tricikala. Ako je poznato da oni imaju ukupno* 80 *kotača, odredite koliko se u skladištu nalazi bicikala, a koliko tricikala.*

Jedna je mogućnost za rješavanje tog problema krenuti od zaključka da svako od 36 *vozila ima najmanje* 2 *kotača, dakle barem* $36 \cdot 2 = 72$ *kotača. Kako je u skladištu ukupno* 80 *kotača,* 8 *dodatnih kotača* $(8 = 80 - 72)$ *mora pripadati triciklima, pa postoji* $36 - 8 = 28$ *bicikala.*

Manje bi vješt pristup bio "pogodi i provjeri": ako je u trgovini bilo, na primjer, 20 *bicikala i* 16 *tricikala, to bi dalo* $20 \cdot 2 + 16 \cdot 3 = 88$ *kotača, što je previše. Prema tome, moramo smanjiti pretpostavljeni broj tricikala te bismo u nekoliko koraka došli do ukupnog broja od* 28 *bicikala i* 8 *tricikala.*

Vještiji, algebarski pristup sastojao bi se od postavljanja sustava jednadžbi. Ukoliko označimo broj bicikala s b *te broj tricikala s* t*, tada je*

$$b + t = 36$$

i

$$2b + 3t = 80.$$

Rješavanjem tog sustava jednadžbi dobivamo $b = 28$ *i* $t = 8$*, kako je i očekivano.*

Učenici sa strateškom kompetencijom ne samo da mogu doći do nekoliko pristupa rješavanju nerutinskog problema poput tog nego također mogu i fleksibilno odabrati između zaključivanja, strategije "pogodi i provjeri", algebarskih ili drugih metoda koje odgovaraju zahtjevima postavljenog problema.

Fleksibilnost pristupa glavni je spoznajni uvjet za rješavanje nerutinskih problema. To se može vidjeti kada je metoda stvorena ili se postupno prilagođava zahtjevima nove situacije, poput korištenja glavnih načela o omjerima kako bi utvrdili što je najbolje ili najisplativije. Na primjer, kada se radi o izboru između konzerve graha od 500 grama za 4 kune i konzerve od 2 kilograma za 8 kuna, većina ljudi koristi strategiju omjera: veća konzerva košta dvostruko više nego manja, a sadrži više nego dvostruko graha, stoga je isplativije kupiti veću konzervu. Kada je izbor između staklenke maslina od 500 grama za 25 kuna i staklenke maslina od 750 grama za 28 kuna, većina ljudi koristi strategiju razlike: veća staklenka košta samo 3 kune više, a sadrži 250 grama više maslina, tako da je isplativije kupiti veću staklenku. Ukoliko se bira između vrećice badema od 300 grama za 30 kuna i vrećice od 400 grama za 44 kuna, najčešća je strategija jedinična cijena: isplativije je kupiti manju vrećicu jer ona košta manje kuna po gramu badema. U toj svakodnevnoj situaciji vidi se međusoban odnos između strateške kompetencije, pojmovnog razumijevanja i proceduralnog znanja.

Razvoj strategija za rješavanje nerutinskih problema ovisi o razumijevanju količina uključenih u probleme i njihovih odnosa, kao i proceduralnog znanja u rješavanju rutinskih problema. Isto tako, razvoj kompetencije kod rješavanja nerutinskih problema daje kontekst i motivaciju za učenje potrebne za rješavanje rutinskih problema i za razumijevanje temeljnih pojmova poput prepoznavanja i razlikovanja danih podataka, nepoznanica i uvjeta.

Strateška kompetencija dolazi do izražaja na svakom koraku u razvoju proceduralnog znanja u računanju. Primjerice, uzmimo oduzimanje dvoznamenkastih brojeva, poput $86 - 59$. Duži postupak, prikladniji učenicima mlađe dobi, mogao bi se bazirati na korištenju paketića od po 10 štapića kojima bi se ilustriralo oduzimanje. S druge strane, kraći postupak uključuje primjenu pismenog numeričkog postupka koji provodi iste korake, ali bez ilustracije pomoću nastavnih pomagala. Važan dio razvoja strateških kompetencija uključuje učenje kako zamijeniti duge postupke sažetijim i učinkovitim postupcima koji mogu biti od pomoći za dublje razumijevanje problema. Upravo korištenjem svoje strateške kompetencije pri odabiru učinkovitog postupka učenici razvijaju proceduralno znanje.

Također je zanimljivo da već djeca u vrlo ranoj dobi koriste različite strategije za rješavanje problema i težit će odabrati strategije koje su dobro prilagođene pojedinim problemima, čime pokazuju osnove prilagodljivog zaključivanja, naredne komponente matematičke sposobnosti.

1.4 Prilagodljivo zaključivanje

Prilagodljivo ili adaptivno zaključivanje odnosi se na sposobnost logičkog razmišljanja i zaključivanja o odnosima među pojmovima i situacijama. Takvo mišljenje je točno i valjano, proizlazi iz pažljivog razmatranja uključenih mogućnosti i obuhvaća znanje opravdavanja i argumentiranja zaključaka. U matematici prilagodljivo zaključivanje okuplja i održava sve zajedno te na taj način vodi učenje.

Deduktivno se zaključivanje u matematici koristi kako bi se riješili sporovi i nesuglasice, a dobiveni su odgovori točni jer slijede iz dogovorenih pretpostavki kroz niz logički opravdanih koraka. Učenici koji se ne slažu oko matematičkog odgovora ne trebaju se oslanjati na provjeru s nastavnikom, prikupljati mišljenja svojih kolega iz razreda ili dokaze izvan učionice, već samo trebaju provjeriti je li njihovo zaključivanje valjano. Mnoga shvaćanja matematičkog zaključivanja ograničena su na formalne dokaze i druge oblike deduktivnog zaključivanja. Shvaćanje je prilagodljivog zaključivanja mnogo šire, ne uključuje samo neformalno objašnjavanje i argumentriranje nego i induktivno zaključivanje temeljeno na uzorku, analogiji i usporedbi. Zaključivanje pomoću analogije, uspoređivanja, te mentalni i fizički prikazi predstavljaju alate za razmišljanje. Često služe kao izvori hipoteza, rješavanja operacijskih problema te kao tehnike i pomagala za učenje i prenošenje znanja. Prema nekim istraživanjima ([29]), dječja je sposobnost zaključivanja prilično ograničena sve do 12. godine starosti. Ipak, kada su upitana kako su stigla do rješenja postavljenih problema, djeca u dobi od 4 i 5 godina pokazala su elemente sposobnosti zaključivanja te otpornost na protuprijedloge. Pomoću prikazivanja i izgradnje iskustava djeca mogu pokazati sofisticirane sposobnosti zaključivanja, a nakon rada u parovima i ciljanih grupnih aktivnosti baziranih na primjerima, već se u vrtićkoj dobi mogu dokazati (iako ne na sasvim formalan način) teoremi o sumama parnih i neparnih brojeva. Na primjeru suma dva i tri bombona ili dva i jednog ili dva i dva bombona, djeca mogu usvojiti kakve će parnosti biti suma parnih i neparnih sumanada. Nadalje, kroz konstruirani slijed aktivnosti dodavanja i uzimanja kuglica iz vrećice koja sadrži mnogo kuglica, učenici drugog razreda osnovne škole mogu zaključiti da je $5 + (-6) = -1$. Koristeći rezanja trake na vrpce i slične konkretne modele, učenici petog razreda mogu doći do spoznaja o odnosima između razlomaka i rezultata operacija s razlomcima. Režući vrpce duljine $\frac{1}{3}$ metra iz 12-metarske trake, učenici će uvidjeti kako je 12 podijeljeno s $\frac{1}{3}$ jednako 36, te da će 12 podijeljeno s $\frac{2}{3}$ biti manje od 36.

Istraživanja pokazuju ([29]) da su učenici u stanju pokazati sposobnost zaključivanja kada su ispunjena tri uvjeta: kada imaju dovoljno osnovnog znanja, kada je zadatak razumljiv i motivirajuć te kada im je dani kontekst poznat i ugodan. Jedna od manifestacija prilagodljivog zaključivanja jest sposobnost opravdavanja vlastitog rada, gdje se opravdanje koristi u smislu davanja dovoljnog razloga za valjanost određene tvrdnje. Dokaz je oblik opravdanja, ali nisu sva opravdanja dokazi. Dokazi (i formalni i neformalni) moraju biti potpuno logički, ali opravdanje može biti i druge prirode, što samo upućuje na izvor zaključivanja. Opravdanje i dokaz obilježja su formalne matematike i često se promatraju kao područja kojima su skloniji stariji učenici, ali učenici već u nižim razredima osnovne škole mogu početi učiti kako opravdati svoje matematičke ideje. Djeca vrtićke dobi i učenici prvog razreda osnovne škole trebali bi redovito dobivati priliku pričati o pojmovima i postupcima koje koriste te da dati valjane razloge za ono što rade.

Učenici trebaju biti u mogućnosti ispravno opravdati i objasniti ideje kako bi učinili svoje zaključivanje jasnim, usavršiti svoje vještine zaključivanja i poboljšati svoje pojmovno zaključivanje. Nije dovoljno opravdati postupak samo jednom, razvoj te vještine javlja se tijekom dužeg vremenskog razdoblja. Učenici trebaju koristiti nove pojmove i postupke kroz duže vrijeme te ih objasniti i opravdati povezivanjem s pojmovima i postupcima koje već razumiju. Na primjer, nije dovoljno da učenicima samo vježbati probleme zbrajanja razlomaka nakon što je razvijen odgovarajući postupak. Ako su učenici razumjeli algoritam, također trebaju i iskustvo da bi si objasnili i obrazložili mnoge različite probleme.

Prilagodljivo je zaključivanje u interakciji s drugim komponentama sposobnosti, osobito tijekom rješavanja problema. Učenici se oslanjaju na svoje strateške kompetencije kako bi formulirali i prikazali problem, korištenjem heurističkih pristupa mogu ponuditi strategiju rješavanja, ali prilagodljivo zaključivanje moraju usvojiti kada trebaju opravdati predloženu strategiju.

Pojmovno razumijevanje pruža uspoređivanja i prikaze koji mogu poslužiti kao izvor prilagodljivog zaključivanja, a koje učenici koriste kako bi utvrdili je li rješenje opravdano te zatim da bi ga opravdali. Često će strategija rješavanja zahtijevati proceduralno znanje korištenja računskog postupka ili mjerenja, ali prilagodljivo zaključivanje trebalo bi se koristiti kako bi se utvrdilo je li postupak prikladan. I dok iznose plan rješenja, učenici koriste svoje strateške kompetencije kako bi pratili vlastiti napredak prema rješenju te stvaraju alternativne planove ukoliko se trenutni plan čini neučinkovit. Takav pristup ovisi i o idućoj komponenti matematičke sposobnosti koju ćemo obraditi, produktivnoj dispoziciji, te ju i podupire.

1.5 Produktivna dispozicija

Produktivna dispozicija odnosi se na sklonost uočavanja smisla u matematici kako bismo ju vidjeli kao korisnu i isplativu, kako bismo vjerovali da se stalan trud u učenju matematike isplati i da sebe vidimo kao djelotvornog učenika i učitelja matematike.

Ako su učenici razvili pojmovno razumijevanje, proceduralno znanje, stratešku kompetenciju i prilagodljive sposobnosti zaključivanja, moraju vjerovati da je matematika razumljiva, da nije jednolična i dosadna, da se marljivim trudom može naučiti i primijenjivati te da su ju sposobni shvatiti. Dakle, produktivna dispozicija razvija se kada su razvijene ostale komponente matematičke sposobnosti i pomaže razviti svaku od njih. Na primjer, kako učenici izgrađuju stratešku kompetenciju u rješavanju nerutinskih problema, njihovi stavovi i uvjerenja o sebi kao učenicima postaju pozitivnija. Učenicima matematika postaje sve jasnija kako oni razumiju više matematičkih pojmova. Nasuprot tomu, kada učenici rijetko riješavaju izazovne matematičke probleme, očekuju da učenje napamet više i bolje otvara put k učenju matematike nego razumijevanje i shvaćanje njena smisla, stoga počinju gubiti samopouzdanje. Slično tomu, kada učenici osjete da su sposobni učiti matematiku i koristiti ju za rješavanje problema, postaju sposobni dalje razvijati svoje proceduralno znanje ili svoje sposobnosti prilagodljivog zaključivanja. Učenička naklonost prema matematici temeljni je čimbenik u određivanju njihovog obrazovnog uspjeha. Učenici koji vide svoju matematičku sposobnost kao ustaljenu i ispitna pitanja kao mjerenje njihove sposobnosti, umjesto pružanja prilike da nauče i razumiju gradivo, vjerojatno izbjegavaju izazovne zadatke i neuspjeh ih može lako obeshrabriti. S druge strane, učenici koji vide sposobnost kao proširivu s obzirom na iskustvo i vježbu, vjerojatnije će tražiti izazovne situacije i učiti iz njih.

Izuzetno je važno da se učenici susreću s dobrom i pozitivnom nastavom matematike u nižim razredima. Ukoliko učenici sebe vide kao loše, a matematiku kao besmislenu i nemoguću za naučiti osim učenjem napamet, razvit će stavove koji se vrlo teško mogu promijeniti nakon što su jednom usvojeni.

Nastavnik matematike ima ključnu ulogu u poticanju učenika u zadržavanju pozitivnih stavova prema matematici. Način na koji nastavnik vidi matematiku i njezino učenje bitno utječe na nastavnu praksu edukatora, što u konačnici ne utječe samo na ono što učenici uče, nego i na to kako doživljavaju same sebe. Nažalost, pokazalo se da neograničena snaga pritiska vršnjaka često čini dobar uspjeh u matematici društveno neprihvatljivim. Ta okolina negativnih očekivanja najjača je među manjinama i ženama, tj. kod onih koji su najizloženiji riziku, te tijekom srednje škole kada učenici počinju odabirati svoje obrazovne ciljeve.

Neke od najvažnijih posljedica učeničkog neuspjeha u razvoju produktivne dispozicije prema matematici javljaju se u srednjoj školi kada učenici često počinju izbjegavati izazovne matematičke probleme. Izbjegavanje takvih nastavnih sati može eliminirati potrebu da se suoče s pritiskom vršnjaka i drugim izvorima obeshrabrenja, ali na račun isključivanja karijere u znanosti, tehnologiji, medicini i drugim područjima za koja je potrebna visoka razina matematičkog znanja. Provedena istraživanja ([47]) pokazuju da fenomen nazvan stereotipna prijetnja može objasniti mnoge uočene razlike u matematičkom uspjehu među etničkim skupinama i između učenika i učenica. U ovom fenomenu, dobri učenici, koji brinu o svojem uspjehu u matematici i koji pripadaju stereotipnim skupinama, slabo rješavaju teže matematičke probleme pod uvjetima u kojima osjećaju pritisak prilagodbe stereotipima. Takozvane obrazovne okoline mogu smanjiti štetne učinke stereotipne prijetnje te naglasiti optimistične odnose edukatora i učenika, postaviti izazovne zadatake svim učenicima i istaknuti proširivost sposobnosti među ostalim čimbenicima. Učenici koji su razvili produktivnu dispoziciju sigurni su u svoje znanje i sposobnost, vide da je matematika i usvojiva i shvatljiva te vjeruju da ju uz odgovarajući trud i iskustvo mogu naučiti.

Za učenike je često kontraproduktivno vjerovati u neki tajanstveni matematički gen koji unaprijed određuje njihov uspjeh u matematici. Dakle, naše gledište matematičkog znanja nadilazi sposobnost razumijevanja, izračunavanja, rješavanja i zaključivanja, ono uključuje individualnost i osobnost dispozicije prema matematici. Matematički vješti ljudi vjeruju da bi matematika trebala imati smisla, da je mogu shvatiti, da ustrajnim radom mogu riješiti matematičke probleme te da je stjecanje matematičkih vještina vrijedno truda.

1.6 Svojstva matematičkih sposobnosti

1.6.1 Međusobna isprepletenost

Komponente matematičke sposobnosti učestalo podupiru jedna drugu, što se može, primjerice, vidjeti kod stalne interakcije pojmovnog razumijevanja i proceduralnog znanja. Kako učenici stječu pojmovno razumijevanje, bolje se pamte računski postupci i fleksibilnije koriste pri rješavanju novih problema, a s druge strane, kako postupak postaje sve više automatiziran, učenicima je omogućeno razmišljati o drugim aspektima problema, što će voditi do daljnjeg razumijevanja. Kada učenici koriste postupak, u mogućnosti su razmišljati zašto taj postupak radi, čime mogu ojačati postojeće pojmovno razumijevanje.

Na primjer, kako učenici uče postupak množenja višeznamenkastih brojeva, trebali bi razvijati dublje razumijevanje svojstava množenja. S druge strane, kako produbljuju svoje pojmovno razumijevanje, trebali bi postati uspješniji u samom računanju. Početnici kojima se dogodi da zaborave postupak, ali koji razumiju značenje distributivnosti, mogu rekonstruirati postupak množenja poput $268 \cdot 47 = 268 \cdot (40 + 7) = (268 \cdot 40) + (268 \cdot 7)$ te od tog mjesta dalje nastaviti računanje. Početnici koji su jednostavno memorirali algoritam bez razumijevanja s vremenom ga vjerojatno više neće znati koristiti.

1.6.2 Matematička sposobnost nije isključiva

Nije moguće reći kako netko određenu matematičku sposobnost ili posjeduje ili ne posjeduje. Svaka važna matematička misao može biti shvaćena na više razina i na više načina. Na primjer, čak i naizgled jednostavni pojmovi poput parnih i neparnih brojeva zahtijevaju integraciju nekoliko načina razmišljanja: odabira naizmjeničnih točaka na brojevnom pravcu, grupiranja točaka u parove, grupiranje brojeva u dvije skupine ili promatranje samo posljednje znamenke broja. Kada se učenici po prvi put susretnu s pojmovima parnih i neparnih brojeva, mogu usvojiti jedno ili dva od navedenih tumačenja, ali u starijoj dobi duboko razumijevanje parnog i neparnog znači da su sva četiri tumačenja međusobno povezana i mogu biti opravdana jedna pomoću drugih.

Učenici ustvari nikada nisu potpuni matematički početnici jer važne matematičke pojmove i vještine usvajaju već i prije početka školovanja, kao i pogrešna shvaćanja koja trebaju biti uzeta u obzir u planiranju nastave. Učenici u prvom razredu osnovne škole posjeduju vještinu zbrajanja jednoznamenkastih brojeva dok god njihovo razmišljanje u tom području uključuje svih pet komponenata matematičke sposobnosti. Dakle, učenici ne bi trebali smatrati kako posjeduju određenu matematičku sposobnost sve dok su jedna ili više komponenti nerazvijene.

1.6.3 Matematička sposobnost razvija se tijekom vremena

Matematička se sposobnost stječe tijekom vremena. Učenici bi trebali svake godine u školi postajati sve vještiji te bi, primjerice, u trećem razredu trebali biti vještiji u zbrajanju prirodnih brojeva nego što su bili u prvom razredu. Kako bi učenici postali vješti u određenoj matematičkoj temi, nužno je provesti dovoljno vremena u aktivnostima vezanim uz tu temu. Dobiju li samo jedan ili dva primjera ilustracije obrazloženja nekog postupka ili značenja nekog pojma te zatim prijeđu na suhoparno provođenje postupka ili identifikaciju pojma, neće biti u mogućnosti razviti potrebno dublje razumijevanje obrađene teme.

Kako bi učenici postali vješti u određenoj temi, trebaju provesti određeno vrijeme u kontinuiranom raznolikom vježbanju koje se sastoji od rješavanja problema, zaključivanja, razvijanja razumijevanja i vještina te izgradnje veza između prethodnog i novog znanja.

2

RAZVIJANJE MATEMATIČKOG RAZUMIJEVANJA

U današnje vrijeme kurikulumi mnogih zemalja stavljaju naglasak na razvoj razumijevanja. Većina učitelja matematike tvrdi da vrednuju znanje prema razumijevanju, no što to uistinu znači? I kako znamo da nešto razumijemo?

U studiji je provedenoj u Australiji, od strane jednog od autora [15], upravo pitanje "Kako znate da nešto razumijete?" postavljeno učenicima osnovnih i srednjih škola. Većina učenika smatrala je da razumije matematički pojam onda kada može riješiti srodan problem i dobiti točno rješenje. Nekolicina ih je razumijevanje opisala kao osjećaj samopouzdanja, zadovoljstva ili uzbuđenja. Samo je malen postotak učenika razumijevanje povezao sa shvaćanjem zašto nešto funkcionira ili ima smisla, a još manji postotak povezao je razumijevanje sa sposobnošću da primijene svoje znanje na nepoznate probleme. Najbolji odgovor dali su učenici koji su znali da nešto razumiju onda kada su to mogli objasniti nekome drugome. Istraživanja u okviru matematičkog obrazovanja ([15]) pokazuju da objašnjavanje najbolje pruža učenicima mogućnost procjene svog razumijevanja. To je također proces kroz koji se razumijevanje "pročišćava" i "profinjuje", a s druge strane razvija sposobnost komunikacije vlastitih ideja.

Prethodno bi pitanje bilo dobro postaviti i učenicima u našim školama. Vjerujemo da bismo dobili vrlo slične rezultate. Razumijevanje učenici često povezuju s uspješnim rješavanjem nekog zadatka, to jest s poznavanjem procedure i točnim rezultatom. Nerijetko se i u razgovoru s odraslima, koji tvrde da im je matematika u školi "dobro išla", može čuti da su znali nešto "izračunati". No, matematičko je razumijevanje puno više od samog računanja. Razumijevanje možemo promatrati kao uspostavljanje veza među idejama, činjenicama ili procesima. U području matematičkog obrazovanja možemo naći nekoliko vrsta razumijevanja ([46]). Instrumentalno je razumijevanje znanje o tome što trebamo napraviti kako bismo riješili matematički zadatak, a relacijsko se razumijevanje odnosi na znanje što trebamo napraviti kao i znanje zašto određeni matematički postupak funkcionira. Učenici koji matematiku uče kao niz čvrstih, minimalno povezanih pravila čija je primjena ograničena samo na određeni tip zadataka, ne mogu se prilagoditi rješavanju novih ili nerutinskih problema. Takvi učenici posjeduju instrumentalno razumijevanje, a njihovi postupci rezultat su želje za dolaskom do točnog rezultata. S druge strane, učenici koji posjeduju relacijsko razumijevanje imaju sposobnost konstrukcije povezanih konceptualnih mreža koje im omogućuju primjenu općih matematičkih pojmova na nepoznate probleme.

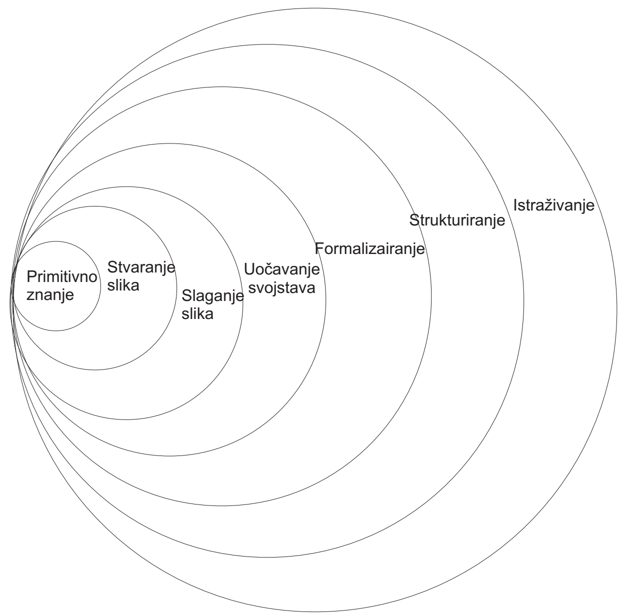
Razumijevanje možemo promatrati i kroz upotrebu stečenog znanja. Tako razlikujemo:

- "znati da" je nešto istinito (npr. da zbroj unutarnjih kutova u četverokutu iznosi 360°),
- "znati kako" provesti postupak (npr. izračunati površinu četverokuta),
- "znati zašto" nešto vrijedi (npr. zašto se u algoritmu dijeljenja razlomka s drugim razlomkom pojavljuje recipročan razlomak),
- "znati djelovati" u trenutku (npr. biti u mogućnosti iskoristiti priliku za upotrebom strategije za rješenje nekog problema koje se sjetimo u trenutku rada).

Učenik se može naći u situaciji u kojoj posjeduje razumijevanje u oblicima "znati da", "znati kako" pa čak i "znati zašto", ali najvažnije razumijevanje u obliku "znati djelovati" zakaže u trenutku kada je potrebno.

Danas je poznato da matematičko razumijevanje nije nešto što se posjeduje niti što se stvara, kako se to prije nekoliko desetljeća smatralo, već je to neprestan proces u kojem pojedinac preispituje značenje ili pokušava pronaći smisao onoga što uči. Taj proces može se opisati kao pomicanje naprijed i natrag kroz niz povezanih slojeva ili razina, od kojih svaki sloj predstavlja određenu vrstu razumijevanja za nekog pojedinca i određenu temu.

Opišimo sada slojeve razumijevanja kako su prikazani na Slici 2.1. Primitivno znanje mjesto je na kojem neodređeno matematičko razumijevanje počinje rasti. Unutar stvaranja slika učenici koriste prethodno znanje na nove načine, dok



Slika 2.1: Slojevi razumijevanja.

se slaganje slika odnosi na mentalnu konstrukciju teme. Kada učenici mogu kombinirati svojstva određenih slika kako bi došli do bitnih općih svojstava, tada se nalaze u području uočavanja svojstava. Formaliziranje označava da učenici dolaze na razinu apstrakcije, dok je promatranje proces koordiniranja i vraćanja na formalne aktivnosti te postavljanje takvih koordinacija u obliku teorema. Kada učenici pokušavaju svoja razmatranja predstaviti kao teoriju, tada se nalaze u području strukturiranja, dok istraživanje predstavlja mogućnost odmaka od postojećeg razumijevanja i postavljanje novih pitanja.

2.1 Školska matematika i istraživačka matematika

Kada promatramo vrste matematičkih pogrešaka koje učenici čine, prirodno je pretpostaviti da se one događaju zbog nedostatka razumijevanja. Zapravo pogreške nastaju zbog upotrebe "iskrivljenih" pravila unutar dobro utemeljenog postupka. Primjer koji slijedi dobro ilustrira tu definiciju. U primjeru je prikazan rad učenika koji je pokušao riješiti sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Umjesto zbrajanja dviju jednadžbi, učenik je od prve jednadžbe oduzeo drugu i pretpostavio da će taj postupak eliminirati nepoznanicu y. Zatim je provjerio svoja rješenja uvrštavajući ih u jednadžbu ($x = 8$, $y = 6$) i shvatio da rezultat nije točan:

$$\begin{array}{c} 2x + y = 10 \\ \underline{x - y = 2} \\ x = 8. \end{array}$$

Uvrstimo li x, dobivamo: $\quad \begin{array}{c} 8 - y = 2 \\ y = 6. \end{array}$

Kada je učeniku predloženo da bi bilo prikladnije zbrojiti jednadžbe, njegov je odgovor bio: "Ali tako nam je učiteljica pokazala, naučila nas je da uvijek oduzimamo jednadžbe!"

Učiteljica vjerojatno nije na taj način objasnila postupak, no učenik je tako interpretirao njezine riječi te samoinicijativno generalizirao savjet o rješavanju sustava dviju jednadžbi. Taj primjer pokazuje kako će učenici, ukoliko samostalno pokušaju ponoviti postupke koje je učitelj demonstrirao, bez razumijevanja o tome kako i zašto taj postupak funkcionira, stvoriti vlastita pravila. Tim pravilima i neutemeljenim razlozima njihove upotrebe učenici nastoje stvoriti vlastito razumijevanje.

Često se pretpostavlja da učenje uključuje ovladavanje određenom vrstom znanja i procedura. Također, pretpostavlja se da je posao učitelja raščlaniti takve procedure na niz malih, lako pamtljivih koraka te demonstrirati točnu tehniku ili algoritam, nakon čega učenici individualno vježbaju upotrebu procedure kroz rješavanje zadataka. To nazivamo kulturom školske matematike, gdje je nastava strukturirana kao prijenos informacija. Međutim, kako je ilustrirano u prethodnom primjeru, znanje se ne može direktno prenijeti s učitelja na učenike. Osim toga, učenici često reinterpretiraju i transformiraju riječi i postupke učitelja. S druge strane, postoji istraživačka matematika, gdje učenici uče govoriti i djelovati matematički postavljajući pitanja, predlažući rješenja te rješavajući nove i nepoznate probleme.

Posljednjih godina povećao se interes za proučavanje tih dviju kultura nastave matematike, kao i utjecaja svake od njih na učenička postignuća u matematici. U jednom istraživanju provedenom među učenicima dviju srednjih škola u Engleskoj ([5]) došlo se do zanimljivih i vrlo značajnih saznanja. U istraživanju su ciljano odabrane škole koje imaju učenike sličnog socio-ekonomskog statusa i kulturološkog profila, no metode su se poučavanja u tim školama bitno razlikovale. Učitelji matematike u prvoj školi koristili su tradicionalne metode poučavanja, ranije opisanu kulturu školske matematike. Provjere znanja sastojale su se isključivo od pismenih provjera koje su ujedno pripremale učenike za završni ispit. Učionice su ovdje bile tihe i mirne, a učenici su se činili motivirani i vrijedni. Ipak, učenici su kroz razgovore otkrili kako ne vole matematiku koja im je bila težak i dosadan predmet. Također, unatoč njihovoj marljivosti u rješavanju zadataka i pozornom slušanju, taj pasivan pristup radu onemogućio im je primjenu znanja u nepoznatim primjerima. Smatra se kako je to posljedica inertnog znanja koje su učenici razvili, a pripisuje se uvjerenju kako učenje matematike zahtijeva pamćenje niza pravila, jednadžbi i formula.

Pristup poučavanja u drugoj školi bio je progresivniji, a predavanja često prilično nestrukturirana. Učenici su većinom radili na raznim projektima gdje je naglasak bio na značenju i objašnjavanju nečijeg mišljenja. Nastavnici su se vodili idejom da se učenici trebaju susresti s matematikom u kontekstu koji je realističan i značajan, a nove su matematičke sadržaje poučavali kada se kroz rad na projektima ukazala potreba za novim znanjem. Većina učenika uživala je u tom istraživačkom pristupu učenju i smatrali su matematiku zanimljivom jer je uključivala razmišljanje i rješavanje problema.

Učenici druge škole pokazali su se kao fleksibilni i prilagodljivi matematičari koji su u mogućnosti primijeniti svoje znanje u nepoznatim problemima, a njihov uspjeh na konvencionalnim završim ispitima bio je bolji od učenika iz tradicionalne nastave. To istraživanje, kao i brojne druge studije, pokazuje kako poučavanje školske matematike učenicima pruža samo instrumentalno razumijevanje - "znati da" i "znati kako", dok istraživačka matematika generira relacijsko razumijevanje - "znati zašto" i "znati djelovati".

2.1.1 Matematičko mišljenje, zaključivanje i rješavanje problema

Jedan je od značajnijih ciljeva nastave matematike osposobiti učenika za matematičko mišljenje i zaključivanje. Svaki učitelj matematike povremeno se zapita kako može provjeriti razvija li učenik matematičko mišljenje kroz učenje koje se odvija na satu matematike. Jedan je od mogućih načina je korištenje strukture koja identificira kategorije mišljenja različite složenosti:

- prepoznavanje - označava da učenik shvaća da se poznati matematički postupak može primijeniti u novoj situaciji,

- povezivanje - označava da učenik koristi nekoliko poznatih matematičkih postupaka kako bi riješio nepoznat problem,

- konstrukcija - označava da učenik odabire poznate strategije, matematičke ideje i koncepte te ih integrira u rješavanju nepoznatog zahtjevnog problema.

Matematičko zaključivanje obuhvaća stvaranje, istraživanje i vrednovanje pretpostavki te razvijanje matematičkih argumenata koji će nas uvjeriti da je pretpostavka točna. Objašnjavanje i argumentiranje ključni su aspekti matematičke aktivnosti učenika u učionici u kojoj se matematika poučava kroz samostalno zaključivanje. Kada nastavnik zada zadatak u kojem učenici moraju istražiti veze među matematičkim objektima te sudjelovati u raspravi i preispitivanju tvrdnji drugih učenika, tada učenici uče kako argumentirati svoje zaključke na adekvatan način.

Rješavanje problema poveznica je svih aspekata učenja matematike. Velik dio istraživanja posvećenog rješavanju problema u nastavi matematike odvijao se tijekom osamdesetih i devedesetih godina prošlog stoljeća. Rješavanje problema uvedeno je u ciljeve nastave matematike u mnogim zemljama, a također i u Hrvatskoj. Zanimljivo je da su problemi i rješavanje problema imali kroz povijest razna, često i kontradiktorna značenja. Naime, određeni bi zadatak mogao biti problem jednoj osobi, dok bi drugoj bio rutinska vježba.

Uvjerenja i stavovi mogu povećati aktivnost učenika ili na neki način utjecati na njih. Ta uvjerenja predstavljaju učenikov pogled na matematiku – o sebi kao matematičaru, o matematičkom obrazovanju te o matematici kao predmetu. Uvjerenja o sebi utječu i na stavove, osobito one koji se odnose na motivaciju, samopouzdanje i volju za riskiranjem, a odražavaju se kroz sposobnost učenika da svoju pažnju zadrži na nekom zadataku. Nastava koja promovira pamćenje, formalne procedure i točne odgovore bez obzira na razumijevanje, može učenika dovesti do uvjerenja da je on samo pasivni promatrač, da nije sposoban predložiti i argumentirati vlastite ideje. Postavljajući učenicima adekvatna pitanja, nastavnici mogu učenicima biti potpora tijekom rješavanja problema te na taj im način pomoći da razviju svijest o svojem matematičkom znanju i osposobiti ih za reguliranje svog mišljenja. Takva pitanja nazivaju se potporna pitanja, a njihova je glavna karakteristika da ih učenici mogu sami sebi postaviti i kada više nemaju potporu nastavnika (primjere takvih pitanja navodimo u Tablici 2.1).

2.2 Stvaranje istraživačke razredne zajednice

Nastavnik matematike ima veliku ulogu u razvijanju matematičkog razumijevanja kod učenika, a poučavanje kroz istraživačku matematiku vodi ka dubljem

Uvodni dio sata	Koje su ideje ovdje važne? Što se zahtijeva u zadatku? Koje su nam informacije poznate? Koje uvjete moramo poštovati? Možete li pogoditi neko rješenje? Koju bismo strategiju mogli iskoristiti?
Za vrijeme učenikovog rada	Recite mi što radite. Zašto mislite da taj postupak ima smisla? Zašto mislite da je ta ideja bolja od druge? Možete li opravdati taj korak? Možete li naći protuprimjer? Jeste li sigurni u taj dio?
Kada učenici završe	Jeste li razmotrili sve slučajeve? Jeste li provjerili svoje rješenje? Ima li dobiveno rješenje smisla? Možete li poopćiti problem? Možete li proširiti problem na druge situacije? Možete li objasniti rješenje drugima u razredu?

Tablica 2.1: Primjeri potpornih pitanja

razumijevanju i fleksibilnijem razmišljanju. Nedavnim istraživanjima temeljenima na socijalnom konstruktivizmu ([14]) pokušalo se doći do odgovora kako matematička učionica može postati istraživačka zajednica te što bi nastavnici trebali napraviti da bi zainteresirali učenike za matematičko mišljenje, zaključivanje i rješavanje problema. Iako je nemoguće sastaviti listu postupaka kojih bi se učitelji trebali pridržavati, postoje određene smjernice koje opisuju istraživačku razrednu zajednicu te učiteljevu ulogu u takvom okruženju. Ključni su dijelovi učiteljeve uloge:

- modeliranje matematičkog mišljenja kod učenika,
- postavljanje pitanja kao potporne strukture kod razvijanja matematičkog mišljenja,
- razvijanje socijalne interakcije među učenicima,
- povezivanje učeničkih ideja s matematičkim jezikom i simbolima.

Ne treba podcijeniti izazov implementiranja takvog načina poučavanja u osnovne i srednje škole. Često se čini kako količina gradiva koju učitelj mora obraditi i vrednovanje znanja sprječavaju razvoj razumijevanja i matematičkog mišljenja. To je težak zadatak, osobito kada smo suočeni s razredom u kojem su učenici naučeni vjerovati da je poučavanje prenošenje informacija, a učenje pamćenje niza formula i vježbanje istih kroz zadatke. Mnogi nastavnici ističu kako im postojeći plan i program onemogućava nestrukturiranu nastavu te su ograničeni na rješavanje zadataka, a ne problema. Nastavnici također ističu i bojazan od gubitka kontrole nad nastavnim procesom i neostvarivanja zadanih ciljeva u slobodnijoj nastavi. Ipak, rezultati mnogih istraživanja, poput [14], pokazuju kako pristup poučavanja istraživačkom matematikom nudi učenicima mogućnost napretka u radu te stimulira socijalnu interakciju na najefikasniji način, a znanje se u takvom okruženju stječe uz razumijevanje. Stoga bi bilo od iznimne važnosti implementirati istraživačku nastavu matematike barem za određene nastavne teme.

3

KREATIVNO I IMITATIVNO ZAKLJUČIVANJE

3.1 Struktura zaključivanja

Pri analizi pojedinca prilikom rješavanja zadataka zaključivanjem korisno je strukturirati zaključivanje kako bi se mogli usredotočiti na njegove važne aspekte. Strukturiranje se može postići na nekoliko načina. Kod rješavanja rutinskih zadataka gdje je poznata kompletna procedura rješavanja, gdje se sve odvija glatko te su dane strategije izbora, a provedba nije problematična, naslućuje se samo jedan tip zaključivanja - uobičajeno i točno zaključivanje. Nije važno razumije li rješavatelj postupak rješavanja ili ne. U školi uglavnom postoje tri situacije u kojima učenici rade sa zadacima koji nisu neposredno neproblemske implementacije rutinskih postupaka:

1. prilikom učenja novih rutinskih procedura,
2. kada nešto pođe krivo, primjerice zbog nepažljive pogreške u provedbi rutinskog postupka,
3. pri pokušaju rješavanja nerutinskog zadatka.

Premda je to u središnjem nastavnom planu i programu prilično neuobičajeno, rješavanje je matematičkog zadatka ustvari rješavanje serije podzadataka koji mogu biti bitno različitih veličina i karaktera. Sljedeća struktura od četiriju koraka prikazuje jedan od načina kako se može opisati zaključivanje pri rješavanju problema:

1. Razmatranje zadatka - zadatak treba pročitati s razumijevanjem te pokušati odgovoriti na pitanja: "Što je nepoznato?", "Što je zadano?", "Kako glasi uvjet zadatka?"

2. Izbor strategije - jedna je mogućnost pokušaj odabira strategije koja može riješiti poteškoće (u širem smislu: izabrati, podsjetiti se, konstruirati, otkriti, nagađati itd). Uočiti zakonitosti (pravilo, formula, teorem) koje povezuju poznate i nepoznate podatke, složeniji zadatak raščlaniti na nekoliko lakših. Taj izbor može se potkrijepiti predikativnom argumentacijom: "Hoće li strategija riješiti problem?" Ako neće, izaberite drugu strategiju.

3. Provedba strategije - paziti da se točno izvede svaki korak. Može biti podržana od strane verifikativne argumentacije: "Jeste li odabranom strategijom riješili problem?" Ako niste, ponovite prethodna dva koraka, ovisno o tome je li problem u izboru strategije ili u njenoj provedbi.

4. Osvrt - provjera rezultata, spoznaja da strategija nije dobra, odgovoriti na pitanja "Može li se rezultat dobiti na drugačiji način?", "Može li se rezultat ili metoda rješavanja upotrijebiti za neki drugi zadatak?"

Tako ćemo zaključivanje smatrati linijom misli, načinom razmišljanja, usvojenosti dobivenih tvrdnji i dolaženjem do rezultata. Ne mora se nužno temeljiti na formalnoj deduktivnoj logici, a može biti i netočno sve dokle god postoje neki razboriti zaključci koji navode na razmišljanje.

Redoslijed je zaključivanja uvijek dio individualnog zaključivanja koji je dostupan kao skup empirijskih podataka koji mogu biti zastupljeni u dokumentarnom obliku (tekst, simboli, figure, slike, video snimke itd.), a ne stvarnog zaključivanja koje zauzima mjesto u umu osobe. To znači da pokušaj rješavanja zadatka može biti klasificiran na različite načine, ovisno o tome koji su dijelovi stvarnog zaključivanja dostupni kao podaci.

3.2 Kreativno zaključivanje

Opće je prihvaćeno mišljenje da je prava matematička uspješnost sposobnost boljeg i bržeg svladavanja osnovnih činjenica i rutinskih algoritama. Taj stav potvrđen je mnogim istraživanjima, poput [32]. Veliki naglasak stavljen je na zaključivanje kao način obrazlaganja različitog gradiva u različitim razredima te na to da je određeni oblik obrazlaganja manje važan od jasne komunikacije matematičkih ideja.

Svaki je nastavnik matematike svjestan važnosti matematike i matematičkog odgoja i obrazovanja. Učenike treba zainteresirati i potaknuti na samostalno rješavanje zadataka te pronalazak rješenja postavljenih matematičkih problema. Potrebno ih je motivirati na rješavanje zadataka na različite načine, primjenom različitih metoda, kako bi svatko pronašao vlastiti put dolaženja do rješenja.

Navedimo jedan od najistaknutijih primjera kreativnog zaključivanja pri rješavanju matematičkog zadatka.

Primjer 3.2.1. *Učitelj je postavio učenicima zadatak da zbroje sve prirodne brojeve od* 1 *do* 100*, očekujući kako će ih time zaokupiti na duže vrijeme. No, Carl Friedrich Gauss, koji je tada imao samo šest godina, na veliko je iznenađenje svog učitelja odmah donio točan rezultat:* 5050*. Dok su drugi učenici iz razreda zadatak rješavali zbrajajući brojeve redom, on je promatrajući niz* $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 98, 99, 100$*, čije je članove trebalo zbrojiti, uočio sljedeću zakonitost: zbroj je prvog i posljednjeg broja u tom nizu* 101*, zbroj je drugog i pretposljednjeg broja također* 101*, zbroj je trećeg broja i trećeg od kraja opet* 101*, itd. Takvih parova ima točno* 50*, pa traženi zbroj iznosi* $101 \cdot 50 = 5050$.

Svaki od učenika mogao je doći na istu ideju jer ona predstavlja samo novu kombinaciju prije poznatih sadržaja.

3.2.1 Problemski i rutinski zadaci

Prije nego definiramo kreativno zaključivanje, ukratko ćemo razmotriti vrste zadataka koji se mogu riješiti memorijskim i algoritamskim zaključivanjem. Pokušajmo najprije pojasniti glavnu razliku između rutinskih i problemskih zadataka.

Rutinski je zadatak onaj u kojem je rješavatelju dostupna kompletna metoda rješavanja, a rješavanje se izvodi na algoritamski način slijedeći niz poznatih postupaka.

Najvažnija je uloga kreativnog zaključivanja nerutinsko rješavanje problema u situaciji kada ne postoji potpuna shema rješavanja te rješavatelj mora sam doći do rješenja. Termin problem koristi se u literaturi u mnogo različitih značenja, u rasponu od bilo kojeg matematičkog zadatka do zadatka s kojima se susreću matematičati u istraživanjima. Prema Schoenfeldu ([45]), problem označava zadatak koji je težak pojedincu koji ga pokušava riješiti, tj. ako pojedinac ne zna riješiti zadatak koji je rješiv. Prema tome, svrstavanje zadataka u rutinske i problemske nije određeno svojstvima samog zadatka, već se određuje odnosom između pitanja postavljenog u zadatku i rješenja.

Na primjer:

- ravnomjerna je podjela 56 klikera na četvero djece vjerojatno problemski zadatak za prvi razred, ali je rutinski većini učenika osmih razreda osnovne škole,
- pronalaženje maksimuma polinoma drugog stupnja može biti problem za učenika osmog razreda koji se upravo susreo s algebrom, ali bi trebao biti rutinski zadatak studentu koji uči diferencijalni račun.

U stvari, bilo koji problem može se pretvoriti u rutinski zadatak nakon što se u dovoljnoj mjeri prouče tip problema i njegova svojstva.

Središnje su točke pri istraživanju učeničkog rješavanja problema

- učenička usmjerenost na učenje napamet rutinskih postupaka i
- velike poteškoće učenika pri rješavanju nerutinskih problema.

Ta se neuravnoteženost u većini zemalja loše uklapa u ciljeve kurikuluma nastave matematike. Nažalost, ta neuravnoteženost trajna je i pokazuje kako su tradicionalne metode poučavanja nedostatne u pripremi učenika za izvođenje kreativnih rješenja.

U nastavku ćemo se usredotočiti na aspekt zaključivanja u konstruktivnom rješavanju problema, osobito na kvalitete efikasnog rješavanja problema zaključivanjem nasuprot zaključivanju imitiranjem.

3.2.2 Kreativnost

Umjesto korištenja memoriranog ili algoritamskog zaključivanja pri rješavanju određenog zadatka pozivanjem na gotov odgovor ili algoritam, rješenje može biti konstruirano kreativnim zaključivanjem. Smatramo kako kreativno zaključivanje označava korištenje vještina i imaginacije pri smišljanju nečeg novog ili razmišljanje o problemima na novi način ili razmišljanje o novim idejama. Kada se diskutira o kreativnosti u matematici, razumno je postaviti pitanje zašto je kreativnost tema matematičkog istraživanja.

Zaključeno je da kreativni proces matematičara prati Gestaltov model koji se sastoji od pripreme, inkubacije, iluminacije i provjere ([48]).

Osnovni je problem koji se javlja pri korištenju modela kao okvira za analizu i poboljšanje kreativnosti učenika ili provođenja rješavanja problema što oni opisuju što sofisticirani stručnjaci rade, ali ne i kako početnik može postati stručnjak. Zato je predložena i uvjetna definicija kreativnosti: Matematička kreativnost sposobnost je rješavanja problema i stvaranje struktura mišljenja, vodeći računa o posebnoj logično-deduktivnoj prirodi discipline te o sposobnosti nastalih koncepata da se integriraju u srž onoga što je važno u matematici.

Iako se kreativnost povezuje s pojmom genijalnosti ili izuzetnom sposobnosti, ona može biti korisna za nastavnike matematike koji neće kreativnost smatrati samo kao sposobnost matematički nadarenih učenika već nešto što se može poticati i kod prosječnih učenika. Ukoliko se to ne primjenjuje u školi, mala je mogućnost da će učenici kasnije iskusiti matematiku kao visoko kreativno intelektualno područje.

Mi ćemo se usredotočiti na kreativne aspekte rješavanja svakodnevnih zadataka kod prosječnih učenika i na zaključivanje koje nije samo strogo praćenje algoritamskih slijedova ili prisjećanja ideja koje su učenicima dali drugi. Postoje dva istaknuta oblika fiksacije koja mogu ometati kreativno zaključivanje:

- fiksacija na opći sadržaj koja podrazumijeva skup elemenata prikladan za primjenu na danom problemu te se znanje koje može biti od koristi pri rješavanju problema ne smatra takvim;
- algoritamska fiksacija koja je vidljiva u ponovnom korištenju početnog uspješnog algoritma kada je on postao neprikladan.

Također se kreativnost odnosi na dobro i fleksibilno znanje sadržaja i povezana je i s drugim periodima rada, osim brzog i izvrsnog shvaćanja, te je osjetljiva na utjecaj nastavnika. Najčešće se tečnost, fleksibilnost i novost smatraju ključnim osobinama kod razlikovanja kreativnog i imitativnog zaključivanja.

3.2.3 Vjerodostojnost

Istraživanja vezana za složenije oblike zaključivanja odnose se uglavnom na matematičke dokaze i izvode. Učenici obično puno vremena provedu učeći matematiku tako da rješavaju zadatke iz udžbenika. To je način na koji učenici trebaju vježbati i naučiti gradivo kako bi mogli primjeniti svoje znanje u drugim situacijama, primjerice u daljnjem učenju, u svom profesionalnom djelovanju ili u svakodnevnom životu kao članovi modernog društva.

Zadaci kakvi se sreću u udžbenicima mogu biti različiti, ali se uglavnom razlikuju od zadataka kojima se bave matematičari u istraživanjima, inženjeri ili ekonomisti. Profesionalni zadaci mogu se razlikovati od školskih zadataka i u težini i u stupnju sofisticiranosti. Na primjer, stupanj točnosti rezultata mora biti znatno viši u profesionalnim zadacima. Cilj je matematičkih istraživanja logički dokazati tvrdnje, inženjer mora biti siguran da će novi most izdržati, a ekonomist ne može samo nagađati da je matematički izračun, koji je temelj financijskog predviđanja, točan.

U školskim je zadacima također jedan od ciljeva postići visoki stupanj točnosti, ali ono što ih bitno razlikuje od profesionalnih zadataka jest da je u njima dopušteno nagađanje, riskiranje te korištenje ideja i zaključaka koji možda i nisu u potpunosti točni. Čak je i u testovima dopušteno imati 50% točnih odgovora, dok bi za matematičara, inženjera ili ekonomista bilo apsurdno da je točan u samo 50% zaključaka. To nam govori da je dopušteno, a možda se čak i potiče, da se pri rješavanju školskih zadataka koriste matematička zaključivanja sa znatno smanjenom potrebom za strogom logikom.

Georg Polya ([42]) naglašava važnost uloge zaključivanja koje je manje strogo od formalnog dokaza jer naše matematičko znanje osiguravamo strogim, dok pretpostavke podupiremo vjerodostojnim zaključivanjem. U strogom zaključivanju osnovno je razlikovati dokaz od nagađanja, valjanu demonstraciju od nevažećeg pokušaja. U vjerodostojnom zaključivanju osnovno je razlikovati razumnije pogađanje od manje razumnog.

U dokazima je kvaliteta zaključivanja određena strogom točnošću te se vjerodostojnost odnosi na zaključivanje podržano argumentima koji ne moraju biti čvrsti poput onih u dokazima.

3.2.4 Matematičke osnove

Ključ kvalitete kreativnog zaključivanja nalazi se u tome da je matematički zasnovano. Osim zaključivanja, i strategije rješavanja vezane su uz važna matematička svojstva kroz argumente.

S obzirom na način na koji se dolazi do uvjerenja o valjanosti iznesenih tvrdnji, dokaze možemo podijeliti na:

1. pragmatičke dokaze, koji se odnose na pokazivanje istinitosti rezultata zbog stvorenog dojma o njegovoj valjanosti (takvi dokazi zapravo ne utvrđuju istinitost tvrdnje, no oni koji ih izvode često su uvjereni u njihovu ispravnost),

2. konceptualne dokaze, koji se odnose na uspostavljanje potrebne istine davanjem valjanih razloga.

Početnici se često pri dokazivanju koriste naivnim empirizmom pa će, primjerice, zaključiti kako je neka geometrijska konstrukcija ispravna jedino ukoliko im slika izgleda prihvatljivo, te takvo zaključivanje često vodi ka krivim zaključcima.

S druge strane, oni nešto stručniji temeljit će svoje zaključivanje u velikoj mjeri na važnijim poznatim svojstvima, poput sukladnosti, pa imaju i stabilnije temelje za izvođenje pravilnih zaključaka.

Sam matematički aspekt zaključivanja karakteriziran je dobro utemeljenim argumentima koji koriste svojstva uključenih komponenti. Prva je komponenta zaključivanje o postojanju objekta, transformacija i koncepata. Ovdje je objekt osnovna jedinica kojom netko nešto radi ili rezultat nekog postupka poput brojeva, varijabli, funkcija i slično. Transformacija je postupak koji primijenjen na jedan objekt kao rezultat daje drugi objekt, ili više njih. Na primjer, brojanje krušaka transformacija je primijenjena na stvarni objekt, a ishod je broj, dok je izračunavanje derivacije transformacija primijenjena na funkciju, a ishod je nova funkcija.

Dobro definiran slijed transformacija, poput određivanja točaka ekstrema funkcije jedne varijable, naziva se procedura, dok je koncept ovdje centralna matematička ideja nastala na skupu objekata, transformacija i njihovih svojstava. Kako bi ilustrirali dobivenu strukturu, promotrimo koncept funkcije. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ može biti transformacija ulaznog objekta 5 u izlazni objekt 25. Ako je funkcija derivabilna, onda je derivacija transformacija, $f(x)$ je ulazni objekt, a izlazni je objekt derivacija $f'(x)$.

Kako važnost određenog svojstva uključene komponente ovisi o kontekstu i problemskoj situaciji, potrebno je razdvojiti ključna i površinska svojstva koja su od male važnosti. Pokazuje se kako je jedan od glavnih razloga zbog kojeg učenici imaju poteškoće s rješavanjem problemskih zadataka upravo nepotrebno fokusiranje na površinska svojstva. Jedan je od primjera površinskog svojstva ranije spomenuti naivni empirizam i pokušaj da se odredi je li konstrukcija ispravna promatrajući izgled napravljene skice. U takvoj se situaciji ključnim svojstvom može smatrati sukladnost likova uključenih u konstrukciju. Kada treba odrediti koji je razlomak veći, $\frac{57}{1234}$ ili $\frac{423}{421}$, veličina uključenih prirodnih brojeva $(57, 1234, 423, 421)$ površinsko je svojstvo koje nije dovoljno da bismo riješili zadatak, dok je veličina količnika ključno svojstvo.

3.2.5 Kreativno matematički zasnovano zaključivanje

Zaključivanje u rješavanju zadataka naziva se kreativno i matematički zasnovano zaključivanje ako ispunjava sljedeće uvjete ([29]):

1. Novost - novi slijed rješenja stvorenih zaključivanjem ili ponovno stvoren zaboravljeni slijed. Imitiranje postupka rješenja ne smatra se novošću.

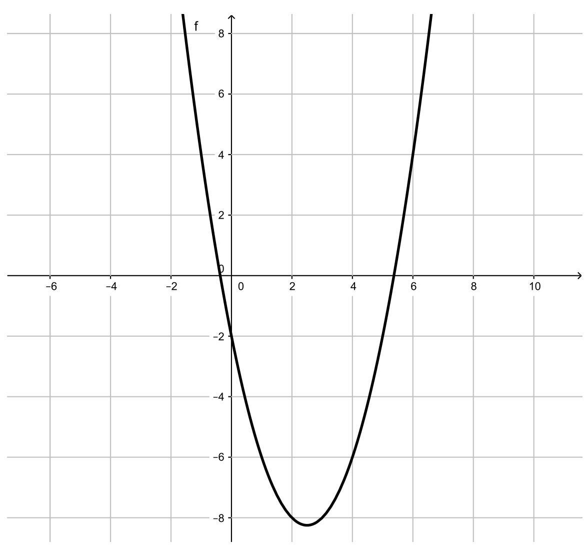
2. Fleksibilnost - fluentno primjenjivanje različitih pristupa i prilagodbi u novim situacijama, a koje nije vezano uz određeni objekt, poput fiksiranosti na opći sadržaj ili na traženje zapamćenih i algoritamskih rješenja.

3. Vjerodostojnost - postoje argumenti koji podupiru strategije izbora ili strategije implementacije te određuju zašto je zaključak istinit ili valjan. Pogađanja, pretpostavke i afektivni razlozi ne uzimaju se u obzir.

4. Matematička utemeljenost - argumentiranje se temelji na svojstvima komponenata uključenih u zaključivanje. Razlozi temeljeni na samom iskustvu ne smatraju se valjanim.

Ilustrirajmo navedene uvjete na primjerima.

Primjer 3.2.2. *Nastavnik je učenicima četvrtog razreda srednje škole postavio zadatak odrediti najveću i najmanju vrijednost funkcije* $f(x) = x^2 - 5x - 2$ *na segmentu* $[0, 4]$*. Na prethodnim satima obradili su definiciju derivacije i njeno geometrijsko značenje te postupak za određivanje derivacija polinoma. S postupkom za određivanje lokalnih ekstrema pomoću derivacija nisu se još susreli.*



Slika 3.1: Graf funkcije iz Primjera 3.2.2.

Učenici se najprije prisjećaju grafa kvadratne funkcije te skiciraju graf funkcije f *kao na Slici 3.1. Odmah uočavaju kako se najveća vrijednost postiže u jednom od krajeva danog segmenta te računom dobivaju da je najveća vrijednost* -2.

Primjećuju kako bi se najmanja vrijednost trebala postići u točki $x = 2.5$*, no prisjećaju se i da to ne mogu s potpunom sigurnošću odrediti iz grafa.*

Nedavno su učili kako je derivacija upravo nagib tangente te da će se najmanja vrijednost postići jedino u točki u kojoj je nagib jednak nuli. Sada računaju $f'(x) = 2x - 5$ *te lako dobivaju* $x = 2.5$*, odakle je najmanja vrijednost funkcije* f *na danom segmentu* -8.25*.*

Primijetimo kako se traženi uvjeti pojavljuju u prethodnom primjeru:

- Novost - učenici se susreću s derivacijama, ali još nisu vidjeli algoritam za određivanje lokalnih ekstrema. Njega stvaraju kroz vlastite strategije: lokalni ekstrem nalazi se u točki gdje je derivacija jednaka nuli i to se može izračunati, a ne slijedi algoritamski postupak kojeg je smislio netko drugi.

- Fleksibilnost - učenici ne posjeduju samo potrebno predznanje, već su savladali i pravilnu heuristiku te razvili vjerovanje da takva vrsta zaključivanja može biti korisna. Prema tome, sposobni su preuzeti inicijativu kako bi analizirali situaciju te se prilagoditi tim uvjetima.

- Vjerodostojnost - odabrani argumenti podržavaju vjerodostojnost strategija izbora i zaključka te nisu nužno čvrsti poput argumenata u dokazima niti bazirani na viđenim algoritmima.

- Matematička utemeljenost - učenici imaju dobro razvijeno konceptualno razumijevanje funkcija i svoje kreativno zaključivanje zasnivaju na njihovim svojstvima (npr. veza između derivacije, nagiba i maksimuma) zbog čega je dobiveno rješenje matematički korektno.

Idućim primjerom ilustrirat ćemo vezu između vjerodostojnosti i konteksta u kojem je određeni problem proučavan.

Primjer 3.2.3. *Učenik tvrdi: Formula* $f(n) = n^2 + n + 41$ *daje prosti broj za svaki* n *koji sam probao, od* $n = 0$ *do* $n = 30$*. Dakle,* $f(n)$ *je vjerojatno prost za sve prirodne brojeve* n*.*

Ta tvrdnja nije točna jer $f(41)$ *nije prost. To ustvari i nije teško za vidjeti jer za* $n = k \cdot 41$ *vrijedi* $f(n) = 41^2 \cdot k^2 + 41k + 41 = 41(41k^2 + k + 1)$ *i* 41 *dijeli* $f(n)$ *koji, dakle, nije prost.*

Kvaliteta zaključivanja ne može se odrediti samo prema točnosti već treba uzeti u obzir i kontekst. Čak su i najvještiji matematičari predložili dobro zasnovane pretpostavke koje su se pokazale netočnima. Prikazano zaključivanje može se smatrati vrlo dobrim za učenika prvog razreda srednje škole, ali vrlo lošim za studenta matematike.

3.3 Imitativno zaključivanje

Imitativno zaključivanje kopiranje je ili slijeđenje modela ili primjera bez ikakvog pokušaja originalnosti.

Kreativno zaključivanje glavni je cilj većine modernih kurikuluma matematike. Zašto je onda tako rijetko kod učenika?

Lithner navodi ([29]) da su razlozi poteškoća u učenju neopravdano i pretjerano smanjivanje složenosti matematičkih pojmova i postupaka od strane nastavnika, autora udžbenika i učenika kako bi se lakše postigli ciljevi kurikuluma koji su inače teški. Učenici su skloni odgovarati na pitanja bez razmišljanja te često koriste strategije koje će ih do odgovora dovesti najkraćim putem, a koji je često i neispravan. Učenici često zahtijevaju da se nejasnoće i rizici smanje tako da se smanje akademski zahtjevi zadataka. Nakon udovoljavanja autora udžbenika tim zahtjevima pokazalo se da se broj problemskih zadataka smanjio te su se takvi zadaci i dodatno pojednostavnili, dok se broj zadataka za uvježbavanje povećao. Upute i vježbe vezane uz algebru smanjene su na lakšu aritmetiku iako se i dalje smatraju algebrom. Istraživanja ([7]) pokazuju da mnogi studenti prve godine dobivaju dobre ocjene koncentrirajući se na već viđene teme na površnoj razini, umjesto na dublje razumijevanje temeljnih tema.

Najčešći je oblik smanjivanja složenosti usredotočenost na algoritamske postupke kojima se mogu riješiti napredni zadaci bez potrebe razumijevanja koncepta ili kreativnog zaključivanja. Učenje i poučavanje kroz pokazivanje postupaka mogu spriječiti učenike da kasnije razviju dublje konceptualno razmijevanje. U nekim situacijama može doći do nazadovanja razumijevanja zbog okoline u kojoj se učilo. Brojna istraživanja, poput [31], pokazala su povezanost slabog konceptualnog razumijevanja s usredotočenošću na postupak. Pri tome se pravi razlika između instrumentalnog razumijevanja (savladavanja pravila i postupaka bez dubljeg razumijevanja) i relacijskog razumijevanja matematičkih postupaka.

Velike količine podataka [50, 29] pokazuju da učenici znaju neke elementarne vještine, ali nemaju puno dubine i razumijevanja. Učenici su uspješniji u računanju, označavanju i definiranju nego u zaključivanju, komunikaciji, povezivanju i dokazivanju. Takva se situacija može objasniti jednom od najpouzdanijih spoznaja edukacije: učenici nauče ono za što im je dana prilika da nauče.

Smanjivanje složenosti može dovesti do odvajanja proceduralnog zaključivanja od njegova matematičkog značenja. U tom slučaju nema koristi od analiziranja učenikova zaključivanja tako da se samo okarakterizira njihova matematička koherentnost. Nečija percepcija matematike društveno je određena i učenje je individualno te se ne može u potpunosti razumijeti ako se u obzir uzme samo napredak u shvaćanju matematičkih struktura. Učeničke poteškoće pri rješavanju rutinskih zadataka mogu se bolje razumjeti ako su interpretirane unutar nekognitivnog okvira, umjesto da su shvaćene kao pogrešno razumijevanje unutar domene smislenog konteksta: ono što bi učitelju moglo biti pravilno učenje i rješavanje problema, ne mora biti i učeniku. Zbog didaktičkog dogovora učenici bi mogli, svjesno ili ne, pokušati udovoljiti edukacijskom sustavu ponašanjem (tj. načinima rješavanja) koje je možda samo površno, ali ga sustav smatra prihvatljivim. Analize načina rješavanja zadataka ne bi se trebale odnositi samo na razumijevanje zadataka te uspješne i neuspješne pokušaje, već i na dodatne nekognitivne načine rješavanja poput pokušaja pogađanja i pronalaženja poznatih načina rješavanja ili potrebe za ispunjenjem učiteljevih očekivanja.

Poteškoće su u učenju dijelom povezane sa smanjivanjem složenosti koje je nastalo zbog usredotočenosti na činjenice, algoritme i nedostatak povezanog razumijevanja. Važno je uspješno okarakterizirati takve površne principe zaključivanja koji mogu biti zasnovani na površnim uputama kod nekognitivnih i polukognitivnih pokušaja rješavanja zadataka.

3.3.1 Memorirano zaključivanje

Istaknimo najprije razliku između odgovora i rješenja.

Cilj odgovora na postavljeno pitanje, tj. na dani zadatak, sastoji se u tome da se uvijek osigura dovoljno opisa svojstava koja se traže uzimajući u obzir određenu situaciju u kojoj je zadatak postavljen. Na primjer, odgovori na isti zadatak mogu se razlikovati ukoliko su postavljeni u stvarnim situacijama, u školskim provjerama ili u posebno važnim ispitima.

S druge strane, rješenje se sastoji od odgovora zajedno s motivacijom i obrazloženjem zašto se odgovor smatra točnim. Ta motivacija ne ovisi samo o formulaciji zadatka već i o situaciji u kojoj je zadatak postavljen. Rješenje često nije stvaran rezultat zaključivanja već idealizirani sažetak. Obično je cilj u rješenje uključiti samo dijelove koji su potrebni za postizanje točnosti odgovora. Primjerice, ukoliko treba riješiti jednadžbu $x^2 - 2x = 0$, tada je odgovor $x_1 = 0, x_2 = 2$, dok rješenje može uključivati izračun koji je vođen od jednadžbe do odgovora. Može se primijetiti da neki zadaci zahtijevaju čitavo rješenje kao odgovor, ukoliko ili strogo traže cijelo rješenje ili je to u prirodi samog zadatka, poput dokaza.

Zaključivanje pri rješavanju zadataka zvat ćemo memorirano zaključivanje ako je izbor strategije rješavanja zasnovan na prisjećanju memoriranog (zapamćenog) odgovora ili se provedba strategije sastoji samo od uzastopnog zapisivanja dijelova odgovora, a bilo koji dio odgovora može se opisati bez razmatranja prethodnih dijelova.

Često zapamtiti algoritamsko rješenje nekog zadatka zapravo znači ne zapamtiti algoritam već svaku riječ i simbol kako bi rješenje moglo biti zapisano od kraja. To nije realna situacija za računske zadatke, ali se može pojaviti u zadacima koji traže činjenice ("Koliko m^3 ima u 1 litri?"), definicije ("Što je polinom?") i dokaze.

Upravo se dokazi od po nekoliko redaka mogu pronaći u bilo kojem srednjoškolskom udžbeniku iz matematike. Ukoliko se učenicima da popis dokaza koje trebaju naučiti te se od njih na ispitu zatraži da iskažu i dokažu neki teorem, praktički će svi točni odgovori biti identične kopije dokaza iz udžbenika. Osim toga, većina netočnih odgovora sadržavat će velike dijelove istog dokaza iz udžbenika, samo što su neki dijelovi nedostajali ili nisu bili napisani točnim redoslijedom što je rezultiralo pogrešnim logičko-deduktivnim vezama. Čini se da će učenici u velikoj mjeri pokušati zapamtiti dokaze bez da su ih probali shvatiti.

Najčešće zadaci postavljeni u školi traže računske postupke te je u takvim situacijama prikladnije prisjetiti se algoritma za rješavanje.

3.3.2 Algoritamsko zaključivanje

Algoritam je skup pravila pomoću kojih se rješavaju određeni tipovi zadataka. Uključuje sve vrste uzastopnih, dobro definiranih postupaka nad matematičkim objektima. Najčešće se algoritmi u poučavanju i učenju matematike sastoje od procedura i transformacija.

Zaključivanje pri rješavanju zadataka zvat ćemo algoritamsko zaključivanje ako se izbor strategije rješavanja temelji na prisjećanju zapamćenog, ali ne i čitavog odgovora već na skupu pravila koja će jamčiti da će se postići točno rješenje, ili je skup pravila zadan ili poznat te zaključci koji trebaju biti izvedeni pri rješavanju rješavatelju postaju jednostavni i samo neoprezna pogreška može ugroziti točan odgovor. Kod algoritamskog zaključivanja predviđeno argumentiranje može biti različitih vrsta, ali nema potrebe za stvaranjem novih rješenja.

Algoritamski zadaci ovise isključivo o znanju rješavatelja i trivijalnosti dijelova zadatka te kod upotrebe algoritma u algoritamskom zaključivanju nije potrebno razumijevanje logike. Algoritamsko je zaključivanje pouzdano jedino u rutinskim, neproblemskim situacijama kada rješavatelj točno zna što treba raditi i ima pristup shemi rješenja. Najčešći tipovi zaključivanja i u problemskim situacijama bazirani su na identificiranju algoritma.

U algoritamskom zaključivanju, ako se ne napravi neoprezna pogreška, jedina je bitna poteškoća odrediti odgovarajući algoritam. Ako se algoritam uspije odrediti, onda je ostatak jednostavan. Istraživanja ([30]) su pokazala da je algoritamsko zaključivanje u potpunosti dominantno među tipovima zaključivanja. Najčešći oblici algoritamskog zaključivanja mogu se razlikovati po svojim različitim strategijama pristupa i bit će obrađeni u idućim potpoglavljima.

3.3.3 Poznato memorirano ili poznato algoritamsko zaključivanje

Strategija je ključne riječi vjerojatno temeljni oblik površnog matematičkog zaključivanja. U njezinoj najjednostavnijoj verziji postoje samo dva poznata algoritma koja se mogu izabrati, a to su zbrajanje i oduzimanje zadanih brojeva. Izbor je potpuno određen pojavom jedne od ključnih riječi "više" ili "manje". Ta strategija dovest će do točnog rješenja u mnogim zadacima, ali ne i u sljedećem primjeru.

Primjer 3.3.1. *Sok košta* 8 *kuna u Pijanoj rodi, što je za jednu kunu manje nego u Žabokrečini. Kolika je cijena soka u Žabokrečini?*

Algoritam oduzimanja odabire se obično na temelju iskustva da postoji jednoznačna veza između ključne riječi i aritmetičke metode pa se zaključivanje bazira na riječima "manje", što u ovom slučaju nije točno.

Strategija ključne riječi može se prenijeti i na složenije situacije, a zaključivanje pri rješavanju zadataka zove se poznato memorirano ili algoritamsko zaključivanje ako je izbor strategije zasnovan na temelju poznatog tipa zadatka, odnosno ako zadatak pripada skupu zadataka koji se mogu riješiti istim poznatim algoritmom ili prisjećanjem cijelog odgovora.

Ukoliko je učenik bez razumijevanja zapamtio postupak određivanja globalnih ekstrema funkcije u obliku idućeg algoritma:

1. odrediti derivaciju funkcije f, što je također algoritam koji se može zapamtiti,
2. riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$ odgovarajućim algoritmom za polinome prvog i drugog stupnja,
3. procijeniti $f(x)$ za rubne točke danog segmenta te za točke u kojima vrijedi $f'(x) = 0$ ako vrijednost x pripada definiranom intervalu,

4. maksimum je najveća, a minimum najmanja vrijednost,

on će, prateći taj algoritam, bez poteškoća riješiti zadatak poput onog zadanog u Primjeru 3.2.2.

Takvo zaključivanje temelji se na svojstvima funkcija i glavni je razlog zbog kojeg učenik misli da je rješenje točno taj što zadatak smatra poznatim jer je riješio puno zadataka koristeći navedeni algoritam te ne pokušava provjeriti odgovor. Taj algoritam nije ispravan ako je zadatak malo drugačiji, primjerice ako treba pronaći lokalni maksimum polinoma petog stupnja. Budući da učenik ne razumije logiku algoritma, ne može ga preoblikovati već ga treba zamjeniti drugim odgovarajućim algoritmom, inače će imati poteškoća u u rješavanju.

3.3.4 Algoritamsko zaključivanje ograničavanja

U poznatom algoritamskom zaključivanju rješavatelj zadatka na ispravan ili pogrešan način određuje da se radi o poznatom tipu zadatka za koji zna odgovarajući algoritam. Ako zadatak nije dovoljno poznat, a rješavatelj zna previše algoritama da bi ih sve isprobavao, tada se zadatak može riješiti ograničavanjem algoritama na one koji su potencijalno korisni.

Zaključivanje pri rješavanju zadataka zove se algoritamsko zaključivanje ograničavanja ako je rješavatelj izabrao algoritam iz ograničenog skupa algoritama pomoću povezanosti svojstava algoritma sa zadatkom ili se provedba strategije vrši praćenjem algoritma te provjeravanje nije potrebno i rješavatelj ne može predvidjeti ishod strategije. Ako algoritam, prema rješavateljevu mišljenju, ne vodi ka razumnom zaključku, tada se strategija ne vrednuje već se jednostavno prekida i pokušava se s novim algoritmom.

Često se algoritamsko zaključivanje ograničavanja izvodi u jednom koraku iz razloga što rješavatelj zna samo jedan algoritam unutar ograničenog skupa algoritama ili zbog toga što prvi pokušaj dovodi do prihvatljivog zaključka.

Primjer 3.3.2. *Pretpostavimo da učenik koji pokušava riješiti problem zadan u Primjeru 3.2.2., započinje na odgovarajući način i derivira funkciju f. Zatim pronalazi nultočku derivacije ($x = 2.5$), računa $f(2.5)$ te dobiva $y = -8.25$. Učenik zatim oklijeva jer misli kako bi trebao imati dvije vrijednosti, jednu za lokalni minimum, a drugu za lokalni maksimum. Smatra da je negdje pogriješio, ne zna kako nastaviti pa napušta tu metodu bez obzira na moguće razloge dobivanja samo jedne vrijednosti.*

Umjesto toga, računalom crta graf funkcije i pokušava pročitati točke lokalnog minimuma i maksimuma, no nije mu jasno gdje se nalazi maksimum funkcije na danom segmentu, pa bez razmišljanja napušta tu metodu.

Ukucavajući nekoliko vrijednosti u kalkulator, računa vrijednost funkcije u nekoliko točaka, no pri tome mu stalno izostaje vrijednost -8.25 *koju je ranije dobio, pa napušta i tu metodu.*

Sada pokušava riješiti zadatak izjednačavanjem funkcije s nulom, koristi poznati algoritam za rješavanje kvadratne jednadžbe i dobiva dvije vrijednosti. Iako je nesiguran, s obzirom da je dobio dvije vrijednosti, vjeruje da je to rješenje.

Izabrao je ukupno pet strategija: pronalaženje nul-točke, tri algoritma za određivanje maksimuma i rješavanje jednadžbe.

- *Svi izbori odnose se na pokušaje poznatih algoritama, a korištene su metode koje se pojavljuju u mnogim zadacima iz udžbenika.*
- *Argumenti u odabirima baziraju se samo na površinskim vezama između zadatka i poznatog algoritma.*
- *Nema analiza, procjena ili nekih drugih razmatranja kojima se provjerava je li algoritam prikladan i može li se iz njega nešto saznati ili ne.*
- *Kada nije siguran, brzo traži drugi algoritam.*

Strategija je primjeniti algoritme, no s obzirom da zna nekoliko stotina njih, ograničava ih na one koji imaju nekakve veze s informacijama u zadatku. Kako ne može pronaći veze među bitnim svojstavima, algoritme odabire na osnovi površinskih razmatranja. Nema ništa pogrešno u isprobavanju različitih algoritama, no problem je u tome što slabo shvaćanje koncepta i postupka nije dovoljno da bi napravio dobar izbor, stoga nasumično odabire algoritme iz ograničenog skupa.

3.3.5 Vođeno algoritamsko zaključivanje

U procesu učenja novog matematičkog gradiva ili u situacijama kada poznato algoritamsko zaključivanje ili algoritamsko zaključivanje ograničavanja iz nekog razloga ne funkcioniraju, postoje dva glavna izbora strategija koji su prilično različiti. Oba za cilj imaju pronalazak vanjskog izvora pomoći, ili kroz udžbenik ili pomoću neke druge osobe.

Algoritamsko zaključivanje pomoću udžbenika

Zaključivanje se zove algoritamsko zaključivanje pomoću udžbenika ako se

1. izbor strategije zasniva na identifikaciji vanjskih sličnosti između zadatka i primjera, definicije, teorema, pravila ili napomene iz udžbenika. Ta se identifikacija ne oslanja na razmatranje intrinzičnih svojstava matematičkih komponenti koje su uključene kod zaključivanja.

2. izbor strategije zasniva na pronalaženju sličnih svojstava koja se u udžbeniku pojavljuju preko primjera, definicija, teorema, pravila ili činjenica, a koji su povezani sa zadatkom. Ta se identifikacija ne oslanja na razmatranje intrinzičnih svojstava matematičkih komponenti koje su uključene kod zaključivanja.

3. umetanje strategije provodi kopiranjem postupka ili činjenica iz identificirane situacije. Nema argumentacije koja potvrđuje valjanost.

Samo jedna desetina zadataka koji se mogu naći u udžbenicima u potpunosti zahtijeva kreativno zaključivanje te se takvi zadaci nalaze na krajevima poglavlja, pripadaju među najteže u udžbeniku te do tih zadataka većina učenika ni ne dođe. Površno algoritamsko zaključivanje pomoću udžbenika dominira i često je jedini oblik zaključivanja učenika prilikom učenja.

U sljedećem je primjeru zadatak postavljen u Primjeru 3.2.2 sličan upravo jednom zadatku iz udžbenika. Mnogi učenici započinju učenje tražeći sličan riješen primjer.

Primjer 3.3.3. *Pronađi maksimum i minimum od* $f(x) = x^2 + 4x + 1$ *ako je* $x \in [-3, 0]$.

Rješenje: $f'(x) = 2x+4$. *Riješite jednadžbu* $f'(x) = 0$. $2x+4 = 0 \Rightarrow x = -2$. *Budući da* $f'(x)$ *postoji za sve* x *i* $x = -2$ *nultočka je samo od* $f'(x)$, *moramo procijeniti vrijednosti funkcije i u krajnjim točkama segmenta.*

$f(-3) = -2$, $f(-2) = -3$ *i* $f(0) = 1$. *Prema tome, imamo maksimum* $f(0) = 1$ *i minimum* $f(-2) = -3$. *Kada učenik kopira postupak iz opisanog primjera, dolazi do rješenja: maksimum* -2 *i minimum* -8.25. *Uspoređuje svoj odgovor s rješenjima u udžbeniku koja su ista, pa kreće na sljedeći zadatak.*

Kako bi se dobilo spomenuto rješenje, potrebno je:

- znati da su maksimum i minimum ekvivalenti najvećoj i najmanjoj vrijednosti (ali ne znati što ti izrazi matematički znače), kako bi prepoznali sličnost između zadatka i primjera,

- znati da su dva prikaza intervala ekvivalentni,

- znati postupak za deriviranje polinoma drugog stupnja,

- riješiti linearnu jednadžbu.

Ključno je da niti jedan korak postupka rješavanja ne podrazumijeva dublja svojstva, temeljno značenje funkcije i derivacija, a razlozi izbora baš tih koraka ne moraju biti poznati. U stvari, ne koriste se bitna matematička svojstva primjene derivacija niti se trebaju razumjeti. Potrebno je jedino poznavanje elementarnih činjenica i osnova algebre.

Algoritamsko zaključivanje uz tuđu pomoć

Dok je u nižim razredima učitelj primarni izvor pomoći, u višim je razredima to udžbenik. Pomoć učitelja ili vršnjaka može se pojaviti u više oblika pa se algoritamsko zaključivanje uz nečiju pomoć čini vrlo čestom pojavom:

- svi izbori strategija koji bi mogli biti problematični rješavatelju kontrolirani su i napravljeni od strane nekog drugog tko daje rješavatelju nepredvidljive argumente podržavajući svoje izbore strategija;
- izvođenje strategije provodi se praćenjem uputa i izvršavanjem preostalih rutinskih transformacija, a uspjeh je zajamčen zbog pomagateljeve kompetentnosti, no nema provjere.

Takvim pomaganjem učitelj, umjesto da traži razumijevanje, dopušta da poučavanje propadne jer preuzima odgovornost za rad koji bi trebao napraviti učenik i dopušta da traženo znanje nestane. Time učitelji postupno otvorena pitanja preoblikuju u zatvorena.

Primjer 3.3.4. *Učenik* 1. *razreda srednje škole ne zna kako izračunati* 15% *od* 90 *pa pita učitelja za pomoć. Učitelj pomaže tako da prvo bez riječi u učenikovu bilježnicu piše*

$$90 \cdot 0.15 \tag{3.1}$$

Učitelj: Koliko je $5 \cdot 0$*?*	*Učenik:* 0	*[Učitelj piše* 0 *u (3.1)]*
Učitelj: Koliko je $5 \cdot 9$*?*	*Učenik:* 45	*[Učitelj piše* 45 *u (3.1)]*
Učitelj: Koliko je $1 \cdot 0$*?*	*Učenik:* 0	*[Učitelj piše* 0 *u (3.1)]*
Učitelj: Koliko je $1 \cdot 9$*?*	*Učenik:* 9	*[Učitelj piše* 9 *u (3.1)]*

Množenjem koje je učitelj pisao pod (3.1) dobiva se:

$$\begin{array}{r} 450 \\ \underline{+\quad 90} \\ 1350 \end{array} \tag{3.2}$$

Učitelj: Koliko je $5+0$*?*	*Učenik:* 5	*[Učitelj piše* 5 *u (3.2)]*
Učitelj: Koliko je $4+9$*?*	*Učenik:* 13	*[Učitelj piše* 13 *u (3.2)]*

Učitelj: Gdje treba staviti decimalnu točku? *Učenik: [Tišina]*
Učitelj stavlja decimalnu točku na pravo mjesto i odlazi.

Učenik sudjeluje samo u zbrajanju i množenju jednoznamenkastih brojeva, što je gradivo osnovne škole i nema prave veze s danim problemom. Učitelj ne pokušava identificirati problem, ne objašnjava temeljne principe algoritma, ne pomaže učeniku shvatiti te principe niti razmisliti o izboru strategija rješavanja. Čini se da učenik treba pokušati zapamtiti taj algoritam i povezati ga s tim zadatkom.

4

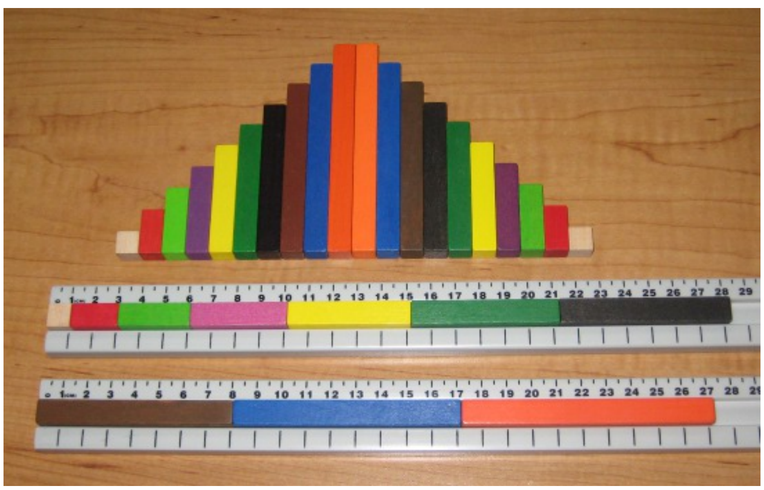
UČENJE I POUČAVANJE BROJEVA

Kada učenici krenu u srednju školu, iza sebe već imaju mnoge godine školovanja i stečenog iskustva o brojevima. Većina učenika strogo povezuje matematiku s brojevima i spremno prihvaća primjenu brojeva u stvarnim situacijama. I u osnovnoj i u srednjoj školi potreban je određeni broj vještina za sve druge matematičke domene. Do kraja će osnovne škole učenici svladati koncepte cijelih brojeva i razlomaka, razviti vještine za izvođenje operacija s brojevima te razviti sposobnost matematičkog zaključivanja pri rješavanju problema. Međutim, za većinu je učenika razumijevanje tih koncepata i vještina nesigurno. Početkom srednje škole postoji raznolik raspon kompetencija i strategija koje učenici koriste, a pokazuje se da matematičke vještine i postignuća velikog broja učenika zapravo slabe u prvom razredu srednje škole. Svaki srednjoškolski nastavnik matematike mora biti upoznat sa znanjem svojih učenika iz svake teme o brojevima. S tim saznanjem može se obratiti pažnja na učvršćivanje njihovog razumijevanja i izgradnju novog znanja kako bi se dalje razvile njihove strategije i poboljšale njihove vještine.

Nastavnici u osnovnoj školi koriste različite materijale i pomagala za učenje da bi pomogli učenicima u učenju brojeva. Ti konkretni materijali omogućuju učenicima vizualizacija ideja na bezbroj načina. Materijali su važni za povezivanje matematičkih simbola i matematičkog jezika s idejama. U početku mlađa djeca računaju napamet, zatim koriste potpisivanje, prebrojavaju objekte dodirujući ih ili ih izrađuju od prikladnih materijala kako bi ih prebrojali jednog po jednog i zbrajaju dodajući svaki put po jedan.

Djeca počinju razumijevati razlomke i decimalne brojeve koristeći materijale iz nižih razreda osnovne škole. U višim razredima osnovne škole i dalje moraju upotrebljavati konkretne materijale koji im pomažu razumjeti jednakost razlomaka i decimalnih brojeva, usporediti razlomke i decimalne brojeve te razumjeti računske operacije.

Kroz različite zadatke s primjenama, učenici razvijaju razumijevanje jako velikih i jako malih brojeva te ih uče uspoređivati iako te ideje ne moraju biti jasne mnogim učenicima koji počinju srednjoškolsko obrazovanje. Razvoj razumijevanja brojeva i vještina sa svim vrstama brojeva nastavlja se kroz srednju školu i važno je nastaviti proces razvoja jezika i simbola te vizualnu prezentaciju cijelih brojeva, razlomaka i decimalnih brojeva koristeći konkretne materijale i pomagala preporučena u osnovnoj školi, poput Cuisenaire štapića, raznobojnih štapića različite duljine koji omogućuju imitaciju osnovnih računskih operacija njihovim slaganjem.



Slika 4.1: Cuisenaire štapići

U srednjoj školi učenici učvršćuju i proširuju svoje razumijevanje brojeva potrebno za rješavanje problema i stvaranje sudova. Učenici koji razumiju brojeve trebaju biti u mogućnosti:

- računati napamet jednostavnije probleme,
- koristiti približne vrijednosti za procjenjivanje,
- razumjeti veze i odnose među brojevima i koristiti ih kada računaju,
- znati uspoređivati brojeve,

- prijeći na drugi prikaz nekog broja i
- odrediti smisao rješenja kada rješavaju problem.

Primjerice, učenici četvrtog razreda osnove škole trebali bi biti u mogućnosti napamet izračunati produkt $25 \cdot 11$ te unaprijed procijeniti da će taj produkt biti između 250 i 300. Pri tome bi u računanju produkta trebali razumjeti da se 11 može prikazati u obliku sume $10 + 1$ i kako se pri množenju s 11 mogu iskoristiti komutativnost množenja i distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje, tj. da za proizvoljan broj a vrijedi $a \cdot 11 = 11 \cdot a = (10 + 1) \cdot a = 10 \cdot a + a$.

Učenici petog razreda trebali bi znati odrediti koji je od razlomaka $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ veći te prikazati potonji razlomak kao 0.8. Pri tome bi trebali razumjeti kako se to uspoređivanje može odnositi na uspoređivanje odgovarajućih dijelova neke cjeline.

Važno je imati na umu neke od ključnih ideja za razvijanje vještina potrebnih za rad s brojevima te za razvijanje pristupa učenju koji spajaju osnovna iskustva učenika i podupiru razumijevanje matematike. Među idejama i vještinama koje su važne za matematičku pismenost i razumijevanje gradiva nastave matematike ističu se:

- pozicijski brojevni sustav,
- razlomci,
- računanje napamet,
- množenje razlomaka i decimalnih brojeva,
- dijeljenje razlomaka i decimalnih brojeva,
- omjeri,
- postotci,
- računanje s potencijama.

4.1 Pozicijski brojevni sustav

Razumijevanje vrijednosti znamenaka s obzirom na njihovu poziciju u broju temelj je računanja i uspoređivanja svih brojeva. Djeca u osnovnoj školi uče da su vrijednosti strukturirane na višekratnicima broja 10, da je nula broj koji čuva mjesto i da je decimalna točka oznaka koja razdvaja cijeli broj od decimalnog dijela. U drugim se kulturama ponekad zarez koristi umjesto točke. Korištenje pomoćnog dijagrama i ponavljanjem naglas vrijednosti pozicije prilikom čitanja decimalnog broja pomoći će učenicima koji imaju poteškoće u uspoređivanju decimala. Na primjer, broj 31.265 treba se čitati kao trideset i jedno cjelo, dvije desetinke, šest stotinki i pet tisućinki ili trideset i jedno cijelo i dvjesto šezdeset i pet tisućinki, a ne kao 31 točka 265 (Tablica 4.1). Taj će pristup također pomoći učenicima da interpretiraju velike brojeve koji se pojavljuju u medijima, na primjer, da primijete kako je 3.6 milijuna zapravo $3.6 \cdot 10^6$.

Desetice	Jedinice	Desetinke	Stotinke	Tisućinke
3	1	2	6	5

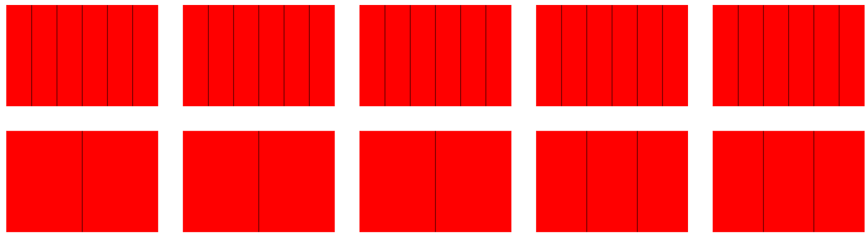
Tablica 4.1: Dijagram vrijednosti pozicija u decimalnom broju.

Često učenici imaju poteškoće u povezivanju svakodnevne upotrebe decimalnih brojeva s gradivom obrađenim u školi te velik broj učenika ima problema pri uspoređivanju decimalnih brojeva. Postoji više razloga iz kojih nastaju poteškoće pri uspoređivanju decimalnih brojeva. Jedan je od njih princip "duže je veće", prema kojem učenici koji misle da su brojevi koji imaju više znamenaka veći te koriste način razmišljanja svojstven situaciji u slučaju cijelih brojeva. Primjerice, učenik će misliti kako je 1.053 veće od 1.06, a 3.073 veće od 3.72. Taj je princip također i rasprostranjen izvor nesporazuma u radu s razlomcima. S druge strane, princip "kraće je veće" pojavljuje se često nakon što su učenici upoznati s negativnim cijelim brojevima te imaju poteškoće smjestiti decimalne brojeve manje od jedan na brojevni pravac koji je označen cijelim brojevima. Koristeći taj princip, učenik će smatrati kako je na primjer 0.4 veće od 0.457, a 5.36 veće od 5.736. Učeničko znanje decimalnih brojeva potiče se matematičkim igrama te modeliranjem problema kroz učenicima poznat kontekst, poput podjela komadića papira, kockica čokolade ili kovanica kako bi si decimalne brojeve prikazali pomoću novca.

4.2 Razlomci

Iako učenici o razlomcima uče od ranih godina školovanja, pojmovno razumijevanje i operacije s razlomcima teške su za mnoge učenike i kada dođu u srednju školu. Fokusiranje na pravila, bez razumijevanja razlomaka, izvor je mnogih nesporazuma i pogrešaka koje učenici čine.

Mnogi od njih razumiju da je razlomak dio cjeline prije nego da je razlomak također i element određenog skupa i operacija dijeljenja. Učenici u srednjoj



Slika 4.2: Podjele 5 pravokutnih pizza na 6 obitelji.

školi često netočno grafički prikazuju jednake dijelove, posebno kada pokušavaju koristiti krugove te mnogi od njih imaju poteškoće kada trebaju prikazati neprave razlomke na brojevnom pravcu.

Primjer 4.2.1. *Šest obitelji želi podijeliti 5 pravokutnih pizza. Kako treba izrezati pizze tako da svaka obitelj dobije jednak dio?*

Većina će učenika riješiti taj problem tako da će razrezati svaku pizzu na 6 *dijelova i od svake dati svakoj obitelji po jednu šestinu. Jedan će ili dva učenika u učionici vjerovatno razrezati tri pizze na dva jednaka dijela i dvije na trećine da bi dobili rezultat* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. *Ti učenici nesvjesno koriste drevni egipatski zapis razlomaka s brojnikom 1, jer su Egipćani koristili isključivo razlomke s brojnikom jednakim* 1 *te su sve razlomke zapisivali u obliku sume takvih. U tim situacijama iz stvarnog života sposobnijim učenicima može se prepustiti da sami kreiraju sličan problem i pokažu da se razlomci mogu prikazati kao suma razlomaka s brojnikom* 1.

Da bi razvili svoje razumijevanje razlomaka, učenici moraju moći vizualizirati razlomke koji su blizu 0 ili 1 ili nekog drugog poznatog razlomka, poput $\frac{1}{2}$. Imati mentalnu sliku toga da razlomci istog brojnika postaju sve manji kako nazivnik postaje sve veći, pomoći će učenicima čije je razmišljanje usmjereno u smjeru cijelih brojeva. Iz tih razloga nije pametno pristupiti učenju uspoređivanja i zbrajanja razlomaka koristeći unakrsno množenje radi svođenja na zajednički nazivnik $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}\right)$ prije nego što raspolažemo znanjem o trenutnom učeničkom razumijevanju razlomaka. Slijed učenja treba najprije nastaviti modeliranjem, koristeći materijale i brojevni pravac, te zatim prijeći na procjenjivanje i na kraju na poticanje usvajanja i učenja algoritama.

Razlomci su uvijek predstavljali izazov za učenike jer često slabo razumiju njihov koncept. Pri konceptualnom poučavanju razlomaka, modeliranje pomaže učenicima da ih lakše shvate. Najčešće korišteni modeli jesu modeli duljine, modeli površine ili prostora i modeli grupe.

Razumijevanje razlomaka podrazumijeva razumijevanje svakog koncepta koji razlomak predstavlja. Jedan je od čestih opisa razlomka "dio cjeline", uključujući primjere gdje je dio cjeline osjenčan. Pojam "dio cjeline" ugraviran je u osnovnoškolske knjige kao način prikaza razlomaka, tako da teško može biti shvaćen kako predstavlja nešto drugo. Iako je uglavnom korišten taj pojam, mnogi smatraju kako bi učenici bolje shvatili pravo značenje razlomka kada bi se ponudili i drugi opisi u njihovom obrazovanju.

Dio cjeline samo je jedno značenje razlomka i seže dalje od osjenčanog prostora. Primjerice, može predstavljati dio grupe ljudi (npr. $\frac{3}{5}$ učenika otišlo je na razredno putovanje) ili može predstavljati dio dužine (npr. hodali smo $3\frac{1}{2}$ km).

Mjerenje podrazumijeva identificiranje duljine i korištenje te duljine kao mjerni dio za određivanje cjelokupne dužine predmeta. Za primjer, u razlomku $\frac{5}{8}$ može se uzeti mjerni dio $\frac{1}{8}$ i umnožiti ga pet puta kako bi se prikazalo da je potrebno pet takvih dijelova da se dosegne $\frac{5}{8}$. Taj koncept fokusira se na to koliko je puta potrebno koristiti taj dio, a ne koliko se mnogo dijelova pojavljuje, što je slučaj u situacijama s dijelom cjeline.

Koncept dijeljenja jedan je od načina korištenja razlomaka. Recimo da trebamo podijeliti 10 kn na četvero ljudi. To neće biti scenarij "dijela cjeline", ali i dalje se podrazumijeva da će svaka osoba dobiti $\frac{1}{4}$ novca ili $2\frac{1}{2}$ kn. Dijeljenje se, nažalost, uglavnom ne veže uz razlomke. Učenici bi trebali razumjeti i vladati različitim zapisima razlomaka, kao što su $\frac{10}{4}$, $10 : 4$, $\frac{5}{2}$ i $2\frac{1}{2}$.

Razlomci mogu služiti i za iskazivanje *omjera*, kao u $\frac{4}{5}$ ukupne površine ili $\frac{2}{3}$ publike imalo je rekvizite. Takve situacije prikazuju razlomak kao cjelovit broj, a učenici mogu koristiti računanje napamet kako bi došli do odgovora. Istraživači govore da takav pristup nije dovoljno prisutan u nastavnom planu te da samo znanje o prikazivanju i zapisivanju razlomaka ne pruža učenicima adekvatno znanje o operacijama s razlomcima, koje je potrebno za neka druga područja nastavnog plana gdje se pojavljuju razlomci. Koncept omjera samo je još jedan način korištenja razlomaka. Primjerice, omjer $\frac{1}{4}$ može značiti da je vjerojatnost događaja 1 naprama 4. Omjeri mogu biti dio dijela ili dio cjeline. Na primjer, omjer $\frac{3}{4}$ može biti udio onih koje nose jakne (dio) prema onima koji ih ne nose (dio); ili može biti dio cjeline, što znači da je odnos onih koji nose jaknu (dio) naprema cijelog razreda (cjelina) jednak $\frac{3}{4}$. U radu s omjerima, učenici moraju iskusiti odnos dio-dio i dio-cjelina, što zahtijeva usmjeravanje pažnje na kontekst.

Učenici izgrađuju znanje temeljeno na prijašnjem, što znači da kada se susretnu s razlomcima, koriste ono što znaju o prirodnim brojevima kako bi došli do rješenja. Njihovo prijašnje znanje o prirodnim brojevima ujedno i poboljšava i smanjuje efikasnost rada s razlomcima. Za nastavnika je važno pomoći učenicima vidjeti kako razlomci funkcioniraju i kako se razlikuju od prirodnih brojeva. Sljedeća lista pokazuje neke od pogrešnih upotreba prirodnih brojeva u razlomcima:

1. Učenici misle da su brojnik i nazivnik različite vrijednosti. Teško im je pojmiti da je $\frac{3}{4}$ jedan broj. Pronalaženje razlomaka na brojevnom pravcu ili ravnalu može učenicima pomoći s tim problemom. Uz to treba izbjegavati korištenje fraze "tri kroz četiri" (osim ako se ne govori o omjerima ili vjerojatnosti) ili "tri iznad četiri", već treba koristiti izraz "tri četvrtine".

2. U poimanju brojeva kao odvojenih, učenici mogu misliti da $\frac{2}{3}$ znači bilo koja dva dijela, a ne dva jednaka dijela trećine.

3. Učenici misle da je razlomak $\frac{1}{5}$ manji od $\frac{1}{10}$, jer je 5 manje od 10. Slike i vizualni primjeri mogu pomoći učenicima svrstati razlomke u kontekst i pri njihovom razumijevanju. Primjerice, pitajmo učenike žele li radije izaći van na $\frac{1}{42}$ sata, $\frac{1}{4}$ sata ili $\frac{1}{10}$ sata.

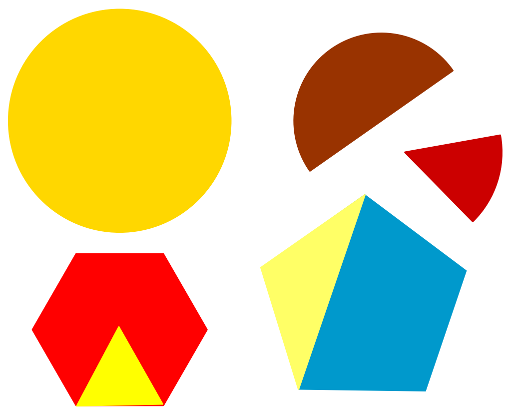
4. Učenici pogrešno primjenjuju pravila za računanje s cijelim brojevima i za računanje s razlomcima. Na primjer, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Procjena može pomoći učenicima shvatiti kako takav zbroj nije točan.

Ključna ideja o razlomcima koju bi učenici trebali shvatiti jest da razlomak ne govori ništa o veličini cjeline ili veličini njezinih dijelova. On nam samo govori o odnosu između cjeline i njezinih dijelova. Na primjer, moguće je da $\frac{1}{3}$ veće čokolade bude veća od $\frac{1}{2}$ manje čokolade iako se radi o većem udjelu jedne cjeline.

4.2.1 Modeli razlomaka

Pri učenju razlomaka važna je upotreba modela. Pravilno korišteni modeli mogu pomoći učenicima shvatiti ideje koje se inače koriste samo zapisane simbolima. Ponekad je korisno ponoviti aktivnost s dvama različitim modelima, što dovodi do toga da će sa stajališta učenika to biti dvije različite aktivnosti.

Različiti modeli nude različite prilike za učenje. Prostorni modeli pomažu učenicima sagledati dijelove cjeline. Modeli na brojevnom pravcu pokazuju da između svaka dva razlomka postoji još neki razlomak. Neki učenici mogu



Slika 4.3: Modeli površine.

potpuno razumjeti jedan koncept, a drugi ne. Korištenje odgovarajućih modela i različitih vrsta modela proširuje i produbljuje shvaćanje razlomaka.

Modeli površine

Razlomci mogu predstavljati dijelove površine ili nekog područja. Postoji mnogo modela površine, kao što je prikazano na Slici 4.3.

Najčešće korišteni modeli površine jesu krugovi. Jedna od prednosti takvih kružnih modela jest što naglašavaju koncept dijela-cjeline i odnos jednog dijela unutar cjeline. Ostali modeli prikazuju kako različiti oblici mogu biti cjelina.

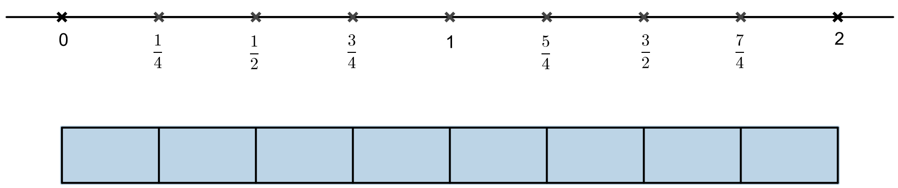
Modeli duljine

Modelima duljine uspoređuju se duljine i mjere umjesto površina. To mogu biti nacrtane i podijeljene linije ili stvarni fizički materijal koji se uspoređuje na osnovu duljine.

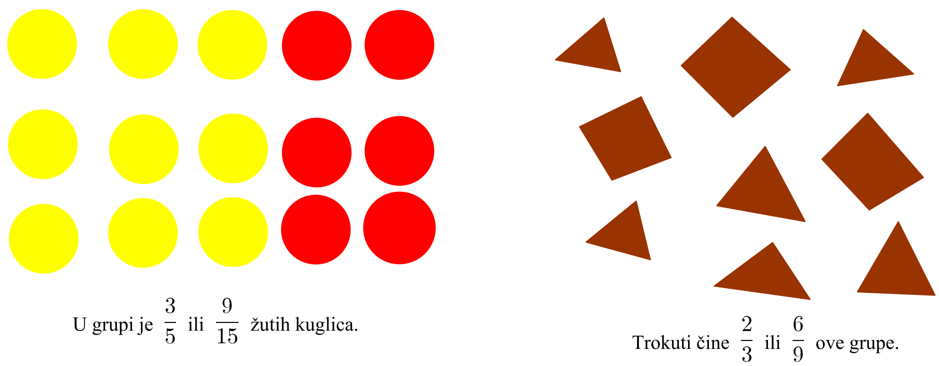
Brojevni pravac odličan je model za mjerenje. Modeli prikazani na pravcu usko su povezani sa stvarnim životnim situacijama u kojima se razlomci koriste. Primjerice, glazba predstavlja odličnu priliku za istražiti polovine, četvrtine, osmine i šesnaestine.

Brojevni pravac također naglašava da je razlomak jedinstven broj zbog svog odnosa i položaja prema drugim brojevima, što nije slučaj pri korištenju prostornih modela. Bitno je za napomenuti da se kroz brojevni pravac uči da između svaka dva broja postoji još jedan broj.

Modeli grupe



Slika 4.4: Modeli duljine.



Slika 4.5: Modeli grupe.

U tim modelima cjelina je shvaćena kao skup više individualnih elemenata (objekata), a podgrupe te iste cjeline čine razlomke. Na primjer, 3 objekta čine $\frac{1}{4}$ grupe od 12 objekata, a skupina od 12 u tom primjeru predstavlja cjelinu.

Ideja da se grupa objekata gleda kao cjelina predstavlja teškoću za neku djecu. Učenici će se radije usredotočiti na veličinu grupe nego na broj jednakih objekata u cjelini. Primjerice, ako 12 objekata čini cjelinu, onda je skupina od 4 objekta $\frac{1}{3}$, a ne $\frac{1}{4}$ jer 3 jednake grupe čine cjelinu.

Modeli grupe pomažu u uspostavljanju veze s korištenjem razlomaka i omjera u životnim situacijama.

Važno je zapamtiti kako učenici moraju biti sposobni koristiti razlomke kroz modele. Ako nikada nisu vidjeli razlomke korištene u modelu duljine, imat će poteškoća riješiti bilo koji zadatak u tom kontekstu. Kao nastavnici, nećemo znati razumiju li stvarno značenje razlomka kao što je $\frac{1}{4}$ ako ih nismo vidjeli kako taj razlomak koriste kroz različite modele i u različitom kontekstu.

Najizravniji način za ispitivanje znanja učenika po pitanju razlomka jest da im damo papir, presavijemo ga na trećine i na svakom vrhu napišemo površina, duljina i grupa, te im postavimo zadatak pokazati sliku i za svaki od triju načina napisati rečenicu koja opisuje dani razlomak.

4.2.2 Korištenje jezika i simbola razlomaka

Simboli razlomaka predstavljaju kompleksan skup koji često zbunjuje djecu. Korisno je potrošiti dio svog vremena objašnjavajući učenicima što nam govori brojnik, a što nazivnik.

Brojanje razlomačkih dijelova: Iteracija

Brojanje razlomačkih dijelova pomaže postaviti u odnos više dijelova s cjelinom, što čini osnovu za oba dijela razlomka. Učenici trebaju razmišljati o brojanju razlomačkih dijelova na isti način kako razmišljaju kada broje jabuke ili bilo što drugo. Ako znate koji dio brojite, jasno vam je kada dolazi 1, kada dolazi 2 i tako dalje.

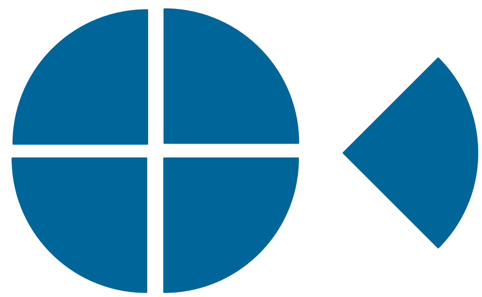
Takvo brojanje, odnosno ponavljanje dijelova naziva se iteracija. Kao i podjela, iteracija je bitna za razumijevanje i korištenje razlomaka.

Koncept iteracije najjasniji je kada se fokusira na ove dvije ideje o razlomačkim simbolima:

- gornji broj broji (brojnik),
- donji broj govori ono što se broji (nazivnik).

Iteracija ima najviše smisla kod modela duljine jer je najsličnija mjerenju. Učenici mogu sudjelovati u različitim zadacima koji uključuju iteraciju dužine, napredujući s povećavanjem težine. Za primjer možemo dati učenicima traku papira i reći im da je to $\frac{3}{4}$ cjeline. Pitajmo ih da pronađu $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, 3 duljine cjeline i tako dalje. Kako bi ih pronašli, učenici će morati podijeliti dio u 3 grupe kako bi odredili $\frac{1}{4}$, a potom iterirati (izbrojati) četvrtine kako bi pronašli potrebne razlomke.

Iteriranje se može koristiti i u modelima površine. Pokažimo učenicima neke kružne razlomačke dijelove u grupama, kao što je prikazano na Slici 4.6. Za svaku grupu reći ćemo učenicima koji je oblik dijela prikazan i izbrojat ćemo ih zajedno: "jedna-četvrtina, dvije-četvrtine, tri-četvrtine, četiri-četvrtine, pet-četvrtina." Pitat ćemo ih, "Ako imamo pet četvrtina, je li to više od cjeline, manje od cjeline



Slika 4.6: Grupe razlomačkih dijelova.

ili, pak, jednako?" Kako bismo još više naglasili veličinu dijelova, možemo ih izgovarati: "jedna $\frac{1}{4}$, druga $\frac{1}{4}$, treća $\frac{1}{4}$, četvrta $\frac{1}{4}$" i tako dalje.

Dok učenici budu brojali grupe, objasnit ćemo odnos dijelova prema cjelini. Radit ćemo neformalne usporedbe među različitim grupacijama, "Kako smo zamalo dobili dvije cjeline sa sedam četvrtina, a nemamo jednu cjelinu s deset dvanaestina?" Tu priliku možemo iskoristiti za verbalne temelje mješovitih razlomaka: "Koji je drugi način na koji možemo reći sedam trećina?" (Dvije cjeline i još jedna trećina ili jedna cjelina i četiri trećine.)

Primjer 4.2.2. *Učenicima dajmo skupinu razlomačkih dijelova (sve jednake veličine) i napomenimo im kakvu vrstu razlomaka imaju. Dijelovi mogu biti nacrtani ili fizički modeli. Zadatak je odlučiti je li skupina manja, jednaka ili veća od cjeline. Zatražimo od učenika da nacrtaju ili simbolima prikažu svoj odgovor.*

Takvu aktivnost možemo napraviti s nekoliko različitih modela razlomaka, a nakon toga bez modela, koristeći samo imaginaciju. Iteracija se može koristiti i u modelu grupe iako to zna biti zbunjujuće za učenike. Na primjer, pokažemo skupinu dvobojnih točaka i upitamo: "Ako je 5 točaka jedna četvrtina, koliko je 15 točaka?" Ostala pitanja mogu biti poput: "Tri točke čine $\frac{1}{8}$ *grupe; koliko je velika grupa?" ili "Ako 20 točaka predstavlja* $\frac{2}{3}$ *grupe, koliko je velika grupa?"*

Mijenjanje konteksta kao što su ljudi, bomboni, bojice ili bilo koji drugi predmet blizak učenicima može im pomoći u boljem razumijevanju.

Učenici koji su jako dobri u rješavanju takvih zadataka mogu sami osmisliti svoje zadatke i prezentirati ih razredu.

Notacija razlomaka

Način je na koji bilježimo razlomke s gornjim i donjim brojem te crtom između konvencionalan, arbitražni dogovor za predstavljanje razlomaka, zato je to jedan od koncepata koji govorimo učenicima. Međutim, razumijevanje konvencije može biti razjašnjeno davanjem primjera koji će ohrabriti učenike da nam kažu što predstavlja gornji, a što donji broj.

Predstavimo učenicima na nekom modelu nekoliko različitih situacija razlomačkih dijelova i neka učenici izbroje dane dijelove. Nakon svakog brojanja zapišimo točan razlomak, s naznakom da se tako bilježi simbol. Uključimo i grupe koje imaju više od jednoga cijelog, ali zapisujmo ih kao jednostavne ili "nepravilne" razlomke, a ne kao mješovite brojeve. Pri tome je dobro uključiti barem dva razlomka s istim brojnicima kao što su $\frac{4}{8}$ i $\frac{4}{3}$. Slično tomu, uključimo i nekoliko razlomaka s istim nazivnikom. Nakon što učenici izbroje, mogu se postaviti pitanja poput "Što nam govori donji broj u razlomku? Što nam govori gornji broj u razlomku?"

Navedimo neka od standardnih učeničkih objašnjenja gornjeg i donjeg broja:

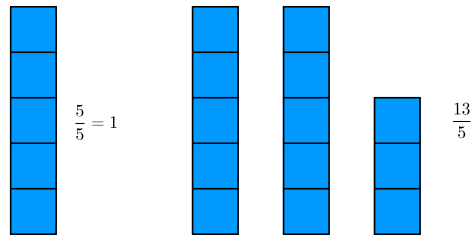
- Gornji broj: "Ovo je broj koji se broji. Govori nam koliko dijelova ili podjela imamo. Govori nam koliko ih je izbrojano. Govori nam o koliko dijelova govorimo. On broji dijelove ili podjele."

- Donji broj: "Govori nam što se broji. Govori nam koliko je velik dio. Ako je 4, to znači da brojimo četvrtine, a ako je 6, to znači da brojimo šestine i tako dalje."

Takva interpretacija značenja brojnika i nazivnika može nam biti čudna. Često se govori da gornji broj kazuje "koliko mnogo". (Ta fraza čini se nedovršenom. Koliko mnogo čega?) Donji nam broj govori "koliko je dijelova potrebno za cjelinu". To se može činiti točnim, ali može i zbuniti. Na primjer, $\frac{1}{6}$ dijela jest uglavnom odrezana iz torte bez dodatnih rezova u preostalih $\frac{5}{6}$ torte. To što se torta sastoji od samo dvaju dijelova ne mijenja činjenicu da je dio $\frac{1}{6}$ torte. Ili, ako je pizza odrezana u 12 dijelova, dva dijela i dalje čine $\frac{1}{6}$ pizze. Nijedan od tih donjih brojeva ne govori nam koliko dijelova čini cjelinu.

Razlomci veći od 1

Razlomke manje od 1 i veće od 1 ne bi trebalo razdvajati. Prečesto učenici nisu izloženi brojevima većim od 1 (npr. $\frac{5}{2}$ ili $4\frac{1}{4}$) i onda kada ih dodamo mogu učenicima djelovati zbunjujuće.



Slika 4.7: Izgradnja razlomka većeg od jedan.

Pojam nepravilan razlomak koristi se za opis razlomaka, kao što je $\frac{5}{2}$, koji su veći od 1. Taj pojam može biti zbunjujuć jer riječ nepravilan implicira da takav zapis nije prihvatljiv, što nije slučaj, tj. u algebri se često preferira takav zapis. Umjesto toga, pokušajmo ne koristiti tu frazu već umjesto nje koristimo "razlomak" ili "razlomci veći od 1". Ako koristite taj izraz, onda recite učenicima da nije netočno zapisati razlomke veće od 1 kao jedan jedinstven razlomak.

Ako smo brojali razlomačke dijelove manje od cjeline, učenici već znaju tako zapisati $\frac{13}{5}$ ili $\frac{13}{6}$. Učenicima ćemo reći da koriste model za ilustraciju tih vrijednosti i pronađu ekvivalentan prikaz. Pri tome učenici najčešće kreću od identifikacije $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ te dalje grade koristeći taj uzorak. Ponavljajući takva iskustva u gradnji i rješavanju sličnih zadataka dovest će učenike do toga da vide uzorak množenja i dijeljenja koji odražavaju algoritam za kretanje između tih dvaju oblika. Kontekst može pomoći učenicima u razumijevanju ekvivalentnosti tih dvaju načina zapisivanja razlomaka.

Primjer 4.2.3. *Pokažimo učenicima vrč koji može napuniti šest čaša soka. Možemo koristiti i prave vrčeve i čaše prilikom objašnjavanja. Postavimo pitanje: "Ako imam $3\frac{1}{2}$ vrča, koliko čaša mogu napuniti?" "Ako imamo 16 učenika u razredu, koliko je vrčeva potrebno?" Promijenite po volji količinu soka koju jedan vrč može napuniti kako biste uključili i druge razlomke.*

Nakon nekog vremena izazovimo učenike da otkriju dva ekvivalentna oblika bez korištenja modela. Dobro objašnjenje za $3\frac{1}{4}$ može biti da postoje 4 četvrtine u jednoj cjelini, tako da je 8 četvrtina u dvjema cjelinama i 12 četvrtina u trima cjelinama. Dodatna četvrtina čini 13 četvrtina ili $\frac{13}{4}$. Obratite pažnju kakvu ulogu ovdje ima koncept iteracije.

Slika 4.8: Dvorište gospodina Vrtlarića.

Ne forsirajmo tradicionalni algoritam (pomnožite donji broj s cijelim brojem i dodajte gornji broj) jer se to može kositi s razumijevanjem učenika o odnosu tih prikaza. Taj postupak lako može biti razvijen od strane učenika njihovim riječima i s potpunim razumijevanjem praćenjem uzoraka u njihovom radu.

Procjena razumijevanja

Predstavimo vježbe koje od učenika traže demonstraciju svog razumijevanja razlomačkih dijelova kao i značenja gornjega i donjega broja u razlomku. Modeli su korišteni za prikaz cjelina i dijelova cjeline.

Dva ili tri zahtjevna zadatka o dijelu i cjelini mogu biti odlični za procjenu izvedbe učenika. Zadaci moraju biti prezentirani razredu u istom obliku kao što su tu prikazani. Fizički su modeli uglavnom najbolji način za zadatke u kojima učenici mogu koristiti pristup pokušaja i pogrešaka kako bi došli do svojih rješenja. Kao i sa svim zadacima, mora biti jasno da je potrebno objašnjenje svakog odgovora. Kako učenici budu gradili svoja rješenja možemo hodati među njima promatrajući i postavljajući pitanja kako bismo procijenili njihovo razumijevanje.

Bilo bi dobro osmisliti jednostavne priče za svaki problem ili kontekst za svako pitanje.

Primjer 4.2.4. *Gospodin Vrtlarić dovršio je* $\frac{3}{4}$ *svoga dvorišta koje je pravokutnog oblika, prikazanog na Slici 4.8. Na slici ucrtajte dio koji mogao predstavljati dovršeno dvorište.*

Pitanja su koja uključuju jedinične razlomke uglavnom najlakša. Najteži zadaci najčešće uključuju razlomke veće od 1. Npr., ako je 15 dijelova $\frac{5}{3}$ cijele grupe, koliko je dijelova u cijeloj grupi? Međutim, u svakom pitanju jedinični razlomak igra bitnu ulogu. Ako imamo $\frac{5}{3}$ i želimo cjelinu, prvo moramo naći $\frac{1}{3}$.

Pitanja su o dijelu cjeline zahtjevna, ali vrlo korisna kao pomoć učenicima za razumijevanje brojnika i nazivnika. Također su dobra za procjene razumijevanja učenika o tome što predstavlja brojnik, a što nazivnik, s obzirom na to da zadaci traže od učenika da koriste ta značenja, a ne samo recitiraju njihove definicije.

4.2.3 Procjene s razlomcima

Fokus na razlomačkim dijelovima bitan je za početak, ali svijest o broju koji razlomak predstavlja zahtijeva da učenici imaju intuiciju za razlomke. Trebali bi znati koliko je određeni razlomak velik te biti sposobni reći koji je od dvaju razlomaka veći.

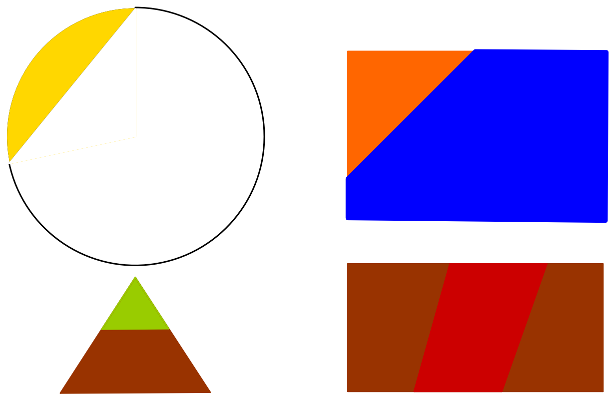
Kao i s cijelim brojevima, učenici su manje sigurni i manje sposobni procijeniti nego zbrajati. Zbog toga im je potrebno pružiti mnogo prilika za procjene. Čak i u dnevnim razgovorima u razredu možemo raditi na procjeni s razlomcima, postavljajući pitanja kao što su "Koliki dio (razlomak) našega razreda nosi košulju?"

Primjer 4.2.5. *Neka su dani likovi kao na Slici 4.9. Neka svaki učenik napiše razlomak za koji smatra da je dobra procjena osjenčanog dijela lika na slici. Poslušajmo ideje nekoliko učenika i upitajmo ih je li procjena dobra. Ne postoji jedan točan odgovor, ali bi odgovori trebali biti otprilike točni. Ako djeca imaju problema s pravilnom procjenom, upitajmo ih misle li da je odgovor bliži* 0, $\frac{1}{2}$ *ili* 1.

Najvažnije su referentne točke za procjenu razlomaka 0, $\frac{1}{2}$ ili 1. Razlomke manje od 1 jednostavno usporedimo s nekim od ovih triju brojeva, što će nam dati mnogo informacija. Na primjer, $\frac{3}{20}$ malen je broj, blizu 0, dok je $\frac{3}{4}$ između $\frac{1}{2}$ i 1. Razlomak $\frac{9}{10}$ je puno bliže 1. Bilo koji razlomak veći od 1 može se prikazati kao suma cijelog broja i broja manjeg od 1 te su zbog toga iste referentne točke jednako od pomoći: $3\frac{3}{7}$ jest približno $3\frac{1}{2}$.

Sposobnost prepoznavanja koji je od dvaju razlomaka veći još je jedan aspekt razvoja osjećaja za rad s razlomcima. Ta sposobnost izgrađena je oko koncepta razlomaka, a ne na algoritamskoj vještini.

Djeca imaju vrlo čvrsto utemeljeno razmišljanje o brojevima, što može uzrokovati poteškoće s relativnim veličinama razlomaka. Prema njihovom iskustvu veći brojevi znače "više", što se može prevesti kao: "Sedam je više od četiri, što znači da bi sedmine trebale biti veće od četvrtina". Obrnut odnos između broja



Slika 4.9: Zadaci za procjenu osjenčanog dijela.

dijelova i veličine dijelova ne može biti izrečen nego mora biti samostalan proces razmišljanja svakog učenika utemeljen na njegovom iskustvu.

U radu na primjerima učenici mogu primijetiti da veći donji broj znači manji razlomak, ali to nije pravilo koje treba zapamtiti. Povremeno se podsjetite na tu osnovnu ideju. Djeca će shvatiti jednoga dana, ali se opet vratiti na svoje razmišljanje o velikim i malim nakon nekoliko dana.

Pristup koji se uglavnom koristi za uspoređivanje razlomaka jest pronalaženje zajedničkih nazivnika i unakrsno množenje. To može biti učinkovito za dobivanje točnih rezultata, ali ne zahtijeva nikakvo razmišljanje o stvarnoj veličini razlomaka. Ako naučimo djecu tim pravilima prije nego što su imali prilike razmisliti o relativnim veličinama različitih razlomaka, male su šanse da će razviti osjećaj za veličinu razlomka. Aktivnosti vezane uz usporedbe mogu odigrati bitnu ulogu u razvoju koncepta relativnih veličina razlomaka kod djece. Cilj je promišljanje, a ne algoritamske metode dobivanja točnog odgovora. Pretpostavimo da ne znamo za zajednički nazivnik ili unakrsno množenje. Navedimo neke od strategija za uspoređivanje razlomaka koji se tada mogu koristiti.

- Više dijelova jednake veličine (isti nazivnik). Za usporedbu $\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{5}$ razmišljamo kao da imamo 3 nečega i 5 nečega od iste stvari.

- Isti broj dijelova, ali dijelovi su različite veličine (isti brojnici). Uzmimo u obzir slučaj uspoređivanja $\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{7}$. Ako je cjelina podijeljena u 7 dijelova, dijelovi će biti manji nego da je podijeljena u 4 dijela. Djeca će možda izabrati $\frac{3}{7}$ kao veći jer je 7 više od 4, a brojnici su jednaki.

- Više i manje od jedne polovine i jednog cijelog. Razlomački parovi $\frac{3}{7}$ naprama $\frac{5}{8}$ i $\frac{5}{4}$ naprama $\frac{7}{8}$ ne pripadaju nijednom od prethodnih procesa razmišljanja. U prvome je paru $\frac{3}{7}$ manje od pola broja sedmina potrebnih za cjelinu, tako da je $\frac{3}{7}$ manje od polovine. Slično tomu, $\frac{5}{8}$ više je od pola. Dakle, $\frac{5}{8}$ jest veći razlomak. Drugi je par određen time da je jedan razlomak manji od 1, a drugi veći od 1.

- Blizina jednoj polovini ili jednoj cjelini. Zašto je $\frac{9}{10}$ veće od $\frac{3}{4}$? Svaki od tih dvaju razlomaka jest za jedan razlomački dio udaljen od jedne cjeline, a desetine su manje od četvrtina. Slično tomu, primijetite da je $\frac{5}{8}$ manje od $\frac{4}{6}$ jer je samo za $\frac{1}{8}$ više od polovine, dok je $\frac{4}{6}$ za šestinu više od polovine.

Važno je da smo upoznati s tim neformalnim strategijama uspoređivanja i koristimo ih kao glavnu komponentu svog osjećaja za brojeve, kako bismo mogli pomoći i djeci u razvijanju svog osjećaja.

Zadaci koje sami osmislimo za učenike trebali bi im pomoći u razvoju tih strategija, a, po mogućnosti, i drugih metoda uspoređivanja dvaju razlomaka. Važno je da ideje dolaze od učenika. Učenje o "četirima načinima za usporedbu razlomaka" bilo bi samo dodavanje četiriju dodatnih misterioznih pravila, te kao takvo ne bi pomoglo učenicima u razvoju osjećaja za brojeve.

Za razvoj tih ideja usporedbe razlomaka izaberimo parove razlomaka koji će zahtijevati korištenje različitih strategija uspoređivanja. Prvi dan, na primjer, možemo dati dva para s istim nazivnikom i jedan s istim brojnikom. Drugi dan možemo izabrati parove u kojima je brojnik za jedan manji od nazivnika.

Koristeći model površine ili brojevnog pravca može se pomoći učenicima koji se bore sa samostalnim zaključivanjem. Potrebno je više se bazirati na zaključivanje učenika i povezati ga s vizualnim modelima.

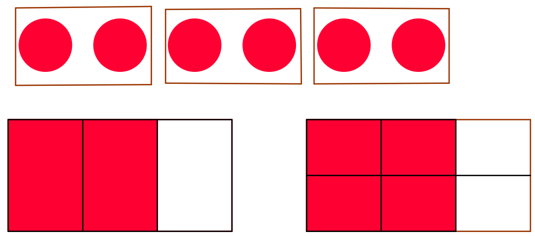
Primjer 4.2.6. *Izaberimo 4 ili 5 razlomaka koje učenici trebaju poredati od najmanjeg do najvećeg. Neka za svaki otprilike procijene gdje bi se trebao nalaziti na brojevnom pravcu koji je označen samo s 0 i 1. Možemo koristiti i papir kao brojevni pravac.*

Učenici mogu usporediti svoje odgovore s drugima i objasniti kako su rasporedili razlomke.

Za postavljanje razlomaka na brojevni pravac učenici sami moraju procijeniti veličinu razlomka za njihov poredak.

Ekvivalentni razlomci

Kako znamo da je $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$? Neki su od mogućih odgovora:



Slika 4.10: Modeli za pojašnjenje ekvivalentnosti razlomaka $\frac{4}{6}$ i $\frac{2}{3}$.

1. Jednaki su jer možemo skratiti (pojednostavniti) razlomak $\frac{4}{6}$ i dobiti $\frac{2}{3}$.

2. Ako imamo skup od 6 predmeta i uzmemo 4, dobivamo $\frac{4}{6}$. No, od 6 predmeta možemo načiniti 3 grupe, a uzeti 4 predmeta isto je što i uzeti dvije grupe od postojećih triju. Prema tome, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3. Krenemo li s $\frac{2}{3}$, možemo pomnožiti brojnik i nazivnik istim brojem te dobiti rezultat $\frac{4}{6}$, pa su ti razlomci jednaki.

4. Ako imamo četverokut prerezan u tri dijela, a osjenčamo 2, to čini osjenčanim $\frac{2}{3}$. Ako prerežemo sva 3 dijela po pola, to će značiti da su mu 4 dijela osjenčana, a ukupno ih je 6. To je $\frac{4}{6}$, pa vrijedi jednakost.

Svaki je od tih odgovora točan. Odgovori 2 i 4 konceptualni su, iako ne toliko učinkoviti. Odgovori s postupkom, poput 1 i 3, učinkoviti su, ali ne nude konceptualno razumijevanje. Svi učenici bi u dogledno vrijeme trebali biti sposobni napisati ekvivalentan razlomak za zadani razlomak. U isto vrijeme, postupak ne bi trebao biti poučavan niti korišten dok učenici ne budu razumjeli što rezultat znači. Treba uzeti u obzir koliko se različitima čine koncept i postupak.

Koncept: dva su razlomka ekvivalentna ako su reprezentacija iste količine (kvantitete), tj. ako su isti broj.

Postupak: da bismo dobili ekvivalentan razlomak, treba pomnožiti (ili podijeliti) gornji i donji broj s istim brojem, različitim od nule.

Ako je u učionici fokus na zadacima, odnosno problemima, učenici mogu shvatiti ekvivalentne razlomke i razviti konceptualno bazirane algoritme.

4.2.4 Računanje s razlomcima

Važno je biti sposoban računati s razlomcima, prvenstveno u svrhu davanja procjena i za razumijevanje računanja u algebri, mjerenju i drugim matematičkim područjima.

Bitno je učenicima dati mnogo prilika za razvijanje osjećaja za razlomke prije i tijekom poučavanja o zajedničkim nazivnicima i drugim računskim postupcima. Ima smisla odgoditi računanje i rad na konceptima ako učenici nisu pojmovno spremni. Pažnja koja je prijevremeno usmjerena na pravila za računanje s razlomcima ima niz ozbiljnih nedostataka. Nijedan od algoritama ne pomaže učenicima razmišljati o računskim operacijama i što one znače. Kada učenici slijede postupak koji ne razumiju, nemaju način za procjenjivanje svojih rezultata kako bi vidjeli imaju li oni smisla.

Nadalje, savladavanje se slabo shvaćenog algoritma u kratkom roku brzo izgubi. Kada se izmiješaju, različiti postupci za svaku računsku operaciju uskoro postanu besmislena zbrka. Učenici pitaju: "Trebam li zajednički nazivnik ili samo zbrajam ili množim donje brojeve?" "Koji broj zamjenjujemo, prvi ili drugi?" Kada su brojevi u zadatku neznatno promijenjeni, na primjer, pojavljuju se mješoviti brojevi, učenici misle da se algoritam ne može primjeniti.

Najviše pažnje u radu s razlomcima i decimalnim brojevima trebalo bi posvetiti razvoju smisla za brojeve i neformalnim pristupima zbrajanju i oduzimanju. Učenici bi trebali proširiti svoje vještine kako bi uključili sve računske operacije s razlomcima, decimalnim brojevima i postotcima.

Prilikom poučavanja računskih operacija s razlomcima treba odgoditi učenje algoritamskih postupaka dok ne postane jasno da su učenici spremni. Učenici mogu postati dovoljno vješti korištenjem neformalnih metoda koje su "izmislili", a koje razumiju. Sljedeće smjernice trebaju se imati na umu kada se razvijaju strategije za računanje s razlomcima:

1. Početi s jednostavnim kontekstualnim zadacima. Ono što želimo jest kontekst, kako za značenje računske operacije tako i za razlomke koji su u to uključeni.

2. Povezati značenje računanja s razlomcima s računanjem s prirodnim brojevima. Kako bi učenici shvatili što bi $2\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ moglo značiti, dobro je krenuti od pitanja "Što znači $2 \cdot 3$?", polako prelazeći na množenje razlomka s razlomkom. Poimanja su svake operacije ista, a korist se može dobiti povezivanjem s računskim operacijama s prirodnim brojevima, eksplicitno raspravljajući o tome što je slično i što je različito.

3. Dozvolimo da procjenjivanje i neformalne metode igraju veliku ukogu u razvoju strategija. "Treba li $2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ biti više ili manje od 1? Više ili manje od 2? Procjenjivanje zadržava fokus na značenju brojeva i računskih operacija, potiče promišljanje i pomaže izgraditi neformalan smisao za brojeve s razlomcima. Možemo li objasniti dobivanje istog rezultata bez korištenja standardnog algoritma? Jedan je od načina primijeniti načelo distributivnosti, dijeljenjem mješovitog broja i množenjem obaju dijelova s $\frac{1}{4}$: $2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

4. Istražimo svaku od računskih operacija uz pomoć primjera. Koristimo različite primjere. Neka učenici opravdaju svoja rješenja korištenjem primjera, uključujući i jednostavne vlastite crteže. Ideje će pomoći djeci naučiti razmišljati o razlomcima i računskim operacijama, pridonijeti misaonim metodama i osigurati koristan temelj jednom kada dođu do standardnih algoritama.

Razvoj bi osjećaja za razlomke svakako trebao uključivati procjenjivanje zbroja razlomaka i njihovih razlika, čak prije nego što se uvedu strategije računanja. Sljedeća aktivnost može se redovito izvoditi kao kratka uvodna aktivnost za cijeli razred za bilo koju lekciju o razlomcima.

Primjer 4.2.7. *Učenicima kažemo kako će procjenjivati zbroj ili razliku dvaju razlomaka. Trebaju odlučiti samo je li točno rješenje manje ili veće od 1. Preko projektora, ne duže od otprilike deset sekundi, pokažemo zadatak zbrajanja ili oduzimanja razlomaka koji uključuje dva razlomka. Učenici na papiru pišu svoj odgovor. Riješimo nekoliko zadataka u nizu. Tada se vratimo na svaki zadatak i raspravimo o procjeni za koju su se učenici odlučili.*

Aktivnost opisana u Primjeru 4.2.7 uvod je za složenije zadatke. Kada su učenici spremni za teži izazov, možemo odabrati iz sljedećih varijacija:

- Koristimo konačan rezultat koji je drugačiji od 1. Na primjer, učenici trebaju procijeniti hoće li rezultat biti veći ili manji od $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2$ ili 3.

- Odaberimo i razlomke manje od 1 i razlomke veće od 1. Neka učenici procjenjuju najbližu cjelobrojnu vrijednost.

U raspravama koje će uslijediti nakon tih vježbi procjenjivanja, pitajmo učenike misle li kako je točan odgovor veći ili manji od procjene koju su dali. U većini slučajeva učeničke procjene ne bi trebale biti mnogo veće, odnosno manje od $\frac{1}{2}$ u usporedbi s točnim zbrojem ili razlikom. Na primjer, zadatak poput $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

trebao bi se riješiti napamet s lakoćom jer učenici mogu zamisliti $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$ ili mogu koristiti strategije rastavljanja, kao što je $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Kako biste procijenili rješenje zadatka $3\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$? Koristeći tehniku procjenjivanja u kojoj zaokružujete jedan faktor na viši, a drugi na niži broj, taj rezultat može se procijeniti kao $4 \cdot 2$. Ta jednostavna procjena može biti sve što je potrebno u stvarnom okruženju. Također je dovoljno dobra za pomoć učenicima pri utvrđivanju je li rješenje koje su izračunali u odgovarajućem okviru. U stvarnom svijetu postoje mnogi slučajevi kada treba pomnožiti razlomke s prirodnim brojevima, a misaone su procjene ili čak točna rješenja prilično korisni. Na primjer, čitamo o povećanju od $\frac{1}{3}$ u prinosu pšenice.

Također, razlomci su odlična zamjena za postotke. Kako bismo dobili procjenu koliko je 60% od 36.69 kuna, korisno je razmišljati o 60% kao o $\frac{3}{5}$ ili kao malo manje od $\frac{2}{3}$.

Razumijevanje dijeljenja može se značajno poduprijeti korištenjem procjenjivanja. Promotrite zadatak $12 : 4$. To može značiti "Koliko mnogo puta 4 ide u 12?" Slično tomu, $12 : \frac{1}{4}$ znači "Koliko mnogo puta jedna četvrtina ide u 12?". S tom osnovnom idejom na umu, učenici bi trebali biti u stanju procjenjivati zadatke poput $4\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$. Zahtijevajmo od učenika da prvo koriste riječi kako bi opisali što zahtijevaju te jednadžbe (npr. koliko je polovina u $4\frac{1}{3}$), što im može pomoći razmišljati o značenju dijeljenja i onda u procjenjivanju.

Kao i u drugim računskim operacijama, korištenje konteksta važno je u procjenjivanju s dijeljenjem, kako je ilustrirano idućim primjerom.

Primjer 4.2.8. *Imamo pet dugačkih sendviča. Porcija je za jednu osobu $\frac{2}{5}$ sendviča. Koliko će otprilike ljudi dobiti cijelu porciju?"*

Zbrajanje i oduzimanje

Model koji može pomoći pri korištenju osmišljenih strategija za zbrajanje ili oduzimanje razlomaka jest brojevni pravac. Jedna je od prednosti brojevnog pravca je da se može povezati s ravnalom, što je poznati kontekst za istraživanje zbrajanja i oduzimanja razlomaka. Brojevni je pravac također zahtjevniji model od modela kruga zato što zahtijeva ne samo da učenici razumiju $\frac{3}{4}$ kao 3 od 4 nego također i kao vrijednost između 0 i 1. Korištenje brojevnog pravca može osnažiti učeničko razumijevanje.

Dodavanje konteksta također može poduprijeti učeničko korištenje osmišljenih strategija. Na primjer, jedan bi kontekst mogao biti: Marko trči $2\frac{1}{2}$ km dnevno. Ako je upravo prošao oznaku za $1\frac{1}{4}$ km, koliko daleko još mora ići? Učenici bi mogli prvo oduzeti prirodne brojeve kako bi dobili $1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, a onda znati da je $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ jednako $\frac{1}{4}$, ili bi možda radije promijenili $\frac{1}{2}$ u $\frac{2}{4}$.

Uz drugačiji bi kontekst priče mogle biti drugačije. Na primjer, Marko je na oznaci $2\frac{1}{2}$, a Ivan je na oznaci $1\frac{1}{4}$. Koliko daleko mora ići Ivan kako bi dostigao Marka? U tom slučaju, učenici bi mogli koristiti strategiju pribrajanja tako da opaze kako su potrebne $\frac{3}{4}$ kako bi došli do 2, a zatim još $\frac{1}{2}$ dodana na $\frac{3}{4}$ daje $1\frac{1}{4}$. Štoviše, učenici mogu odjeljivati strategije i prikazivati ih na brojevnom pravcu, pa će postati fleksibilniji u odabiru kako zbrojiti ili oduzeti razlomke. Kao i s prirodnim brojevima, osmišljene su strategije katkad najbolje i najučinkovitije, ali katkad brojevi ne dozvoljavaju korištenje misaonih strategija, stoga u tom slučaju algoritam može biti jako koristan.

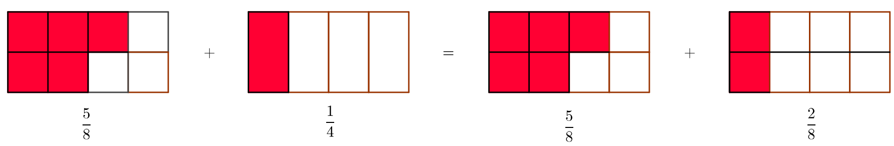
Učitelji često kažu učenicima: "Kako biste zbrajali ili oduzimali razlomke, prvo morate odrediti zajedničke nazivnike." Objašnjenje obično ide na idući način: "Na kraju krajeva, ne možete zbrajati kruške i jabuke." Ta je izjava u svojoj srži netočna. Točna bi izjava mogla biti "Kako biste koristili standardni algoritam za zbrajanje i oduzimanje razlomaka, prvo morate odrediti zajedničke nazivnike." Tada je objašnjenje "Algoritam je osmišljen kako bi funkcionirao samo sa zajedničkim nazivnicima jer se temelji na ideji dodavanja dijelova koji su jednake veličine." Korištenjem će vlastitih osmišljenih strategija učenici vidjeti kako se mogu pronaći mnoga točna rješenja bez da se ikada pronađe zajednički nazivnik. Rad na načinima na koje se dijelovi razlomaka odnose jedni prema drugima često dovodi do rješenja bez zajedničkih nazivnika. Na primjer, polovine, četvrtine i osmine lagano se povezuju, dok je, na primjer, razlika između trećine i četvrtine dvanaestina.

Kao što smo i spomenuli, brojevni je pravac također alat koji se može koristiti napamet kako bi se zbrajalo i oduzimalo bez pronalaženja zajedničkog nazivnika. Učenici umjesto toga mogu započeti s pronalaženjem jednog razlomka na brojevnom pravcu, a tada se prebaciti na vrijednost drugog razlomka.

Učenici mogu izgrađivati vlastite osmišljene strategije i znanja o izjednačavanju kako bi razvili pristup zajedničkog nazivnika za zbrajanje i oduzimanje razlomaka. Ako učenici imaju dobre temelje s razlomačkim konceptima, trebali bi biti u mogućnosti zbrajati i oduzimati razlomke jednakih nazivnika.

Učenicima koji nisu dovoljno sigurni u rješavanju zadataka kao što su $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$ ili $3\frac{7}{8} - 1\frac{3}{8}$ mogu nedostajati razlomački koncepti i trebaju više iskustva u korištenju modela. Ideja da se gornji broj zbraja a donji broj govori što se zbraja, čini zbrajanje i oduzimanje s jednakim razlomcima istima kao zbrajanje i oduzimanje prirodnih brojeva. No, kada se radi na zbrajanju s jednakim nazivnicima važno je biti siguran da su se učenici usredotočili na ključnu ideju - cjeline su jednake, stoga se mogu kombinirati.

Kako bi započeli sa zbrajanjem ili oduzimanjem razlomaka s različitim nazivnicima, najbolje je promotriti zadatak poput $\frac{5}{8} + \frac{1}{4}$, gdje treba promijeniti samo jedan razlomak. Dopustite učenicima da koriste bilo koju metodu. Dok učenici objašnjavaju kako su ga riješili, netko će vrlo vjerojatno objasniti da je $\frac{1}{4}$ jednaka $\frac{2}{8}$. Napišimo oba zadatka na ploču kako bismo pokazali početni zadatak i zadatak ponovno napisan s $\frac{2}{8}$ umjesto $\frac{1}{4}$. Pitajmo učenike: "Je li ovo isti zadatak? Zašto bismo željeli promijeniti $\frac{1}{4}$?" Neka učenici koriste prikaze ili crteže kako bi objasnili zašto originalan zadatak i izmijenjen zadatak trebaju imati jednako rješenje.



Slika 4.11: Suma razlomaka $\frac{5}{8}$ i $\frac{1}{4}$.

Zatim pokušajmo s nekim primjerima gdje se oba razlomka trebaju promijeniti - na primjer, $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$. Trebali bismo potaknuti učenike na rješavanje tih zadataka bez korištenja prikaza ili crteža, ukoliko je moguće. Predložimo (nemojmo zahtijevati) da bi korištenje jednakih razlomaka moglo biti jednostavniji način nego crtež. U raspravi o učeničkim rješenjima dobro je usmjeriti pažnju na ideju ponovnog pisanja zadatka kako bi bilo lakše zbrojiti ili oduzeti brojeve. Budimo sigurni da učenici razumiju kako je ponovno napisani zadatak isti kao i originalni i stoga treba imati jednako rješenje. Ako učenici izraze bilo kakvu sumnju u jednaku vrijednost obaju zadatka ("Je li $\frac{8}{12} + \frac{3}{12}$ zaista rješenje ovog zadatka?"), to bi trebao biti pokazatelj kako koncept jednakih razlomaka nije dovoljno dobro shvaćen, pa je potrebno više iskustva korištenjem vizualnih ili konkretnih modela.

Najčešća je greška u zbrajanju razlomaka zbrajanje i brojnika i nazivnika. Tu pogrešku ne treba direktno rješavati nego potaknuti razrednu raspravu. Prvo se usredotočimo na rješenje. Na primjer, jednakost $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ ne može vrijediti jer je $\frac{2}{5}$ manje od $\frac{1}{2}$, a treba biti više. Kada su učenici uvjereni da zbroj ne može biti $\frac{2}{5}$, treba ih pustiti da odluče što nije u redu s korištenom logikom. Moramo procijeniti razinu učeničkog razumijevanja. Mnogi učenici imaju teškoća u pronalaženju zajedničkih nazivnika jer ne mogu brzo pronaći zajedničke višekratnike nazivnika. Najmanji se zajednički višekratnici preferiraju jer je računanje lakše s manjim brojevima te je potrebno i manje pojednostavljivanja nakon zbrajanja i oduzimanja, no bilo koji nazivnik bit će dobar, bez obzira je li najmanji ili ne. Ne trebamo zahtijevati isključivo najmanje zajedničke višekratnike, već podržati sve zajedničke višekratnike te će u raspravama učenici uvidjeti kako je upravo najmanji zajednički višekratnik najučinkovitiji.

4.3 Računanje napamet

Računanje napamet sposobnost je korištenja činjenica i brojeva za rješavanje operacija bez pomagala za prebrojavanje ili olovke i papira. To je više od automatskog prisjećanja iako je, za učinkovito računanje, potrebno i znanje osnovnih svojstava zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Od devedesetih godina prošlog stoljeća računanje napamet zauzima mnogo pažnje u matematičkom planu i programu. Razlog su tomu istraživanja (poput [39]) koja su pokazala da su odrasli računali napamet i koristili se tehnološkim pomagalima češće nego što su koristili algoritme pomoću olovke i papira kako bi procijenili traženi rezultat ili nešto točno izračunali. Materijali za učenje razvijeni su za osnovne i srednje škole, ali autori udžbenika nisu posvetili dovoljno pažnje za nastavak razvoja učinkovitog računanja napamet s cijelim brojevima, razlomcima, decimalnim brojevima i postotcima.

Neki učenici razviju dosta fleksibilne načine baratanja s brojevima unatoč nedostatku strukturiranog učenja u učionicama. Sposobnost učenika za računanje napamet pojačano opada između šestog i sedmog razreda. Gotovo polovica učenika sedmog razreda još nema razvijeno znanje o svojstvima suprotnih elemenata, teško im ide zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastih brojeva i množenje dvoznamenkastih brojeva jednoznamenkastima. Učenici sedmih razreda također rade greške u zbrajanju i oduzimanju decimalnih brojeva s jednim decimalnim mjestom, zbrajanju polovina i četvrtina većih od 1, oduzimanju razlomaka jednakih nazivnika od 1 i traženju polovine, četvrtine ili 25% od dvoznamenkastih ili troznamenkastih brojeva. Rezultati istraživanja [36] također objašnjavaju da se greške kod računanja napamet kod mnogih učenika pojavljuju radi propusta u provođenju računskog postupka, dok se greške s decimalama, razlomcima i postotcima pojavljuju jer učenici ne razumiju ideju. Učenici koji koriste učinkovite strategije demonstrirali su razumijevanje svojstava osnovnih računskih operacije (poput komutativnosti, asocijativnosti i postojanja neutralnog elementa) i redoslijed operacija kod cijelih brojeva.

Računanje je napamet s razlomcima, decimalnim brojevima i postotcima spoznajno zahtjevnije nego računanje napamet s cijelim brojevima. Istraživanja [36] su pokazala da učenici obično brzo uspijevaju svladati računanje napamet s jednostavnim razlomcima, decimalnim brojevima s istim brojem mjesta i poznatim postotcima, ali im trebaju godine za razvoj strategije za računanje postotaka poput 90% ili 15%. Nažalost, mnogi srednjoškolski udžbenici jednostavno ne daju učenicima mogućnost računanja napamet i razvoja potrebnih vještina. Često i nastavnici ustraju u tome da učenici više vremena provedu u pisanju algoritama nego u razvijanju svog smisla i svoje strategije računanja napamet.

Postoji, međutim, mnogo prilika da se računanje napamet uključi u praksu i ključno je da se prilike za poučavanje i prakticiranje računanja napamet iskoriste kada se pojave. Na primjer, u tu je svrhu mnogo bolje, nakon što su zadana dva kuta u trokutu, pokušati napamet odrediti kut koji nedostaje s cijelim razredom u obliku zajedničke aktivnosti, nego pitati učenike da za vježbu sami napišu jednadžbu u bilježnicu. Kratki kvizovi znanja često ohrabruju učenike da računaju napamet, pri čemu stječu i kompetencijske vještine te uspoređuju svoje sposobnosti s ostalim učenicima, što često može biti motivirajuće.

Nastavne jedinice posvećene računanju napamet trebaju biti bazirane na podjeli učeničkih strategija s čitavom skupinom, potvrđivanjem svačijeg mišljenja kao učinkovitog, demonstraciji efikasnije strategije, davanju ideja drugim učenicima, prepoznavanju nejedinstvenosti načina rješavanja i ilustraciji korištenja različitih načina računanja ovisno o danom problemu. Posebno zahvalne mogu biti rasprave o učinkovitosti metoda računanja napamet prilikom obavljanja operacija koje se odlikuju različitim korisnim svojstvima koja bi učenici mogli usvojiti, poput množenja sa 101, 111 ili 999.

4.4 Množenje

Velik se dio učenika viših razreda osnovne škole nije u stanju automatski prisjetiti svojstava množenja. Povrh toga, množenje je više od pamćenja samih svojstava množenja. Razumijevanje množenja, jezika koji se koristi u strukturi problema množenja, njegove veze s drugim operacijama i redoslijed računskih operacija temeljne su ideje za mnoge druge koncepte i vještine prisutne u školskoj matematici, poput omjera, potencija, transformacija algebarskih izraza i funkcija koje definiraju proporcionalne odnose među podacima. Nedostaci u razumijevanju množenja kod slabijih učenika vode i do slabog razumijevanja omjera, jer bit zaključivanja o proporcijama leži u razumijevanju strukture množenja proporcionalnih situacija; na primjer, 4 u odnosu na 8 treba shvatiti kao množenje s 2 prije negoli dodavanje 4.

Primjeri se nizova brojeva obično u nastavi koriste kako bi pomogli učenicima naučiti zakone množenja. Oni ilustriraju komutativnost, asocijativnost i distributivnost množenja i pomažu učenicima shvatiti množenje razlomaka i decimalnih brojeva. Nizovi algebarskih trakica, raznobojnih pravokutnika različitih dimenzija koji se mogu slagati kako bi oformili likove, mogu se koristiti za modeliranje zakona distributivnosti ili za ilustraciju korištenja cijelih brojeva pri učenju algebre.

Slika 4.12: Algebarske trakice

4.4.1 Množenje i dijeljenje razlomaka i decimalnih brojeva

Kada koristimo računala za istraživanje množenja i dijeljenja decimalnih brojeva, učenici su obično iznenađeni kada vide da množenje s brojem manjim od 1 rezultira manjim brojem i da dijeljenjem s takvim dobijemo veći broj. Učenici trebaju višestruke pristupe i prezentacije, poput savijanja ili rezanja papira, da bi se stvorili linearni i kvadratni modeli za množenje razlomaka i decimalnih brojeva, a kako bi učenici shvatili odakle dolaze algoritmi i pravila. Na primjer, da bismo napravili šestinu od traka papira, moramo ih saviti u trećine i zatim još prepoloviti.

Postupak je množenja razlomaka najbolje uvoditi postupno, kako bi ga učenici mogli razumjeti i samostalno razviti odgovarajući algoritam. Prva učenička iskustva u množenju razlomaka trebala bi uključivati određivanje pojedinih dijelova prirodnih brojeva, poput određivanja $\frac{1}{5}$ broja 35 ili $\frac{3}{8}$ broja 24. Potrebno zaključivanje dovelo bi do rasprave o tome što množenje razlomaka predstavlja, a može se kvalitetno uključiti i primjer poput idućeg.

Primjer 4.4.1. *Marko ima* 15 *igračaka automobila, od kojih su* $\frac{2}{3}$ *crveni. Koliko crvenih automobila ima Marko?*

Učenici će obično taj zadatak rješavati tako da 15 *podijele u tri jednake skupine, a zatim broj automobila u pojedinoj skupini pomnožiti s* 2*. Zapisan u koracima, račun glasi* $(15 : 3) \cdot 2$.

Nešto je drugačiji idući primjer.

Primjer 4.4.2. *Luka je napunio* 5 *čaša s* $\frac{2}{3}$ *litre soka u svakoj čaši. Koliko je soka Luka koristio?*

*Primijetimo kako ta situacija glasi "*5 *skupina po* $\frac{2}{3}$*" umjesto "*$\frac{2}{3}$ *od skupine od* 5*". Iako svojstvo komutativnosti znači da se poredak tih brojeva može zamijeniti, važno je da učenici razumiju primjere kao prikaze različitih značenja. Taj zadatak može se i jednostavno riješiti strategijom pribrajanja, tj. korištenjem množenja kao skraćenog zbrajanja:* $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

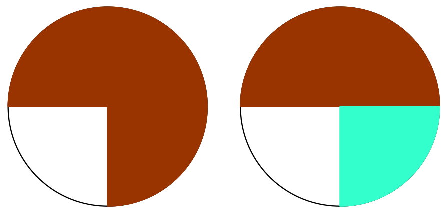
Spomenute ideje mogu se odmah proširiti principom cjeline bez dijeljenja, u kojem je naglasak na ukupnom broju dijelova cjelina, gdje veličina dijelova određuje njihov broj. Ilustrirajmo taj princip na idućem primjeru.

Primjer 4.4.3. *Ako vam je ostalo* $\frac{3}{4}$ *pizze i* $\frac{1}{3}$ *ostatka date bratu, koliki će dio čitave pizze on dobiti?*

U toj situaciji treba odrediti $\frac{1}{3}$ *od tri dijela te se ciljano treba dijeliti upravo broj dijelova kojima se raspolaže.*

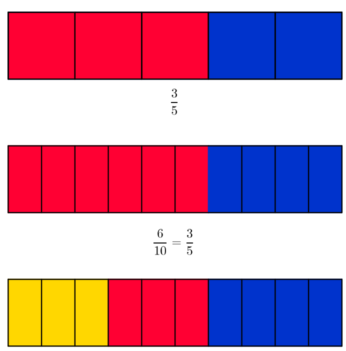
Zadaci postaju zahtjevniji kada se dijelovi prikazani jednim razlomkom moraju dodatno podijeliti u manje dijelove cjeline. U toj situaciji značajnu ulogu igraju koncept zbrajanja količine dijelova, prikazan brojnicima, te koncept određivanja dijelova koji se broje, prikazan nazivnicima. Korištenje papirnatih traka i njihovo dijeljenje učinkovit je način za rješavanje zadataka s množenjem, pogotov kada oni zahtijevaju i dodatnu podjelu. Prikažimo na primjerima kako se pomoću traka može imitirati dodatno dijeljenje dijelova cjeline.

Primjer 4.4.4. *Dvoje djece dan nakon rođendana treba ravnopravno podijeliti preostale* $\frac{3}{5}$ *čokolade. Koliki će dio početne čokolade dobiti svako dijete?*



Slika 4.13: Model za pojašnjenje umnoška razlomaka $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$.

S obzirom da treba odrediti polovicu od $\frac{3}{5}$, trebamo izračunati čemu je jednako $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$. Kako bismo odredili dijelove koji se broje, najprije je potrebno podijeliti $\frac{3}{5}$ u polovine, čime dobivamo $\frac{6}{10}$. Kako je broj u brojniku, koji prikazuje količinu dijelova, sada paran, odmah se vidi i da je polovina ukupne količine dijelova jednaka $\frac{3}{10}$. Naravno, u takvom je slučaju moguće i jednostavno primijetiti kako je $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$, tj. kako je $2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$, tada je i $\frac{3}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$.

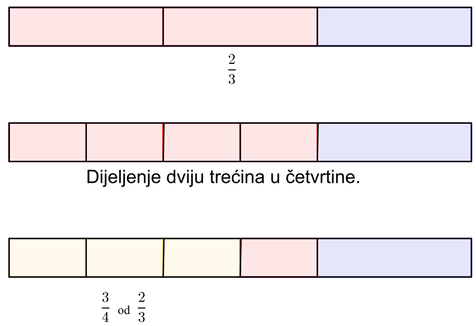


Slika 4.14: Model za pojašnjenje umnoška razlomaka $\frac{3}{5}$ i $\frac{1}{2}$.

Primjer 4.4.5. *Jakov je morao pokositi $\frac{2}{3}$ travnjaka. Ako je nakon ručka obavio $\frac{3}{4}$ tog posla, koliki je dio čitavog travnjaka pokosio nakon ručka?*

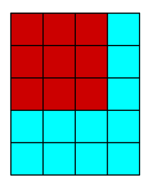
Kako treba pronaći četvrtine dijela izraženog u obliku $\frac{2}{3}$ čitavog travnjaka, najprije je potrebno $\frac{2}{3}$ podijeliti u četvrtine te zatim odrediti 3 takva dijela, tj. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, kako je prikazano na Slici 4.15.

Modeli područja za prikaz množenja razlomaka također imaju nekoliko prednosti. Mogu se jednostavno koristiti u zadacima gdje dodatno dijeljenje postaje



Slika 4.15: Model za pojašnjenje umnoška razlomaka $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$.

zamorno, nude lijepo vizualno pomagalo za prikaz odnosa veličine rezultata i faktora te predstavljaju dobar prikaz za povezivanje sa standardnim postupkom za množenje razlomaka. Primjerice, tražimo li $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$, tj. $\frac{3}{5}$ od $\frac{3}{4}$, možemo pravokutno područje podijeliti horizontalnim linijama u pet dijelova, a vertikalnim linijama u 4 dijela. Traženi ćemo rezultat dobiti prebrojimo li dijelove omeđene s prvim trima vertikalnim i prvim trima horizontalnim linijama, dok se u nazivniku nalazi ukupan broj dijelova, kako je prikazano na Slici 4.16.



Slika 4.16: Model za pojašnjenje umnoška razlomaka $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{4}$.

Kada učenici raspolažu s dovoljno iskustva u korištenju prikaza množenja, počet će opažati i obrazac. Tada ih se može tražiti da riješe i primjere poput $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}$. Mogu se i postavljati pitanja o veličini nazivnika u pojedinom produktu, može li se neki zaključak primijeniti i u ostalim zadacima te mogu li naći obrazac prema kojem se može odrediti brojnik. Ne smijemo se zaboraviti usredotočiti i na značenje množenja te je od učenika potrebno tražiti i procjenu iznosa konačnog rješenja te obrazloženje svoje procjene. Na primjer, u prvom bi produktu učenici trebali primijetiti kako će rezultat biti nešto manji od $\frac{1}{2}$, jer je $\frac{5}{6}$ nešto manje od 1.

Dok učenici istražuju množenje razlomaka, bilo bi dobro uključivati i zadatke u kojima je neki od faktora mješoviti broj, poput produkta $\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2}$. Naravno, takvi zadaci mogu se rješavati i svođenjem mješovitog broja na razlomak te standardnim množenjem razlomaka, ali može se koristiti, te time i vježbati, svojstvo distributivnosti. Važno je i da učenici razumiju kako je $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, stoga bi mogli pomnožiti $\frac{3}{4} \cdot 2$ i $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ te zbrojiti rezultate. Ukoliko bi oba faktora bili mješoviti brojevi, na taj bi način dobili četiri djelomična rješenja koja bi potom zbrojili.

Da bi izveli postupak za množenje decimalnih brojeva, trebali bismo naučiti učenike procjenjivati i provjeravati rješenja koristeći probleme poput idućeg.

Primjer 4.4.6. *Decimalna točka ne radi na računalu. Gdje ju treba staviti u ovim rješenjima?*

$$534.6 \cdot 0.545 = 291357,$$

$$49.05 \cdot 6.044 = 2964582.$$

Dijeljenje je obično u osnovnoj školi učenicima predstavljeno kao traženje iznosa dijela manjeg od zadane cjeline. No učenici također moraju razumjeti i mjerno značenje dijeljenja, tj. traženje broja skupina koje nastaju određenom podjelom. U suprotnom bi učenici mogli imati poteškoće u dijeljenju s razlomcima, na primjer, razumjeti što znači $9 : \frac{1}{4}$.

Kada učenici rješavaju probleme dijeljenja razlomaka koji su smješteni u odgovarajući kontekst, problemu je dan smisao i učenici mogu generirati strategiju za njegovo rješavanje. Kontekst predlaže određene interpretacije, a time i strategije i razloge za rješavanje problema. Sposobni učenici mogu otkriti strategiju za pronalaženje cjeline danog dijela (to jest, pronalaženje mjerne jedinice) ili za pronalaženje nestalog faktora koristeći model dijeljenja koji omogućava smislenost dijeljenja razlomaka.

Primjer 4.4.7. *Navedimo neke od mogućih stavljanja problema s razlomcima u odgovarajući kontekst:*

Zamijeniti djelitelja njegovim recipročnim razlomkom i pomnožiti ih predstavlja jedno od najtajanstvenijih pravila osnovnoškolske matematike. Želimo izbjeći tu tajanstvenost te propitivati dijeljenje razlomaka iz poznatije perspektive. Pri tome treba potaknuti učenike da istraže i zadatke mjerenja i zadatke raščlanjivanja.

Prečesto se o zadacima raščlanjivanja misli strogo kao o zadacima dijeljenja, npr. 24 jabuke trebaju se podijeliti između 4 prijatelja, koliko će ih dobiti svaki prijatelj? Pretvoriti cjelokupan iznos u oblik razlomka u kojem je djelitelj cijeli

	Mjerenje	Mjerna jedinica	Nestali faktor
Kontekst	Ako trebam $\frac{3}{4}$ čaše brašna za napraviti kolač, a imam $2\frac{1}{2}$ čaše brašna, koliko kolača mogu napraviti?	Ako mi treba $\frac{3}{4}$ sata za bojanje $2\frac{1}{2}$ vrata, koliko vrata mogu obojiti za 1 sat?	Ako imam $\frac{3}{4}m^2$ materijala i duljina je jedne strane $\frac{2}{5}m$, kolika je duljina druge strane?
Pitanje ili izraz	Kolika puta $\frac{3}{4}$ stanu u $2\frac{1}{2}$?	$\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = 1 : \square$	$\frac{2}{5} \cdot \square = \frac{3}{4}$

Tablica 4.2: Primjeri problema prilikom računanja s razlomcima.

broj i nije velik pomak, no dok radimo s tim zadacima, opažamo da odgovaramo na pitanje "Koliko određene količine trebamo za jednu cjelinu?"

Ukoliko, na primjer, trebamo podijeliti $5\frac{1}{3}$ metara žice na četiri jednaka dijela, primijetimo kako imamo za podijeliti ukupno $\frac{16}{3}$ metara žice, odnosno $\frac{4}{3}$ metara žice za svaki dio. Slično tomu, trebamo li $1\frac{1}{4}$ metara žice podijeliti na tri jednaka dijela, gledamo koliko će puta 3 ići najprije u brojnik razlomka $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$, a zatim samo ponovimo nazivnik koji nam je omogućio da brojnik bude djeljiv s 3 te dobivamo iznos od $\frac{5}{12}$ metara žice za svaki dio.

Koncept se dijeljenja naizgled ruši kada je djelitelj razlomak. No, pomaže imati na umu da je za zadatke raščlanjivanja i omjera ključno pitanje "Koliko mnogo je jedna cjelina?" Pogledajmo tu situaciju na sljedećem primjeru.

Primjer 4.4.8. *Ivana je kupila* $3\frac{1}{3}$ *kg rajčica za* 17 *kn. Kolika je cijena jednog kilograma rajčice?*

U $3\frac{1}{3}$ *jest ukupno* 10 *trećina. Znamo da su u jednom kilogramu (tj. jednoj cjelini)* 3 *trećine, stoga najprije trebamo doći do cijene jedne trećine kilograma rajčice, koju dobivamo dijeljenjem ukupne cijene s* 10*, što iznosi* 1.7 *kn. Sada je cijena jednog kilograma* $3 \cdot 1.7 = 5.1$ *kn.*

Interpretacija se mjerenjem također naziva i uzastopno oduzimanje. U tom se slučaju ista skupina uzastopno oduzima od ukupnog iznosa. Na primjer, ako imate 11 litara vode, koliko boca zapremine 3 litre možemo napuniti? Primijetimo kako to nije slučaj dijeljenja nego više situacija jednakog oduzimanja. Budući da je to koncept dijeljenja koji se gotovo uvijek nalazi u udžbenicima i koristit će se kako bi se razvio algoritam za dijeljenje razlomaka, važno je da učenici istraže tu ideju u situacijama s kontekstom.

Učenici razumiju primjere poput: ako imamo 6 litara sladoleda, a svakom gostu poslužite $\frac{3}{4}$ litre sladoleda, koliko će gostiju dobiti sladoled? Učenici obično crtaju slike šest jedinica podijeljenih na četvrtine i broje koliko mnogo porcija od $\frac{3}{4}$ mogu dobiti. Primijetimo kako je osnovno pitanje ovdje koliko se mnogo cjelina od $\frac{3}{4}$ nalazi u cjelini od 6. Teškoća se nalazi u shvaćanju tog postupka $6 : \frac{3}{4}$, a taj će dio zahtijevati jasno vodstvo nastavnika. Jedan od prijedloga jest usporediti zadatak s primjerom koji uključuje prirodne brojeve (6 litara, 2 litre po gostu) i napraviti usporedbu.

Učenike osobito može zbuniti interpretacija dijeljenja u kojoj rezultat nije prirodan broj. Pretpostavimo da imamo situaciju u kojoj treba 4 podijeliti s $\frac{3}{4}$, što možemo ilustrirati kao da punimo spremnike zapremine $\frac{3}{4}$ litre, a na raspolaganju imamo 4 litre tekućine. Kako se u 4 cijela nalazi 16 četvrtina, možemo napuniti 5 spremnika te nam još preostaje $\frac{1}{4}$ litre. Za čitav su nam spremnik potrebne $\frac{3}{4}$ litre pa s preostalih $\frac{1}{4}$ litre možemo napuniti trećinu spremnika. Prema tome,

$$4 : \frac{3}{4} = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

Slično tomu, možemo se pitati koliko je $2\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, tj. koliko se trećina nalazi u $\frac{5}{2}$. Kako bismo lakše uspostavili odnos među ovim veličinama, možemo prijeći na zajednički nazivnik te se pitati koliko se puta $\frac{2}{6}$ nalazi u $\frac{15}{6}$. Očito ih se nalazi 7 te nam preostaje još $\frac{1}{6}$, što je polovina od $\frac{2}{6}$ pa konačno imamo

$$2\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{15}{6} : \frac{2}{6} = 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}.$$

Prelaskom su na zajednički nazivnik i djeljenik (zadana količina) i djelitelj izraženi istim tipom razlomačkih dijelova, što rezultira zadatkom s dijeljenjem prirodnih brojeva. Taj pristup se naziva metoda zajedničke cjeline te učenicima može biti od pomoći pri razumijevanju rezultata dijeljenja razlomaka. Na taj način dobivamo i jedan algoritam za množenje razlomaka - prvo treba pronaći zajedničke nazivnike, a zatim podijeliti brojnike.

S druge strane, zamijeniti je djelitelja recipročnim razlomkom i množiti možda jedan od najteže shvaćenih postupaka. Osiguravanje niza zadataka i omogućavanje učenicima traženje uzoraka u svom pronalaženju rješenja može im pomoći otkriti algoritam. Na primjer, razmotrimo ovakav niz u kojem je djelitelj razlomak:

$$1 : \frac{1}{5}, 5 : \frac{1}{4}, 6 : \frac{1}{3}, 8 : \frac{1}{5}.$$

U prvom od primjera možemo krenuti s elementarnom situacijom u kojoj treba prepoznati kako se u jednom cijelom nalazi ukupno pet petina. Primjere možemo povezati s pakiranjima, npr. koliko se paketa od $\frac{1}{5}$ kilograma brašna može dobiti od 8 kilograma brašna. Tijekom rješavanja tih zadataka učenici bi trebali uočiti da uvijek množe s nazivnikom te bi mogli rezimirati na sljedeći način: "Ako dobijem 5 paketa od jednog kilograma, od 8 ih dobijem $5 \cdot 8 = 40$."

Odmah nakon toga može se prijeći na niz primjera u kojima su djelitelji razlomci s brojnicima različitim od 1:

$$\frac{8}{3} : \frac{2}{3}, 6 : \frac{2}{3}, 8 : \frac{2}{5}, 5 : \frac{3}{4}, \frac{1}{5} : \frac{3}{5}.$$

Učenici trebaju rješenja usporediti s odgovarajućim zadacima u prethodnom nizu. Primjerice, ako $\frac{8}{3}$ grupiramo u parove (jer dijelimo s $\frac{2}{3}$), imat ćemo četiri takva para. Prema tome, dijelimo li jednake količine, koje su iskazane jednakim nazivnicima, treba podijeliti brojnike koji izražavaju broj tih količina. Slično tomu, ako u 8 ima 40 petina i sada ih grupiramo u parove (jer dijelimo s $\frac{2}{5}$), takvih ćemo parova imati dvostruko manje, tj. 20. Izraženo u paketima, ukoliko je paket dvostruko veći, imat ćemo ih dvostruko manje pa treba podijeliti s 2, s brojnikom. Slično, dijelimo li s $\frac{3}{4}$, nakon što odredimo broj četvrtina, grupirat ćemo ih u skupine po 3, što znači da moramo podijeliti s 3. U posljednjem od primjera može se ponovno primijetiti da dijelimo jednake količine te treba podijeliti brojnike pri čemu jednu veličinu sada dijelimo na tri jednaka dijela.

Dani primjeri predstavljaju mjerenja jer je poznata veličina skupine (pakiranja), no ne i broj skupina. Korištenjem podjele primjeri mogu prikladno ilustrirati standardni algoritam. Promotrimo idući primjer.

Primjer 4.4.9. *Ako $1\frac{1}{2}$ naranča čini $\frac{3}{5}$ porcije, odredite kolika je jedna porcija naranči.*

Najprije množimo $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ s 5 (s nazivnikom) kako bismo dobili veličinu triju porcija, a zatim dijelimo s 3 (s brojnikom) kako bismo dobili veličinu jedne porcije, tj.

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{2} \cdot 5\right) : 3 = \frac{5}{2}.$$

Prema tome, jedna porcija sastoji se od $\frac{5}{2}$ naranči.

Bilo da se radi o mjerenju ili o raščlanjujućoj interpretaciji dijeljenja, nazivnik nas vodi do saznanja koliko mnogo petina, osmina ili šestina imamo, a brojnik nam govori veličinu skupine, tako da ih grupiramo s obzirom na to koliko ih je mnogo u skupini, tj. s obzirom na to koliki je brojnik. Prema tome, ovaj postupak znači da množimo s nazivnikom, a dijelimo s brojnikom, što je upravo postupak za dijeljenje razlomaka kakav se uči i u školi, no koji predstavlja mnogo više od samog množenja s recipročnim razlomkom.

4.4.2 Omjeri i postoci

Učenje omjera podrazumijeva traženje smisla u kvantitativnim odnosima i uspoređivanje vrijednosti čiji je odnos dan nekim produktom. Omjeri se koriste u mnogim stvarnim situacijama te podupiru i spajaju mnoge matematičke ideje u osnovnoj i srednjoj školi. Učenje omjera i postotaka daje velike mogućnosti za angažiranje učenika u zadacima stavljenim u odgovarajući kontekst i u rješavanju problema.

Učenici čine greške prilikom rada s omjerima kada ne prepoznaju multiplikativni odnos i koriste zbrajanje ili oduzimanje, ili kada netočno primjene algoritam. Interpretiranje zadataka zadanih riječima također može biti teško za učenike, jer moraju shvatiti smisao problema, a ne samo primijeniti proceduru. Iako problemi mogu imati slična strukturalna obilježja, potrebna je oprezna interpretacija da bi se razabrala razlika između multiplikativnih i aditivnih odnosa.

Primjer 4.4.10. *Navedimo primjere zadavanja zadataka u kojima su omjeri dani multiplikativno, odnosno aditivno.*

1. *U trgovini četiri paketa olovaka koštaju* 8 *kn. Učitelj želi kupiti paket za svakog učenika. Potrebna su mu* 24 *paketa. Koliko će ih platiti?*

2. *Danas Borna puni dvije godine, a Sara puni* 6 *godina. Kada Borna napuni* 12 *godina, koliko će godina imali Sara?*

Učitelji moraju naglašavati strukturu množenja u omjerima, što neki udžbenici zanemaruju kada definiraju i daju primjere omjera. Postoje tri tipa omjera koji se mogu poučavati:

1. uspoređivanje dvaju dijelova cjeline (omjer dječaka i djevojčica u razredu),

2. uspoređivanje brzine ili gustoće (kilometri po satu) i

3. korištenje faktora mijenjanja veličine.

Postotak je poseban tip omjera i obično se u osnovnoj školi predstavlja kao poseban razlomak, gdje se koriste tekstualni zadaci da bi se pokazalo njegovo značenje i da bi se primijenila procedura za pretvaranje iz razlomaka i decimalnih brojeva u postotke i obratno. Pretvaranje je postotaka u razlomke ili decimalne brojeve učenicima teško jer mnogi od njih misle da su postotci manji od 1 i mogu biti samo stotinke. Poučavanju postotaka trebali bismo pristupiti vizualnim materijalima, uključujući zadatke procjena i korištenje problemskih zadataka stavljenih u učenicima poznat kontekst, gdje se oni mogu angažirati. Učenici koji već imaju razvijene vještine rada s razlomcima upoznati su s postupkom koji se može koristiti da bi se riješio problem s postocima. Treba ih ohrabriti da automatski rade pretvorbu iz postotaka u razlomke i decimalne brojeve.

U udžbenicima je procjena postotka nekog iznosa često prezentirana kao procedura učenja i pamćenja, umjesto da je glavna svrha naći smisao i načiniti veze između razlomaka i postotaka. Svi bi učenici trebali moći napamet računati jednostavne procjene postotaka, poput onih prikazanih u Tablici 4.3, a sposobniji bi učenici trebali biti ohrabreni za razvijanje mentalnih strategija za računanje napamet težih postotaka, poput 11% i 15%.

Pisani algoritam (tipičan primjer iz udžbenika)	Računanje napamet	Računanje pomoću kalkulatora
20% od 35	20% od 35	20% od 35
$= \frac{20}{100} \cdot \frac{35}{1}$ $= \frac{20}{20} \cdot \frac{7}{1}$ $= \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{1}$ $= \frac{7}{1}$ $= 7$	$= \frac{1}{5}$ od 35 $= 7$	$= 0.20 \cdot 35$ $= 7$

Tablica 4.3: Procedure za računanje postotka.

Omjeri i postoci važni su u strukovnim školama, na primjer, u poslovnoj ili gospodarskoj matematici.

4.4.3 Računanje s potencijama

Opetovano ponavljanje množenja istog faktora poznato je kao potenciranje broja, na primjer, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ isto je što i 2^5. Prema tome, očito su vještine množenja ključne za razvijanje intuitivnog razumijevanja rada s potencijama. Korištenje i razumijevanje funkcije potenciranja i njoj inverzne funkcije korjenovanja važno je za rješavanje niza problema u mjerenjima i geometriji. Također, nizovi brojeva koji su stvoreni ponavljanjem množenja imaju mnoge stvarne primjene kojima se njihov odnos može opisati. Učenici susreću ideje potenciranja kada istražuju svojstva množenja predstavljena u nizovima kvadrata ili prilikom obrade volumena kocke. Izrazi su u kojima se pojavljuju potencije veće od tri učenicima često apstraktni te upravo rješavanje problema na temelju problema potenciranja daje učenicima mogućnost istraživanja takve potencije.

Primjer 4.4.11. *Tetka Juliška ponudila je džeparac nećakinji za idućih pet godina. Ona može odabrati jedan od sljedećih scenarija:*

- 500 *kn u prvoj godini te dodatnih* 100 *kn u svakoj sljedećoj godini,*
- 100 *kn u prvoj godini, zatim za pola od toga više u svakoj sljedećoj godini,*
- 20 *kn u prvoj godini i onda dvostruko više svake sljedeće godine.*

Koju bi ponudu trebala uzeti? Što ako se ponuda produži na 10 *godina?*

Na tom se primjeru učenicima može razjasniti operacija ponavljanja množenja. Oni mogu sami uočiti da će se nećakinji za vrijeme od 5 *godina najviše isplatiti prvi scenarij, no ukoliko se ponuda produži za dodatnih* 5 *godina, najisplativiji će scenarij biti treći. Drugim riječima, nakon određenog broja godina niz u kojem se množenje ponavlja raste brže od niza u kojem se ponavlja zbrajanje.*

Računanjem različitih primjera i korištenjem kalkulatora kako bi se napravile tablice vrijednosti za rješavanje problema tog tipa potiče se učeničko razumijevanje, pokazuju razlike između zbrajanja, množenja i operacija s potencijama te izbjegavaju greške poput $3^5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

Također, za učenike su izazovne ideje negativnih potencija i potencije 0. Često se predlaže DA je dobro prepustiti učenicima izrađivanje tablice uzoraka brojeva pomoću kalkulatora kako bi sami otkrili da je $a^0 = 1$ i da je $a^{-2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2$.

Operacije s brojevima i algebarskim simbolima izraženim u eksponencijalnom obliku fokus su za pristupe poučavanja brojeva koji podupiru apstraktno razmišljanje. Greške su u algebri u srednjoškolskoj matematici često greške ili nejasnoće kod operacija s izrazima danim u eksponencijalnom obliku. Tim greškama pridonosi pristup koji se temelji na pamćenju pravila potenciranja.

Primjer 4.4.12. *Navedimo neke od najčešćih grešaka pri potenciranju:*

- $3^2 + 5^2 = 8^2$
- $2^3 \cdot 2^4 = 4^7$
- $a^2 \cdot b^5 = ab^7$
- $3^{-2} = 9$
- $(2x)^{-2} = \frac{1}{4}x^2$
- $(3a)^4 = 3a^4$
- $(a^2)^5 = a^7$.

4.5 Cijeli i iracionalni brojevi

Ova tema omogućuje nastavnicima u srednjoj školi naučiti učenike nešto novo o brojevima. Međutim, mnogi su se učenici već susreli s negativnim brojevima, čak i djeca nižih uzrasta mogu opisati "podzemne brojeve" i većina nastavnih planova zahtijeva od učenika modeliranje negativnih brojeva koristeći brojevni pravac i istraživanje različitih konteksta kako bi razvili ideje o negativnim brojevima. Ključno je, dakle, početi s upoznavanjem učenika s temom na odgovarajući način, čak i kada poučavamo nove teme. Što oni znaju o cijelim brojevima? Gdje su ih susreli u stvarnom životu?

Brojevni pravac i materijali poput algebarskih trakica koriste se za modeliranje cijelih brojeva i algoritama za zbrajanje i oduzimanje. Hodanje naprijed i natrag po brojevnom pravcu pomoći će učenicima shvatiti da je oduzimanje negativnog broja zapravo isto što i zbrajanje pozitivnog broja. Množenje i dijeljenje negativnim cijelim brojevima složenije je i srednjoškolci nastavljaju praviti pogreške kada primjenjuju svojstvo distributivnosti.

Primjer 4.5.1. *Navedimo nekoliko ilustracija pravila za množenje negativnih brojeva.*

Pretpostavimo da ste se za 6 *koraka udaljili od početne točke. Učinite sada dva koraka unatrag (možemo smatrati da su to* -2 *koraka) te to ponovite tri puta. Kako ste se vratili na početnu točku, slijedi da je* $(-2) \cdot 3 = -6$. *Napravimo li dva puta po tri koraka unatrag, rezultat će biti isti te je* $(-2) \cdot 3 = (-3) \cdot 2$.

Množenje broja koraka negativnim brojem možemo interpretirati kao kretanje u suprotnom smjeru. Primjerice, napraviti -2 *puta po tri koraka isto je što i napraviti dva puta po tri koraka unatrag. No, tada i produkt* $(-2) \cdot (-3)$ *možemo interpretirati kao pomicanje za dva puta u smjeru suprotnom od smjera koji nalažu* -3 *koraka, tj. kao pomicanje za dva puta po tri koraka unaprijed te je* $(-2) \cdot (-3) = 6 = 2 \cdot 3$.

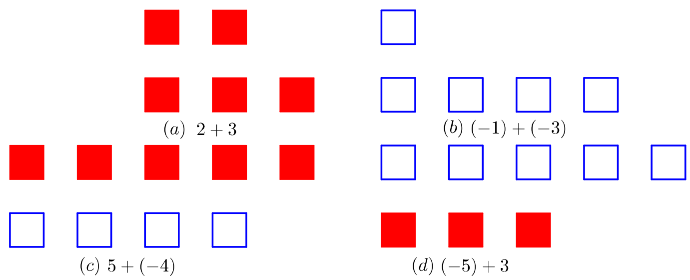
Računanje s cijelim brojevima

Nastavimo s prikazom kako se pomoću algebarskih trakica učenicima može predstaviti računanje s cijelim brojevima. Pri tome pretpostavimo da su upoznati s negativnim brojevima i zapisom poput $1 = +1$ i -1.

Pun kvadratić interpretirat ćemo kao 1, a prazan kao -1, dok nedostatak kvadratića možemo interpretirati kao 0. Pomoću njih možemo istraživati uzorke koji se pojavljuju prilikom računanja s cijelim brojevima. Pogledajmo najprije primjer zbrajanja, pri čemu je važno primijetiti da se različiti kvadratići međusobno dokidaju.

Primjer 4.5.2. *Jednostavnim dokidanjem te prebrojavanjem možemo riješiti zadatke prikazane na Slici 4.17, koji su dani i numeričkim i slikovnim prikazom pomoću kvadratića.*

Na primjer, iz (*a*) *direktno se dobiva* $2 + 3 = 5$, *a iz* (*d*) *da je* $(-5) + 3 = -2$.



Slika 4.17: Model zbrajanja cijelih brojeva.

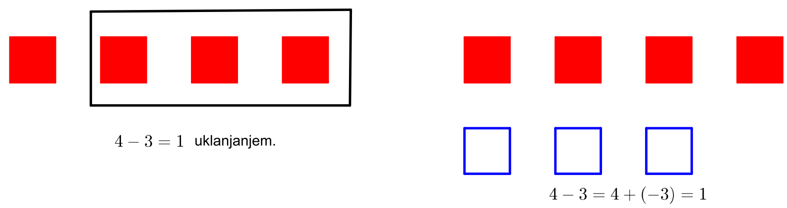
Nakon što s učenicima prođemo takve primjere, može se početi raditi na daljnjim problemskim zadacima koji otvaraju raspravu. Iz prethodnih zadataka mogu se uočiti određeni uzorci i postaviti temelje za istraživanje problema poput "Kakav će tip zadatka imati rješenje 0*?", "Što trebamo dodati broju* 3 *kako bi dobili rezultat* 0*? A broju* -7*?" Na taj se način lako dolazi i do uvođenja pojma suprotnog broja.*

Daljnje razumijevanje zbrajanja cijelih brojeva može se potaknuti pitanjima poput "Koji je najmanji broj kvadratića koji trebamo kako bi prikazali broj 2*?" ili "Korištenjem točno* 5 *kvadratića prikažite broj* -1*?"*

Prije početka samog modeliranja oduzimanja, potrebno je podsjetiti učenike kako je oduzimanje operacija inverzna (suprotna) zbrajanju te da se oduzimanje može interpretirati i kao uklanjanje, sklanjanje, ali i kao dodavanje suprotnih elemenata. Primjerice, izraz $4 - 3$ može se interpretirati i kao $4 + (-3)$, a upravo se takva interpretacija može najbolje iskoristiti u modeliranju oduzimanja i uočavanju uzoraka.

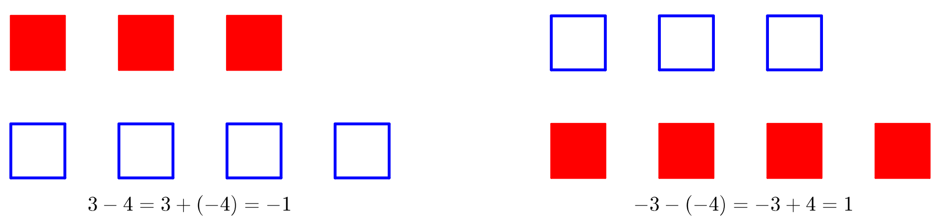
Dok je u određenim situacijama uklanjanje jednostavnije, ono ipak nije uvijek primjenjivo, dok interpretacija dodavanjem suprotnih elemenata nema takvih ograničenja.

Primjer 4.5.3. *Zadatak u kojem treba odrediti* $4 - 3$ *može se grafički prikazati i riješiti i uklanjanjem i dodavanjem suprotnih elemenata, kako je prikazano na Slici 4.18*



Slika 4.18: Model oduzimanja $4 - 3$.

No, zadacima poput $3 - 4$ *ili* $-3 - (-4)$ *teško je učenicima isprva pristupiti uklanjanjem jer im se može činiti kako nemaju dovoljno elemenata za ukloniti. Iz tog je razloga u takvim situacijama bolje najprije pristupiti strategijom dodavanja suprotnih elemenata, tj. koristiti numerički zapis* $3 - 4 = 3 + (-4)$ *i* $-3 - (-4) = -3 + 4$*, kako je prikazano na Slici 4.19.*



Slika 4.19: Modeli oduzimanja $3 - 4$ i $-3 - (-4)$.

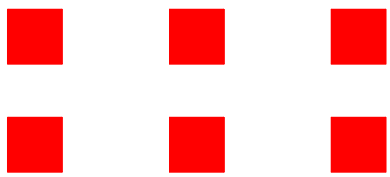
Na temelju takvih primjera učenici mogu primijetiti i usvojiti uzorak koji se zatim jednostavno koristi u daljnjem vježbanju oduzimanja. Za dublje je razumijevanje dobro s učenicima prokomentirati oduzimanje nule i oduzimanje od nule te značenje oduzimanja negativnih brojeva.

Nakon toga bi učenici trebali biti spremni usvojiti i skraćenu notaciju te razumjeti zašto se $8 + (-3)$ može pisati u obliku $8 - 3$ ili zašto se $-8 - (-6)$ može zapisati u obliku $-8 + 6$. Također, kroz prikazano se modeliranje tih operacija lako može uvidjeti i svojstvo komutativnosti.

Potrebno je i naglasiti kako smo dosad znak "$-$" već sreli u tri konteksta: kao predznak negativnog broja, kod suprotnog elementa i kao znak za oduzimanje.

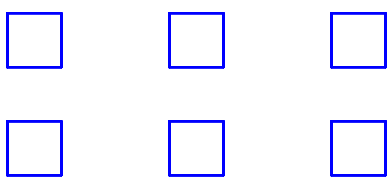
Osnovna je interpretacija množenja cijelih brojeva da ono predstavlja skraćeno ili ponovljeno zbrajanje, pa je npr. $5 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$, za koje očito vrijedi i svojstvo komutativnosti. Iskoristit ćemo dosad razvijene principe kako bismo stvorili uzorak za množenje cijelih brojeva.

Na primjer, $3 \cdot 2$ može se predstaviti kao zbrajanje triju grupa od po dva puna kvadratića, pa u konkretnom modelu krećemo od nule i postavljamo tražene grupe kvadratića, odakle slijedi $3 \cdot 2 = 6$.



Slika 4.20: Model množenja $3 \cdot 2$.

Slično tomu, $3 \cdot (-2)$ može se predstaviti kao zbrajanje triju grupa od po dva prazna kvadratića, pa je $3 \cdot (-2) = -6$. Nešto je kompliciranije tako vizualizirati produkt $(-2) \cdot 3$, no kako radi svojstva komutativnosti rezultat ne ovisi o poretku, možemo iskoristiti $(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2) = -6$.



Slika 4.21: Model množenja $3 \cdot (-2)$.

Sljedeći način promatranja produkta $(-2) \cdot 3$ dobiva se ukoliko interpretiramo znak "$-$" preko suprotnog broja, tj. interpretiramo li produkt $(-2) \cdot 5$ kao broj suprotan od $2 \cdot 5 = 10$, a suprotan je broj od 10, naravno, -10.

Treći način promatranja tog produkta nastaje interpretiramo li znak "$-$" kao oduzimanje, tj. interpretiramo li $(-2) \cdot 5$ kao oduzimanje od nule dviju skupina od pet (pet punih kvadratića ili dodavanje pet praznih kvadratića). To se može prikazati grafički kao dvije skupine od po pet praznih kvadratića ili, eventualno, kao dodavanje dviju grupa od po pet praznih kvadratića skupini koja se sastoji od jednako mnogo punih i praznih kvadratića (čime je, ustvari, prikazana nula, no takav način dodavanja novih skupina na već postojeće, neprazne skupine učenicima može djelovati prirodnije).

Četvrti je način za određivanje produkta $(-2) \cdot 5$ više istraživački te se svodi na proučavanje zakonitosti u jednakosti poput idućih,

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 5 &= 15 \\
2 \cdot 5 &= 10 \\
1 \cdot 5 &= 5 \\
0 \cdot 5 &= 0 \\
(-1) \cdot 5 &= ? \\
(-2) \cdot 5 &= ?
\end{aligned}
$$

u kojima se prvi faktor s lijeve strane jednakosti uzastopno smanjuje za 1, dok se broj s desne strane jednakosti uzastopno smanjuje za 5. Sada je potrebno da učenici uoče pravilo te odrede brojeve koji trebaju stajati na mjestu upitnika.

Produkt oblika $(-2) \cdot (-5)$ moguće je sada interpretirati na bilo koji od posljednjih triju navedenih načina.

Interpretiramo li ovaj produkt kao broj suprotan broju $2 \cdot (-5)$, za koji znamo da je jednak -10, slijedi da je $(-2) \cdot (-5) = 10$.

Interpretiramo li $(-2) \cdot (-5)$ kao oduzimanje od nule dviju skupina od po pet praznih kvadratića, za koje smo prilikom obrade oduzimanja vidjeli da je isto što i dodavanje dviju skupina od po pet punih kvadratića, slijedi da je $(-2) \cdot (-5)$ isto što i dodavanje 10, tj. $(-2) \cdot (-5) = 10$.

Konačno, produkt $(-2) \cdot (-5)$ možemo odrediti pronalaženjem uzorka u nizu jednakosti

$$
\begin{aligned}
3 \cdot (-5) &= -15 \\
2 \cdot (-5) &= -10 \\
1 \cdot (-5) &= -5 \\
0 \cdot (-5) &= 0 \\
(-1) \cdot (-5) &= ? \\
(-2) \cdot (-5) &= ?
\end{aligned}
$$

u kojem je uvijek ključno krenuti od nekoliko jednakosti koje poznajemo i iz kojih možemo zatim induktivno određivati i nepoznate jednakosti sve do one koja se traži u zadatku.

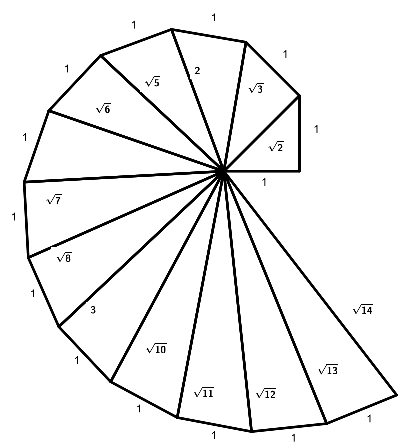
Nakon takvih interpretacija i prolaska kroz primjere, svrsishodno je od učenika tražiti određivanje predznaka produkata ako su predznaci faktora redom $+, +, -$ ili $-, -, -$ ili $-, -, +, -, -$ te pokušaj određivanja i općeg pravila za pronalaženje predznaka produkta u ovisnosti o predznacima faktora.

Sjetimo se da je dijeljenje operacija inverzna množenju. Prema tome, ako je dan zadatak poput $18 : (-3)$, možemo se pitati koji cijeli broj pomnožen s -3 daje 18, ili takvo dijeljenje prikazati u obliku jednadžbe $(-3) \cdot \square = 18$.

Iracionalni brojevi

Iracionalni su drugi korijeni prirodnih brojeva najčešći uvod u iracionalne brojeve iako su učenici već koristili, na primjer, broj π, ili su istraživali uzorke znamenaka u decimalnim brojevima kako bi našli one koje se nikad ne ponavljaju. Također su se već susreli s iracionalnim korijenima kada su primjenjivali Pitagorin teorem i procjenjivali druge korijene kako bi odredili duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta. Međutim, budući da kalkulatori daju decimalna rješenja samo za određen broj mjesta, učenici neće ni primijetiti da postoji nešto posebno što se tiče iracionalnih brojeva. Veličine zadane iracionalnim brojevima ne mogu se u potpunosti točno izmjeriti, ne mogu se prikazati u obliku razlomka te imaju beskonačno znamenaka koje se ne ponavljaju kada se izraze kao decimalni brojevi. Neki kalkulatori koriste racionalni i iracionalni zapis, tako da se ti alati mogu koristiti da bi se istražili iracionalni brojevi i da bi se konstruirali algoritmi za operacije s iracionalnim brojevima.

Učenici imaju poteškoće s iracionalnim brojevima jer su oni definirani prema svojstvu koje ne posjeduju (ne dopuštaju prikaz u obliku razlomka). Učenike treba fokusirati na svojstva koja iracionalni brojevi posjeduju istraživanjem vizualnih slika najčešćih i najljepših iracionalnih brojeva: π, $\sqrt{2}$ i omjer zlatnog reza. Korištenjem ravnala i šestara ili uz pomoć kalkulatora učenici mogu istražiti zadatke vezane za spirale ili zlatni rez kako bi otkrili smisao iracionalnih brojeva. Jednostavna geometrijska konstrukcija jednakokračnog pravokutnog trokuta ilustrira iracionalni broj i temelj je za konstrukciju logaritamske spirale. Konstrukcija niza drugih korijena pomoću spirale može se vidjeti na Slici 4.22.



Slika 4.22: Spirala drugih korijena.

4.6 Proporcionalno zaključivanje

Omjeri i proporcionalnost jedna su od najčešćih značajki matematike koja se može sresti izvan škole, u svakodnevnom životu. Ti važni pojmovi predstavljaju i jedan od prvih aspekata matematike s kojim se djeca susreću te je razumijevanje tih pojmova nužno i za svakodnevno funkcioniranje.

Omjer dviju veličina iste vrste broj je do kojega dolazimo dijeljenjem tih veličina, a omjer dviju veličina različitih vrsta broj je određenih mjernih jedinica do kojeg dolazimo dijeljenjem tih veličina.

Primjer 4.6.1. *Ako je tetka Genoveva u kolač stavila* 80 *grama glatkog brašna i* 110 *grama oštrog brašna, tada je omjer glatkog i oštrog brašna u kolaču omjer dviju veličina iste vrste te iznosi* $8 : 11$.

Ako je tetak Hubert 12 *kg šećera platio* 60 *kuna, tada je omjer uplate i za nju dobivene mase šećera omjer veličina različite vrste koji predstavlja cijenu kilograma šećera te iznosi* $60/12 = 5$ *kuna po kilogramu.*

Proporcija ili razmjer jednakost je dvaju omjera

$$a : b = c : d,$$

gdje su a, b, c, d različiti od 0.

Proporcionalne veličine jesu veličine koje se odnose na sljedeći način: koliko se puta jedna veličina poveća, toliko se puta poveća i druga; koliko se puta jedna veličina smanji, toliko se puta smanji i druga.

Obrnuto proporcionalne veličine jesu veličine koje su u sljedećem odnosu: koliko se puta poveća jedna veličina, toliko se puta druga smanji; koliko se puta smanji jedna veličina, toliko se puta druga poveća.

Primjer 4.6.2. *Ako bi* 15 *radnika iskopalo temelje kuće za* 8 *sati, za koliko vremena bi to učinilo* 10 *radnika?*

Označimo traženi broj sati s x. Broj radnika i vrijeme kopanja obrnuto su proporcionalne veličine. Koliko se puta smanji broj radnika, toliko se puta poveća vrijeme kopanja. Omjer broja radnika $15 : 10$ *jednak je obrnutom omjeru vremena kopanja* $x : 8$*, tj. vrijedi proporcija* $15 : 10 = x : 8$*. Množenjem dobivamo* $x = 12$ *te bi* 10 *radnika iskopalo temelje kuće za* 12 *sati.*

4.6.1 Važnost proporcionalnog zaključivanja

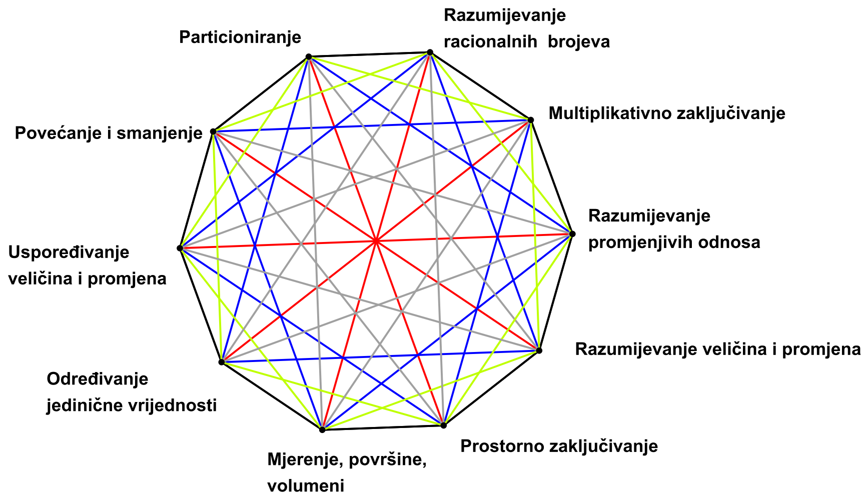
Proporcionalno zaključivanje podrazumijeva razmišljanje o odnosima između određenih jedinki i uspoređivanje količina ili vrijednosti jedinki. Teško je ukratko opisati što je proporcionalno zaključivanje. Ono što se sa sigurnošću može reći, proporcionalno zaključivanje počinje razumijevanjem multiplikativnih odnosa te razlikovanjem multiplikativnih i aditivnih odnosa. Omjeri i razmjeri podrazumijevaju multiplikativnu usporedbu umjesto aditivne te stoga rješavanje problema vezanih uz omjere i razmjere potiče razvoj proporcionalnog zaključivanja. Sposobnost je uspoređivanja multiplikativnih odnosa među veličinama zapravo sposobnost proporcionalnog zaključivanja.

Iako do viših razreda osnovne škole učenici ne uče pojmove vezane uz proporcionalnost, proporcionalnim zaključivanjem zaključuju i ranije. Na primjer, proporcionalno zaključivanje razlog je zašto većina učenika o broju 8 razmišlja kao o $2 \cdot 4$ ili $4 \cdot 2$, a ne kao o broju za jedan većem od sedam. Isto tako, proporcionalnim zaključivanjem učenici zaključuju da je brzina vožnje od 50 km/h jednaka brzini od 25 km/30 min.

Učenici koriste proporcionalno zaključivanje i kada zaključuju da je promjena u skupini djece koja se s 3 člana povećala na 9 veća nego promjena u skupini djece koja se sa 100 članova povećala na 150, jer se u prvoj skupini broj članova utrostručio, a u drugoj se skupini samo povećao za polovicu.

Proporcionalno zaključivanje ima puno dublji smisao od postavljanja i rješavanja razmjera, a neke su od osobina proporcionalnih mislilaca sljedeće:

- Posjeduju osjećaj za kovarijaciju. Drugim riječima, oni razumiju odnose u kojima dvije količine variraju zajedno te su u mogućnosti vidjeti kako se varijacije u jednoj veličini podudaraju s varijacijama u drugoj.



Slika 4.23: Odnosi u proporcionalnom zaključivanju.

- Prepoznaju i razlikuju proporcionalne i neproporcionalne veličine u svakodnevnom životu.
- Pronalaze brojne različite varijacije strategija za postavljanje razmjera ili uspoređivanje omjera te se većina tih varijacija temelji na neformalnim strategijama, a ne na predloženim algoritmima.
- Prepoznaju omjere kao zasebne cjeline koje predstavljaju odnos različit od veličina koje se uspoređuju.

Navike i vještine proporcionalnog zaključivanja ne stječu se ako se ne potiče njihov razvoj. Na razvoj proporcionalnog zaključivanja kod učenika negativno utječe direktno korištenje formula u rješavanju zadataka. Naime, na taj način učenici ne razmišljaju o pravilima ni o razlozima zašto ta pravila koriste te ne pokušavaju sami pronaći drugačiji način rješavanja zadataka.

Proporcionalno zaključivanje razvija se različitim aktivnostima koje uključuju uspoređivanje i određivanje jednakosti omjera i rješavanje razmjera kroz različite problemske zadatke bez pomoći formula.

Sposobnost proporcionalnog načina razmišljanja i zaključivanja važan je faktor u razvoju sposobnosti razumijevanja i primjenjivanja matematike. Osim u matematici, proporcionalno zaključivanje prisutno je i u drugim područjima kao što su prirodne znanosti kemija i fizika, glazba, geografija, ali i u svakodnevnom životu.

Primjeri su korištenja proporcionalnog zaključivanja u svakodnevnom životu prilagođavanje recepata ili doza lijeka, izrada različitih smjesa, mjerenja, rad s crtežima i kartama, računanje najpovoljnije kupovine, poreza i investicija.

Proporcionalno se zaključivanje vrlo često javlja i pri čitanju raznih knjiga i članaka. Naime, u mnoštvu literature nalaze se usporedne veličine, divovi i minijaturna bića čije su visine proporcionalne visini ljudi, uspoređuju se brzine i cijene. Mnoge knjige temelje se na usporedbama i idejama proporcionalnosti iako ih njihovi autori nisu pisali s ciljem istraživanja proporcionalnosti.

Primjer 4.6.3. *Guliver je na svojim putovanjima posjetio Liliput, gdje je sve* 12 *puta manje. Ako je prosječni čovjek visok* 175 *centimetara, koliko je visok prosječni Liliputanac? Ako je standardna mjera čaše soka* 2 *decilitra, kolika bi standardna mjera bila u Liliputu? Kojih bi dimenzija bio vaš udžbenik iz matematike da ste u Liliputu, a kojih da ste u Brobdingnagu, zemlji divova gdje je sve* 11 *puta veće?*

4.6.2 Razvoj proporcionalnog zaključivanja

Postoje brojni načini kojima se kod učenika može poticati razvoj proporcionalnog zaključivanja. Vrlo je važno poticati ih na nagađanja, smišljanja pravila i generalizacije u učenju.

Neki od načina za poticanje razvoja proporcionalnog zaključivanja u nastavi matematike jesu:

- davati učenicima zadatke s omjerima i razmjerima u brojnim i različitim kontekstima;
- suočavati učenike s problemima koji su i kvalitativne i kvantitativne prirode; Kvalitativni problemi (npr. Koja je posuda sa slike punija?) potiču učenike u zaključivanju proporcionalnim zaključivanjem bez manipuliraja brojevima;
- pomagati učenicima u razlikovanju proporcionalnih i neproporcionalnih situacija;
- poticati rasprave i eksperimentiranje s ciljem predviđanja i uspoređivanja omjera;

- pomagati učenicima u povezivanju proporcionalnog zaključivanja s ranije naučenim;
- uočiti da algoritamski postupci za rješavanje proporcija ne razvijaju proporcionalno zaključivanje i da učenici trebaju biti fleksibilni u razmišljanju i otkrivati različite načine rješavanja zadataka.

Ključni pojmovi vezani uz razvoj proporcionalnog zaključivanja

Razvoju proporcionalnog zaključivanja pridonose brojni čimbenici koji su međusobno povezani. Neki su od spomenutih čimbenika određivanje jediničnih veličina, prostorno zaključivanje, mišljenje o promjenjivim odnosima, multiplikativno zaključivanje, razumijevanje i uspoređivanje veličina i promjena, particioniranje (podjela), mjerenje, površine, volumeni, povećanje i smanjivanje veličina te razumijevanje racionalnih brojeva.

Sposobnosti određivanja jedinične veličine i prostornog zaključivanja pridonose lakšem razumijevanju proporcionalnih veličina. Podrazumijevaju sposobnost da se određenu jedinicu promatra kao skupinu nekoliko manjih dijelova iste veličine, a skupinu manjih dijelova kao jednu jediničnu veličinu.

U skladu s tim se, na primjer, centimetar može istovremeno promatrati i kao 1 cm i kao 10 mm. Jedinica je centimetar pa 5 cm predstavlja 5 jedinica, a svaka jedinica sadrži 10 mm.

Multiplikativno razmišljanje podrazumijeva zaključivanje o nekoliko ideja ili količina istovremeno. To podrazumijeva razmišljanje o relativnim odnosima više nego o apsolutnim.

Primjer 4.6.4. *Ako jedan pas poveća masu s* 5 *kg na* 8 *kg, a drugi s* 3 *kg na* 6 *kg, koji se pas više udebljao?*

Ako učenik razmišlja o apsolutnom odnosu ili aditivno, mogao bi odgovoriti da su se oba psa jednako udebljala. No ako učenik razmišlja o relativnom odnosu, mogao bi se složiti da se drugi pas više udebljao jer se njegova masa udvostručila, dok bi drugi pas trebao imati 10 *kg za jednak relativan odnos.*

Učenicima treba pomagati u prijelazu s aditivnog na multiplikativan način razmišljanja, a prijelaz započinje u nižim razredima osnovne škole. Multiplikativan način razmišljanja tvori okosnicu kurikuluma matematike te uključuje važne i povezane ideje kao što su kod množenja, dijeljenja, razlomaka, decimalnih brojeva, omjera i postotaka.

Pri promatranju se veze između dvaju veličina pažnja usmjerava na ovisnost među njima, tj. na to kako promjena vrijednosti jedne veličine utječe na drugu veličinu (npr. ako se vrijednost jedne veličine poveća, hoće li se vrijednost druge povećati ili smanjiti).

Primjer 4.6.5. *Svaki put kad kupi čokoladu, Marko dobije* 5 *sličica gratis. Za* 10 *čokolada dobije* 50 *sličica. Broj sličica ovisi o broju čokolada koje Marko kupi i to tako što se povećanjem broja čokolada povećava i broj sličica. Dakle, to su proporcionalne veličine.*

Particioniranje, mjerenje i mjerne jedinice te prostorno zaključivanje odnose se na razumijevanje veze između vrijednosti i jedinica, razumijevanje ekvivalentnih veličina, uzastopno dijeljenje cjeline i računanje razlika, mjerenje i uspoređivanje mjera dviju različitih jedinica. To su temelji matematike i svakodnevnog života, a očita je njihova povezanost s proporcionalnim zaključivanjem.

Primjer 4.6.6. *Maja je tri peciva platila* 3.75 *kn, a Iva je šest peciva platila* 7.50 *kn. Koliko će platiti Lana ako kupuje sedam peciva?*

Lako se vidi da jedno pecivo košta 1.25 *kn pa će Lana platiti* 8.75 *kn.*

Razumijevanje racionalnih brojeva važno je jer su to brojevi koji se mogu izraziti u obliku razlomaka, a znanje o razlomcima pridonosi boljem razumijevanju algebre i shvaćanju gustoće racionalnih i realnih brojeva. Osim toga, razlomci se često javljaju u svakodnevnom životu, a u nekim se situacijama pri uspoređivanju razlomaka lako može pogriješiti. Jedan je od takvih slučajeva prikazan u sljedećem primjeru, a pokazuje da u svakodnevnom životu kod uspoređivanja razlomaka treba obratiti pozornost na to kolika je cjelina onoga što se uspoređuje.

Primjer 4.6.7. *Djed je svojim unucima donio dvije čokolade s jagodama. Veća od njih ima masu od* 90 *grama te je podijeljena na* 9 *kocaka, dok manja čokolada ima masu od* 48 *grama i podijeljena je na* 6 *kocaka. Prvo je čokoladu ponudio Marici te joj rekao da smije uzeti ili trećinu veće čokolade ili polovinu manje. Što Marica treba odabrati ukoliko želi dobiti više čokolade?*

*Primijetimo kako je ovdje trećina veće čokolade (*3 *kocke,* 30 *grama) veća od polovine manje (*3 *kocke,* 24 *grama) pa Marica treba odabrati trećinu veće čokolade.*

Neformalne aktivnosti pogodne za razvoj proporcionalnog zaključivanja

Razvoj proporcionalnog zaključivanja može se poticati kroz razne neformalne aktivnosti, od kojih su najistaknutije identificiranje multiplikativnih odnosa, izbor ekvivalentnih omjera, uspoređivanje omjera, određivanje mjerila uz pomoć tablice omjera te aktivnosti konstruiranja i mjerenja.

Smisao tih aktivnosti nije da učenici nauče određene metode za rješavanje proporcija, već da ih se potiče na samostalno istraživanje i zaključivanje.

Jedan je od pokazatelja proporcionalnog zaključivanja sposobnost uočavanja i shvaćanja razlike između aditivnog i multiplikativnog pristupa. Sljedeći primjer pokazuje razliku između tih dvaju pristupa.

Primjer 4.6.8. *U sportskoj osnovnoj školi jedan osmi razredu ima* 16 *učenika, od kojih* 12 *trenira rukomet. Preostali učenici ne vole rukomet. Opišite vezu između broja učenika koji treniraju rukomet i broja onih koji ne treniraju.*

Budući da je u razredu ukupno 16 *učenika, a njih* 12 *trenira rukomet, to znači da ga njih četvero ne trenira. Odnos među učenicima može se izraziti na sljedeće načine:*

- *učenika je koji treniraju rukomet u razredu za* 8 *više od učenika koji ne treniraju,*
- *u razredu je* 3 *puta više učenika koji treniraju rukomet nego onih koji ne treniraju,*
- *na svaka* 4 *učenika koji treniraju, dolazi po* 1 *učenik u razredu koji ne trenira rukomet.*

Prvi je način izražavanja odnosa među učenicima temeljen na aditivnom pristupu jer je usmjeren na razliku između dvaju brojeva. Preostala dva načina temeljena su na multiplikativnom pristupu i zapravo su varijacije multiplikativnog odnosa temeljene na omjeru $3 : 1$.

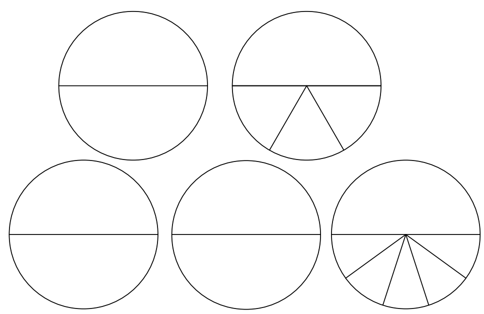
Aktivnosti izbora ekvivalentnih omjera temelje se na zadanom omjeru, dok je učenicima ponuđeno nekoliko drugih omjera od kojih treba izabrati jedan ili više njih koji su ekvivalentni zadanom. Bitno je da učenici razumiju zašto su određeni omjeri ekvivalentni. Tim aktivnostima potiče se prepoznavanje situacija u kojima je potreban multiplikativan pristup. Osim toga, važno je učenicima davati primjere u kojima dva omjera nisu proporcionalna, ali su razlike među komponentama tih omjera jednake. Na taj se način učenici usmjeravaju na zanemarivanje aditivnog odnosa među veličinama. Na primjer, omjeri $6 : 9$ i $10 : 13$ nisu ekvivalentni iako su razlike između odgovarajućih komponenti jednake, tj. $9 - 6 = 13 - 10$.

Ukoliko učenici znaju uspoređivati omjere, razumjet će i zadatke vezane uz proporcionalnost. Rješavanje problema u kojima treba uspoređivati omjere moguće je na razne načine, a potiče učenike na razmišljanje i zaključivanje bez korištenja formula i algoritama. Zbog toga takve aktivnosti doprinose razvoju proporcionalnog zaključivanja.

Primjer 4.6.9. *Mirjana i Marina imaju rođendanske zabave i obje su naručile (okrugle) pizze za svoje goste. Mirjana je zaključila da su za svaka tri gosta dovoljne dvije pizze, a Marina je za svakih pet gostiju naručila tri pizze. Hoće li više pizze pojesti Mirjanin ili Marinin gost?*

Podijelimo li dvije pizze na dijelove, vidjet ćemo koliko će dijelova pizze pojesti svaki gost. Primjerice, možemo dvije pizze koje je Mirjana naručila za svaka tri gosta podijeliti na tri dijela tako da vidimo kako će svaki njen gost dobiti jednu polovinu pizze i još jednu šestinu pizze. Također, dijelimo li na isti način tri pizze koje je Marina naručila za svakih pet svojih gostiju, vidimo da će na svakog od njih doći po jedna polovina pizze i još jedna desetina pizze.

Kako je $\frac{1}{6} > \frac{1}{10}$*, očito će svaki Mirjanin gost pojesti više pizze nego Marinin. Taj način podjele prikladan je za ilustraciju problema učenicima jer smo umjesto općenitog uspoređivanja razlomaka problem sveli na uspoređivanje razlomaka s jednakim brojnicima.*



Slika 4.24: Podjela pizza.

Može se primijetiti da u zadatku nije rečeno da Mirjana ima točno tri gosta, a Marina točno pet. Stoga se za uspoređivanje može koristiti i svaki višekratnik od $2:3$ *i* $3:5$*. Na primjer, vidi se da će Mirjana dijeliti* 6 *pizza na* 9 *gostiju, a Marina* 6 *pizza na* 10 *gostiju. Ako bi se takve izraze promatralo kao razlomke, onda su na taj način dobivena dva razlomka jednakih brojnika pa je očito da će svaka Marinina gošća pojesti manje pizze nego Mirjanina.*

Odnos između dviju veličina može se prikazati pomoću tablice omjera. Kada se zadani podaci unose u tablicu, lako se uočava razlika između veličina te način na koji one ovise jedna o drugoj i tada je lako riješiti dani problem. Za svaki dani problem tablica omjera izgledat će drugačije jer će se provoditi računske operacije specifične za zadani problem. Pri izradi tablica omjera učenici koriste multiplikativan odnos kako bi dani omjer pretvorili u ekvivalentan omjer i na taj način riješili zadatak.

Primjer 4.6.10. *Neka je cijena kilograma sasvim pljesnivog sira* 4.25 *kuna. Odredite kolika je cijena* 12.13 *kilograma tog sira.*

Prikažemo traženu masu pljesnivog sira u obliku sume $10 + 2 + 0.1 + 0.03$ *te zatim cijenu svakog od pojedinih dijelova tablično, kako je prikazano u Tablici 4.4. Takav je prikaz pregledniji te je učenicima jasnije što se u kojem koraku radi. Bitno je da shvate kako određenu računsku operaciju moraju provoditi s podatcima zapisanim u tablici, kombinirajući prethodne retke. Na primjer, podaci dobiveni u retku* C *dobiveni su množenjem podataka iz retka* A *s* 2*, što znači da oba broja iz tog retka, i* 1 *i* 4.25*, treba pomnožiti s* 2*.*

Redak	Masa (kg)	Cijena	Napomena (zabilješka)
A	1	4.25	
B	10	42.5	10 · A
C	2	8.5	2 · A
D	0.1	0.425	A/10
E	0.01	0.0.425	A/100
F	0.03	0.1275	3 · E
G	12.13	51.5525	B + C + D + F

Tablica 4.4: Tablica omjera.

Kako bi dobili materijalni prikaz proporcija i numeričkih odnosa, učenici trebaju raditi aktivnosti mjerenja i konstruiranja fizičkih ili vizualnih modela ekvivalentnih omjera. U takvim aktivnostima povezuju se proporcionalno zaključivanje i geometrijski koncept sličnosti, a ta je veza vrlo važna. Na taj se način produbljuje i razumijevanje proporcionalnosti u geometriji te međusobnih odnosa duljina, površina i volumena sličnih geometrijskih likova i tijela. Proporcionalno zaključivanje pridonosi razumijevanju sličnosti, a slični likovi pružaju vizualni prikaz proporcionalnih veličina.

5

UČENJE I POUČAVANJE ALGEBRE

Algebra se, posebice kada se interpretira kao manipulacija simbolima, smatra problematičnim dijelom matematike, za koji mnogi učenici smatraju kako je to početak njihovog neuspjeha u ovom predmetu ([49]). U vrijeme kada sve veći broj učenika završava srednjoškolsko obrazovanje, takav stav donosi razočaranje u matematičkim učionicama te narušava pozitivnu klimu u razredu. Stručnjaci (npr. [49]) smatraju kako se algebra učenicima treba predstaviti kao važan dio matematike i to na način da učenici mogu prepoznati tu važnost i svrhu kroz primjenu u svakodnevnom životu. Uz tu je važnost usko vezana važnost i potreba da objekti i postupci postanu značajni učenicima, a učitelji dobiju jasniju sliku o tome što sve algebra predstavlja, izuzev same manipulacije simbolima. To je bio motiv mnogim eksperimentalnim pristupima poučavanja i idejama o promjeni kurikuluma nastave matematike (poput [4, 6]).

Danas postoji mnoštvo pristupa poučavanju algebre: generalizacijski pristup, rješavanje problema zadanih riječima, funkcionalni pristup, jezični pristup, modeliranje fizikalnih i matematičkih fenomena te povijesni pristup. Važno je napomenuti da se uravnotežen pristup poučavanju sastoji od nekoliko različitih istovremenih pristupa, budući da svaki od njih na drugačiji način naglašava fundamentalne koncepte algebre. Osvrnut ćemo se na načine uvođenja algebre u nastavu matematike, usvajanje osnovnih ideja u učenju školske algebre, ilustriranje pristupa poučavanja kako bi se učenicima olakšao prijelaz s aritmetičkog na algebarski način razmišljanja te jezične probleme koji nastaju kada se problem zadan riječima treba zapisati matematičkim jezikom.

Prema većini dokumenata kurikuluma uvođenje algebre počinje u višim razredima osnovnih škola ili u prvoj godini srednjoškolskog obrazovanja. Na početku učenja algebre potrebne su mnoge konceptualne prilagodbe jer, iako aritmetika i algebra dijele određene oznake i simbole, one često u algebri promijene svoje značenje. Mnogi učenici završavaju osnovnu školu uz vrlo ograničeno znanje o matematičkim strukturama i aritmetičkim operacijama kao općim postupcima, što predstavlja temelj za uvođenje algebre u prvom razredu srednje škole. No, neke škole algebru uvode u najranijim godinama osnovnoškolskog obrazovanja. Algebarske aktivnosti uvode se već u vrtićkoj dobi, a djeca se s algebarskim pojmovima upoznaju već u trećem razredu osnovne škole. Pobornici uvođenja algebre u nižim razredima osnovne škole smatraju kako aritmetika i algebra nisu toliko različita područja, s obzirom na to da dublje razumijevanje aritmetike zahtijeva znanje o određenim matematičkim generalizacijama, a algebarski pojmovi kod mlađe djece razvijaju upravo takve generalizacije, baš kao kod adolescenata ili odraslih osoba. Mnogi edukatori usvojili su pristup u kojem se na algebru gleda kao na generaliziranu aritmetiku brojeva i veličina. Taj pristup razvija sposobnost odmaka u razmišljanju o vezama među određenim brojevima i veličinama prema vezama između niza brojeva i veličina. Djeca su već u dobi od sedam godina u stanju razumjeti princip jednakosti u algebri, dok učenici trećeg razreda osnovnih škola mogu razumjeti pojam odnosa poznatih i nepoznatih veličina.

Mnogi učenici ne pronalaze smisao u algebri te im je nedostatna kako u značenju tako i u svrsi. Motivacija opada kada učenici ne razumiju ideje te jedina svrha predmeta postaje riješiti test. Pretpostavka da će im algebra biti korisna nakon što više nauče ne dovodi do entuzijazma ukoliko trenutni zadaci ne pobuđuju interes. To nije ograničeno samo na one koji su neuspješni u algebri, jer čak i oni koji uspješno savladavaju tehnike, često ne vide algebru kao alat za razumijevanje, izražavanje i priopćavanje generalizacija, za otkrivanje struktura i utvrđivanje veza te formuliranje matematičkih argumenata.

U ranoj fazi učenici krivo shvaćaju značenje koje se pridaje slovima, izrazima i jednadžbama. Iako se proteklih godina radilo na pobuđivanju zanimljivih pristupa algebri, osobito istraživanjem uzoraka brojeva, to ne donosi plodove baš svaki put. Pronalaženje formule za predstavljanje uzorka ne bi trebalo biti krajnja točka zadatka već nastavak rada na proširivanju jačine algebarskih ideja te motiviranje razvoja primjerenih vještina koje učenici mogu koristiti u rješavanju zanimljivih zadataka. Mnogi udžbenici osiguravaju brojne vježbe nevezane uz smisleni kontekst, čime se stavlja naglasak na postupke pamćenja umjesto da se ostvaruje veza između slova i brojeva te razvija razumijevanje ideja i njihova primjena.

Razumijevanje je važan element u učenju i poučavanju matematike te se isto odnosi i na algebru kao osnovni dio matematike. Ideja razumijevanja nije toliko jasna koliko bi njezina svakodnevna primjena to sugerirala jer različiti ljudi razmišljaju na različite načine.

Ponovno je ovdje važno razlikovati instrumentalno i relacijsko razumijevanje. Instrumentalno razumijevanje vezano je uz znanje pravila bez razloga, dok relacijsko razumijevanje uključuje znati kako, ali znati i zašto. Instrumentalno razumijevanje relativno je površna kvaliteta koju se promatra kada se rutinski zadatak uspješno riješi, dok je relacijsko razumijevanje profinjenije te nikada ne završava. Ono se razvija i produbljuje dok se ideja iskušava na različite načine i povezuje s drugim idejama. Za učenje je matematike, pa tako i algebre, bitno postići relacijsko razumijevanje, no to nije ni jednostavno ni lako.

Često dolazi do neusklađenosti učitelja i učenika kada se radi o primjerenom razumijevanju u učenju matematike. Učitelj može raspravljati o matematičkim idejama i postavljati zadatke s namjerom pobuđivanja relacijskog razumijevanja dok istovremeno učenik želi razumjeti samo instrumentalno pamteći samo postupke koji daju točan odgovor na zadatke postavljene u vježbama i ispitivanjima. Često nailazimo na učenike koji na matematiku gledaju samo kao na formule i postupke koji se pamte, ali ne razumiju. Razlog tomu može biti jer su im predavali učitelji koncentrirani isključivo na instrumentalno razumijevanje, no do toga može doći i unatoč učiteljevim naporima pri poticanju dubokoumnijih odgovora jer učenje obuhvaća mnogo faktora. Do neusklađenosti također dolazi kada učitelj instrumentalno poučava učenika koji želi razumjeti i relacijski.

Algebarsko razumijevanje povezano je s prijašnjim učeničkim razumijevanjem brojeva i numeričkih operacija, s obzirom da se algebra na osnovnoj razini bavi općenitim aritmetičkim vezama. Veze između simboličkih i numeričkih rezultata moraju se stalno obnavljati. Razumijevanje negativnih brojeva i razlomaka i operacije s njima bitni su pokazatelji učenja mnogih aspekata algebre. Poteškoće su s njima često dovoljna barijera napretku, stoga je važno prepoznati neke od njih te istražiti načine na koje se te poteškoće mogu razriješiti.

5.1 Kako učiti algebru?

Postoji snažna prevladavajuća tradicija u poučavanju algebre u kojoj nastavnik uvodi učenike u novu temu demonstrirajući radne primjere i zatim pokušava učvrstiti procedure kroz iscrpne vježbe. Te su vježbe najčešće izolirane od aktivnosti koje mogu dati svrhu i smisao algebarskim idejama i operacijama. Iako postoji već rastući naglasak na traženje uzorka brojeva i korištenje grafičkog kalkulatora ili programa za crtanje grafova, te aktivnosti nemaju nikakav značajan utjecaj na pristupe vještinama učenja ili u korištenju algebre u svrhu rješavanja problema i objašnjavanja svojstava brojeva. Inovacije često postaju dodatci kurikulumu koji ili istiskuju neku postojeću praksu ili su nezgodno uz nju postavljeni.

Način je na koji se algebra poučava uvelike pod utjecajem učiteljevih vjerovanja o prirodi predmeta i kako ga učenici trebaju učiti, ali i gomile vanjskih pritisaka. Ne postoji krajnji odgovor na pitanje kako učenici trebaju učiti algebru, ali se može ukazati na prirodu poteškoća kritički promatrajući trenutne rezultate istraživanja i promatrajući prakse u svjetlu dokaza koje one pružaju. Temeljna je nelagoda za učitelje promatrati matematiku kao tijelo znanja i kao način mišljenja. Prva vodi do popisa tema koje se na neki način daju učenicima, a druga do donekle nejasnih zahtjeva za rješavanje problema i dokazivanje. Nema rasprave o tome koji se od tih dvaju elemenata mora odabrati jer su oba važna, ali smo daleko od uspostave ravnoteže između njih.

Tradicionalni pristupi poučavanju algebre karakterizirani su kao provođenje mnogo vremena na vještinama učenja prije nego što ih primijenimo na probleme. Oni teže davanju prednosti znanju te na način mišljenja gledaju kao na nešto što slijedi nakon usvajanja tog znanja. Alternativa je započinjanje s problemima koji će biti povezani s određenim temama, a zatim učenje važnih ideja i vještina kroz rad na tim problemima, što rezultira gledanjem na matematiku kao na nešto o čemu se zapravo treba razmisliti i dati smisao prije pamćenja skupa pravila.

Postoje ideje za predavanje algebre koje ohrabruju učenike u konstruiranju i razmišljanju o smislu izražavanja i jednadžbi, naročito kroz raspravu. Tipičan zadatak sastoji se od skupa kartica, od kojih neke sadrže algebarske izraze, a druge odgovarajuće pisane izjave. Namjera je da učenici rade u manjim grupama i odabiru parove kartica te objasne svoj odabir. U vrednovanju utjecaja tih materijala ukazalo se na važnost stvaranja prikladne kulture razreda uspoređujući dva nastavnika koja su koristila iste materijale [22]. Prvi je dao manje uputa za zadatke i učenici su radili samostalno kao da je to bila vježba rješavanja zadataka te su naučili vrlo malo. Drugi je nastavnik jasno iznio svrhu zadatka i naglasio potrebu da se uzme vremena i razmisli što stvari znače, radije nego da se samo riješe zadaci. Taj je nastavnik raspravio o razlikama između rada potrebnog za tečno rješavanje, što zahtijeva vježbu, i rada potrebnog za razumijevanje značenja, što zahtijeva raspravu, nužnu da bi se uvidjelo drugačije stajalište. Također je objasnio svojim učenicima da se nekada treba raditi i nikada zapravo završiti. Tijekom vremena mnogo učenika razvilo je svjesnost o drugačijim "načinima znanja nečega" i načine kako ih razviti samo za sebe.

Cilj je algebre uravnotežiti dva važna elementa tečnosti i razumijevanja u svrhu toga da algebra postane pristupačnija i bliskija učenicima. Ona se temelji na čvrstom vjerovanju da će učenici učiti i koristiti algebru učinkovito ako ih se stalno izaziva na samostalno razmišljanje. Mnogo trenutnog poučavanja algebre na svim razinama vodi do učenja napamet čiji je cilj instrumentalno razumijevanje. Učenje napamet oslanja se na pamćenje činjenica i vještina, a ne na njihovo razumijevanje i primjenu. Smisleno učenje, vezano uz relacijsko razumijevanje, smanjuje opterećenje u sjećanju tako da slaže ideje u koherentni okvir te omogućuje učenicima fleksibilno razmišljati i samostalno rješavati zadatke. To ukazuje na činjenicu da problemi i objašnjavanje uloga dokaza trebaju biti uključeni na svakom stupnju učenja algebre i da rasprava i osvrt imaju važnu ulogu zajedno s konvencionalnim pisanim zadacima. Možda bi bilo prikladno organizirati kurikulum i poučavanje na esencijalno linearan način, ali ne smijemo se zavaravati da će učenje slijediti isti put. Nesigurnost i nepredvidljivost puteva kojim učenje može krenuti ono je što poučavanje čini frustrirajućim i zahtjevnim zadatkom, ali i jedan od razloga zašto ono može biti poticajno i beskrajno zapanjujuće.

5.2 Algebarsko mišljenje

Algebra je osnovno područje u svim cjelinama matematike te je zastupljena u gradivu osnovne i srednje škole. Algebra se u osnovnoj i srednjoj školi mahom sastoji samo od manipulacije simbolima i raznih postupaka koji nemaju neke prevelike veze sa stvarnim svijetom, no trebalo bi doći do promjene i staviti naglasak na razvoj mišljenja i zaključivanja u svim područjima matematike.

Algebarsko razmišljanje ili mišljenje uključuje formiranje generalizacije iz iskustva s brojevima i računanjem, formaliziranje u smislu simbola i upoznavanje pojmova uzoraka i funkcija. Daleko od toga da je to tema u kojoj je uključeno malo stvarnog svijeta; algebarsko mišljenje prožima se u svim područja matematike i neophodno je za stvaranje matematike koja se koristi u svakodnevnom životu.

Pojmovi i ideje koji se provlače kroz matematiku jesu:

- Struktura brojevnog sustava i metode koje koristimo prilikom računanja mogu se generalizirati, što je u matematici vrlo bitno.

- Simbolizam, koji se rabi i u aritmetici. Npr. svojstvo komutativnosti ($a+b=b+a$), govori nam da je $56+76=76+56$, bez potrebe da posebno računamo sume na svakoj strani jednakosti.
- Varijable su simboli koji se koriste umjesto konkretnih brojeva ili raspona brojeva, a koriste se za označavanje veličina koje se razlikuju ili se mijenjaju kao nepoznate vrijednosti.
- Matematički su modeli redovita pojava te se mogu proširiti i generalizirati.
- Funkcije su odnosi ili pravila po kojima jedinstveno pridružujemo elemente jednog skupa elementima drugog skupa.
- Funkcijski odnosi mogu biti prikazani u kontekstu stvarnog svijeta, grafikona, tablica i riječi. Svaki prikaz nudi drugačiji pogled na isti odnos. Različiti prikazi služe u različite svrhe pri korištenju funkcija.

Jedan je od osnovnih pojmova koje vežemo uz algebarsko mišljenje pojam generalizacije. Generalizacija ili poopćavanje prijelaz je s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova nadskupa. Kreće se od nekog pojma kojemu je pridružen određeni skup objekata te se zatim ustanovljava neko svojstvo svih elemenata zadanog skupa. Zatim se promatra općenitiji pojam, svojstvo se prenosi na sve elemente dobivenog nadskupa ili se izgrađuje općenitije svojstvo. Budući da nije odmah jasno hoće li pri prenošenju svojstva s manjeg skupa na nadskup ono ostati sačuvano, nužno je dokazati da to svojstvo vrijedi za sve elemente nadskupa. Prema tome, generalizacija ili poopćavanje metoda je kojom se izgrađuju općenitiji pojmovi i općenitije tvrdnje.

Najvažnije su generalizacije u srži algebarskih razmišljanja one o brojevima i računanju, tj. one o aritmetici. Ne samo da takvo razmišljanje pridonosi generalizaciji brojeva i računanja već i sama generalizacija pomaže boljem razumijevanju i vještini računanja. Možemo koristiti naše razumijevanje kod zbrajanja, npr. $5+7$ možemo zapisati i u obliku $5+7=2+3+7=2+10$, a $5+67$ u obliku $5+67=2+3+67=2+70$. Tu ideju možemo generalizirati na način da se prilikom zbrajanja brojeva manjih od 10 i bilo kojeg broja koji završava na 7 koristi isto zaključivanje. Naravno, umjesto broja 7 može biti bilo koji broj od 1 od 9.

Za uvođenje algebarskog mišljenja u kurikulum najzaslužniji je matematičar James J. Kaput, američki matematičar i edukator ($1942-2005$), koji se zauzimao za nove pristupe poučavanju matematike, čime bi široj populaciji postala procesom razumijevanja umjesto stjecanja apstraktnog znanja. On smatra kako se generalizacija treba uvesti u sve sfere matematike, u aritmetiku, geometriju, u modeliranje situacija ([23]). Također opisuje pet različitih oblika algebarskog zaključivanja:

1. generalizacija aritmetike i uzoraka,
2. korištenje simbola i njihovo značenje,
3. proučavanje strukture brojevnih sustava,
4. proučavanje uzoraka i funkcija i
5. proces matematičkog modeliranja.

Algebarsko mišljenje nije samo jedna ideja već se sastoji od različitih oblika mišljenja i razumijevanja simbola te bi u kurikulumu nastave matematike trebalo biti uključeno u sva područja matematike. Također bi trebalo kod učenika od samog početka obrazovanja razvijati takav oblik mišljenja kako bi njegovo učenje bilo što produktivnije.

Generalizacija brojeva pojavljuje se pri prvom kontaktu osobe s matematikom. Počinje već u vrtiću i nastavlja se dalje kroz školovanje, gdje učenici uče o svim svojstvima brojeva, računanja, uključujući i osnovne činjenice i značenje operacija. Zajedno s generalizacijom uče i o simbolici.

Temeljni model konceptualizacije, koji se može smatrati skupom osnovnih aktivnosti školske algebre, predstavljen je skupom generalizacijskih, transformacijskih i općih metakognitivnih aktivnosti. Generalizacijske se aktivnosti odnose na oblikovanje izraza i jednadžbi, tj. algebarskih objekata. Objekti u algebarskim jednadžbama i izrazima varijable su i nepoznanice. Transformacijske aktivnosti, tj. aktivnosti utemeljene na algebarskim pravilima, odnose se na postupke rješavanja problema koji uključuju uvjete i rješavanje jednadžbi. Velik dio transformacijskih aktivnosti uključuje rad s ekvivalentnim formama i zahtijeva dobro poznavanje istih. Opće metakognitivne aktivnosti koriste algebru kao alat pri rješavanju problema, modeliranju, uočavanju strukture, proučavanju promjena, generaliziranju, analiziranju odnosa i veza, obrazlaganju i dokazivanju. Te se složene aktivnosti ne mogu odvojiti od generalizacijskih i transformacijskih aktivnosti bez da se usput izgubi smisao učenja algebre. Prema tome, algebarsko razmišljanje ovisi o razvoju nekoliko temeljnih ideja i pojmova, od kojih kao najvažnije izdvajamo ekvivalenciju i varijable.

5.2.1 Ekvivalencija

Znak jednakosti "=" jedan je od najvažnijih simbola u aritmetici, algebri i u svim područjima matematike u kojima se radi s brojevima i operacijama. Istraživanja koja su počela 1975., a provode se još i danas (poput [26]), pokazuju kako je razumijevanje tog simbola loše.

Svojstva simetričnosti i tranzitivnosti ekvivalencije smatraju se najvažnijim uvjetima za generiranje i primjereno interpretiranje strukturalnih prikaza poput jednadžbi. Zbog toga je od iznimne važnosti naučiti učenike kako znak jednakosti trebaju smatrati relacijskim simbolom koji govori da su dva izraza ekvivalentna, a ne operacijskim simbolom koji im govori da trebaju nešto izračunati. Tipični odgovori na pitanje "Objasnite značenje simbola '='" koje je zabilježila jedna učiteljica u osmom razredu osnovne škole ([25]) razvrstani su u dvije skupine najčešćih odgovora:

- "Znak '=' koristi se u jednadžbama gdje trebamo pokazati da je izraz s lijeve strane znaka '=' jednak izrazu s desne strane znaka, poput $49 = 7 \cdot 7, 3 + 3 = 5 + 1$."
- "Znak '=' govori nam da moramo doći do rezultata, tj. konačnog rješenja nekog izraza, poput $3 \cdot 2 = 6$."

Ranija istraživanja ([43]) pokazala su da učenici znak jednakosti smatraju operacijskim znakom te takav stav zadržavaju čak i u prvim godinama srednjoškolskog obrazovanja.

Zašto je za učenike važno pravilno razumijevanje znaka jednakosti? Prvo, važno je shvatiti odnose u brojevnom sustavu jer je on glavna metoda za predstavljanje tih odnosa. Na primjer, $6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 7$. Ne očekuje se od učenika razmišljanje o tome samo u simboličkom smislu, već i o mogućim osnovnim idejama u aritmetici. Broj 6 možemo prikazati kao sumu $6 = 5 + 1$, svojstvo distributivnosti omogućava nam da odvojimo svaki od dijelova, $(1+5) \cdot 7 = (1 \cdot 7) + (5 \cdot 7)$, a zatim znamo da je $1 \cdot 7 = 7$. Te su ideje razvijene kroz aritmetiku, a isti se postupci mogu izvršiti i s ostalim brojevima na poopćeni način. Drugi razlog zašto učenici trebaju razumjeti znak jednakosti jest zbog algebarskih izraza, jer kad se s njima susretnu, učenici imaju poteškoća. Čak i rješavanje jednostavnog izraza poput $5x - 24 = 81$ zahtijeva od učenika da vide obje strane znaka jednakosti kao ekvivalentnost izraza. Treba znati da, ako se s obje strane nešto doda ili oduzme, tada jednakost i dalje ostaje ista.

Učeničko je poimanje znaka jednakosti od operacijskog do relacijskog postajalo sve sofisticiranije kroz godine učenja matematike, međutim, većina je učenika još uvijek sklonija operacijskom shvaćanju znaka jednakosti. Iako udio učenika koji shvaćaju relacijsko značenje znaka jednakosti raste kroz obrazovanje od šestog do osmog razreda, kod učenika se osmih razreda taj postotak ponovno počinje smanjivati, te učenici koji su ranije shvaćali relacijsko značenje znaka jednakosti na to zaboravljaju prilikom rješavanja linearnih jednadžbi ([26]). Možemo zaključiti da je relacijsko shvaćanje znaka jednakosti potrebno ne samo kako bi učenici znali smisleno postavljati i interpretirati jednadžbe nego i kako bi znali smisleno raditi s jednadžbama. Zbog toga je od iznimne važnosti odvojiti vrijeme i posvetiti se učeničkom razumijevanju činjenice da znak jednakosti predstavlja ekvivalenciju, a ne računsku operaciju, što će se odraziti na uspjeh u algebri u kasnijim godinama obrazovanja.

Točno/netočno i jednakosti otvorenog tipa

Dobra je polazna točka za pomoć učenicima u razumijevanju znaka jednakosti proučavanje točnih i netočnih jednakosti. U tom slučaju promatramo samo značenje jednakosti. Želimo li uvesti točno/netočno jednakost, potrebno je učenicima na jednostavnim primjerima objasniti što se takvim primjerima podrazumijeva, tj. kada je jednakost točna, odnosno netočna. Zatim sastavimo listić na kojemu se nalaze jednostavne jednakosti, od kojih su neke točne, a neke ne. Na primjer:

$$5 + 2 = 7, 4 + 1 = 64 + 4 = 8, 8 = 10 - 1.$$

Uz to istraživanje moguće je uvesti i druge aktivnosti, ali treba računanje ostaviti što jednostavnijim. Učenici rješavaju listić i određuju koje su jednakosti točne, a koje netočne. Za svaki se odgovor od njih zahtijeva objašnjenje kako su zaključili što je točno ili netočno. Osim jednostavnih jednakosti, moguće je učenicima dati i manje klasične jednakosti s kakvima se još nisu susretali, na primjer:

$$4 + 5 = 8 + 1, 3 + 7 = 7 + 3, 6 - 3 = 7 - 4,$$

$$4 + 5 = 4 + 5, 8 = 8, 9 + 5 = 14 + 0.$$

Nije potrebno istraživati sve varijacije jednakosti u jednom satu, već je svrsishodnije to činiti u više navrata. Potrebno je poslušati i promotriti odgovore koji učenici daju tijekom rješavanja listića. Učenici se uglavnom slažu oko jednakosti koje s jedne strane imaju neki izraz, a s druge samo broj. Jednakosti oblika $10 = 10$ izazivaju veću raspravu kod učenika jer su uvjereni kako barem s jedne strane jednakosti mora postojati neka operacija. Najzanimljivije su jednakosti koje s obje strane imaju operacije te takve jednakosti izazivaju najviše rasprave kod učenika.

Nakon što učenici upoznaju točno/netočno jednakosti, možemo im uvesti i jednakosti otvorenog tipa. To su jednakosti koje imaju prazno mjesto koje se mora popuniti kako bi dobili točnu jednakost. Primjerice

$$5 + 2 = \square + 3, 4 + \square = 6, 4 + 5 = \square - 1, 3 + 7 = 7 + \square.$$

Zadatak je upisati broj u prazni kvadratić kako bi dobili točnu jednakost i pri tome treba tražiti objašnjenje od učenika zašto su tako odgovorili. U takve zadatke možemo uključiti sve računske operacije, čime se zadaci dodatno kompliciraju.

Pogodna aktivnost za učenike sastoji se u tome da sami sastavljaju jednakosti. Nakon što su svladali takve jednakosti, izazov je za njih da sami sastavljaju takve zadatke te ih zadaju svom prijatelju u razredu. Svaki učenik zadužen je sastaviti tri ili četiri točno/netočno jednakosti, od kojih je barem jedna točna i barem jedna netočna. Kada učenici sami zadaju zadatke svojim kolegama, skloni su zadavati velike brojeve s puno računskih operacija. Takve jednakosti potiču razvijanje relacijskog razmišljanja kod učenika.

Pri prvom se susretu često koristi nula i dodavanje i oduzimanje jednog te istog broja. Te jednakosti učenici mogu raditi i s danima u tjednu ili mjesecima u godini. Na primjer, ako je datum 24. u mjesecu, zadatak je učenika prikazati broj 24 pomoću brojeva i operacija. U početku će učenici koristi jednostavne izraze, no uz malo iskustva počet će koristi razne trikove, dodavanje istog broja, oduzimanje istog broja, nulu i slično.

Naglasak je u tom pristupu na razumijevanju znaka jednakosti te na razvijanju relacijskog mišljenja, tj. na tome da učenici stvaraju odnose među stranama jednakosti, a ne da se baziraju na diretknom računanju. Time doprinose razvoju vlastitog algebarskog mišljenja.

Relacijsko razmišljanje

Promotrimo dva moguća načina učeničkog rješavanja istog zadatka.

Primjer 5.2.1. *Nadopuni kvadratić kako bi iduća jednakost bila valjana:*

$$7 - \square = 6 - 4.$$

Prvi način: Učenici promatraju koliko je $6 - 4$. *Rezultat je* 2. *Potom se zapitaju što treba oduzeti od* 7 *kako bi dobili* 2*:,* $7 - 5$ *je* 2. *Iz toga zaključuju da u kvadratić treba upisati broj* 5.

Drugi način: 7 *je veći od* 6 *i lijeva strana je za jedan veća od desne. To znači da moramo oduzeti jedan na lijevoj strani kako bismo dobili isti broj, odnosno desnu stranu povećati za jedan. Prema tome,* 5 *ide u kvadratić. Oba su odgovora točna, ali razlika je u načinu razmišljanja.*

Kako bi učenici riješili $134 + 175 = 174 + \square$? Jedan od načina razmišljanja jest da prvo izračunaju rezultat s jedne strane i prilagođavaju rezultat na drugoj strani kako bi izraz bio valjan. Drugi je način promatranje odnosa među izrazima na objema stranama znaka jednakosti. Kod takvog načina nije potrebno računati vrijednosti na svakoj strani. Kada su brojevi veliki, onda je takav način korisniji. Kako je 174 za jedan manje od 175, kako bi nadoknadili razliku, broj u kvadratiću mora biti za jedan više od 134, što je 135. Kod prvog načina može doći do poteškoća pri računanju, pa time i do pogreške.

Relacijskim razmišljanjem nazivamo pristup u kojem učenik promatra i koristi numeričke odnose između dviju strana znaka jednakosti, bez da računa iznose tih strana. Takav način razmišljanja seže dalje od jednostavnog računanja i umjesto toga ispituje povezanost među operacijama. Nalazi se u žarištu mnogih strategija, poput strategije udvostručenja ili raspolavljanja. Promotrimo li $6+7$ ili $6 \cdot 8$, znamo da je $6+7$ za jedan više od $6+6$ i da je $3 \cdot 8$ pola od $6 \cdot 8$. Te su strategije samo jednostavan primjer relacijskog razmišljanja, kakvo nalazimo kod generalizacije u aritmetici. Stoga takve odnose možemo koristiti i kada se pojave varijable, a ne samo brojevi.

Nije poželjno pokušavati nametnuti relacijsko razmišljanje učenicima, već ga je potrebno uvoditi uz pomoć točno/netočno otvorenih jednakosti, odabirom jednadžbi za koje je potrebno razmišljanje, a ne računanje. Koristimo li velike brojeve u jednadžbama kako bi učenicima bilo teško računati s njima, oni će postupno odustati od računanja i početi razmišljati relacijski.

5.2.2 Varijable

Varijable su algebarski alat pomoću kojeg se izražavaju poopćenja u matematici. Koncept se varijable bitno razlikuje od koncepta nepoznatog. Nepoznanica je broj koji ne varira, dok je varijabla vrijednost koja se mijenja.

Učeničke interpretacije slova mogu se kategorizirati na idući način:

- evaluirano slovo,
- neprimijenjeno slovo,
- slovo kao objekt,
- nepoznato slovo,
- slovo kao generaliziran broj i
- slovo kao varijabla.

Problem je pogrešnog shvaćanja simbola prenošenje tih krivih pretpostavki u nastavku školovanja, posebice u poopćavanju odnosa i veza u matematičkim problemima.

U evaluiranom se slovu broj odmah pripisuje slovu, kao u određivanju da je $a = 3$ kada je zadana jednadžba $a + 5 = 8$. Nisu potrebne nikakve operacije jer se zna da je $3 + 5 = 8$.

U drugom se slučaju slovo ignorira kada se pita za vrijednost $a + b + 2$, podrazumijevajući da je $a + b = 43$. Pažnja se tu usmjerava na to da se 2 mora dodati pa se slova mogu ignorirati. U obama slučajevima ima smisla da slova zamjenjuju neke brojeve, no ne postoji zamisao da se na slovima mogu vršiti druge operacije osim one da ih se zamijeni brojevima.

Treća kategorija, slovo kao objekt, odnosi se na uobičajenu pogrešnu interpretaciju slova kao skraćenice za neki predmet, a ne za broj. Upotreba b i c kao skraćenice za banane i cikle te m i k za milje i kilometre tipični su primjeri tog fenomena. U tom slučaju moguće je vršiti operacije na izrazima koje obuhvaćaju slovo, no često će rezultati biti besmisleni. U mnogim je algebarskim situacijama korisno koristiti prvo slovo naziva objekta, no mora biti jasno da se slovo odnosi na broj koji je na neki način vezan uz taj objekt, a ne na sam objekt.

Slovo kao nepoznanica veže se uz rješavanje jednadžbi te je u tom smislu točno. No, do sukoba dolazi kada se učenici susretnu s jednadžbama koje imaju više rješenja. Primjerice, određen broj učenika od 12 do 17 godina ne bi odmah uvidio da jednadžbe $7w + 22 = 109$ i $7n + 22 = 109$ imaju identična rješenja.

Slovo kao generaliziran broj proširuje ideju nepoznanice. Najučestaliji učenički odgovor na pitanje "Što možete reći o c ako je $c + d = 10$, a c je manji od d?" jest davanje jedne vrijednosti, obično 4, no neki su dali i listu vrijednosti $1, 2, 3, 4$, što prikazuje slovo kao generaliziran broj. Profinjeniji je odgovor bio $c < 5$, što pokazuje veće razumijevanje ideje o varijabli iako nije jasno odnosi li se to na svaki broj manji od 5 ili ga se gleda kao nekoliko određenih brojeva. Odgovor da je $c = 10 - d$ ponovno implicira da može biti uključeno nekoliko brojeva, no ne uzima u obzir da je c manji od d. Razlika između generaliziranog broja i varijable čini se manje jasnom i manje važnom od one između nepoznanice i varijable. U određenim algebarskim kontekstima dovoljna je ideja slova kao nepoznanice, no ako do učenika dolazi samo ta interpretacija, to postaje očita barijera za smislen rad s izrazima i funkcijama. Mnogi učenici otprije imaju barijeru stvorenu prvim trima kategorijama, osobito onom o slovu kao objektu. Na to treba obratiti pozornost već u ranijim stadijima učenja predmeta te stalno naglašavati ideju slova kao broja, bilo da je ono nepoznanica ili varijabla.

Učenici se prvo sreću s varijablom kao nečim što označava nepoznatu vrijednost, kao što u jednakostima otvorenog tipa prazni kvadratić ($\square$) predstavlja nepoznanicu. Za početak možemo početi koristiti slova umjesto kvadratića kao nepoznanice. Zatim možemo pitati učenike s čim treba zamijeniti kvadratić ili slovo kako bi dobili istinitu jednakost. To je početni rad na određivanju vrijednosti varijable koja će jednakost učiniti istinitom. Prilikom rješavanja treba se osloniti na relacijsko razmišljanje. Rješavajući takve zadatke, učenici će razvijati svoje tehnike za rješavanje, no ostaje pitanje kako postupiti kada takve tehnike nisu dovoljne.

Kada se u istoj jednadžbi pojavljuju različiti simboli, različite varijable mogu imati i različite vrijednosti. Na primjer, u jednadžbi $a+6=10-b$ jedno rješenje jest $a=3$ i $b=1$, dok je druga mogućnost $a=b=2$. Vidimo da kako se jedna varijabla mijenja u toj jednadžbi, tako se mijenja i druga. Većinu učenika ta mogućnost zbunjuje jer smatraju da ako su varijable različite, tada i njihove vrijednosti moraju biti različite, što nije uvijek tako.

Primjer je korištenja dviju ili više varijabli, npr. u zadavanju funkcije u obliku $y=x+3$. Za rješavanje problema u situacijama u kojima se pojavljuju različite varijable bitan je i kontekst u kojem se problem nalazi. Na primjer, na pitanje na koliko je načina moguće rasporediti 7 jabuka u dvije košare, učenici izrađuju tablicu i pomoću nje pronalaze rješenje. Na početku će to biti slučajno pronalaženje rješenja te prilikom rješavanja učenici vjerojatno neće razmišljati o korištenju nule, stoga će tako doći samo do nekoliko rješenja i neće ih pronaći sva. No, nakon rasprave i objašnjenja otkrit će kako je rješenje 2 i 5 drugačije od rješenja 5 i 2 (jer su košare u koje idu jabuke različite). Važno je znati i kada su pronađena sva rješenja. Na jednoj se razini znanja učenici ne bi mogli sjetiti više rješenja, pa bi zaključili da ih više nema te bi neki od njih tako, na primjer, zaboravili rješenje u kojem se pojavljuje nula. Učenici s više znanja raspisali bi sve kombinacije brojeva od 0 do 7 za jednu košaru, dok bi možda jedan dio učenika znao da ti isti brojevi vrijede i za drugu košaru te bi bez raspisivanja svih rješenja dali ukupan broj rješenja. Učenici bi zaključili da je broj rješenja uvijek barem za jedan veći od broja jabuka. Kada bi se radilo i o većem broju, mogli bismo zaključiti da pristup ne ovisi samo o tom broju, već i o kontekstu.

Vidimo da je u tom slučaju broj rješenja ograničen jer se može raditi samo s cijelim brojevima i s maksimalnom vrijednosti 7. Da je problem bio postavljen kao $J+K=7$ i bez odgovarajućeg konteksta, u rješenje bi ulazili i racionalni i negativni brojevi. I u takvim je slučajevima moguća generalizacija, ovisno o uzrastu učenika.

U četvrtom je razredu osnovne škole razumno omogućiti učenicima da pronađu rješenje jednadžbi s jednom ili više varijabli metodom pokušaja i pogrešaka te relacijskim razmišljanjem. Već se u petom i šestom razredu kod učenika trebaju razviti neki postupci kojima bi mogli riješiti postavljene jednadžbe i kada te neformalne metode više nisu prikladne.

Nakon kratkog vremena potrebno je zadati učenicima i zadatke s više varijabli te im dati da ih sami riješe metodom kojom žele. Moramo imati na umu da takvi zadaci ne smiju biti lagani te da učenici ne smiju moći odmah otkriti rješenje. Kako bi učenicima pokazali da metoda pokušaja i pogrešaka nije uvijek primjerena, možemo im zadati zadatak oblika $3x + 2 = 11 - x$, gdje rješenje nije cijeli broj. Kako rješenje nije cijeli broj, vjerojatnost je pogađanja rješenja vrlo mala.

Nakon što učenici riješe više takvih jednadžbi, morali bi razviti metode i vještine za njihovo rješavanje. Također bi učenici trebali znati i kako dokazati da su njihova rješenja točna. Moraju imati na umu i znak jednakosti te moraju sami zaključiti da ako dodaju ili oduzmu vrijednost s jedne strane jednakosti, moraju istu vrijednost dodati ili oduzeti i s druge strane jednakosti kako bi jednakost ostala sačuvana.

5.2.3 Struktura brojevnog sustava

Učenici će radi lakšeg razumijevanja brojevnog sustava i operacija proučiti svojstva i strukture općenito, a ne samo za posebne slučajeve. Prilikom učenja će učenici usvojiti razna svojstva koja će im olakšati računanje i izvršavanje računskih operacija. Jedno takvo svojstvo jest svojstvo komutativnosti. Na primjer, učenik rješava zadatak $256+147 = N+256$, iz čega zaključuje da je $N = 147$ jer je $256+147$ isto što i $147+256$. Općenito svojstvo glasi $a+b = b+a$ i vrijedi za sve brojeve. Poznavanje svojstava omogućuje učenicima bolje razumijevanje strukture brojevnog sustava i pruža osnovu za boljim razumijevanjem apstrakcije.

Svojstva računskih operacija

Svojstva računskih operacija učenici mogu naučiti kroz svoja istraživanja dok rješavaju razne zadatke. Tako se, na primjer, učenici slažu s tim da je $25\cdot 5 = 5\cdot 25$, no glavno je pitanje je li to istinito za sve brojeve ili samo za neke. Dio učenika tvrdi da to vrijedi za sve brojeve, dok se neki ne slažu s tim. Kako bi učenici naučili i shvatili zašto to vrijedi, treba im objasniti na općenitiji način, bez korištenja određenog broja. Što se dogodi kad pomnožimo dva broja u obrnutom slijedu? Dobijemo isti odgovor. Sve dok ne dokažu istinitost toga ili navedu kontraprimjer, to se smatra nagađanjem.

Važno je napomenuti da kada je pravilo napisano kao otvorena rečenica, tada vrijedi za sve brojeve. Učenici neće razumjeti zašto nije moguće dijeliti s nulom, pa je to svojstvo potrebno istaknuti.

Želja da se dokaže da je neka pretpostavka istinita značajan je oblik algebarskog mišljenja. Učenici prilikom dokazivanja neke pretpostavke smatraju da je nešto što nije istina relativno. S obzirom na razinu znanja učenika imamo nekoliko načina dokazivanja. Na nižoj razini, učenici svoje dokaze tumače na način da su od nekoga saznali da je to tako, no to nije ispravan dokaz. Učenici trebaju razvijati samostalno razmišljanje i donošenje zaključaka na temelju vlastitog mišljenja. U višim razredima osnovne škole najčešći oblik "dokaza" jest korištenje primjera. Učenici će navesti mnogo konkretnih primjera i na temelju njih zaključiti da je pretpostavka dokazana. No, ponekad će biti i učenika koji žele znati više, pa neće olako prihvatiti takve "dokaze". Neće im biti jasno kako sa sigurnošću mogu reći da ne postoje brojevi za koje pretpostavka ne vrijedi. Učenici pokušavaju koristiti logiku kako bi dokazali pretpostavku. Često prilikom dokazivanja koriste konkretne i nastavne materijale kako bi si lakše nešto predočili. Tako, na primjer, učenici pokušavaju dokazati da je $a+b=b+a$ uz pomoć kockica. Na jednu hrpu stave 7 kockica, a na drugu 8. Kad ih se spoji bilo kojim redom, rezultat je isti, 15 kockica. Na temelju toga učenik zaključuje da je svejedno kako će zbrajati brojeve, tj. da nije važan redoslijed. Međutim, postoje i svojstva koja mogu biti dokazana. Na primjer, $a+b-b=a$ i $a \cdot 0 = 0$ možemo dokazati uz pomoć osnovnih svojstava i definicija. Ovisno o razini znanja, takvi će biti i dokazi kod učenika. Dakle, važno je na svim razinama motivirati učenike da prilikom dokazivanja koriste logiku te da ne budu zadovoljni dokazom koji je nastao na temelju konkretnih primjera. Cilj je nastavnika da učenik razvija svoje razmišljanje i da ga uključuje u dokazivanje.

Parni i neparni brojevi

Jedna je od glavnih podjela cijelih brojeva podjela na parne i neparne. Učenici često prilikom zbrajanja dvaju parnih brojeva uoče da je i njihov zbroj paran. No, ako zbroje neparan i neparan broj, također rezultat bude paran broj, ali kad zbroje paran i neparan broj, dobiju neparan broj.

Koji su to parni, a koji neparni brojevi? Broj je paran ako je djeljiv s 2, tj. ako se može podijeliti s 2 bez ostatka. Neparan je broj onaj koji nije paran. Prilikom dijeljenja neparnog broja s 2 dobijemo ostatak 1.

Učenici na razne načine pokušavaju dokazati kada je broj paran, odnosno neparan, što im je lakše nego dokazivati ostala svojstva brojeva. Svoje će dokazivanje prvenstveno provesti kroz primjere. Odaberu neparan broj i podijele ga s 2, primijete da je ostatak 1. Uz pomoć toga zaključe koji su brojevi neparni. Zatim će taj postupak ponoviti na nekom drugom neparnom broju i opet će vidjeti da daju ostatak 1. Kako bi pokazali da je zbroj dvaju neparnih brojeva paran, zbrajaju ih tako da zbroje ostatke koje su dobili dijeljenjem s 2. Zatim njihov zbroj podijele s 2 i primijete da nema ostatka te zaključuju da je zbroj dvaju neparnih brojeva paran broj. Kako učenici bolje razumiju vizualno, često i u tom slučaju koriste kockice koje slažu u stupiće i tako si predočavaju i argumentiraju da je zbroj dvaju neparnih brojeva paran.

Učenici mogu na više načina doći do zaključka o parnim i neparnim brojevima što kod njih potiče razvoj razmišljanja kako nešto dokazati te im koristi u daljnjem školovanju. Nastavnik tijekom obrade nekog gradiva treba pratiti kako učenici usvajaju gradivo. Radi lakšeg praćenja vodi bilješke i zapisuje napredak kod učenika. Nije mu važno da svi učenici iniciraju pretpostavke, već da svi aktivno sudjeluju u nastavi. Kako bi ih se sve motiviralo na sudjelovanje, prije nego krenu u raspravu, učenici moraju napisati u svoje bilježnice ideje i argumente vezane uz dokaz pretpostavke. Nakon rasprave, potrebno je poslušati sve što su učenici napisali. Tako će i ostali učenici čuti puno primjera logičkog načina razmišljanja, što doprinosi razvoju učenikovog mišljenja i zaključivanja.

5.2.4 Uzorci i njihovo ponavljanje

Razni uzorci zastupljeni su u svim područjima matematike. Proučavanje, opisivanje i proširivanje uzoraka na veće skupove pridonosi razvoju algebarskog mišljenja. Za početak je razvoja algebarskog mišljenja dobro krenuti s uzorcima koji se ponavljaju. Koncept uzorka koji se ponavlja možemo tijekom obrade gradiva uvesti na nekoliko načina. Jedan je od načina nacrtati jednostavan oblik na ploči i zatim napraviti u razredu raspravu na temelju toga. Usmeni uzorci mogu se primjenjivati kod učenika svih uzrasta. Na primjer, "do, mi, mi, do, do ..." jest jednostavan uzorak kod pjevanja. Gore, dolje, lijevo, desno, preko pozicija ruku elementi su s kojima se također može napraviti obrazac koji je potrebno ponavljati. Najmlađi učenici najbrže uče koncept uzoraka preko takvih oblika obrazaca.

Učenici mogu zadatke s uzorcima raditi u malim grupama, pri čemu uzorci mogu biti izrađeni od različitih materijala. Primjerice gumbi, kocke, čačkalice, geometrijski oblici i drugi oblici s kojima je lagano za raditi.

Zadatak je učenika da na temelju danog uzorka naprave nove iste uzorke. Potrebno je odrediti temelj uzorka kako bi znali nastaviti nizati iste uzorke. Učenicima se mora precizno prikazati uzorak, a ne dvosmisleno ili djelomično. Na primjer, ako je temeljni oblik $\Diamond$, a kartica ima oblik $\Diamond\Diamond$, radi se o dvosmislenom uzorku jer može predstavljati i novi uzorak i ponavljanje temeljnog oblika.

Značajno je postignuće rada učenika s uzorcima i obrascima navesti ih na shvaćanje da obrasci od dvaju različitih materijala mogu predstavljati iste uzorke.

Ponekad je učenicima dobro zadati uzorke i različite materijale te ih zatim tražiti da jedan uzorak izrade od različitih materijala. Prepoznavanje uzoraka postavlja temelje ideje da dvije različite situacije mogu imati isto matematičko značenje.

Radi razvijanja mišljenja dobro je promatrati i uzorke brojeva, nizove. To mogu biti jednostavna ponavljanja poput $1, 2, 1, 2, 1 \dots$ Općenito, promatranje takvih uzoraka nizova oblik je napretka u učenju. Niz je $1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5 \dots$ još jedan jednostavan primjer koji ne zahtijeva preveliki napor kako bi se nastavio. Promotrimo još neke primjere:

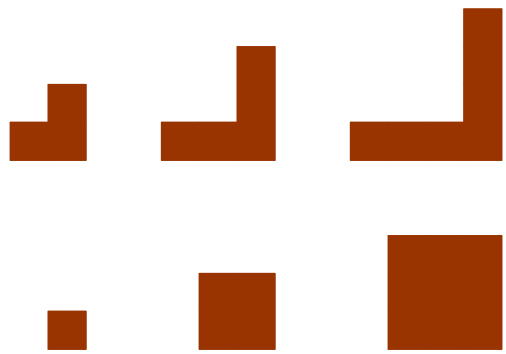
- $2, 4, 6, 8 \dots$, niz parnih brojeva, svakom prethodnom članu dodamo 2.
- $1, 4, 7, 10, 13 \dots$, niz brojeva kojem je prvi član 1, a ostale članove dobivamo tako da prethodnom dodamo 3.
- $1, 4, 9, 16 \dots$, niz kvadrata prirodnih brojeva.
- $0, 1, 5, 14, 30 \dots$, niz u kojem od drugog člana nadalje svaki sljedeći član dobivamo dodavanjem kvadrata prirodnih brojeva prethodnom članu.
- $3, 3, 6, 9 \dots$, niz u kojem od drugog člana niza nadalje svaki sljedeći član dobivamo kao sumu prethodnih dvaju.

Izazov u zadacima s nizovima brojeva nije samo nastaviti niz i proširiti uzorak, već je glavni cilj dani niz generalizirati, tj. znati odrediti bilo koji član niza bez da se određuju svi članovi.

Rastući uzorci i susret s funkcijama

Tijekom osnovne i srednje škole učenici istražuju uzorke i pravila koja omogućuju bolje razumijevanje algebre i funkcija. Uzorak koji pokazuje neko zajedničko svojstvo predstavlja niz te ćemo takav uzorak zvati rastući uzorak. Pomoću tih je uzoraka moguće nastaviti niz, odrediti generalizaciju ili algebarski odnos među članovima pomoću kojeg znamo koji je član sljedeći. Generalizaciju određivanja članova niza možemo shvatiti kao funkciju. Rastući uzorci također prikazuju koncept funkcije i mogu se koristiti kao polazna točka u toj matematičkoj ideji.

Na Slici 5.1 prikazani su rastući uzorci koji su izrađeni od različitih materijala ili raznolikih crteža. Uzorci se sastoje od niza odvojenih koraka, pri čemu se svaki novi korak nastavlja na prethodni prema određenom pravilu.



Slika 5.1: Rastući uzorci.

Kada se uvode rastući uzorci, učenicima je, osim crtanja na papiru, korisno to prikazati i pomoću konkretnih predmeta poput pločica, kuglica ili šibica. Takav je način učenja učenicima zanimljiviji i bolje ga razumiju. Prilikom učenja se uzoraka prvo učenicima pokažu tri ili četiri koraka te im se osigura dovoljan broj novog materijala za proširivanje uzorka dalje. Rastući uzorci imaju i numeričku komponentu, predstavljenu brojem predmeta u svakom koraku. Tablicom možemo prikazati rastuće uzorke tako da u jedan red pišemo redni broj koraka, a u drugi potreban broj dijelova za taj korak. Ponekad se može dogoditi da je potrebno mnogo dijelova i da uzorak brzo raste, što rezultira izradom samo nekoliko koraka. Tada, na primjer, zadatak učenika može biti predvidjeti koliko dijelova ima u tridesetom koraku uzorka. Izazov je vidjeti postoji li način da to učine bez popunjavanja tablice do traženog koraka. Naravno, prilikom određivanja dijelova potrebno je od učenika tražiti obrazloženje zašto je to tako.

Prilikom otkrivanja uzorka učenici imaju na raspolaganju dva prikaza, jedan je crtež ili neki konkretni oblik, a drugi je numerički zapis u tablici. Kada učenici traže vezu između tablice i crteža, neki će se više bazirati na tablicu, dok će se drugi bazirati na fizički uzorak. Važno je otkriti sve veze između tablice i crteža. Većini je učenika lakše vidjeti uzorke korak po korak. Kad imamo danu cijelu tablicu bez crteža, možemo odrediti koliko je dijelova potrebno za trideseti korak bez da crtamo uzorak. Kako tablica sadržava numerički izraz za svaki korak, korak može biti određen iz prethodnog koraka dodavanjem uzastopnih brojeva.

Opis koji govori kako se mijenja uzorak iz koraka u korak naziva se rekurzivni odnos. Kako bi bolje razumjeli rekurzivni odnos, potrebno je učenicima naglasiti korake u stvaranju uzorka te ih navesti da sami prate koliko se dijelova u kojem koraku dodaje i na koji su način koraci povezani.

Funkcionalni odnosi

Prvo što će učenici primijetiti kod izgradnje uzorka korak po korak jest rekurzivan odnos. Postavlja se pitanje kako pronaći stoti korak. Jedan je od načina raditi rekurzivno, odnosno odrediti svih prethodnih 99 unosa u tablicu. No, ako učenici otkriju povezanost broja dijelova u određenom koraku s rednim brojem koraka, tada je lako odrediti koliko je dijelova potrebno za proizvoljni korak. Pravilo koje određuje broj dijelova po koracima primjer je funkcionalnog odnosa.

Ne postoji najbolji način za određivanje odnosa između broja dijelova za određeni korak i rednog broja koraka. Neki će učenici sami, koristeći vlastitite metode, odgonetnuti i zaključiti kakav je taj traženi odnos. Neki će uz pomoć fizičkog uzorka i predočavanja uzorka doći do zaključka. Ako nikako drugačije ne uspiju odgonetnuti odnos i vezu, ispisivat će tablicu i tako doći do traženog odgovora. Zanimljivije je, te možda i važnije, da učenici prvo pronađu funkcionalni odnos u konkretnom, fizičkom obliku uzorka, umjesto u numeričkom. Kako bi to uspjeli, učenici prvo dobivaju samo jedan korak te pomoću njega trebaju odgonetnuti metodu prebrojavanja elemenata bez računanja ostalih koraka. Ilustrirajmo to primjerom.

Primjer 5.2.2. *Uz pomoć informacija danih na Slici 5.2, potrebno je odrediti broj kvadratnih pločica nužnih za popločavanje ruba bazena. Na slici je promatrano kvadratno područje veličine* 10×10 *metara, dok je sam bazen veličine* 8×8 *metara. Ukoliko je moguće, treba naći više načina za opisivanje traženog broja kvadrata.*

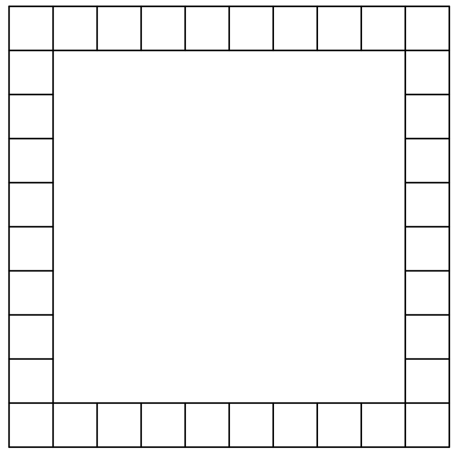
Postoji nekoliko načina za rješavanje tog problema. Često je rješenje u kojemu učenici primijete da s lijeve i desne strane od početka do kraja bazena ima po 10 kvadrata i da im s gornje i donje strane vodoravno ostane po 8 kvadrata. Zapišemo li tu jednakost aritmetički, dobivamo

$$10 + 10 + 8 + 8 = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 8 = 36.$$

Još su neka moguća rješenja dana s $4 \cdot 9, 10^2 - 8^2, 4 \cdot 8 + 4$.

Lako je odrediti kolika je granica kada se radi o manjem bazenu, no što kada je u pitanju, na primjer, bazen veličine 55×55*? Tada učenici sigurno neće brojati potrebne kvadrate, već će pomoću manjih brojeva izvesti opću formulu.*

Ta formula zapravo predstavlja funkciju. U tom je primjeru funkcija dana s $t = 2(n + 2) + 2n$*, gdje* n *predstavlja duljinu unutrašnjosti bazena.*



Slika 5.2: Bazen.

U polaznom je slučaju $n = 8$*, što predstavlja nezavisnu varijablu, dok je t broj potrebnih kvadrata za popločavanje ruba bazena i to je zavisna varijabla.*

Rastući uzorci mogu biti prikazani pomoću fizičkih materijala, crtežom, pomoću dijagrama i pomoću simboličkih pravila. Rastuće uzorke možemo prikazati i grafički, pravcem ili parabolom, ovisno o uzorku. Horizontalna os u grafu uvijek prikazuje redne brojeve te se koristi za nezavisnu varijablu.

5.2.5 Koncept i prikaz funkcije

Za učenike osnovne škole funkciju možemo definirati kao pravilo koje elementima jednog skupa pridružuje elemente drugog skupa, no za viši stupanj obrazovanja potrebna je detaljnija definicija. Na višoj se razini znanja koncept funkcije najbolje razumije u nekom kontekstu, u kojem promjena u jednom skupu (nezavisna varijabla) uzrokuje promjenu u drugom skupu (zavisna varijabla).

Na primjer, visina plaće radnika funkcija je ovisna o broju radnih sati, dok razina vode u spremniku ovisi o broju potrošača. Sve su to primjeri promjene jedne varijable koja uzrokuje promjenu druge varijable. Primjećujemo da postoji mnogo primjera funkcionalnih odnosa u svakodnevnom životu. Funkcije se koriste kako bismo bolje razumjeli promjene u svim vrstama konteksta.

Razlikujemo pet vrsta prikaza funkcija:

1. prikaz pomoću uzorka, tj. stavljanje funkcije u kontekst;
2. prikaz pomoću grafikona ili tablica;

3. prikaz formulom;

4. grafički prikaz, tj. prikaz zadavanjem grafa;

5. jezični prikaz.

Svaki od navedenih prikaza prikazuje iste funkcionalne i rekurzivne odnose, no svaki daje drugačiji način gledanja i razmišljanja. Vrijednost je svakog prikaza u tome što pomaže vidjeti i razumjeti funkciju na drugačiji način.

Radi boljeg razumijevanja tih prikaza, ilustrirat ćemo ih na primjerima.

Prikaz pomoću uzorka

Ne može se baš za svaku funkciju naći kontekst iz stvarnoga svijeta, ali ako je moguće, za bolje je razumijevanje potrebno koristiti odgovarajući kontekst kako bi učenici bolje usvojili gradivo.

Primjer 5.2.3. *Helga pokušava zaraditi novac za školsku torbu i knjige prodajom tulipana preko ljeta. Pri tome vlasniku klupe na kojoj prodaje tulipane za iznajmljivanje plaća* 50 *kuna po danu. Za svaki prodani tulipan dobije* 25 *kuna. Njezini su troškovi za svaki tulipan* 10 *kuna, što znači da je dobit od jednog tulipana* 15 *kuna.*

Promatrana funkcija nalazi se u kontekstu prodaje tulipana i dobiti ostvarene tom prodajom. Helgina dobit ovisi o prodaji tulipan i bit će veća što više tulipana Helga proda. Prije same prodaje, ona je u dugu jer mora platiti iznajmljivanje klupa 50 *kuna svakog dana. Helginu dnevnu dobit prikazujemo kao funkciju ovisnu o broju prodanih tulipana.*

Promotrimo još neke situacije u kojima se kriju funkcionalni odnosi:

- Pretpostavimo da vrijednost novog automobila pada 15% godišnje. Promatrana je funkcija odnos između starosti automobila i njegove sadašnje vrijednosti.

- Promatramo visine ljudi i duljine njihovih stopala, od niskih do visokih. Nakon nekoliko mjerenja moći će se ustanoviti odnos između navedenih dviju veličina. Taj odnos možemo prikazati funkcijom.

- Brzina tijela u ovisnosti o vremenu.

- Vrijeme potrebno za pražnjenje bazena ovisi o veličini ispusne cijevi, brzini kojom voda izlazi iz bazena i veličini bazena.

Dakle, sve te situacije ilustriraju stavljanje funkcija u svakodnevne kontekste. Svaki od njih ima barem dvije vrijednosti koje se razlikuju, koje su zavisne ili nezavisne jedna od druge.

Tablični prikaz

Pogledajmo primjenu tabličnog prikaza na Primjeru 5.2.3. Možemo hipotetski izračunati koliku će dobit Helga ostvariti za jedan dan prodajom tulipana. U tablici prikažemo broj prodanih tulipana i ostvarenu dobit. Dobit je po svakom tulipanu, nakon odbitka troška za nabavku tulipana, 15 kuna i još treba voditi brigu o cijeni iznajmljivanja klupe. Tako je dobit za 10 prodanih tulipana jednaka $10 \cdot 15 - 50 = 100$ kuna. Na temelju toga možemo zaključiti koliko tulipana Helga mora prodati kako bi ostvarila dobit.

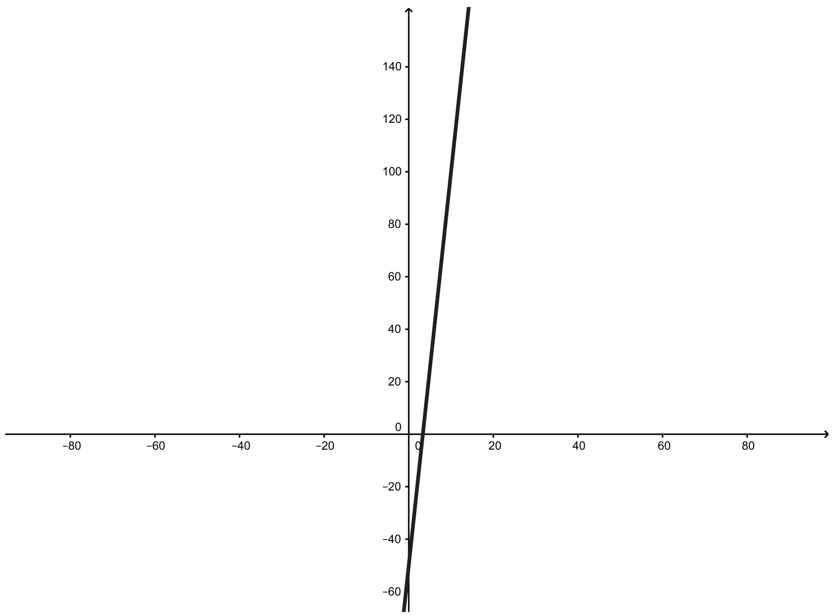
Međutim, kad računamo vrijednosti u tablici (Tablica 5.1), možemo izračunati dobit i za 10000 prodanih tulipana, što je moguće iako nije realno. Moramo voditi brigu o kontekstu jer nije moguće da Helga proda više tulipana nego što ih ima. Također, u kontekst se može dodati i situacija u kojoj gubitak predstavljaju i tulipani koji su za određen dan nabavljeni, ali ih se nije uspjelo prodati. Vrijednost je konteksta i ta što prilikom razmišljanja o funkcijama možemo vidjeti kako se matematička interpretacija funkcije ne mora nužno podudarati sa stvarnošću.

Broj tulipana	Dobit
3	-5 kn
10	100 kn
100	1450 kn

Tablica 5.1: Prodaja tulipana.

Prikaz funkcije pomoću grafa

Kažu kako slika vrijedi tisuću riječi, pa tako i funkciju možemo prikazati grafički, što omogućava bolje razumijevanje. U tom slučaju to znači prikazati funkciju odgovarajućim grafom. U Primjeru 5.2.3 horizontalna os na grafu predstavlja broj prodanih tulipana, dok vertikalna predstavlja dobit. Kao što smo već zaključili, dobit raste kako raste i prodaja. U spomenutoj se situaciji to jasno vidi na temelju grafa (Slika 5.3). Odnos broja prodanih tulipana i dobiti prikazana je grafom linearne funkcije.



Slika 5.3: Graf funkcije koja predstavlja zaradu od prodaje tulipana.

Na grafu je prikazana i nulta dobit, vidimo da tu graf siječe horizontalnu os jer je tada dobit jednaka nuli, a prihodi pokrivaju troškove iznajmljivanja klupe. Kolika je dobit nakon prodanih 10, a kolika nakon prodanih 100 tulipana? Koliko Helga mora prodati tulipana kako bi ostvarila dobit od 1000 kuna?

Dakle, vidimo kako kontekst daje smisao grafu i graf daje razumijevanje konteksta. Graf je još jedan matematički model koji u skladu s kontekstom nema smisla za sve dijelove grafa. Ako graf proširimo na lijevu stranu vertikalne osi, prodaja tulipana bila bi negativna, što nema smisla. Isto tako, unutar tog konteksta nije razumno ni razmišljati o prodaji milijun tulipana iako se graf može toliko proširiti i nacrtati.

Zadavanje funkcije formulom

Većinu funkcija možemo zadati formulom, pa tako i u Primjeru 5.2.3. Označimo broj prodanih tulipana s x. Za svaki prodani tulipan Helga dobije 25 kuna. No, kako bismo odredili stvarnu dobit po tulipanu, moramo odbiti trošak po svakom tulipanu, koji iznosi 10 kuna. Na umu moramo imati i novac koji je Helga potrošila na iznajmljivanje klupe, tj. 50 kuna. Dobivamo formulu $y = x \cdot 25 - x \cdot 10 - 50$ ili $y = 15 \cdot x - 50$, pri čemu s y označavamo ostvarenu dobit. Naravno, umjesto x i y mogu se upotrijebiti bilo koja dva slova, a umjesto y možemo pisati i npr. $f(x)$.

Tim je oznakama definiran matematički odnos između dviju vrijednosti ili dviju varijabli, a te su varijable u ovom slučaju broj prodanih tulipana i dobit od prodaje. Izvan ovog konteksta, to je jednostavno odnos između x i y. Različite vrste jednadžbi imaju različita svojstva, a ponekad su svojstva ograničena zbog konteksta unutar kojeg se gleda funkcija. U primjeru s tulipanima, funkcija ima oblik linearne funkcije $y = kx + l$, gdje su k i l realni brojevi.

Najbitnije je primijetiti da za određenu funkciju svaki prikaz pokazuje isti odnos. Kontekst omogućuje izvedbu odnosa vanjskog svijeta i matematike, jezik pomaže izraziti odnos na smislen i koristan način, tablice prikazuju podatke koji su upareni s funkcijom, graf prevodi uređene parove brojeva u sliku, dok formula izražava funkcionalnu vezu sa stvarnim svijetom i matematičkom simbolikom.

5.2.6 Matematičko modeliranje

J.J. Kaput definira modeliranje kao proces sa stvarnim pojavama koje pokušavamo prikazati matematički ([23]). Odnosno, pri modeliranju bilježimo pojave u stvarnom svijetu te tražimo uzorke ili pravilnosti kako bismo ih mogli izraziti u obliku tablice, formule ili grafa. Modelima možemo opisati neki događaj, ali i omogućiti predviđanja kako ne bismo morali provoditi eksperimente za svaku situaciju. U Kaputovu opisu algebarskog mišljenja modeliranje odražava algebru kao mrežu jezika koja je prožeta u svim dijelovima matematike.

To ne znači da se modeliranje posljednje razvilo u algebarskom mišljenju. Već smo vidjeli brojne primjere i mogućnosti za modeliranje. Na primjer, odnosi koji proizlaze iz različitih stvarnih situacija (prodaja tulipana, potrošnja plina u zgradi, pronalazak kutije minimalnog obujma...) pojave su koje možemo modelirati pomoću različitih funkcija.

Kako koristiti modeliranje kod predviđanja? Prisjetimo se primjera prodaje tulipana. Promatramo manji dio iz kojeg izvodimo formulu za određenu cijenu kako bismo ostvarili dobit na različitim mjestima prodaje. Tada je lako prilagoditi cijenu, što nam omogućuje daljnja predviđanja.

Model nam omogućuje vidjeti određene pojave i situacije kod funkcije, u tablici ili na grafu, koje možda nisu promatrane u stvarnim situacijama te nam omogućuje matematičko djelovanje koje nije bilo dio izvornog istraživanja. Stvaranje funkcionalnih odnosa, njihovo promatranje, saznanje i predviđanja, predstavljaju upotpunjavanje aspekata algebarskih razmišljanja, poznatih kao matematičko modeliranje.

5.3 Pogrešna shvaćanja i greške

Pogrešna su shvaćanja i greške vrijedni pokazatelji stanja učeničkog razumijevanja te daju važne informacije na kojima učitelji mogu nadograđivati ideje i zadatke. Poneka se pogrešna shvaćanja često pojavljuju i naširoko prepoznaju, no učenici ih često ne shvaćaju te ne razaznaju njihove uzroke. Glavna poteškoća s algebrom, osobito u ranijim fazama, leži u učenju primjerenog značenja simboličkih izjava te većina pogrešnih shvaćanja proizlazi iz toga.

Pogledajmo primjer učenice Marice koju je zbunila jednadžba $3x - 7 = 5$ i nikako ju nije mogla riješiti, no tada je samouvjereno izjavila da $3x - 6 = 26$ ima rješenje 2 i da nema smisla pokušati riješiti $x + 3 = 15$. U drugom je slučaju Marica rekla da $3x$ znači "trideset i nešto" pa je $x = 2$ činio 32, što je po njoj bilo točno rješenje. S obzirom da je x na taj način interpretirala kao znamenku, jasne su i njezine poteškoće s preostalim dvama primjerima jer oduzimanje 7 od "trideset i nešto" ne daje 5, a za rješavanje $x + 3 = 15$ potreban je broj od dvije znamenke. Marica ima posve dosljedan način pridavanja značenja ovdje korištenim izrazima, no on je u sukobu s konvencionalnom interpretacijom. Poteškoće nastaju zbog nizanja brojeva. Kako objasniti dva simbola, 2 i x, kada stoje jedan pored drugoga? Učitelji često kažu učenicima da $2x$ znači $2 \cdot x$, ali nizanje omogućuje raznolikost različitih interpretacija u različitim kontekstima, kako unutar matematike tako i na drugim područjima, te je potrebno naučiti pravila. Zbunjenost je jasna ako čitatelj promotri značenja koja mogu biti sadržana u svakom od sljedećeg: $27, 2p, 2^3, 2g, 2\frac{2}{3}, 2A$. Primjerice, $2g$ može značiti 2 grama, $2\frac{2}{3}$ znači $2 + \frac{2}{3}$, a 2A može značiti kućni broj ili broj zadatka u udžbeniku.

Večina učenika viših razreda osnovne škole zna pojednostaviti izraz $2a + 5a$, dok je vrlo malo njih u mogućnosti točno riješiti zadatak $3n + 4 = 16$. Učenici često misle da slova zamjenjuju neki objekt te ih to navodi da $2a+5a$ interpretiraju kao zbrajanje dviju i pet jabuka, što im daje točan odgovor od $7a$. No, ta im vrsta interpretacije ne pomaže kod $3n + 4$, a izraz bc beznačajan je ako b i c smatraju bananama i ciklama. Dakle, povezivanje slova s nazivima predmeta nije dobra strategija u ranijim fazama učenja algebre.

Na jednom je satu 12-godišnji učenik napisao da je $7k$ rezultat pojednostavljivanja $2k + k + 4$ i učitelj je imao velikih poteškoća pokazati što je pogrešno. Ako učenici tumače k kao klokane onda im je instinktivna misao "4 čega?", što daje odgovor 4 klokana, a sve zajedno $7k$. Kada je to povezano s činjenicom da $3k + 4$ ne izgleda kao učenikov odgovor, možda i ne čudi da se pojavljuju takve greške. Međutim, ako se k podrazumijeva kao broj, tada se, zamjenjujući neke vrijednosti u izrazima $2k + k + 4, 3k + 4$ i $7k$, može jasno vidjeti da prva dva izraza nisu ekvivalentna posljednjem.

Nije dovoljno jednostavno reći učeniku da je njegov odgovor pogrešan pa onda pokazati ispravan postupak. Učenici moraju shvatiti zašto rješenje nema smisla te razviti razne načine provjere kako bi odlučili je li odgovor točan ili, u najmanju ruku, uvjerljiv. Pogrešna su shvaćanja i greške važni za napredak učenika pokaže li im se da su u sukobu s rezultatima dobivenim različitim pristupima zadatku. Na najnižoj razini to podrazumijeva poticanje učenika na preispitivanje razumnosti rješenja. No, vješt učitelj može namjerno odabrati sukob kako bi potaknuo učeničko razmišljanje. Do zbunjenosti interpretiranjem slova kao predmeta može doći na više načina.

Standardan je primjer učitelja koji je zamolio studente da naprave jednadžbu koja povezuje s, broj studenata, i broj profesora p, uz tvrdnju da je na sveučilištu 6 puta više studenata nego profesora. Učestala pogreška bila je $6s = p$, umjesto točnog oblika $s = 6p$. Još je jedan primjer pogrešnog shvaćanja kada su na jednom tečaju studenti zamoljeni da napišu formulu koja povezuje m, broj milja, s k, brojem kilometara, imajući na umu da 5 milja odgovora 8 kilometara. Dva najučestalija odgovora bila su $5m = 8k$ gdje je $m = \frac{8}{5}k$ i $k = \frac{5}{8}m$ (ili njihov ekvivalentan decimalni zapis). Nakon toga im je postavljeno pitanje koliko bi to iznosilo za 8 milja, a nakon čega ih je odgovor "5 kilometara" zbunjivao. Dakle, nužno je razmišljati o vezi među brojevima, a ne među riječima. Tvrdnja da je 1 kilometar ekvivalentan $\frac{5}{8}$ milje ključ je dolaska do točne veze u obliku $m = \frac{5}{8}k$.

Kako je već ranije napomenuto, upotreba je znaka jednakosti još jedan izvor problema jer učenici znak jednakosti često interpretiraju kao uputu za određivanje rezultata, a ne kao simbol koji pokazuje jednakost dvaju izraza. To proizlazi iz prirodnog načina upotrebe znaka jednakosti u mnogim izračunima. U aritmetičkom kontekstu, uobičajeno je da učenici zapisuju činjenicu poput $5 + 3 = 8 \cdot 4 = 32$ kako bi izrazili oba koraka, i zbrajanje i množenje, kada im je rečeno da zbroje 5 i 3 i zatim rezultat pomnože s 4. Točno je rješenje zadatka pronađeno $8 \cdot 4 = 32$, no pisana je izjava netočna jer $5 + 3$ nije jednako 32. U algebarskom kontekstu uobičajeno je vidjeti ovakve pogrešne izjave:

$$3x - 5 = 7 = 3x = 12 = x = 4$$

ili

$$\cos\theta = \frac{3}{5} = 0.6 = \theta = 53.1^\circ.$$

Tu znak jednakosti povezuje različite korake. Nije teško razumijeti da se taj znak koristi za pokazivanje da su dva izraza ekvivalentna, no pogreške u njegovoj primjeni učestale su čak i kada učiteljeve pisane izjave i udžbenici daju dobre modele koje učenici trebaju slijediti.

Te ilustracije jasno pokazuju zbunjenost učenika oko jednostavnih algebarskih ideja koje su vidljive kada se testira njihovo razumijevanje. Ne samo da oni zaborave pravila za postupak već im nedostaje i adekvatna i sigurna podloga razumijevanja simbola s kojima rade te temelj za njihove odluke o onome što ima smisla. Problem nije ograničen samo na slabije učenike jer i kod onih naprednijih dolazi do nesporazuma.

S pogrešnim shvaćanjima i greškama moramo se suočiti i raspraviti ih te ih koristiti za napredak. Kognitivan je sukob važan element u uvjeravanju učenika da njihovo trenutno razmišljanje nije primjereno te da moraju poraditi na relacijskom razumijevanju algebre.

5.4 Prijelaz na algebarsko razlučivanje

Učeničke se poteškoće u učenju algebre često smatraju posljedicom višegodišnjeg načina poučavanja i učenja uz aritmetičko razlučivanje, a ne uz kognitivni razvoj.

Razlozi poteškoća mogu se podijeliti u tri kategorije:

1. Upotreba ograničenog niza aritmetičkih tekstualnih problema koji se svode na zamjenu redoslijeda (npr. Ivan ima nekoliko pikula. Osvojio je 3 pikule. Sada ih ima osam. Koliko je pikula Ivan imao na početku?), problema uspoređivanja (npr. Na jahanje je krenulo osam jahača, ali imaju samo tri konja. Koliko jahača neće dobiti konja?) te problema s nedostatkom pribrojnika (npr. Maja ima sedam plavih i nekoliko smeđih majica. Sveukupno ima jedanaest majica. Koliko smeđih majica ima Maja?).

2. Upotreba notacije kao sredstva za bilježenje izvođenja rješenja, nasuprot opisa onoga što je poznato u problemu.

3. Fokusiranje na rad s određenim vrijednostima, nasuprot vezama među problemima. Kako je ranije spomenuto, istraživači podupiru uvođenje algebarskih ideja i pojmova u ranijim godinama osnovnoškolskog obrazovanja, te promjenu fokusa u aritmetici kako bi se izbjegli gore navedeni problemi.

5.4.1 Povijesni pristup prijelazu

Povijesna analiza srednjovjekovne algebre u Italiji inspirirala je nastanak tzv. poučavanja u tri faze. Taj način poučavanja razvijen je u svrhu olakšanja ovog teškog konceptualnog prijelaza s rješavanja konkretnih problema upotrebom riječi i brojeva na rješavanje apstraktnih problema, gdje simbolima označavamo nepoznate vrijednosti. Talijanski matematičar iz 14. stoljeća, Antonio de Mazzinghi, definirao je pojam nepoznanice kao "skrivenu" vrijednost. Tada se smatralo kako je ova ideja prikladno sredstvo u pomaganju učeničkog razumijevanja uloge slova u prikazu nepoznanice.

U prvoj su fazi poučavanja učenici zamoljeni riješiti problem zadan riječima koristeći objekte koje su mogli razmještati po potrebi, a koji su sastavni dio ideje skrivene vrijednosti. Kako bi prikazali nepoznanice koje se pojavljuju u problemu, koristili su nepoznat broj lizalica u vrećici ili nepoznat broj igraćih karata u omotnici. Tijek lekcije strukturiran je tako da omogućuje učenicima svladavanje dviju algebarskih operacija povezanih s rješenjima jednadžbi prikazanim u drevnom tekstu Hisab al-jabr w'al-muqabala (Račun pomoću uređivanja i redukcije), koji je u devetom stoljeću napisao arapski matematičar al-Kahwarizimi.

Al-jabr, ili uređivanje, odnosilo se na operaciju dodavanja jednakih izraza s obiju strana jednadžbe kako bi se skratile negativne vrijednosti, ili, rjeđe, množenje obiju strana jednadžbe istim izrazom kako bi se skratili nazivnici. Al-mukabala, ili redukcija, odnosila se na reduciranje pozitivnih vrijednosti oduzimanjem istog izraza s obje strane jednadžbe.

U drugoj su fazi poučavanja objekte zamijenili crteži, dok su u trećoj fazi učenici koristili slova umjesto crteža koji je predstavljao nepoznanicu. Ta je metoda danas poznata kao metoda ravnoteže u rješavanju jednadžbi.

5.4.2 Pristup prijelazu generalizacijom

N. Bednarz provela je 2001. istraživanje među učenicima u dobi od trinaest do osamnaest godina starosti, koji su u početnim fazama učenja imali poteškoće u svladavanju gradiva iz algebre ([4]). U istraživanju je koristila kontekst rješavanja problema zadanih riječima, kako bi potaknula razumijevanje i razvoj algebarskih postupaka u rješavanju zadataka.

Istraživanje se odvijalo u trima fazama poučavanja gdje su simboli koji su se koristili imali različita značenja poput poopćenja broja u formuli i nepoznate vrijednosti u problemu zadanog riječima. Prva faza osigurava razumijevanje važnosti prijelaza na algebru u kontekstu generalizacije. Ta faza obuhvaćala je prikaz brojevnih uzoraka pomoću verbalnog opisa, čemu je slijedio prijelaz na simbolizam. U drugoj su se fazi poučavanja učenici usredotočili na aritmetičku usporedbu problema zadanih riječima. Posljednja faza bavila se rješenjima algebarskih problema s naglaskom na matematičku generalizaciju i uspoređivanje. U toj su fazi učenici morali opravdati izbor generatora, tj. zapis verbalne izjave kako bi objasnili na koji se način vrijednost može izračunati, te kako promjena neke vrijednosti može utjecati na zadani problem.

Na taj su način učenici mogli vidjeti primjenu verbalnog opisa na niz problema te se izjasniti o karakteru brojeva u danim problemima (tj. jesu li generatori ili parametri). Problemi su tada rješavani korištenjem verbalnih opisa koje su učenici generirali. Odnosi su s vremenom u tim problemima postajali sve složeniji te su se naposljetku proširili i na nove probleme. Navedimo u idućem primjeru neke od problema koje su učenici rješavali kroz navedene tri faze poučavanja.

Primjer 5.4.1. *Zadaci primjene generalizacije.*

1. *Početna situacija: Sin, kojega je otac zamolio da napravi inventuru, ostavio je ocu poruku: "Prebrojana su tri tipa artikala. Imamo dva puta više reketa nego loptica, i tri puta više palica za hokej nego reketa." Mislite li da će se otac snaći s tom sinovljevom porukom i shvatiti stanje na skladištu?*

2. *Situacija: Konstruirajte verbalni opis načina na koji biste mogli izračunati broj artikala u skladištu.*

3. *Problem: U skladištu je dva puta više reketa nego loptica i tri puta više palica za hokej nego reketa. Kada bi u skladištu ukupno bilo* 270 *artikala, biste li mogli pronaći broj reketa, loptica i palica za hokej?*

4. *Složeniji problem: U skladištu je tri puta više reketa nego loptica i četiri puta više palica za hokej nego reketa. Kada bi u skladištu ukupno bilo* 255 *artikala, koliko bi reketa, loptica i palica za hokej bilo u skladištu?*

Učenici su koristili različite načine zapisivanja problema:

1. *Zapis riječima (npr. loptica plus loptica puta* 2 *plus loptica puta* 2 *puta* 3 *jednako je broj artikala).*

2. *Prikaz veličina crtanjem (npr. crtež dvaju reketa pomnoženih s tri jednako je crtežu šest palica za hokej).*

3. *Simbolički zapis izraza (npr.* H = *broj palica za hokej,* R = *broj reketa,* $R \cdot 3 = H$*).*

Ti načini zapisivanja pokazali su se važnim alatima za pronalaženje rješenja koje je Bednarz smatrala fundamentalnim komponentama prijelaza na algebarsko razlučivanje i konstrukciju značenja koja okružuju algebarski simbolizam i notaciju. Rasprava u razredu i potvrda rješenja bili su također ključan čimbenik u objašnjavanju učeničkih zapisa i procesa razlučivanja tijekom te konstrukcije značenja.

5.4.3 Pristup prijelazu pomoću kvazivarijabli

Treći se pristup odnosi na upotrebu kvazivarijabli koje su predstavljale most između aritmetičkog i algebarskog načina razmišljanja, a koji učenici često moraju prelaziti tijekom prvih godina učenja algebre. Kvazivarijable pojavljuju se u brojevnim izrazima ili nizu brojevnih izraza koji ukazuju na osnovnu matematičku vezu koja ostaje istinita bez obzira na brojeve koji se pojavljuju u izrazu.

Brojevni izraz $57 - 47 + 47 = 57$ pripada klasi algebarskih jednadžbi tipa $a - b + b = a$, što je istinito za bilo koje vrijednosti a i b. Rad s kvazivarijablama pomaže učenicima u identificiranju i razmatranju algebarskih generalizacija čak i prije nego što se upoznaju s formalnom algebarskom notacijom. Učenici se usredotočuju na razvijanje koncepta varijable radije nego na koncept nepoznatog. U srednjoškolskom se obrazovanju često koriste brojevni izrazi koji označavaju veze među vrijednostima varijabli i temelje se na algebarskoj generalizaciji. Promotrimo jedan geometrijski primjer u kojem je ilustrirano korištenje kvazivarijabli.

Primjer 5.4.2. *Zajednički promjeri polukrugova.*

1. *Nacrtajte polukrug promjera 60 mm. Podijelite promjer na tri jednaka dijela. Iznad svakog dijela konstruirajte polukrug, tako da se tri polukruga dodiruju te da je promjer svakog polukruga jednak jednoj trećini promjera velikog polukruga.*

   - *Zapišite brojevni izraz kojim biste usporedili duljinu luka velikog polukruga sa zbrojem duljina lukova malih polukrugova.*
   - *Ako bismo promjer velikog polukruga na isti način podijelili na četiri dijela i iznad svakog konstruirali polukrug, zapišite brojevni izraz koji bi prikazao ukupnu duljinu svih četiriju kružnih lukova.*
   - *Ako biste imali deset malih polukrugova, zapišite brojevni izraz koji bi prikazao ukupnu duljinu kružnih lukova svih deset polukrugova.*
   - *Promotrite izraze koje ste zapisali te vlastitim riječima opišite što primjećujete.*

2. *Sada ponovite postupak s polukrugom promjera po vlastitom izboru. Uspoređujući rezultate s drugim učenicima, opišite što primjećujete.*

U prvom se dijelu primjera od učenika očekivalo promotriti niz izraza koje su zapisali te primijetiti da je, bez obzira na broj jednakih malih polukrugova, suma duljina njihovih lukova jednaka duljini luka velikog polukruga. Te veze među kvazivarijablama omogućuju učenicima razumijevanje općenite veze u izrazu $\frac{60}{n} \cdot \pi$, gdje je n broj jednakih malih polukrugova. U tom slučaju cilj nastavne jedinice nije da učenici nauče formalno zapisati takav izraz, već da budu u mogućnosti opisati vezu vlastitim riječima.

U drugom se dijelu zadatka, promatrajući druge slučajeve za duljinu promjera velikog polukruga, učenike potiče da shvate da veza vrijedi za polukrugove promjera proizvoljne veličine. Taj primjer potvrđuje kako se s uvođenjem varijabli u nastavu matematike ne bi trebalo čekati dok se učenici ne upoznaju s formalnom algebarskom notacijom. Mnoge su situacije u aritmetici, pa i u geometriji, plodno tlo za upotrebu kvazivarijabli kako bi se produbilo učeničko razumijevanje algebarskog načina razmišljanja te kako bi im se kasnije olakšao prijelaz s rada s nepoznanicama na rad s varijablama. Ipak, naglasak bi ovdje trebao biti na pronalasku veza umjesto na izračunima.

5.5 Strategije za učenje i poučavanje algebre

5.5.1 Tečnost

U školskoj se algebri mnogo vremena troši na uvježbavanje rutinskih vještina poput supstitucija, pojednostavljivanja i jednadžbi kroz stalna ponavljanja. Oni kojima ideje vježbanja nemaju smisla brzo gube tečnost, a oni koji već razumiju osnovno gradivo kroz stalne vježbe ne produbljuju razumijevanje. Pojavljuje se i problem ozbiljnog nedostatka najbitnije tehničke tečnosti - nesposobnosti tečnog i točnog numeričkog i algebarskog izračuna, što je odraz dugoročnih poteškoća koje nalazimo u učinkovitom poučavanju matematike općenito i, točnije, algebre.

Neki pokušaji da se algebru učini dostupnijom i privlačnijom svim učenicima rezultirali su manjim pridavanjem vremena uvježbavanju vještina nauštrb onih koji su ranije stekli viši stupanj tečnosti. Tečnost u vještinama podrazumijeva da ih se može koristiti bez svjesne pažnje kako bi se um oslobodio za bolje razmišljanje koje je potrebno za rješavanje zadatka. Ako su rutinski detalji u algebarskoj raspravi učenicima zahtjevni, teško je usredočiti se na sveukupnu strategiju.

Vježba je svakako potrebna za postizanje tečnosti, no ne smije se odvajati od svrha kojima služi. Treba obratiti pozornost na "impresivno učenje" do kojeg dolazi kada malo dijete uči hodati te uočava da to traži mnogo vježbe, no većim je dijelom to vježba koja se događa dok pokušava postići druge ciljeve, kao što je dohvaćanje igračke ili istraživanje u parku ili na igralištu. Vježba je podređena glavnom cilju: dijete će prohodati dok pridaje pažnju postizanju nečeg drugoga.

Usporedo, sati algebre fokusiraju se često na manipuliranje izrazima i rješavanje jednadžbi. Te vještine učenike ne osposobljavaju da učine išta što oni smatraju značajnim. Posljedično, oni ih zaboravljaju te moraju prolaziti kroz beskrajan ciklus ponovnog poučavanja i ponavljanja.

Vještine se najbolje uče u smislu viših ciljeva, gdje je fokus pažnje na rješavanju važnih zadataka i istraživanju zanimljivih numeričkih i geometrijskih svojstava.

5.5.2 Osiguravanje konteksta

Jedan je od razloga zašto je matematika moćna taj što se može odvojiti od neposrednog konteksta i njegovih elemenata, manipuliranih i transformiranih na apstraktan način. Kako apstrakcija može mnogim učenicima djelovati kao određena barijera, važno je povezivati ideje s objektima koji se čine stvarnim i konkretnim, kao i osigurati razloge za predstavljanje svijeta u algebarskom obliku.

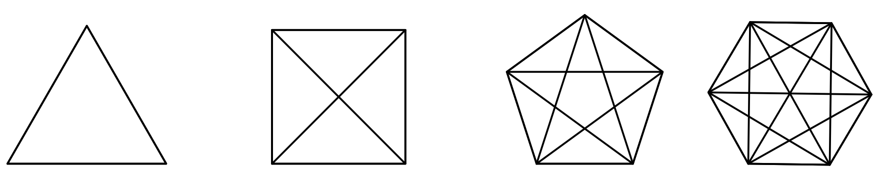
Algebru treba sagledati kao način rješavanja zadataka koji učenicima imaju neku važnost. Algebra i zapravo cijela školska matematika trebale bi biti predstavljene u kontekstu zadataka iz stvarnog svijeta. Ključno je povezivanje ideja i zadataka s nečim konkretnim i poznatim te jasnim prikazom posljedica obrađenog.

Svi učenici dođu na sate algebre s poznavanjem i brojeva i geometrijskih predmeta te ih se može potaknuti zadacima izgrađenima na tom poznavanju bez očite primjene u stvarnom svijetu. U ranim je fazama učenja algebre teško pronaći orginalne primjere iz stvarnog svijeta koji se ne bi mogli odmah riješiti i bez algebre. To ne znači da bismo trebali ignorirati stvarni svijet, već da ne trebamo ograničiti svoje primjere ili pomisliti da će jedino primjena u stvarnom svijetu biti motivirajuća za učenike. Rješavanje numeričkog ili geometrijskog zadatka ili objašnjavanje iznenađujućih brojčanih svojstava također može biti motivirajuća i smislena.

Primjer 5.5.1. *Primjer je motivirajućeg osiguravanja konteksta rad* 12*-godišnjaka na zadatku pronalaženja veze između broja dijagonala i broja stranica pravilnog mnogokuta. Učenici su nacrtali različite mnogokute te zapisali dobivene rezultate. Zadatak tog nastavnog sata bio je pronaći način za određivanje broja dijagonala u dvadeseterokutu. Učenici su brzo shvatili da će im trebati previše vremena za crtanje svih dijagonala te da bi brojanje moglo biti nepouzdano. Uočili su uzorak u razlikama među brojem dijagonala te shvatili da je potrebno mnogo zbrajanja da bi dobili željeni rezultat. Zato su se usredotočili na jednostavniji* *slučaj šesterokuta te uzeli u obzir broj dijagonala koji izlazi iz jednog njegovog vrha. Postoje* 3 *dijagonale iz svakog od* 6 *vrhova, pa je izgledalo da je trebalo biti ukupno* $6 \cdot 3$ *dijagonala, no ranije su dobili da bi traženi rezultat trebao biti* 9*, a ne* 18*. Daljnja rasprava dovela ih je do saznanja da se svaka dijagonala može izbrojiti dvaput te se stoga* 18 *mora prepoloviti. Tada su mogli riješiti zadatak s* 20*-erokutom, no morali su znati koliko ima dijagonala iz svakog vrha. Pogledavši slučajeve koje su imali i shvativši da dijagonala ne može ići do dvaju susjednih vrhova ili do točke iz koje počinje, postalo je jasno da je broj dijagonala za* 3 *manji od broja vrhova, što je isto kao i kod broja stranica mnogokuta. Sada smo dobili opću formulu za broj dijagonala* n*-terokuta*

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Pravilni su mnogokuti ovdje osigurali smislen kontekst koji su učenici razumijeli te je moć algebarskog rezultata postala očita jer su mogli pronaći broj dijagonala za bilo koji pravilni mnogokut. Na kraju sata rečeno im je da, ukoliko žele, uvijek mogu provjeriti točnost rezultata crtanjem i brojanjem dijagonala.



Broj stranica	3	4	5	6
Broj dijagonala	0	2	5	9

Slika 5.4: Dijagonale mnogokuta.

Iako je algebra moćna jer se može razdvojiti od neposrednog konteksta, većina učenika ima potrebu povezivati ideju sa stvarnim stvarima. To ne zahtijeva nužno kontekst stvarnog svijeta jer su iznenađujuća svojstva brojeva i zagonetke svih vrsta učenicima također stvarni te daju bogato područje za primjenu algebarskih ideja.

5.5.3 Poveznice i veze

Lako je u učeničkom umu algebru povezati s nizom postupaka poput pojednostavljivanja, supstitucija i pronalaženja faktora te s nizom tema poput istovremenih jednadžbi, grafova, algebarskih razlomaka, od kojih se svaka nalazi u zasebnom odjeljku. Postupci i teme često nemaju poveznicu jedna s drugom ili s drugim područjima matematike.

Identificirane su tri orijentacije uspješnih učitelja temeljene na vjerovanju u poučavanju matematike ([11]). Idealni se tipovi učitelja opisuju kao oni koji povezuju, prenose i otkrivaju, iako se nijedan učitelj ne uklapa u jednu kategoriju već kombinira elemente svih triju. Učitelji koji otkrivaju naglasili su praktične aktivnosti koje su osmišljene kako bi učenici samostalno otkrili metode. Učitelji koji prenose koristili su verbalna objašnjenja kako bi učenici mogli naučiti standardne postupke, a učitelji koji povezuju gledaju na poučavanje kao na dijalog između učitelja i učenika u istraživanju razumijevanja, s naglaskom na crtanje veza i poveznica. Značajno je da su u poučavanju algebre najučinkovitiji učitelji koji povezuju jer je čest problem u učenju algebre upravo nesposobnost stvaranja veza. Stvaranje veza između brojeva i algebre i poveznice sa slikovitim reprezentacijama uz grafove i dijagrame od ključne su važnosti.

Fundamentalna algebra opisuje se kao uopćena aritmetika i ima korijene u rješavanju prvotno numeričkih problema te u predstavljanju i objašnjavanju veza među brojevima. Brojevi su relativno poznati i dostupni učenicima te stoga pomažu dati smisao algebarskim izrazima. Važno je zadržati tu poveznicu tako da učenici stalno budu svjesni numeričke veze s algebarskim idejama jer služi za ponovno pronalaženje značenja simbola te provjere da rezultati imaju smisla.

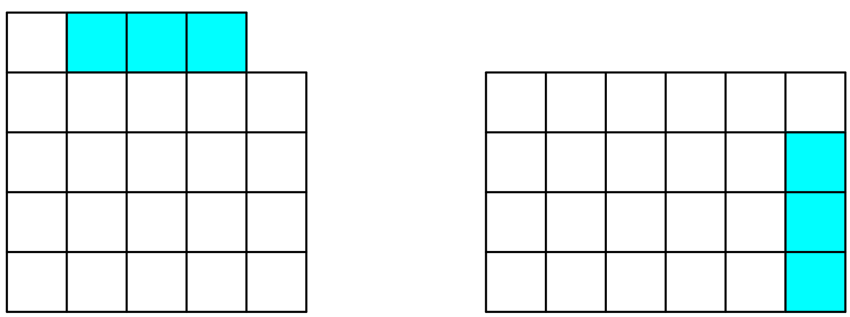
U Tablici 5.2 možemo vidjeti dva algebarska identiteta s nekim vezanim numeričkim primjerima. Simbolički je oblik jezgrovit način predstavljanja općih svojstava prikazanih u numeričkim izjavama, ali su isto tako i posebni slučajevi dobiveni zamjenom određenih svojstava moćan alat kojim se uspostavlja odnos između tih dviju ideja, generalizacije i specijalizacije.

$2 \cdot 2 = 4$	$1 \cdot 3 = 3$
$3 \cdot 3 = 9$	$2 \cdot 4 = 8$
$4 \cdot 4 = 16$	$3 \cdot 5 = 15$
$5 \cdot 5 = 25$	$4 \cdot 6 = 24$
$6 \cdot 6 = 36$	$5 \cdot 7 = 35$
$7 \cdot 7 = 49$	$6 \cdot 8 = 48$
$8 \cdot 8 = 64$	$7 \cdot 9 = 63$

Tablica 5.2: Stvaranje uzorka: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Ako uočena ideja nema smisla, tada je promatranje posebnog slučaja dobra strategija, no isto tako, unutar svakog posebnog slučaja, uvijek postoji i mogućnost generalizacije. Jednostavan je primjer koji to pokazuje kada se odgovori $8 \cdot 8 = 64$ i $7 \cdot 9 = 63$ razlikuju za jedan. To se može smatrati slučajnošću sve dok se ne uzmu u obzir drugi slučajevi koji pokazuju nastajući uzorak prikazan na Slici 5.5, a koji se mogu prikazati u obliku $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Nadalje, iako je početna točka algebarski identitet, numerički su rezultati jedan od načina davanja smisla.

Slike su još od jedan načina predstavljanja ideja. U prikazu na Slici 5.5 korišteni su kvadrati za prikaz jednakosti $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ u slučaju kada je $x = 5$. Lijevi dijagram pokazuje kvadrat s jednim kvadratićem koji nedostaje. Gornji dio zasjenjenih kvadratića maknut je i smješten na jedan kraj da bi se stvorio pravokutnik na desnoj strani.



Slika 5.5: Povezivanje jednakosti sa slikom: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

5.5.4 Razumijevanje pojma funkcije

Kako smo već vidjeli, konstrukcija koncepta funkcije se danas smatra dijelom algebarskog znanja. Pojam funkcije se također smatra fundamentalnim algebarskim objektom, te se naglašava kako bi funkcije trebale biti prisutne u različitim pristupima nastavi algebre od samih početaka njena uvođenja. Mnogi istraživači, poput [17], ističu važnost pojma funkcije u srednjoškolskom obrazovanju.

U primjeru koji slijedi ćemo prikazati dijalog u razredu koji dobro ilustrira kako učenici ne moraju nužno znati napamet naučeni niz pravila, već koriste prethodno znanje u pronalasku rješenja.

Primjer 5.5.2. *U primjeru su predstavljena rješenja jednadžbe* $x^2 - 2x = -1$ *do kojih su došli učenici drugog razreda srednje škole. Zadatak je bio sljedeći:*

- *Objasnite koja su rješenja točna, koja nisu i zašto.*
- *Objasnite kako biste iskoristili prednosti, ograničenja ili pogreške u pronalasku rješenja drugim učenicima.*

Ivan: $x = 1$*, zbog toga što je* $x^2 - 2x = -1$*, prebacimo li* $2x$ *na drugu stranu jednadžbe, imamo* $x^2 = 2x - 1$*, pa korjenovanjem jednadžbe dobivamo* $x = \sqrt{2x-1}$*. Očito* x *ne može biti* 0*, jer uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo* $0 = \sqrt{-1}$*. Također* x *ne može biti niti negativan, budući da bismo onda dobili negativan broj pod korjenom. Sada je* $x = 1$ *jer uvrštavanjem u jednadžbu dobijemo istinitu jednakost* $1 = 1$*.*

Maja: $x = 1$*, jer ako je* $x^2 - 2x = -1$*, tada je* $x(x-2) = -1$*, pa je* $x = -1$ *i* $x - 2 = -1$*, tj.* $x = 1$*. Uvrštavanjem rješenja* $x = -1$ *ne dobivamo istinitu tvrdnju, pa je rješenje* $x = 1$*.*

Patrik: $x = 1$*, jer ako je* $x^2 - 2x = -1$*, tada faktoriziranjem dobivamo* $(x-1)(x-1) = 0$*, dakle* $x = 1$*.*

Filip: $x = 1$*. Nacrtao sam graf funkcije* $y = -1$ *i graf funkcije* $y = x^2 - 2x$*. Te dvije funkcije sijeku se samo u točki* $x = 1$*.*

Karla: $x = 1$*. Probala sam u jednadžbu uvrstiti razne vrijednosti i samo za* $x = 1$ *se dobije istinita tvrdnja.*

Jezik koji koristi tehnologija prirodno ovisi o pojmu varijable i funkcije. Ali pojam varijable i funkcije je u današnjem svijetu tehnologije puno složeniji i bogatiji od onog koji nalazimo u udžbenicima ili znanju današnjih učenika te potraga za vrijednostima varijabli koje zadovoljavaju jednadžbu više ne mora biti primaran cilj uvođenja algebre.

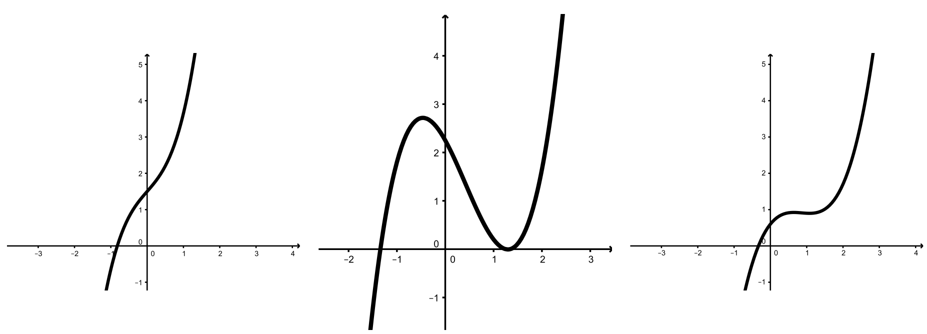
U svijetu tehnologije, i funkcije i varijable poprimaju novo značenje, budući da se više ne promatraju kao apstraktni izrazi kao u učionici, posebno kada se koriste za istraživanje problema iz realnog života. Varijable predstavljaju promjenjive veličine, a algebra je znanost o vezama među tim promjenjivim veličinama. Pojam je funkcije slojevit i ne može se u potpunosti razumjeti pomoću samo jednog prikaza. Za razumijevanje je osnovnih pojmova vezanih uz funkcije ključno biti u mogućnosti pronaći vezu među algebarskim, numeričkim i grafičkim prikazima funkcija.

Računalni programi i druga tehnološka pomagala za crtanje grafova funkcija omogućuju učenicima razumijevanje tih veza te razvijanje bogatih konceptualnih shema, no učenici ipak ponekad ne uspiju povezati navedene koncepte.

Kada govorimo o pristupu poučavanja kroz te mnogostruke veze u uvođenju pojma funkcije, često se ističe kako učenici trebaju izvršavati zadatke, a učitelji prezentirati primjere pomoću kojih je moguće uočiti veze među prikazima funkcije. Međutim, čak i uz najbolje osmišljene zadatke, uvijek postoji potreba za učiteljevim praćenjem rješavanja zadataka i pomaganjem učenicima u radu.

Pristupi poučavanju algebre u srednjim školama, koji se temelje na navedenim funkcijskim vezama, često su fokusirani na polinome i racionalne funkcije, no detaljno se proučavaju tek neke funkcije iz tih familija, poput linearne, kvadratne i kubne funkcije, te nešto rjeđe polinomi četvrtog stupnja. Često se obrađuju trigonometrijska i eksponencijalna funkcija te se tek ponekad u redovnu nastavu uvodi i obrada nekih drugih funkcija.

Nažalost, poučavanje je funkcija razdijeljeno kroz nekoliko godina srednjoškolskog obrazovanja te učenici često razviju razumijevanje određenih aspekata jedne familije funkcija koje kasnije nisu u mogućnosti prenijeti na druge familije. Jednostavno kreiranje grafova u tehnologijskom okruženju omogućuje promatranje vrijednosti funkcija za velike argumente i pruža lak pristup mnogobrojnim tipovima funkcija. Dodatno, promatranje različitih pogleda na istu funkciju može pomoći razvijanju široke slike grafičkog prikaza određenog tipa funkcije. Na primjer, grafički prikaz polinoma trećeg stupnja ima tri moguća oblika, kako je prikazano na Slici 5.6, ovisno o broju stacionarnih točaka.



Slika 5.6: Graf kubne funkcije.

Kada koristimo tehnologiju za crtanje grafova, omogućen nam je samo djelomičan prikaz grafa, pa se tako može činiti i da polinom trećeg stupnja izgleda poput linearne funkcije. Razumijevanje kako na graf djeluje promjena vrijednosti na koordinatnim osima ključno je za uspješnu primjenu tehnologije te pomaže učenicima u daljnjem razvoju razumijevanja konceptualne slike funkcija.

Konceptualna slika odnosi se na skup svih mentalnih slika koje su u učeničkom umu povezane s nazivima koncepata, zajedno sa svim svojstvima koja ih karakteriziraju. Upotreba je tehnologije još jedan način kojim proširujemo učenička iskustva s konceptom funkcija. Neke konceptualne slike koje učenici stvore radeći u tehnologijskom okruženju rezultat su učenja u takvom okruženju te aktivnog učenja kroz tehnologiju. Značajke pomagala koje se koristi i zadaci za koje se ono koristi mogu dovesti do formiranja različitih znanja.

5.5.5 Uloga tehnologije

Tijekom proteklih tridesetak godina, koliko su kalkulatori dostupni, postoji puno kontroverzi o njihovoj ulozi u učenju aritmetike. To ostaje i dalje tako zbog naprednijih, tzv. grafičkih računala. Kao i s jednostavnim kalkulatorima, zabrinjava utjecaj takve tehnologije na učeničko razumijevanje i vještine te do koje bi se mjere kurikulum trebao promijeniti kako bi se uzela u obzir i moć koju takvi alati omogućuju. Važno je razlikovati primjenu tehnoloških uređaja kao brzog i točnog sredstva koje olakšava rad, što se može iskoristiti pri primjeni algebre u zadacima, te kao svestranog sredstva s čitavim nizom sposobnosti koje se mogu iskoristiti za unaprjeđivanje načina na koji učenici uče algebru.

Treba razlikovati ciljeve izvedbe neke operacije za koju bi bilo primjereno koristiti kalkulator te odabir strategije za rješavanje zadatka, koji se ne može riješiti kalkulatorom. Na sposobnost odabira strategije utjecati će poznavanje algebarskih ideja i postupaka te iskustvo u njihovom rješavanju. Iako sposobnost ručnog izvođenja operacija nije najbitnija pri samom rješavanju zadatka, dodatno je iskustvo u tome nužno za osiguravanje poznavanja i razumijevanja ideja potrebnih za izbor strategije.

Važno je razlikovati algebarske vještine koje primjenjujemo u jednostavnim primjerima koji se rade ručno i kompliciranije primjere gdje bi primjena kalkulatora bila primjerena. Od učenika očekujemo da $x^2 - 1$ ili $x^2 - 3x + 2$ rastavi na faktore računanjem napamet, no kalkulator će biti primjereniji u faktoriziranju izraza $6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$. Prvi je primjer razumijevanje prirode algebarskih faktora, no drugi je složeniji zadatak koji ne razvija nužno daljnje razumijevanje ni sposobnost primjene ideje rastavljanja na faktore.

Tehnologija u obliku kalkulatora i računalnih programa ima vrijednu ulogu koristi li se primjereno, tj. u svrhu promoviranja algebarskog razumijevanja. Ipak, tečnost u izvršavanju jednostavnih algebarskih izraza ostat će zasigurno najbitnija komponenta razumijevanja i učinkovite primjene algebre.

6

UČENJE I POUČAVANJE GEOMETRIJE

6.1 Uloga geometrije

Jedna je od temeljnih teorija koje su razvile drevne civilizacije za opisivanje svijeta oko sebe upravo geometrija. Umijeće izračunavanja dimenzija postalo je bitno kad su ljudi počeli podizati građevine te su Babilonci i Egipćani, veliki graditelji starog svijeta, pisali rasprave o geometriji. Grci su joj dali ime koje izvorno znači "zemljomjerstvo". Geometrija u nastavi najbolje je sredstvo za razvijanje matematičkog mišljenja te je prikladna za kreativan i istraživački rad. Sastavni je i vrlo važan dio svakog kurikuluma nastave matematike.

Nizozemski matematičar Hans Freudenthal ([12]) rekao je da geometrija opipljiv prostor, onaj prostor u kojem dijete diše, živi i kreće se. To je prostor koji učenik mora naučiti poznavati, istraživati i osvajati, kako bi u njemu bolje živio, disao i kretao se.

Geometrija posjeduje neposrednu intuitivnu privlačnost na jednostavnoj razini. Od rane se dobi djeca igraju oblicima opažajući njihova očigledna svojstva i promatrajući u kakvom su odnosu jedni s drugima. Također, promatraju veliku raznolikost jednostavnih i složenih geometrijskih konfiguracija u vlastitom okruženju i stječu dio jezika povezanog s njima. Neformalno uče prepoznavati oblike kao što su krugovi, četverokuti i trokuti i počinju razumijevati riječi poput vodoravno, okomito i paralelno. Prvi koraci u učenju geometrije tiču se imenovanja, opisivanja, klasificiranja i stvaranja poveznica s mjerenjem, položajem i kretanjem. Opisivanje i klasificiranje nisu nužno trivijalni zadaci, što postaje očito kada, na primjer, promatramo svojstva različitih četverokuta i poveznice među njima. Štoviše, oni vode k složenijim zahtjevima definiranja i zaključivanja. Mjerenje je očigledno od velike praktične važnosti i određuje učeničko razumijevanje koncepata duljine i kuta i povezane koncepte kao što su površina i volumen, ali je osnova geometrije i izvor njezine beskrajne privlačnosti način na koji zaključivanje igra ključnu ulogu u dokazivanju rezultata koji su često kako jednostavni tako i iznenađujući.

Kada se razmišlja o geometriji, možemo imati dva potpuno različita razmišljanja, a opet međusobno povezana. Jedan je način prostorno razmišljanje, način kako učenici razmišljaju o obliku i prostoru, dok je drugi geometrijski sadržaj, teorija, poznavanje geometrijskih tijela, likova, odnosa... Kod učenika je potrebno razvijati oba načina mišljenja.

Prostorni zor može se definirati kao intuicija o oblicima i odnosima među oblicima. Neki učenici imaju izraženiji prostorni zor koji im omogućava bolji osjećaj za geometrijske aspekte koji ih okružuju i oblike koji formiraju okolinu. Prostorni zor omogućava i bolju sposobnost vizualizacije objekata i prostornih odnosa koje si mogu lako predočiti u glavi. Osobe s izraženijim prostornim zorom lako uočavaju geometrijske oblike u umjetnosti, prirodi, arhitekturi i skloni su opisivanju svijeta kroz geometriju.

Često se susrećemo s izjavama da ljudi imaju problema s prostornim zorom ili imaju slabu prostornu orijentaciju. Smatraju da se s tom sposobnosti moraš roditi, no to nije točno. Prostorni zor razvija se nakon stjecanja iskustva u radu s oblicima i prostornim odnosima, nakon određenog vremena.

Geometrija se u nastavnom planu i programu uglavnom svodi na učenje novih pojmova, definicija i terminologije, dok je naglasak na njezinu primjenu malen. Ona ima nekoliko smjerova koji se razvijaju kroz obrazovanje, a možemo ju svesti na četiri cjeline:

1. Oblici i svojstva uključuju proučavanje svojstava oblika u dvjema, trima dimenzijama te proučavanje odnosa temeljeno na svojstvima.

2. Transformacija uključuje proučavanje izometrija (osna simetrija, centralna simetrija, rotacija, translacija, identiteta), homotetija.

3. Pozicija se odnosi na određivanje objekata u ravnini uz pomoć koordinata.

4. Vizualizacija je prepoznavanje oblika koji nas okružuju, razvoj odnosa dvodimenzionalnih i trodimenzionalinih objekata te sposobnost prepoznavanja predmeta iz različitih perspektiva.

6.2 Geometrijsko mišljenje

6.2.1 Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja

Čest je kod učenika slučaj da mogu prepoznati neki geometrijski oblik, ali ga ne znaju definirati. Neki će učenici također teško shvatiti zašto se kvadrat smatra pravokutnikom ili zašto moraju dokazati ono što već "znaju". Ima još mnogo primjera koji pokazuju na kojoj je razini učenik što se tiče geometrijskog mišljenja. Nastavnici uvijek u poučavanju geometrije moraju pronalaziti načine kako podići razinu geometrijskog mišljenja kod učenika. Razinama geometrijskog mišljenja i onoga što je za njih svojstveno bavili su se nizozemski nastavnici Dina van Hiele-Geldof i njezin suprug Pierre van Hiele. Nakon smrti supruge, Pierre se nastavio baviti razvojem geometrijskog mišljenja kod učenika te je 1986. godine izdao knjigu Structure and insight, a theory of mathematics education. Dina je uglavnom pokušavala u svojim istraživanjima pronaći metode u nastavi koje bi pomogle učenicima u boljem shvaćanju geometrije, dok je Pierre istraživao razloge zbog kojih učenici imaju loš uspjeh u učenju geometrije. Oni su stvorili model prema kojem razlikuju pet razina geometrijskog mišljenja. Na svaku sljedeću razinu može se doći samo ukoliko je prethodna usvojena.

Van Hieleove razine geometrijskog mišljenja jesu:

- Razina 0. Vizualizacija:
  Na ovoj su razini učenici svjesni prostora samo kao nečega što postoji oko njih. Učenici su u stanju precrtati zadani geometrijski oblik, mogu prepoznati određene geometrijske oblike kao što su, npr., trokuti, kvadrati, krugovi itd., no nisu svjesni njihovih svojstava ni osobina. Također, često na osnovu jednog primjera zaključuju da nešto uvijek vrijedi.

- Razina 1. Analiza:
  Na ovoj razini učenici počinju analizirati svojstva geometrijskih objekata, ali još uvijek ne mogu uočiti vezu među njima. U stanju su naučiti i definirati svojstva koja ima neki geometrijski oblik, ali ne znaju koja su od tih svojstava dovoljna da bi se definirao geometrijski oblik. Ako, npr., imaju skup kvadrata, moći će izreći svojstva za koja znaju da ih ima kvadrat. Počinju vjerovati da oblici koji pripadaju istoj klasi imaju zajednička svojstva. Na ovoj razini ne razumiju u potpunosti definiciju određenog geometrijskog oblika.

- Razina 2. Neformalna dedukcija:
  Na ovoj razini učenici počinju shvaćati veze među svojstvima geometrijskih oblika, pa samim time i veze među geometrijskim oblicima. Počinju razmišljati deduktivno, bolje shvaćaju definicije te počinju razmišljati što je potrebno i dovoljno za opisivanje određenog geometrijskog objekta. Učenici mogu pratiti i shvatiti dokaz neke tvrdnje vezano za svojstva ili odnose geometrijskih oblika, ali ne bi znali sami dokazati takve tvrdnje.

- Razina 3. Dedukcija:
  Učenici su u stanju dokazati određena svojstva ili veze među geometrijskim objektima. Shvaćaju definicije i aksiome te mogu zaključivati na osnovu poznatih činjenica. Mogu donositi zaključke koji se na ovoj razini više temelje na logici nego na intuiciji, što je dotad bio slučaj. Također, shvaćaju pojam nužnog i dovoljnog uvjeta za definiranje određenog objekta.

- Razina 4. Strogost:
  Na ovoj su razini stariji učenici ili mlađi studenti u stanju shvatiti geometrijski sustav koji nije euklidski (npr. geometriju Lobačevskog) te uspoređivati različite geometrijske sustave. Geometrijsko je mišljenje apstraktno.

Primjer 6.2.1. *Na razini* 0*: Svi paralelogrami idu zajedno jer "jednako izgledaju". Kvadrat i pravokutnik nisu paralelogrami jer "ne izgledaju" kao paralelogrami.*

Na razini 1*: Učenici zaključuju da su paralelogrami svi likovi koji imaju paralelne nasuprotne stranice, čije su nasuprotne stranice jednake duljine, imaju nasuprotne kutove jednake veličine, i čije se dijagonale raspolavljaju. Smatraju da kvadrat nije paralelogram jer su mu sve četiri strane jednake duljine.*

Na razini 2*: Učenici spoznaju da je dovoljno svojstvo četverokuta da ima jedan pravi kut i sve četiri strane jednake kako bi se došlo do zaključka da se radi o kvadratu.*

Na razini 3*: Učenici su sposobni dokazati da je jednakokračan trapez tetivni četverokut, koristeći karakterizaciju prema kojoj je četverokut tetivni ako i samo ako mu je suma nasuprotnih kutova jednaka* 180°*.*

Na razini 4*: Stariji učenici i mlađi studenti uspoređuju različite geometrijske sustave na temelju Saccherijeva četverokuta, tj. na temelju četverokuta u kojemu su dvije nasuprotne stranice jednake duljine i okomite na bazu te se, ovisno o tome jesu li kutevi između tih dviju stranica i stranice nasuprotne bazi pravi, šiljasti ili tupi, ide u smjeru euklidske, hiperboličke ili sferne geometrije.*

Van Hieleove faze učenja za razvoj geometrijskog mišljenja

Par van Hiele izdvojio je osim razina i određene faze učenja u kojima se učenici nalaze prolazeći kroz razine geometrijskog mišljenja. Definirali su i neke metode koje učenicima mogu pomoći u razvoju geometrijskog mišljenja.

- Faza informiranja:
  U ovoj se fazi učenici upoznaju s gradivom. Nastavnik ih informira kroz raspravu o svemu važnom što im je potrebno da bi razumjeli temu koju moraju odraditi.

- Faza usmjerenog vođenja:
  U ovoj fazi učenici rade koristeći materijale koje je nastavnik pažljivo odabrao, pazeći pritom da učenici koristeći te materijale sami mogu otkriti neka svojstva među objektima. Pitanja bi trebala biti kratka i jasno definirana. Npr. nastavnik može tražiti od učenika da koristeći geoploču (drvenu ili plastičnu ploču s čavlićima koji su raspoređeni u kvadratnu mrežu oko kojih je moguće rastezati elastične gumene vrpce, [8]) konstruiraju romb koji ima jednake dijagonale, romb kojemu su svi unutarnji kutovi pravi kutovi, romb s trima pravim kutovima, romb s dvama pravim kutovima, romb s jednim pravim kutem...

- Faza objašnjavanja:
  U ovoj fazi nastavnik treba uputiti učenike koja su to važna svojstva koja trebaju kako bi opisali ono što su zaključili kroz samostalno odrađene zadatke. Tu je uloga nastavnika minimalna. Učenici trebaju objasniti nastavniku ili jedni drugima, ukoliko se radilo u grupi, što su zaključili nakon aktivnosti iz faze usmjerenog vođenja.

- Faza slobodnog usmjeravanja:
  U ovoj fazi učenici koriste ono što su dotad zaključili na osnovi jednostavnijih zadataka u rješavanju složenijih zadataka. Zadaci sada imaju više koraka, mogu se riješiti na više načina, dvosmisleni su ili nedovršeni. Takvi su zadaci dobri jer se učenici više angažiraju i istražuju, pa stoga bolje razvijaju geometrijsko mišljenje.

- Faza integriranja:
  U ovoj fazi učenici skupljaju sve informacije koje su naučili nakon aktivnosti i zadataka. Te informacije trebaju zapamtiti. Važno je da u ovoj fazi učenici ne dobiju neku novu informaciju, nego je cilj samo ponoviti sve važno što je uočeno i što treba zapamtiti.

Razine razvoja geometrijskog mišljenja kod učenika

Učenici moraju prijeći razine mišljenja točno onim redoslijedom koji je van Hiele naveo. To znači, na putu do najviše razine, nije moguće da učenik preskoči neku razinu pa ju kasnije usavršava. No, učenici se mogu naći na prijelazu između razina. Npr. ukoliko je neki učenik savladao pojam trokuta na razini 2, a pojam četverokuta na razini 1, njemu će biti lakše rješavati zadatke koji se tiču trokuta nego one koji se tiču trapeza. S druge strane, to mu olakšava prelazak na razinu 2 jer je preko poznavanja trokuta na razini 2 uvježbao traženje odnosa među svojstvima geometrijskih objekata. Za prelazak s jedne razine na drugu važan je učenikov osobni angažman i rad na razumijevanju materijala i zadataka koje nastavnik pripremi.

Dina van Hiele 1957. godine iznijela je teoriju da je potrebno oko 20 lekcija za prijelaz s razine 0 na razinu 1, odnosno oko 50 lekcija za prijelaz s razine 1 na razinu 2, ako se radi s dvanaestogodišnjacima.

Prema van Hieleovoj teoriji, učenici mogu razviti svoje geometrijsko mišljenje samo ukoliko aktivno sudjeluju, razmišljaju, istražuju i donose samostalne zaključke uz vođenje nastavnika. U geometriji je nezahvalno držati frontalnu nastavu u kojoj učenici samo memoriraju i zapisuju činjenice. Nastavnik mora pomoći učeniku smišljenim aktivnostima za stjecanje iskustva, o čemu kasnije mogu raspravljati.

Postoje istraživanja, poput [1], koja govore o tome da većina srednjoškolskih nastavnika razmišlja na trećoj ili četvrtoj razini geometrijskog mišljenja, dok se učenici u prvom razredu srednje škole nalaze na prvoj ili drugoj razini geometrijskog mišljenja. Nastavnici moraju paziti na to da se izražavaju jezikom koji učenici razumiju, odnosno koji je prikladan za razinu na kojoj oni razmišljaju. Ono što učenici rade kada ne razumiju gradivo prepisivanje je i zapamćivanje činjenica. To im ne omogućava primjenu onoga što su naučili niti im koristi za razvoj njihovog geometrijskog mišljenja. Postoji mnogo testova i aktivnosti koje nastavnici mogu iskoristiti kako bi uvidjeli na kojoj su razini učenici te se tako prilagoditi njihovoj razini i smisliti što bolje aktivnosti u svrhu prelaska na sljedeću razinu.

Nakon što učenik prijeđe na sljedeću razinu mišljenja, važno je ne smatrati one koje je prethodno prošao manje važnima. Također, nije dobro ubrzavati proces prelaska s jedne razine na drugu.

Karakteristike mišljenja učenika na Van Hieleovim razinama geometrijskog mišljenja

Karakteristike mišljenja učenika na razini 0:

- rabe neprikladna vizualna svojstva za opis geometrijskih likova,
- lako ih zbunjuje rotacija geometrijskih likova,
- klasificiraju geometrijske oblike oslanjajući se na nevažan podatak ili svojstvo,
- nepotpuno definiraju geometrijske oblike jer se njihova definicija zasniva samo na vizualnom dojmu.

Karakteristike mišljenja učenika na razini 1:

- uspoređuju eksplicitno geometrijske oblike na osnovi njihovih osnovnih svojstava,
- ne povezuju različite klase likova,
- klasificiraju geometrijske oblike na osnovi samo jednog svojstva (npr. broj stranica), dok ostala svojstva zanemaruju,
- prilikom definiranja nekog objekta daju previše informacija umjesto samo onih nužnih za definiciju,
- ne prihvaćaju definicije iz udžbenika niti one koje im ponudi nastavnik ili neka druga odrasla osoba jer smatraju da je njihova definicija ispravna i logičnija,
- zaključuju da neka tvrdnja općenito vrijedi nakon provjere na samo nekoliko primjera.

Karakteristike mišljenja učenika na razini 2:

- lakše dolaze do definicije geometrijskog objekta (ne koriste više suvišna svojstva objekta),
- prihvaćaju definicije iz udžbenika kao one ispravne,
- prihvaćaju činjenicu da postoji više ekvivalentnih definicija istog geometrijskog objekta,
- mogu hijerarhijski klasificirati geometrijske objekte,

- počinju shvaćati tvrdnje oblika "ako... onda...",
- upoznaju se s dokazima i aksiomima, ali ih ne shvaćaju u potpunosti.

Karakteristike mišljenja učenika na razini 3:

- razumiju definicije, aksiome i dokaze,
- sami mogu doći do nekih zaključaka koje onda pokušaju i dokazati.

Karakteristike mišljenja učenika na razini 4:

- razvija se znanstveni pogled na geometrijsku teoriju,
- mogu razumjeti i druge geometrije osim euklidske.

6.3 Aktivnosti za razvoj geometrijskog mišljenja

Može se dogoditi da učenici iste dobi budu na različitim razinama, što znači da razina geometrijskog mišljenja ne ovisi potpuno o dobi učenika. Često se učenici nižih razreda osnovne škole nalaze na nultoj razini, dok je rijetko koji učenik osmog razreda na višoj od druge razine. Neki učenici, ali i odrasli ljudi, mogu zauvijek ostati na razini 0. Kako bi prešli na višu razinu, učenicima je potrebno adekvatno obrazovanje. Geometrijsko je iskustvo jedan od najvažnijih čimbenika koji utječu na napredak kroz razine. Prije samog učenja za višu razinu potrebno je ispitati na kojoj se on razini nalazi. Ako se učeniku zada zadatak koji je na razini višoj od one na kojoj se trenutno nalazi, komunikacija će biti loša. Takav će postupak učeniku stvarati problem, bit će prisiljen učiti napamet i tako postići samo privremen i površan uspjeh. Učenik može naučiti neki dokaz, ali ne uspijeva razumjeti svaki pojedini korak koji je uključen u postupak. Međutim, nije svaki nastavnik u mogućnosti omogućiti učeniku prelazak na višu razinu. Svaki bi nastavnik trebao vidjeti mogućnosti napretka i razvoj geometrijskog mišljenja kod učenika tijekom cijele godine.

Neki postupci koji omogućavaju lakši prelazak na višu razinu jesu:

- Informiranje: u toj fazi učenici upoznaju materijal, kroz razgovor nastavnik otkrije kojim znanjem o određenoj temi učenici raspolažu te ih bolje upozna sa samom temom.
- Usmjereno vođenje: učenicima se zada zadatak da nešto izrade ili izmjere, što im omogućava otkrivanje odnosa koji im do tada nisu bili posve razumljivi ili su im čak bili nepoznati.

- Objašnjavanje: najprije učenici pokušavaju objasniti svojim riječima ono što su naučili tijekom rada, a zatim ih nastavnik usmjerava da to opišu pomoću matematičkih termina.

- Slobodno usmjeravanje: tijekom ove faze učenici upotrebljavaju stečena znanja za rješavanje određenih problema.

- Udruživanje: u ovoj fazi učenici udružuju sva prethodno naučena znanja i zatim na taj način usvajaju nove informacije i znanja.

Zadaci za pojedinu razinu

Kod razine 0 potrebno je u nastavu uključiti mnogo aktivnosti sortiranja i klasificiranja. U zadatke je potrebno uvesti raznolike primjere oblika kako bi znali odrediti koje su osobine bitne, a koje nisu, poput, na primjer, boje. Potrebno je omogućiti učenicima crtanje, građenje, omogućiti im pravljenje raznih oblika, sastavljanje prema nekom obrascu, rastavljanje oblika u dvije, tri dimenzije. Učeničke aktivnosti trebaju biti usmjerene na posebna svojstva oblika kako bi razvijali razumijevanje geometrijskih svojstava i počeli ih koristiti.

Kod razine 1 u sklopu nastave potrebno je osmisliti dovoljno učeničkih aktivnosti usmjerenih na geometrijska svojstva oblika, a ne samo na njihovo prepoznavanje. Potrebno je uputiti učenike u prepoznavanje i korištenje činjenice da se uvođenjem novih geometrijskih koncepata razvija i raste broj svojstava geometrijskih oblika. Trebaju znati primjenjivati naučene ideje na čitave klase oblika, a ne pojedinačno. Nova svojstva trebaju uočavati analizom klase oblika (na primjer, svrstati kutove prema njihovoj veličini, tupi, šiljasti, pravi kut). Za lakše predočavanje raznih oblika dobro je upotrebljavati razne programe dinamične geometrije, poput Geogebre ili Sketchpada, prilagođene programe koji omogućuju promatranje promjene slike pri korisničkim promjenama određenih parametara.

Kod razine je 2 kroz nastavu potrebno učenike poticati na stvaranje i provjeravanje hipoteza (npr. Vrijedi li uvijek neko pravilo?).

Učenici trebaju dobiti zadatke u kojima će se od njih tražiti odrediti koji su nužni, a koji dovoljni uvjeti za oblike ili koncepte (npr. Koje svojstvo treba imati četverokut kako bi bio paralelogram?). Tijekom razgovora potrebno je koristiti jezik neformalne dedukcije: za svaki, za neke, ni za jedan, što ako i slično. Potrebno ih je izazvati da sami izvode neformalne dokaze i zahtijevati od njih da se sami uvjere u njihovu smislenost.

Ne postoji jedinstveni test za provjeru na kojoj se razini učenik nalazi. No, nije velik problem odrediti radi li se o razini 0 ili 1. Potrebno je provesti određene aktivnosti i slušati opažanja koja učenici zamjećuju. Govore li o oblicima kao o klasama, razumiju li da se radi o istom obliku ako se promjeni orijentacija. Takvim se pitanjima lako dozna o kojoj se razini radi. Tijekom učenja učenika i prelaska na višu razinu potrebno je pratiti njegov rad. Ako vidimo da učenik nije u stanju slijediti i poštivati logičke argumente i sklon je nagađanju, tada nije spreman za prelazak na višu razinu.

6.3.1 Aktivnosti za učenike prikazane kroz geometrijski sadržaj za van Hieleove razine

Aktivnosti za učenike trebaju biti organizirane i njima prilagođene. Nakon što je određeno kojoj van Hieleovoj razini učenik pripada, mogu se s njim raditi određene aktivnosti. Aktivnosti su prožete geometrijskim sadržajem (oblici i svojstva, položaj, transformacija, vizualizacija) koji treba razvijati kod učenika. Sve su podjele aktivnosti vrlo prilagodljive te aktivnost jedne razine, uz male promjene, postaje aktivnost za drugu razinu. Ponekad se i sadržaji međusobno preklapaju, teško je strogo odvojiti aktivnosti.

Oblici i svojstva

Aktivnosti su pomoću kojih najlakše možemo odrediti kojoj razini pripada učenik iz područja oblika i svojstava. Kad pomislimo na taj sadržaj, prva je asocijacija da se to obrađuje u osnovnoj školi. Učenici rade s dvama, trima ili više različitih oblika. Znaju samostalno odrediti kada je nešto slično, odnosno različito te na temelju toga otkrivaju oblike i njihova svojstva. Nakon određenog će iskustva učenici moći razvijati klasifikacije definiranih i već poznatih oblika, poput trokuta, kvadrata, romba, piramide ili valjka. Na kraju će istražiti i zaključiti kako su zapravo svojstva oblika povezana s geometrijskim odnosima i tako će razvijati sposobnost razmišljanja o oblicima i svojstvima.

Oblici i svojstva na razini 0

Na ovoj se razini aktivnosti trebaju sastojati od dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika s kojima učenici trebaju raditi i tako stjecati iskustvo. Oblici ne trebaju biti samo pravilni, već što različitiji. Strane oblika trebaju biti ravne, zakrivljene te njihove kombinacije. Imena tih oblika i odgovarajuća svojstva mogu se lako uvesti kroz aktivnosti. Ako zatražimo od učenika da navedu značajke koje su primijetili kod oblika, često će odgovori biti bazirani na nepotrebnim značajkama, poput crta je kriva, izgleda kao lopta. Skloni su pri opisivanju rabiti riječi "ističe se" ili "ima rub isti kao papir". Kod rada s dvodimenzionalnim oblicima, potrebno je učenicima izraditi oblike od nekog materijala, podijeliti učenike u skupine te im zadati da sami razvrstavaju oblike po nekom svom pravilu, što im omogućava razvijanje ideje vlastitog shvaćanja i razumijevanja. Kako radimo aktivnosti s dvodimenzionalnim oblicima, tako ih samo proširimo na trodimenzionalne oblike i tražimo od učenika određivanje svojstava.

Radi boljeg je upoznavanja oblika dobro učenicima zadati aktivnosti koje sadrže konstrukcije i rastavljanje oblika. Tako će vidjeti kako se od manjih oblika mogu sastaviti drugačiji veći oblici ili veći oblik rastaviti na manje. Pomoć je za takve aktivnosti tangram, različite puzzle i mozaici koji se sastoje od različitih geometrijskih oblika. Oni nam omogućavaju da vidjeti kako, npr., kvadrat možemo dobiti spajanjem dvaju jednakih pravokutnih jednakokračnih trokuta. Tangram se sastoji od sedam dijelova koje možemo slagati u razne oblike, što učenicima predstavlja igru kroz koju uče. Učenici dobiju zadatak od papira izrezati oblike od kojih se sastoji tangram, čime se razvijaju i njihove motoričke sposobnosti. Prvo rade s manjim brojem oblika i slažu ih u neki novi oblik te im se broj oblika za slaganje povećava nakon što slože neki oblik. Učenici mogu slagati oblike na papir ili ih lijepiti u bilježnicu. Prilikom izrade tog zadatka možemo vidjeti kako su neki učenici skloni slaganju već poznatih oblika (trokut, trapez) i teško pronalaze načine slaganje novih oblika. Neki učenici pak koriste ili samo trokute ili trapeze i rade oblike samo s njima. Nakon svakog zadatka potrebno je napraviti raspravu i otkriti ostalima kako je učenik složio određeni oblik.

Postoji mnogo načina za razvoj osjećaja za oblik, a još su neki načini korištenje papira na kojem se nalazi kvadratna mreža točkica koje učenici spajaju i tako stvaraju određene oblike. Zatim kao materijal za rad mogu poslužiti plastične slamke, plastelin, listovi novina itd. Uporaba tih materijala kod učenika razvija, osim boljeg upoznavanja oblika i njihovih svojstava, i njihovu kreativnost.

Oblici i svojstva na razini 1

Na ovoj su razini zadaci slični kao i na razini 0, samo što se sada dodatno, osim crtanja i svrstavanja oblika, od učenika očekuje da nauče pravo ime tog oblika i njegova svojstva. Oblike dijele po njihovim obilježjima, sad, npr., razlikuju pravokutan, šiljastokutan i tupokutan trokut. Učenici su na toj razini u stanju napraviti kategorizaciju likova i tijela po njihovim obilježjima. Znaju razliku između konkavnog i konveksnog, u mogućnosti su napraviti određene klasifikacije među trokutima i četverokutima. Učenici prilikom rješavanja određenih aktivnosti rade popis svih svojstava i na temelju toga određuju koja je to klasa. Paralelogram je dobar primjer za zadatak u kojem učenici trebaju napisati njegova svojstva, zatim se na njega nastavlja romb, pravokutnik i na kraju kvadrat.

Ne treba dati svim učenicima da sve rade, već ih podijeliti u grupe i svakoj grupi dati pojedini oblik da ispišu svojstva.

Nakon obavljenog zadatka, učenici vode raspravu i međusobno se nadopunjavaju. Glavni je cilj da na kraju klasa ima navedena sva svojstva koja mora imati. Tijekom rasprave dobro je uvesti pravilnu terminologiju.

Jedan je od zanimljivih načina i kako uvesti i objasniti broj π učenicima kroz određenu aktivnost. Zadatak je učenicima izmjeriti opseg i promjere kružnica. Načinit će tablicu i u nju zapisivati što su izmjerili, s tim da u tablici trebaju imati barem deset mjera. Mogu mjeriti i razne predmete koji u presjeku imaju krug. To će izmjeriti tako što će ga omotati nekom vrpcom i zatim izmjeriti duljinu vrpce. Nakon što su prikupili dovoljno podataka, potrebno je za svaku kružnicu izračunati omjer opsega i promjera. Većina omjera se nalazi se oko 3.1 ili 3.2. Mogu te podatke prikazati i grafički. Točan omjer je iracionalan broj $3.14159\ldots$, koji se označava grčkim slovom π. Najvažnije je nakon te aktivnosti razvijanje jasnog razumijevanja omjera opsega i promjera u svakom krugu. Trebaju naučiti što je π, da to nije neki čudan broj koji se pojavljuje u formulama, već da tako definiran broj ima svoje značenje.

Na toj se razini za predočavanje i dolaženje do određenih zaključaka može poslužiti programima dinamične geometrije. Pomoću njih si učenici mogu lako predočiti neke stvari i tako prije doći do određenog zaključka. Pomoću njih se mogu rješavati određeni zadaci i aktivnosti.

Oblici i svojstva na razini 2

U odnosu na razinu 1, na razini je 2 pažnja više usmjerena na istraživanje svojstava oblika koji uključuju logičko zaključivanje. Nakon što učenici razviju razumijevanje geometrijskih svojstava te ih ispravno pridruže određenoj kategoriji oblika, bitno je poticati istraživanje neformalnih deduktivnih argumenata. Na toj bi razini učenici trebali slijediti jednostavne dokaze i proučavati ideje koje se povezuju s algebrom. Za razliku od razine 1 u kojoj učenici rade popise svojstava oblika, na ovoj razini trebaju znati kako odrediti što je dovoljno za definiciju. Kod navođenja je svojstava oblika više korištena logika nego određivanje po izgledu oblika.

Nakon navedenog popisa učenici sudjeluju u razgovoru i procesu odlučivanja što čini definiciju. Potrebno ih je poticati na razmišljanje o dokazima, na primjer da se na ploču napiše neki teorem te se od učenika traži dokaz. Kao odgovor učenici često znaju reći da su to već vidjeli i znaju da je to istina. Zatim, ako učenik predloži nekakvu izjavu o geometrijskoj situaciji o toj klasi, tada se to napiše na ploču s upitnikom, kao nagađanje. Kako bi se učenike navelo na razmišljanje, postavljaju se pitanja: "Je li to istina?", "Kada je to istina?", "Možete li to dokazati?", "Možete li pronaći kontraprimjer?".

Pitagorin je poučak jedan od najvažnijih poučaka u matematici te je prikladan za promatranje na ovoj razini. Kako učenike navesti na zaključivanje o Pitagorinom poučku? Zadatak je za učenike konstruirati na milimetarskom papiru pravokutan trokut. Zatim trebaju konstruirati pripadne kvadrate nad stranicama tog trokuta te napraviti tablicu u koju će unositi površine kvadrata nad stranicama promatranog trokuta. Nakon što je tablica načinjena, zadatak im je odrediti odnose među tim kvadratima. Nakon određenog vremena shvatit će da je suma kvadrata nad katetama jednaka kvadratu nad hipotenuzom. Takav je zaključak donesen na temelju primjera, no potrebno ga je i dokazati. Na toj je razini fokus usmjeren na deduktivno razmišljanje te programi dinamičke geometrije nisu od prevelike koristi.

Transformacija

Transformacija se u geometrijskom smislu odnosi na promjenu u položaju ili veličini oblika. Kod transformacije promatramo izometrije (translaciju, osnu simetriju, centralnu simetriju, rotaciju) i homotetiju.

Transformacija na razini 0

Na ovoj razini od učenika možemo očekivati poznavanje osnovnih pojmova vezanih uz transformacije, poput translacije, rotacije i simetrije, te što je za koju transformaciju potrebno. Rano je u osnovnoj školi od učenika zahtijevati znanje kako transformacije utječu na oblike.

Dobar je način kako objasniti učenicima transformacije pomoću nekakvog oblika. Na primjer, vide oblik automobila i svi učenici imaju takav oblik u svojim rukama. Promatraju što nastavnik radi s njim: prvo ga zrcali u staklu i ispituje učenike što moraju napraviti kako bi automobil vratili u početni položaj. Zatim treba učenicima prikazati sve moguće pomake, navoditi ih da sami zaključe o čemu se radi, pokazati osnu simetriju s obzirom na vertikalnu os, horizontalnu os, translaciju, rotaciju. Mogu se i kombinirati transformacije i od učenika zahtijevati da odrede o kojima se transformacijama radi. Ne treba učenicima odmah dati do znanja kada je za neku poziciju potrebna jedna transformacija, a kada više njih, treba im prepustiti da to pokušaju sami zaključiti.

Učenici najbolje razumiju vizualno, pa se tako osnu simetriju može prikazati pomoću lista papira. List se papira savije po sredini, čime dobivamo dvije polovice koje se poklapaju. Mjesto gdje je papir savijen predstavlja os simetrije. Nemaju svi oblici jednak broj osi simetrija, npr. kvadrat ih ima četiri, jednakokračan trokut jednu, a jednakostraničan trokut tri. Rotacija je transformacija oblika s obzirom na neku čvrstu točku O i dani orijentirani kut α. Kod rotacije promatramo za koji se kut treba rotirati oblik kako bismo dobili oblik u istom položaju, npr. kvadrat rotiramo za 90° oko njegovog središta i dobivamo isti kvadrat. Transformaciju dvodimenzionalnih oblika poslije analogno prenesemo na trodimenzionalne.

Transformacija na razini 1

Na ovoj razini razmišljanje oko transformacije fokusira se na analizu transformacije te kako ju primjenjivati na oblike koji se ne vide. Aktivnost koja je prikladna za tu razinu komponiranje je transformacija. Zadatak je učenicima da pomoću više transformacija preslikaju neki oblik na papiru. Kombinacijom dviju transformacija dobiva se kompozicija. Kompozicija nije ograničena samo na dvije transformacije, moguće ih je imati i mnogo više. Komponiramo li dvije osne simetrije, kao rezultat ćemo dobiti rotaciju za dvostruki kut između pravaca osi simetrije. Kako bismo provjerili jesu li učenici shvatili transformaciju, mogu na milimetarskom papiru u jednom kutu nacrtati slovo K i onda ga korištenjem transformacija pomaknuti na određeno mjesto. Učenici trebaju odrediti kombinaciju transformacija kojom će doći do cilja.

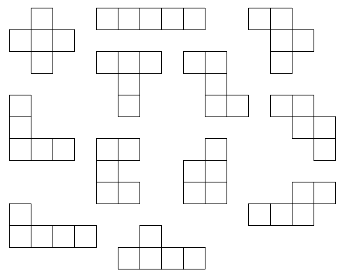
Uz pojam transformacije veže se i pojam homotetije. Homotetija je preslikavanje kod kojeg se oblici preslikavaju u sebi sukladne ili slične oblike. Oblici nastali preslikavanjem mogu biti veći ili manji od promatranog oblika, ovisno o koeficijentu homotetije. Ako je koeficijent homotetije veći od 1, onda će dobiveni oblik biti veći od danog, a ako je manji od 1, onda će biti manji. Prilikom preslikavanja kutovi ostaju sukladni, dok se stranice odnose proporcionalno.

Programi dinamičke geometrije predstavljaju odličan alat za prikazivanje transformacija. Pomoću njih učenici mogu koeficijente homotetije postavljati kako god žele i uvjeriti ih se da to vrijedi za sve brojeve, a ne samo za odabrane.

Transformacija na razini 2

Kod ove je razine naglasak stavljen na razumijevanje i shvaćanje transformacije. Aktivnosti koje su prikladne za ovu razinu jesu da učenici od jednostavnih oblika izvođenjem određenih transformacija dođu do složenih oblika koje su vidjeli na kratko prije nego su počeli rješavati zadatak. Cilj je da si učenici mogu vizualizirati ono što su vidjeli i time se rukovoditi.

Takva aktivnost dobra je za razvijanje snalaženja u prostoru. Učenici dobiju pet pločica kvadratnog oblika. Zadatak je složiti sve moguće oblike kombinirajući dane pločice na način da svake dvije od njih imaju točno jednu zajedničku stranicu. Dakle, za svrhu transformacija promatramo sliku s dvanaest mogućih oblika. Prvi je zadatak odrediti koliko različitih pozicija ima svaki oblik. Pozicija je različita ako se može dobiti osnom simetrijom ili rotacijom. Na Slici 6.1 primjećujemo da "križ" ima samo jednu poziciju, dok ravna traka ima dvije pozicije, a neki drugi oblici čak i osam. Drugi je zadatak pronaći vezu između osne simetrije i rotacije za svaki od oblika u svim njegovim pozicijama.



Slika 6.1: Sve kombinacije koje je moguće složiti od pet kvadrata.

Pozicija

Pri razmatranju pozicije unutar geometrijskog sadržaja misli se na određivanje lokacije određenog oblika pomoću koordinata ili nekog drugog sustava. U svakodnevnom smislu to znači znati odrediti u kakvom su odnosu predmeti ili znati odrediti kretanje po karti od jedne točke do druge. Koordinatni je sustav od velike važnosti jer omogućuje prikaz geometrijskih ideja kao transformaciju.

Pozicija na razini 0

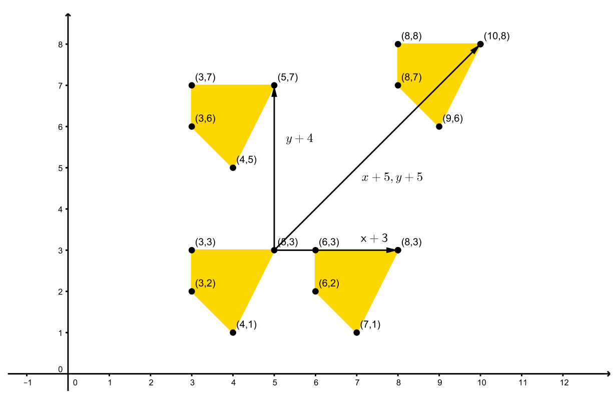
Već od malih nogu djeca uče što je gore, dolje, lijevo, desno, blizu, daleko. To su samo počeci određivanja pozicije nekog oblika, a koji su bitni za svakodnevne interakcije. I takvo učenje od malih nogu pomaže učenicima kako bi znali uspješnije odgovoriti na pitanje udaljenosti ili smjera, tj. bolje se snalaziti u prostoru.

Algebra, mjerenje i geometrija potrebni su kako bi znali točno odrediti mjesto u koordinatnom sustavu. Iako učenici postaju sve sofisticiraniji i pomoću računala određuju na kojem se mjestu nalaze, nije zgorega ipak to razvijati kod njih. Jedna je od dobrih aktivnosti za provjeru snalaženja u prostoru *igra pozicija.* Dva učenika imaju ispred sebe svaki po jednu 3×3 ploču s poljima, a obje su ploče jednake. Jedan učenik stavi kamenčiće na svoju ploču tako da drugi učenik ne vidi što on radi. Nakon toga drugi učenik, navođenjem od strane prvog, stavlja kamenčiće na svoju ploču. Cilj je da oba učenika imaju kamenčiće, na istim mjestima. Prilikom usmjeravanja koriste se riječima lijevo, desno, u sredini i slično. Nakon što postave kamenčiće zamjenjuju uloge.

Pozicija na razini 1

Na ovoj se razini od učenika očekuje da koordinatnom sustavu i transformaciji pristupaju više na analitički način. Jedina novost koju uvode negativni su brojevi u koordinatnom sustavu i njihovo značenje za transformacije.

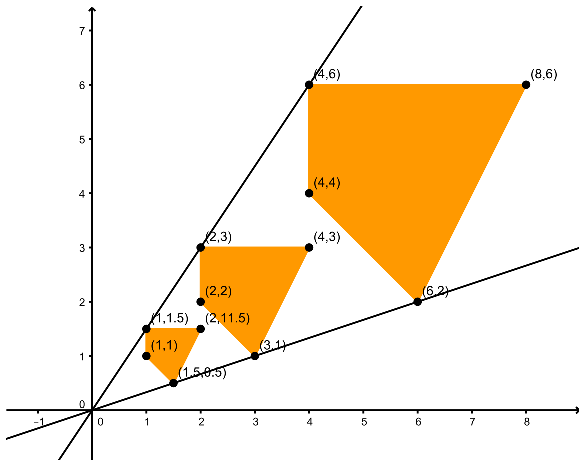
Kako bi bolje razumjeli što znače koordinate, dobro je pokazati učenicima takvu aktivnost. Zadatak je učenika da na milimetarskom papiru nacrtaju koordinatni sustav te u njemu nekakav oblik čije su im koordinate poznate, kao na Slici 6.2. Prvo promatraju što će se dogoditi ako prvu koordinatu (x koordinatu) povećaju za 3. Nakon što nacrtaju, vidjet će da je oblik ostao isti kao početni, samo je promijenio položaj. Zatim učine isti postupak, samo sada za y koordinatu. Zaključak je opet isti, oblik nije promijenio izgled u odnosu na početni. Treći oblik dobit će tako što će se povećati obje koordinate i rezultat će opet biti isti. Zaključak je da dok god povećavaju koordinate za isti iznos, oblik ostaje isti. Učenici sada postaju istraživači i trebaju odgonetnuti što će se dogoditi ako se oduzme isti broj od x ili od y koordinate, ili od obiju koordinata. Rezultat će biti isti, oblik ostaje isti, samo se sad početni oblik u koordinatnom sustavu kreće prema dolje.



Slika 6.2: Sačuvanost oblika povećavanjem koordinata.

Pitanje je što kada pomnožimo koordinate s određenim brojem? Što se onda događa s promatranim oblikom? Pomnožimo sve koordinate vrhova promatranog oblika s 2 i dobijemo nove koordinate. Nakon što ga prikažemo u koordinatnom sustavu, kao na Slici 6.2, vidimo da se oblik povećao. No kada koordinate pomnožimo s 0.5, oblik se smanji.

Rezultat takve transformacije promjena je veličine oblika pri kojoj se oblik zadržava. Takva transformacija naziva se homotetija. Zanimljivo je vidjeti što se događa s oblikom kada množimo samo jednu koordinatu. Ako množimo x koordinatu, oblik raste ili se smanjuje horizontalno, dok množenjem y koordinate, mijenja svoj oblik vertikalno.



Slika 6.3: Prikaz homotetije, pri čemu su koordinate srednjeg lika pomnožene s 2 i s 0.5.

Pozicija na razini 2

Kao što je već spomenuto, razlika između prethodnih aktivnosti na nižim razinama i na ovoj razini jest što je ovdje uključeno logičko zaključivanje. Kako bi učenici bili spremni za tu razinu, moraju znati odgovore na neka pitanja u vezi transformacija, a koja zahtijevaju nešto više od jednostavnog istraživanja.

- Kako bi se trebale promijeniti koordinate da uzrokuju simetriju čija os nije y os, ali je paralelna s y-osi?
- Postoji li jedinstveno pravilo za koordinate koje nastaju nakon rotacije oko proizvoljne točke za 90°?
- Što se događa s oblikom pri transformaciji kod koje svaku koordinatu množimo drugim brojem?

Učenici potaknuti takvim pitanjima kreću sami istraživati i proučavati takve zadatke. Ne moraju još uvijek znati točne formalne dokaze, ali bi trebali biti u stanju slijediti obrazloženja i prikazivati dokaz.

Zadatak je da učenici u prvom kvadrantu nacrtaju dvije točke koje nemaju zajedničku ni vertikalnu ni horizontalnu koordinatu te povuku pravac kroz njih.

Problem se sastoji u pronalasku udaljenosti između tih dviju točaka koristeći samo njihove koordinate. Nastavnik ih navodi da nacrtaju pravokutan trokut tako da na zadanom pravcu leži hipotenuza te da pravi kut leži u točki koja ima koordinate od jedne i od druge zadane točke, kako bi primijenili Pitagorin poučak. Učenici računaju površinu kvadrata nad katetama te pomoću njih dobivaju površinu kvadrata nad hipotenuzom. Sada je kvadrat tražene udaljenosti između točaka jednak površini kvadrata nad hipotenuzom. Zatim treba uputiti učenike da pogledaju svoj izračun i izazvati ih da probaju doći do rješenja bez crtanja.

Vizualizacija

Vizualizirati znači nešto napraviti uz pomoć svojih misli, zamisliti nešto. Vizualizaciju možemo nazvati "geometrijom misli". Podrazumijeva mogućnost stvaranja mentalnih slika oblika u glavi te sposobnost zamišljanja kako ti oblici izgledaju iz raznih perspektiva i predvidjeti kako će neka transformacija djelovati na oblik. Od učenika se zahtijeva vizualizacija oblika u dvjema ili trima dimenzijama. Svaka dodatna aktivnost koja zahtijeva od učenika transformaciju ili manipulaciju oblika u mislima vizualno doprinosi razvoju učeničkih sposobnosti vizualizacije.

Vizualizacija na razini 0

Od učenika se zahtijeva razmišljanje o izgledu oblika. Prilikom ispitivanja i traženja odgovora na pitanja kako izgleda neki oblik iz druge perspektive, učenici će pred sobom moći imati promatrani oblik.

Dobra je aktivnost za učenike igra "slagalice" u kojoj učenici dobiju šest pločica oblika jednakostraničnog trokuta. Zadatak je složiti sve moguće oblike kombinirajući te trokute na način da svaka dva trokuta uvijek imaju jednu zajedničku stranicu. Treba vidjeti koliko su učenici u mogućnosti vizualizirati sve moguće oblike. Oblici koji su nastali rotacijom već postojećih oblika ne računaju se.

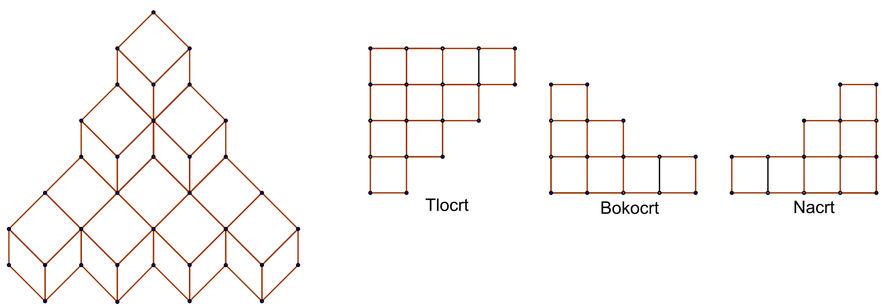
Dobro je tražiti i objašnjenje jer kako učenici uče verbalno opisati nešto što su vidjeli, njihovo vizualno se pamćenje povećava. Takve aktivnosti mogu se provoditi i s kvadratima ili s pravokutnim trokutima.

Još je jedan aspekt vizualizacije razmišljanje o čvrstim oblicima u smislu geometrijskih oblika koje su vidjeli. Odnosno, u zadatku dobiju gotov oblik te njegove strane odvojene na posebnim karticama od kojih ga trebaju sastaviti.

Vizualizacija na razini 1

Na ovoj je razini pažnja najviše usmjerena na određena svojstva oblika. Jedan je od osnovnih ciljeva kod učenika razviti mogućnost da vizualiziraju i nacrtaju dvodimenzionalnu sliku trodimenzionalnog tijela te konstruiraju trodimenzionalno tijelo iz dvodimenzionalne slike.

Jedna je od takvih aktivnosti za učenike složiti "zgradu" pomoću kockica. Nakon što su ju sastavili, zadatak je odrediti odgovarajući tlocrt, nacrt i bokocrt, kako je prikazano na Slici 6.4.



Slika 6.4: Skica aktivnosti s kockama koja se koristi za razvoj vizualizacije.

Vizualizacija na razini 2

Kao i prije, ono što razlikuje razinu 1 i 2 logičko je zaključivanje. Primjere smo vizualizacije ranije vidjeli s 5 kvadrata koje smo spajali u neki oblik. Taj primjer možemo proširiti tako da umjesto 5 kvadrata promatramo 6. Kako takvih oblika ima znatno više (čak 35), pri njihovom slaganju koristi se logička kategorizacija kako bismo bili sigurni da smo ih sve pronašli. Još jedan primjer za tu razinu vizualizacije slaganje je 5 kocaka u trodimenzionalna tijela.

Jedan je od primjera i pronalazak svih Platonovih tijela. Platonovo je tijelo pravilni poliedar. Pravilan znači da svaka strana ima bridove jednake duljine i da se u svakom kutu siječe jednak broj strana. Zadatak je opisati i pronaći sva Platonova tijela. Učenici dobiju plastične jednakostranične trokute, kvadrate, pravilne peterokute i pravilne šesterokute. Zatim pomoću njih prave pravilna tijela, a zadatak ih je sve pronaći. Jedan je pristup ostaviti učenike da sami smišljaju načine rješavanja tog problema, pri čemu će do izražaja doći njihova sposobnost rješavanja problema. Drugi je način sistematični pristup, uzimajući u obzir kriterije koji ta tijela moraju zadovoljavati. Recimo, krenemo s trokutima pa kvadratima, peterokutima i šesterokutima. Zatim, kako se u svakom kutu siječe jednak broj strana, probamo s trima, četirima i tako dalje (očito se u jednom kutu moraju sjeći više od dviju strana). S takvim će razmišljanjem učenici doći do saznanja da se u jednom kutu mogu sjeći tri, četiri ili pet trokuta. Mogu započeti sa "šatorom", tj. tri se trokuta sijeku u jednom kutu te u svakom koraku dodavati po jedan trokut. Time dobivamo tetraedar (4 strane), oktaedar (6 strana) i ikozaedar (20 strana). Na isti će način učenici spoznati da postoji samo jedno pravilno tijelo sa stranama koje su kvadrati, kocka, analogno i za peterokut, dodekaedar. Dobro je postaviti i pitanje zašto nema pravilnih tijela sa 6 trokuta u jednom kutu, s 4 kvadrata ili sa šesterokutom. Najbolje je da učenici sami istražuju i objasne svojim riječima.

Cilj je nastavnika da upotrebom svih aktivnosti i zadataka kod učenika razvije bolji prostorni zor i nauči ga geometrijski misliti kako bi učenik bolje shvatio geometrijske pojmove.

6.4 Strategije za učenje i poučavanje geometrije

Često je kod učenika slučaj da mogu prepoznati neki geometrijski oblik, ali ga ne znaju definirati. Neki će učenici također teško shvatiti zašto se kvadrat smatra pravokutnikom ili zašto moraju dokazati ono što već "znaju". Ima još mnogo primjera koji pokazuju na kojoj je razini učenik što se tiče geometrijskog mišljenja. Nastavnici u poučavanju geometrije uvijek moraju pronalaziti načine kako podići razinu njihovog geometrijskog mišljenja.

Vizualna je percepcija jedna od pet osnovnih percepcija. To je mogućnost interpretacije informacija koje čovjek prima kroz organ vida. Omogućuje mu da razumije ono što vidi te prepozna i razumije različite elemente, kao što su veličina, boja, oblik, prostorni odnosi itd. Djeca mogu vježbati vizualnu percepciju na neki od sljedećih načina:

- pronalaženje razlika na slici,
- sastavljanje različitih slika od jednakih dijelova,
- uočavanje sličnosti na dvjema slikama,
- pronalaženje dijelova od kojih je slika sastavljena,
- prepoznavanje likova i slova,
- razlikovanje likova prema određenom svojstvu,
- percipiranje lika i pozadine,
- opisivanje slike.

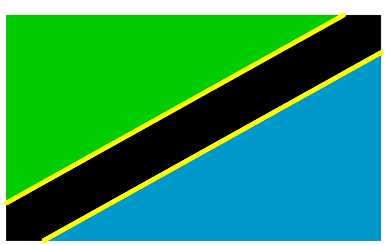
Vizualna je percepcija nezaobilazan dio učenja i razumijevanja. To je posebno izraženo u geometriji jer je glavni problem učenicima "vidjeti", tj. percipirati geometrijske objekte i veze te shvatiti veze kao svojstva koja objekti mogu ili ne moraju zadovoljavati.

6.4.1 Nepromjenjivost odnosa geometrijskih objekata i njihovih svojstava

Nepromjenjivost je odnosa ili svojstava prilikom dopuštenih transformacija središnja tema u matematici, a posebno u geometriji. Postoje dva razloga zbog kojih je nepromjenjivost važna u poučavanju i učenju gemetrije. Prvi razlog odnosi se na poučavanje, a drugi je matematički.

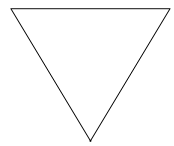
Djeca u osnovnoj školi često mogu naići na zamke prilikom shvaćanja određenih geometrijskih pojmova upravo zbog toga što ne shvaćaju dovoljno nepromjenjivost nekog geometrijskog svojstva usred neke transformacije. Sljedeća dva primjera to potkrepljuju.

Primjer 6.4.1. *Učenici su na satu učili o paralelnim pravcima. Nastavnik je na tom satu pitao jednog učenika može li pronaći primjer nekih paralelnih pravaca u učionici. Učenik je brzo pokazao na okvire prozora, okvire vrata, obloge na stropu i rubove stola. Nastavnik je bio oduševljen pomislivši kako učenik dobro razumije gradivo koje su radili taj sat. Nakon toga, primjetio je da su na oglasnoj ploči u učionici prikazane zastave nekih država koje su učenici izradili zbog nekog projekta. Jedna je od zastava bila i zastava Tanzanije (koja je prikazana na Slici 6.5). Nastavnik je pitao istog učenika postoje li paralelni pravci na toj zastavi. Učenik je pitao misli li nastavnik na rubove zastave. Nastavnik se složio da su nasuprotni rubovi zastave paralelni, ali je pitao učenika vidi li još neke paralelne pravce, na što je učenik odgovorio da ne vidi. Nastavnik je pitao što je sa žutim linijama (pokazujući na žute dijagonalne linije na zastavi). Učenik je rekao da te linije nisu paralelne zato što nisu ravne.*



Slika 6.5: Zastava Tanzanije.

Primjer 6.4.2. *Nastavnik je rekao dvjema učenicama da sjednu jedna nasuprot drugoj. Postavio je ispred njih trokut, kako je prikazano na Slici 6.6. Nakon toga ih je pitao kako se zove lik koji vide. Djevojčica kojoj je trokut bio okrenut kao na Slici 6.6 rekla je: "Nisam sigurna, ali to je za nju (drugu učenicu) trokut."*



Slika 6.6: Trokut.

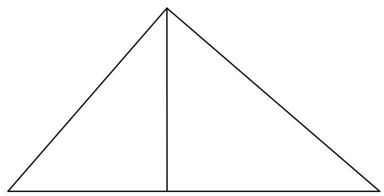
Ta dva primjera pokazuju kako djeca uče i kako mogu strogo razmišljati ovisno o tome koliko imaju geometrijskog znanja. U Primjeru 6.4.1 vidi se da dječak prepoznaje okomite i horizontalne linije kao one koje su jedine *ravne* i možda paralelne. U Primjeru 6.4.2 djevojčica smatra da trokut mora imati horizontalnu osnovicu kako bi ga ona prepoznala kao trokut iako može promijeniti mjesto na kojemu se nalazi i pogledati iz drugačijeg smjera isti trokut.

U većem se dijelu matematike proučava koja je transformacija dopuštena, a da prilikom transformacije ostanu očuvane neke veze među objektima i da se svojstva ne mijenjaju. Primjerice, zbroj kutova u trokutu nepromjenjivo je svojstvo iako mijenjamo oblik trokuta. Ako imamo potpunu slobodu u mijenjanju, zaključci do kojih dolazimo nisu previše zanimljivi. S druge strane, što više zahtjeva imamo, više toga možemo saznati o određenim geometrijskim likovima. Na primjer, zadatak za učenike može biti da se fokusiraju na četverokute. Mogu istraživati svojstva unutarnjih i vanjskih kutova četverokuta te razmisliti koja od svojstava vrijede i za konveksne i konkavne četverokute (npr. zbroj kutova u četverokutu iznosi $360°$, zbroj vanjskih kutova četverokuta iznosi $360°$). Dalje bi se učenici mogli ograničiti na specifične četverokute (paralelograme, rombove, kvadrate i slično).

6.4.2 Geometrijski oblici i podoblici

Prikazat ćemo niz zadataka koji se mogu zadati učenicima kako bi lakše prepoznavali oblike unutar drugih oblika te uočili veze između njih. Pomoću tih primjera učenici mogu zamišljati premještanje ili rotaciju objekata, što će im pomoći da te objekte na neki način povežu s drugim objektima. Za vrijeme rješavanja trebaju obratiti pažnju na primjere nepromjenjivosti objekata ili njihovih svojstava uslijed transformacije.

Primjer 6.4.3. *Pogledaj pažljivo Sliku 6.7. Što treba napraviti kako bismo uočili tri trokuta?*

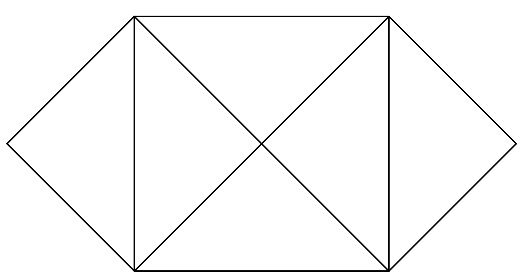


Slika 6.7: Uočavanje trokuta.

Učenik može prvo uočiti vanjski pravokutni trokut ili dva unutarnja pravokutna trokuta. Da bi uočio vanjski trokut, mora usmjeriti pažnju na vanjski oblik i ignorirati unutarnju dužinu koja je prikazana, a da bi uočio dva unutarnja trokuta mora pažnju usmjeriti na unutarnju okomitu dužinu i ignorirati vanjski oblik. Važno je da se uoče sva tri trokuta kako bi se u potpunosti shvatilo što je prikazano na slici.

Nije uvijek jednostavno prepoznati podoblike ili ugrađene oblike ako je vanjski oblik složeniji.

Primjer 6.4.4. *Koliko različitih peterokuta možeš uočiti na Slici 6.8? Koliko različitih mnogokuta možeš uočiti na toj slici?*



Slika 6.8: Uočavanje mnogokuta.

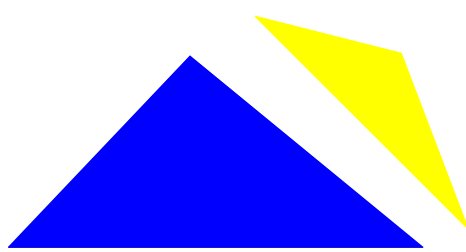
Prvo je pitanje koje se nameće "što zapravo znači biti različit". Moramo se odlučiti što nam je važno dok gledamo sliku. Različite odluke dat će i različita rješenja. Npr. ako odlučimo da su važni različita orijentacija ili položaj sukladnih likova, onda ćemo odmah uočiti da imamo šest pravokutnih jednakokračnih trokuta. No ako smatramo da je to sve jedan te isti trokut, reći ćemo da imamo jedan pravokutan jednakokračan trokut. Pod pojmom sukladnih likova podrazumijevamo likove koje, kada bismo ih izrezali, možemo preklopiti točno jedan preko drugog. Možemo promatrati i koje trokute prepoznajemo s obzirom na sličnost trokuta. Budući da je zadatak za učenike prebrojati koliko ima peterokuta unutar oblika na Slici, oni prvo moraju uočiti peterokute, označiti ih (primjerice sjenčanjem, bojanjem ili na neki drugi način) te na kraju prebrojati koliko je takvih likova. Na taj način učenici puno više rade na zadatku što poboljšava njihovu vizualnu percepciju. Očito, da bismo odgovorili na pitanje koliko ima mnogokuta unutar danog lika, moramo se odlučiti za neku klasifikaciju. Vidimo da se zadani lik sastoji od šest trokuta. Možemo "maknuti" jedan trokut i vidjeti kakav ćemo mnogokut dobiti. Nakon toga "maknemo" dva trokuta te također pogledamo kakav smo mnogokut dobili. Ako zadatak rješavamo na taj način, vidjet ćemo da se mogu dobiti konveksni i konkavni mnogokuti. Možemo uputiti učenike da prebrojavaju i jedne i druge ili se ograničiti samo, primjerice, na konkavne.

Prilikom rasprave u prethodnom primjeru izdvojila su se dva važna elementa učenja. Prvi se odnosi na sadržaj zadatka. Rješavajući taj zadatak učenici ponavljaju pojmove mnogokuta te vezu između sličnosti i sukladnosti. Drugi je povezan s matematičkim procesima koje učenici koriste prilikom rješavanja zadatka. Treba napomenuti da je jednostavno provjeriti je li nešto rješenje, a teže prebrojati sva rješenja. Učenici najčešće kod zadataka kao što je prethodni nisu sigurni jesu li napisali sva rješenja koja postoje ili jesu li možda ponovili neko rješenje. U tom je slučaju ključno sistematično rješavati problem. Način rješavanja zadatka mora biti robusan i dovoljno logičan kako bismo bili sigurni da je problem u potpunosti riješen. Učenicima se može sugerirati da pronađu drugi način prebrojavanja rezultata i u tom slučaju trebali bi dobiti isti rezultat.

Primjer 6.4.5. *Izrežite dva identična trokuta te ih postavite jedan uz drugog uz stranice jednakih duljina. Koliko se različitih likova može napraviti? Opišite svojstva likova koje ste formirali.*

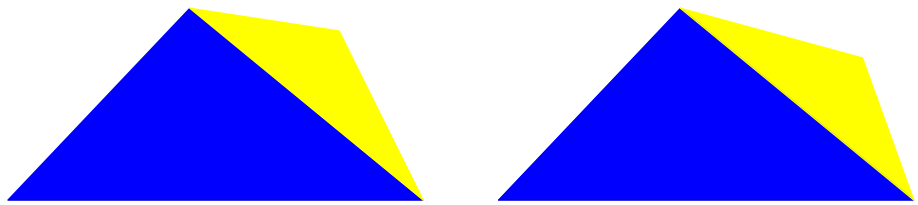
Učenici mogu zaista izrezati trokute od papira i riješiti postavljeni zadatak jer ako učenici imaju stvarne objekte pred sobom, lakše će istraživati geometrijske ideje. Možemo uputiti učenike da za početak izrežu raznostranične trokute i riješe *zadatak. Nakon toga, možemo promatrati specijalne slučajeve: jednakostraničan trokut, jednakokračan trokut, pravokutan trokut ili pravokutan jednakokračan trokut. U zadatku se ne spominje smije li se jedan od trokuta okrenuti na drugu stranu. Naravno, ako ne dopustimo okretanje, smanjene su nam mogućnosti. Učenici će kroz praktični dio uočiti da se formiraju samo dvije vrste četverokuta (paralelogrami i deltoidi). Još je zanimljivija činjenica da se pomoću specifičnijih trokuta mogu dobiti specifičniji likovi. Ako sad promijenimo uvjete zadatka i zahtijevamo da nam se dva trokuta podudaraju samo u dvjema stranicama ili samo u jednoj, dobit ćemo više različitih geometrijskih likova premještanjem trokuta, kako je navedeno u zadatku.*

Taj zadatak kombiniranja trokuta kojima se podudaraju stranice povezan je s površinom geometrijskih likova. Pitanje je ako se trokuti podudaraju u duljinama svih, dviju ili jedne stranice, znači li to da imaju jednaku površinu, i obrnuto. Učenici često vjeruju da su površine jednake čak i prije nego što provjere. Također, učenici mogu postaviti pitanje: "Ako su neki od parametara dvaju likova jednaki te imaju jednaku površinu, znači li to da su oni sukladni?" To pitanje odnosi se na likove općenito, pa je u svrhu odgovora najbolje započeti s nekim osnovnim likovima, npr. trokutima ili četverokutima. Važna je strategija, prilikom odgovaranja na takva pitanja, pronaći primjer za koji ne vrijedi izjava koju je učenik dao. Tako će učenik shvatiti da to što je smatrao istinitim nije istinito za taj određeni primjer pa prema tome ni općenito. Možemo uputiti učenike da izrežu dva trokuta koji se podudaraju u jednoj stranici, kako je prikazano na Slici 6.9, i da ih spoje uz tu stranicu. Ukoliko dopustimo okretanje trokuta, imamo dva moguća rješenja koja su prikazana na Slici 6.10. Uzmimo da je jedna strana papira od kojih učenici režu trokute plave boje, a druga žute. Tako ćemo lakše prikazati rješenja koja učenici dobiju.



Slika 6.9: Dva trokuta koji se podudaraju u jednoj stranici.

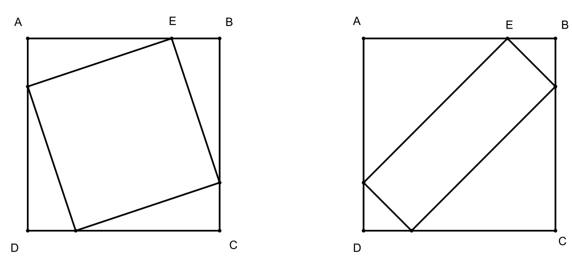
Na Slici 6.10 vidimo da smo dobili dva četverokuta koji imaju jednaku površinu (budući da su i jedan i drugi formirani od dvaju početnih trokuta) i kojima se podudaraju duljine stranica. No, kako se vidi, oni nisu sukladni likovi.



Slika 6.10: Četverokuti koji su rješenja zadatka.

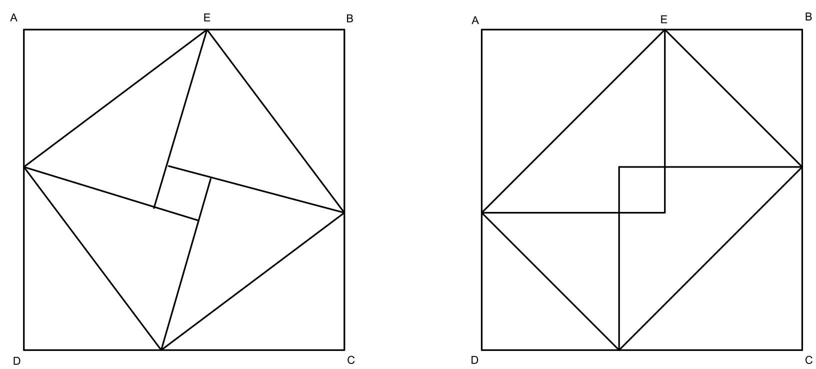
Kroz sljedeći zadatak učenici promatraju ponašanje pravokutnika i kvadrata kada su postavljena određena ograničenja.

Primjer 6.4.6. *Na Slici 6.11 prikazana su dva kvadrata $ABCD$ i točka E na stranici AB takva da vrijedi $|AE| > |EB|$. Na lijevoj slici točka E smještena je tako da tvori unutarnji kvadrat, a na desnoj slici tako da tvori pravokutnik kojemu je pravac BD os simetrije. Koji unutarnji lik ima veću površinu, kvadrat ili pravokutnik?*



Slika 6.11: Unutarnji kvadrat i pravokutnik.

Budući da nisu zadane duljine stranica, ne znamo točno gdje leži točka E. Imamo samo informaciju da se nalazi između točaka A i B. Učenici mogu izmjeriti udaljenost točke E od vrhova A i B te dalje raditi s tim dimenzijama, *no tada je zadatak riješen samo za taj odredeni položaj točke E. No, mi želimo riješiti zadatak općenito. Budući da je problem generaliziran, čini se da možemo donijeti i generaliziran zaključak. Učenici mogu pogledati što bi se dogodilo da je točka E polovište stranice AB. Koji god pristup odabrali, učenici moraju pogledati na koji su način unutarnji kvadrat i pravokutnik nacrtani. Dakle, morat će pogledati i ostale likove koji se pojavljuju unutar kvadrata $ABCD$ te razmisliti o vezi tih likova s unutarnjim kvadratom i pravokutnikom. Četiri trokuta oko unutarnjeg kvadrata sukladna su, dok su oko unutarnjeg pravokutnika dva para sukladnih jednakokračnih trokuta. Ako bi učenici zamislili da se trokuti oko pravokutnika i kvadrata smjeste unutar njih na način kako je to prikazano na Slici 6.12, mogli bi zaključiti nešto o površini unutarnjeg kvadrata i pravokutnika.*



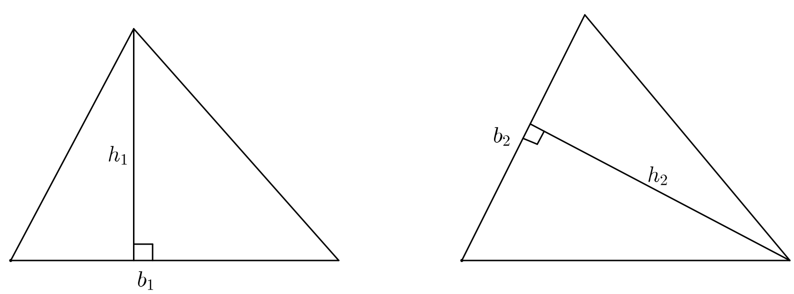
Slika 6.12: Unutarnji kvadrat i pravokutnik.

U prvom slučaju (prikazanom na slici lijevo), kada smo rasporedili četiri vanjska trokuta u unutarnjem kvadratu, ostao je prazan prostor u unutarnjem kvadratu, po čemu možemo zaključiti da površina unutarnjeg kvadrata mora biti veća od polovine površine velikog kvadrata. U drugom slučaju (prikazanom na slici desno), trokuti se preklapaju nakon što ih smjestimo u unutarnji pravokutnik, stoga površina pravokutnika mora biti manja od polovine površine velikog kvadrata. Dakle, površina unutarnjeg pravokutnika manja je od površine unutarnjeg kvadrata.

6.4.3 Izražavanje i gledište

Nastavnik mora nastojati koristiti ispravne pojmove i pravilno se izražavati dok razgovara s učenicima o geometriji jer je to preduvjet da se i oni izražavaju na ispravan način te bolje razumiju određena svojstva i veze među geometrijskim objektima. Na taj će način učenici napredovati u izražavanju vezanom uz geometrijske objekte, svojstva i veze među njima.

Učenici nerijetko imaju problem s razumijevanjem matematičkog jezika, i zato u samostalnom izražavanju o matematičkim objektima, pojmovima i svojstvima objekata imaju poteškoća. Primjerice, riječ baza u matematici ima više značenja. Koristimo je u formuli za površinu određenih geometrijskih likova, kod vektora te u prikazu brojeva. Kada pojam baze koristimo u formuli za površinu trokuta, značenje te riječi ovisi o njezinoj vezi s nečim drugim. Često u matematici imamo takve slučajeve, što zapravo ne iznenađuje jer se u matematici prvenstveno bavimo vezama među objektima. Npr. ako kažemo okomit pravac to samo po sebi ne znači ništa jer mora biti okomit na neki drugi pravac. Također, u formuli za površinu trokuta $P = \frac{1}{2}b \cdot h$ podrazumijeva se da je h odgovarajuća visina trokuta, tj. ona koja je okomita na bazu. Učenici mogu imati problem s navedenom formulom i zbog toga jer pojam baze uglavnom shvaćaju kao dno nečega, pa bi za lijevi trokut na Slici 6.13 lako prepoznali par baza-visina, dok bi često u desnom trokutu na istoj slici imali poteškoća s prepoznavanjem.



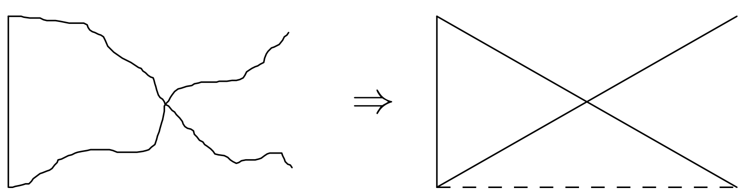
Slika 6.13: Par baza-visina.

Čak i jednostavni pojmovi tipa jednak, sukladan, sličan ili paralelan moraju biti dobro objašnjeni i tek se shvaćaju kada se uklope u kontekst u kojemu su izrečeni.

Sljedeći zadatak može zainteresirati učenike te ih potaknuti da sami dođu do nekih od poučaka o sukladnosti trokuta.

Primjer 6.4.7. *Nastavnik je nacrtao trokut i izmjerio duljine svih njegovih stranica te kutove. Te informacije nije dao učenicima. Pitanje za učenike glasi: koje informacije trebaju od nastavnika da bi nacrtali isti trokut kao i on. Naglasak u tom primjeru je na vrstama informacija koje učenici trebaju da bi nacrtali isti trokut kao nastavnik. Svaki put kada učenik koristi ravnalo, kutomjer ili šestar,* *on koristi informaciju. Svaki put nakon što nastavnik da informaciju učenicima, zajedno će provjeriti imaju li učenici u tom trenutku dovoljno informacija da bi nacrtali isti trokut kao što je on nacrtao. U jednom trenutku pažnja učenika prelazi sa specifične informacije na veze među objektima, kao, primjerice, na vezu između dviju stranica, ili kut između dviju stranica. Obično će učenici prvo zaključiti da im je potrebna duljina dviju susjednih stranica te mjera kuta kojeg zatvaraju te dvije stranice, pa će na taj način "otkriti" poučak stranica-kut-stranica a da toga nisu ni svjesni. Sljedeće je što bi mogli otkriti poučak kut-stranica-kut, a nakon toga stranica-stranica-stranica. Obično bi tim redom učenici zaključivali.*

Profesor na pedagoškom fakultetu u Mozambiku, Paulus Gerdes, 1988. godine opisao je kako mozambikanski farmeri konstruiraju pravokutnu bazu za svoje kuće ([13]). Dva užeta jednake duljine zavezana su na čvor u sredini. Štap od bambusa čija je duljina željena širina kuće polegne se na tlo i na njega se prikače krajevi užeta. Nakon toga se užad zategne kako bi se dobila druga dva vrha pravokutnika (Slika 6.14). Tu su metodu koristili i stolari u Europi.



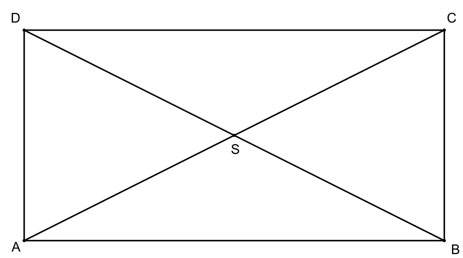
Slika 6.14: Mozambikanska konstrukcija pravokutnika.

Učenicima ta priča može biti vrlo zanimljiva i služiti kao poticaj za bolje shvaćanje svojstava pravokutnika. Možemo im priču o konstrukciji pravokutnika upotpuniti sa sljedećim primjerom.

Primjer 6.4.8. *Daje li mozambikanska konstrukcija uvijek pravokutnik? Zašto? Koja su svojstva pravokutnika korištena?*

To je upečatljiv primjer korištenja svojstava likova kako bismo smislili praktičnu konstrukciju. Iako bi većina ljudi odmah razmišljala o pravim kutovima kada razmišljaju o pravokutniku, tom metodom ne konstruiraju se eksplicitno pravi kutovi. Svojstvo koje se tu koristilo jest da su dijagonale pravokutnika *jednake duljine te da se raspolavljaju. Možemo učenicima predložiti da, u svrhu pronalaska odgovora na pitanja u zadatku, istražuju mozambikansku konstrukciju u nekom od programa dinamičke geometrije. Nakon što se napravi mozambikanska konstrukcija u nekom programu, ako povučemo nezavisne elemente naše konstrukcije, mijenjat će se veličina i orijentacija četverokuta kojega smo dobili. No, ključno je to da će taj četverokut uvijek biti pravokutnik. Naravno, ono što zaključe trebaju dokazati koristeći poznate činjenice. Treba pokazati da su kutovi u četverokutu koji se dobije mozambikanskom konstrukcijom pravi. Taj zadatak mogu rješavati učenici već u sedmom razredu osnovne škole jer su upoznali četverokute (paralelogram, pravokutnik), poučke o sukladnosti i sva druga svojstva koja su im potrebna za dokaz.*

Navedimo sada i formalni dokaz, koristeći oznake sa Slike 6.15.



Slika 6.15: Pravokutnik $ABCD$.

Znamo da je $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$, $|\overline{AS}| = |\overline{CS}|$ *i* $|\overline{BS}| = |\overline{DS}|$. *Trokuti* ΔABS *i* ΔCDS *sukladni su prema poučku stranica-kut-stranica, jer je* $|\overline{AS}| = |\overline{CS}|$, $|\overline{BS}| = |\overline{DS}|$ *i vršni su kutovi* $\measuredangle CSD$ *i* $\measuredangle ASB$ *jednaki. Iz toga slijedi* $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Trokuti ΔADS *i* ΔBCS *sukladni su prema poučku stranica-kut-stranica, jer je* $|\overline{BS}| = |\overline{DS}|$, $|\overline{AS}| = |\overline{CS}|$ *i vršni su kutovi* $\measuredangle BSC$ *i* $\measuredangle ASD$ *jednaki. Iz toga slijedi* $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$.

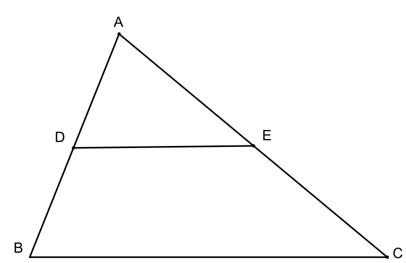
Iz prethodno navedenog zaključujemo da je četverokut $ABCD$ *paralelogram. Za svaki paralelogram vrijedi da su mu nasuprotni kutovi sukladni, a kutovi uz svaku stranicu suplementarni. Označimo kutove u paralelogramu* $ABCD$ *na sljedeći način:* $\measuredangle BAD = \alpha, \measuredangle ABC = \beta, \measuredangle BCD = \gamma$ *i* $\measuredangle ADC = \delta$.

Tada vrijedi $\alpha = \gamma, \beta = \delta, \alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$. *Kako je* ΔABS *jednakokračan te su trokuti* ΔASD *i* ΔBCS *sukladni, dobiva se da je* $\alpha = \beta = 90^\circ$, *odakle lako slijedi i da mjera ostalih kutova također iznosi* 90°. *Dakle, četverokut* $ABCD$ *dobiven mozambikanskom konstrukcijom, jest uvijek pravokutnik.*

Sljedećim ćemo primjerom prikazati jednu mogućnost postizanja generalizacije rezultata u nastavi geometrije.

Primjer 6.4.9. *Nacrtaj bilo kakav trokut* ABC. *Označi točku* D *na stranici* AB *i nacrtaj paralelan pravac sa stranicom* BC *koji prolazi točkom* D. *Točku koja je sjecište tog pravca i stranice* AC *označi s* E. *Povlačenjem točke* D *i vrhova trokuta u nekom programu dinamičke geometrije istraži omjere* $|DE| : |BC|$, $|AD| : |AB|$ *i* $|AE| : |AC|$. *Objasni nepromjenjivost koju uočavaš. Također, promotri i omjere* $|AD| : |DB|$ *i* $|AE| : |EC|$.

Trokut koji učenici trebaju nacrtati prikazan je na Slici 6.16.



Slika 6.16: Paralelne dužine u trokutu.

Za prva tri omjera koja učenici moraju promotriti potrebno je uočiti slične trokute ADE *i* ABC *koji će im omogućiti da objasne rezultat. Nastavnik može u progamu dinamičke geometrije pokazati učenicima što se događa kada se točka* D *povlači i kad se vrhovi trokuta povlače. Taj primjer može biti odlična motivacija za Talesov poučak o proporcionalnosti koji učenici uče u srednjoj školi nakon što se upoznaju s pojmom sličnosti trokuta. Učenici će bolje shvatiti navedeno ukoliko im to vizualiziramo u programu, za razliku od iznošenja činjenica koje vrijede te zapisivanja na ploči. U jednom će trenutku vjerojatno zaključiti da su zadnja tri omjera koja moraju istražiti zapravo jednaka, tj. da se bez obzira na pomicanje točke* D *i vrhova trokuta ti omjeri nisu promijenili. Tada se može učenicima reći da je isto zaključio i grčki matematičar Tales oko* 600. *godine prije Krista. Dakle, ako su dužine* $\overline{DE}$ *i* $\overline{BC}$ *paralelne, onda vrijedi:* $|AD| : |DB| = |AE| : |EC| = |DE| : |BC|$. *Za prva tri omjera učenici mogu dokazati da su jednaki korištenjem sličnosti trokuta* ADE *i* ABC.

Specijalno bismo mogli pogledati što bi se dogodilo ako su točke D i E polovišta stranica AB i AC. To bi učenike odvelo do novih svojstava vezanih za trokut. Mnogi matematički zaključci proizlaze iz pitanja kao što je, primjerice, "Što se dogodi ako...?". Učenici svih uzrasta napredovat će u matematici ako se ohrabre postavljati si takva pitanja.

6.5 Mjerenje

Mjerenje neizostavno ide uz geometriju, no mjerenje možemo pozvezati i s drugim aspektima svakodnevnog života. Mjerenje nam omogućuje da opišemo i usporedimo svojstva koja obilježavaju predmete ili događaje u prostoru i vremenu. Svojstva koja obilježavaju neki objekt ili događaj uključuju duljinu, kut, masu, kapacitet, temperaturu, vrijeme, prostor, površinu, volumen, brzinu i gustoću. Mjerenje se također koristi za rješavanje problema u stvarnom životu kao što je, recimo, izgradnja i projektiranje različitih objekata.

Učenici u školama razvijaju osjećaj za mjerenje tako što ga povezuju s gore spomenutim svojstvima koja obilježavaju predmete i događaje. Razvijanje osjećaja za mjerenje također podrazumijeva da učenici razumiju strukturu sustava mjernih jedinica te da bez poteškoća koriste mjerne jedinice prilikom rješavanja konkretnih problema i zadataka. Kod učenja mjernih jedinica temeljna su znanja iz poznavanja dekadskog sustava te množenja i dijeljenja s deset. S obzirom da mnogi učenici čine pogreške pri uspoređivanju i računanju s decimanim brojevima, u višim razredima osnovne škole i u srednjoj školi potrebno je posvetiti veću pozornost i pažnju prilikom učenja pretvaranja jedne mjerne jedinice u drugu, naročito kada je riječ o mjernim jedinicama za površinu i volumen.

6.5.1 Konkreti kod učenja mjerenja

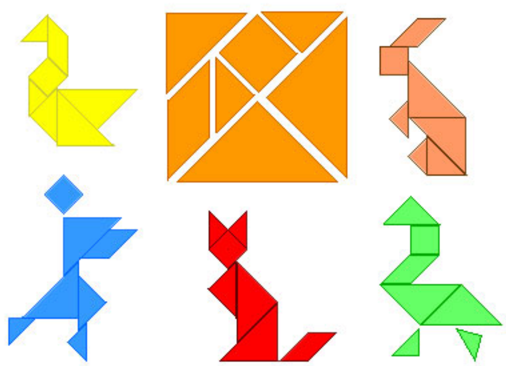
Djeca se s mjerenjem susreću već u ranom razdoblju svoga života tako što izravno uspoređuju predmete. Postavljaju predmete jedan do drugog da bi vidjeli što je veće ili manje, kraće ili dulje te odmjeravaju masu predmeta kako bi ustanovili koji je predmet teži ili lakši. Pri tome često rabe neformalne jedinice kojima mjere, a s vremenom se upoznaju i sa standardnim mjernim jedinicama i standardnim mjernim alatima.

Određivanje je duljine obično prvo što učenici uče iz domene mjerenja i tu se, naravno, na početku koriste neformalnim jedinicama radi boljeg shvaćanja i razumijevanja. Zanimljivi primjeri takvih neformalnih jedinica jesu:

- konop koji je vrlo prikladan za mjerenje zakrivljenih predmeta, među ostalim i mjerenje opsega kruga,
- plastične slamke koje se rezanjem mogu na brz način pretvoriti u manje jedinice, odnosno na jednostavan im način možemo po volji mijenjati veličinu po kojoj ćemo mjeriti,
- čačkalice i spajalice za papir koje su prikladne za mjerenje manjih dužina.

Korištenje neformalnih jedinica također pomaže mlađim učenicima prilikom određivanja površina različitih predmeta. Primjer je takvog učenja prekrivanje neke površine jediničnim kvadratima načinjenim od papira.

Tangram, prikazan na Slici 6.17., jedna je od najstarijih i najpoznatijih slagalica, a može na zanimljiv način učenicima osnove škole približiti pojam površine. Ta matematička zagonetka sastoji se od sedam standardnih dijelova, od kojih se slažu slike različitih objekata. Tangram u ovom slučaju omogućuje učenicima da istražuju različite oblike i veličine te uoče kako različiti oblici mogu imati istu površinu.



Slika 6.17: Tangram.

Neformalne su jedinice nepouzdane i ne mogu se koristiti za sigurnu i preciznu usporedbu te su zbog toga uvedene standardne mjerne jedinice. Učenicima treba pomoći da shvate pojam standardnih mjernih jedinica koje nemaju svoju primjenu samo u matematici već i u drugim predmetima kao što su kemija, fizika, ali i geografija. Iskustvo vezano za procjenu i mjerenje koje učenici steknu u osnovnoj školi pomaže im da razviju osjećaj za veličine standardnih jedinica te da cijene važnost i točnost pri mjerenju.

Učenici bolje razumiju pojam površine pravokutnika ako koriste konkretan materijal koji se sastoji od više manjih dijelova te sami dođu do formule za površinu pravokutnika preslažući manje dijelove od nekog konkretnog materijala. Tako je i s razumijevanjem volumena kvadra. Važno je da učenici sami dođu do formule za volumen proučavajući kvadar načinjen od nekog konkretnog materijala.

Još je jedan od izazova koji se postavlja pred učenike u osnovnoj školi razumijevanje pojma kuta. Učenici često ne uočavaju da se kut pojavljuje u njihovom svakodnevnom životu kod okretanja, naginjanja, kada ulaze autombilom u zavoj, silaze ili se penju uz brdo, ili kada nekoga usmjeravaju prema određenom cilju.

6.5.2 Procjenjivanje i mjerenje

Mjerenje uključuje:

- *mjerne jedinice* koje se koriste za određena svojstva koja obilježavaju objekte ili događaje (npr. stupnjevi celzijusa za mjerenje temperature),
- korištenje *alata za mjerenje* (npr. vaga, štoperica, termometar),
- korištenje *odnosa* između već poznatih svojstava da bi se izmjerilo druga svojstva kao što su brzina, volumen, gustoća i opseg.

Učenike treba prije svega usmjeriti da daju procjenu prije nego što započnu nešto mjeriti i računati. Procjenjivanje koliko nečega ima dio je svakodnevnog života pa tako, npr., često procjenjujemo koliko nam je potrebno vremena da bismo stigli na neko odredište. Time možemo zaključiti da procjenjivanje ima važnu ulogu u životima ljudi bez obzira kojim se zanimanjem bavili. Učenici trebaju što više procjenjivati duljine, mase, kutove, vrijeme, površine, volumene i temperature kako bi dobili potrebno iskustvo za točnost prilikom procjenjivanja te razvili strategije za davanje procjena. Da bi poboljšali svoju vještinu procjenjivanja, trebali bi prikupljati i analizirati podatke svojih procjena. Učitelji kod učenika mogu izoštriti vještinu za točnim procjenjivanjem, zahtijevajući od njih da objašnjavanje i opravdavanje strategije i mjerila po kojima su izvršili procjenu. Učenike je također potrebno voditi van učionice kako bi mjerili i procjenjivali objekte i pojave iz svoje okoline. Važno je, dakle, da učenici koriste alate za mjerenje u svakodnevnom životu, a ne samo u učionici za vrijeme sata matematike.

Posebnu pozornost treba posvetiti razvoju vještina za procjenjivanje i mjerenje veličine kutova. Od velike je koristi da učenici razvijaju sposobnost uočavanja, opisivanja, uspoređivanja i uočavanja sličnosti među različitim kutovima koji ih okružuju te da uz pomoć neformalnih jedinica mogu procijeniti i mjeriti veličine kutova. Važno je da učenici mogu prepoznati i uočiti kut od $90°$ te da razumiju da takav kut čine dva pravca koja su međusobno okomita. Kut od $45°$ polovina je pravog kuta, pa uspoređujući s kutevima od $90°$ i $45°$ učenici mogu procjenjivati i ostale kutove koji su veći, manji ili približno jednaki $90°$, odnosno $45°$. Na analogan način možemo učenike naučiti kako procjenjivati kutove veće od $90°$. Ovdje su nam ključni kutovi od $90°, 135°$ i od $180°$.

6.5.3 Opseg

Prilikom rješavanja zadataka otvorenog tipa koji imaju više ispravnih rješenja ili više načina rješavanja, a također i rješavanjem problema iz svakodnevnog života, učenicima se može približiti pojam opsega geometrijskih likova te kako se određuje opseg određenog geometrijskog lika. Pogledajmo primjer zadatka otvorenog tipa koji upravo pomaže boljem shavaćanju opsega pravokutnika i primjene formule za njegov opseg.

Primjer 6.5.1. 1. *Nacrtaj tri različita pravokutnika opsega* 20 *cm.*

- *Nakon toga potrebno je učenicima postaviti potpitanja i podzadatke poput, npr., opiši način koji si slijedio dok si pokušavao nacrtati pravokutnik zadanog opsega.*

2. *Koliko je vremena potrebno da bi se optrčalo oko jednog nogometnog igrališta?*

   - *Ovdje bi učenicima bilo zanimljivo kada bi izašli van iz učionice te sami mjerili koliko je metara potrebno da bi se igralište optrčalo te u kojem je vremenu to moguće.*

3. *Dobili ste zadatak ograditi prostor u kojemu se vaš pas smije kretati te za to imate na raspolaganju* 12 *m žice. Ukoliko imate metar s cjelobrojnim oznakama, koja je najveća širina pravokutnog prostora koji možete ograditi od dane žice?*

Prethodni su primjeri bazirani na izračunu opsega pravokutnika, a na analogan se način učenicima može približiti učenje opsega ostalih pravilnih i nepravilnih mnogokuta.

6.5.4 Površina

Površina nekog lika izražava koliki dio ravnine zauzima (prekriva) neki lik. Kao i kod drugih pojmova, učenici najprije moraju shvatiti što površina predstavlja prije nego ju počnu određivati.

Najbolje je učenje pojma površine započeti s uspoređivanjem, ali i tu se znaju dogoditi greške. Naime, učenici vrlo lako usporede dva kvadrata, dva kruga, dva pravokutna trokuta ili bilo koja dva predmeta jednakog oblika i mogu s određenom sigurnošću ustvrditi koji ima veću površinu, ali ako im damo krug i trokut približne, ali različite površine, teško će moći ustanoviti čija je površina veća. Također, možemo izraditi predmete različitog oblika, ali iste površine i onda ustanoviti da je njihova površina jednaka iako su im oblici različiti.

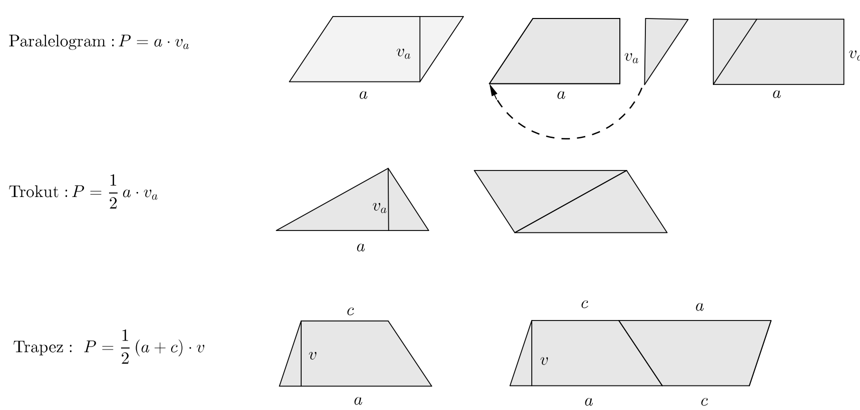
Primjer 6.5.2. *Za svaki par učenika pripremimo* 6 *pravokutnika. Učenici svaki pravokutnik prerežu po dijagonali. Na taj će način od jednog pravokutnika dobiti dva identična pravokutna trokuta. Te pravokutne trokute mogu na različite načine složiti jedan do drugoga. Svi novonastali likovi imat će jednaku površinu, a različit oblik od pravokutnika s početka vježbe. Učenici mogu poslagane likove i zalijepiti u svoje bilježnice.*

Kada završe uspoređivanje površina, učenici počinju mjeriti. Prvi doticaj s mjerenjem bit će pomoću prekrivanja površine. Učenicima se izrežu papirnati kvadrati jednake veličine (stranice od 5 do 10 centimetara) i kaže im se da najprije izmjere neku pravokutnu površinu. Oni će tu površinu prekrivati svojim papirnatim kvadratima te će na taj način shvatiti da im treba određen broj kvadrata za neku površinu. Nadalje, učenicima nakon toga treba dati da izmjere površinu nekog nepravilnog lika. Već kod tog zadatka oni shvaćaju da na način na koji rade površinu ne mogu izmjeriti u potpunosti točno i težit će točnijem rezultatu. Htjet će prekriti male dijelove površine pa će shvatiti da im je potreban nekakav drugačiji oblik od kvadratića. Već će u trećem ili četvrtom razredu učenici uvidjeti da na nekom mjestu može pristati pola kvadrata, polukrug ili nekakav drugi oblik, ovisno o obliku površine koju mjere. Dobra je vježba dati učenicima nepravilne oblike te ih redom pitati što misle koja je površina najmanja, a koja najveća, te im zadati da prekriju nepravilne oblike pomoću pravokutnika. U toj početnoj fazi učenja nikako ne treba dati učenicima formule za računanje površine. Ako radimo s učenicima u grupama, često će se razlikovati izmjerena površina za isti zadani oblik. Poželjno je s učenicima razmisliti o tim razlikama te vidjeti što misle, zašto se razlike događaju te poticati daljnje razmišljanje o odgovoru koji je najbliži točnom.

Kako je najbolja strategija učenja samostalno otkrivanje, vrlo je korisno da učenici sami dođu do formula za površinu različitih mnogokuta. Pri tome trebaju koristiti konkretne materijale i dinamičke programe za crtanje mnogokuta. Recimo, korisno je zadati učenicima da istraže površinu trokuta dobivenog presavijanjem lista papira pravokutnog oblika ili da preko već poznate formule za površinu pravokutnika dođu do formule za površinu paralelograma.

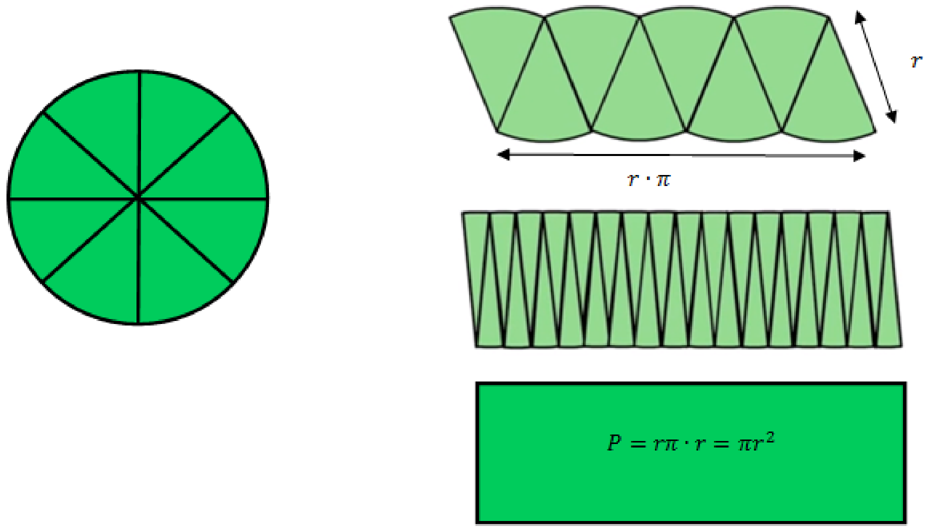
Pokušavajući doći do formule, učenici će bolje razumjeti sadržaj postavljenog problema, stvarat će veze među već stečenim znanjem i, u konačnici, biti uključeni u proces zdravog matematičkog razmišljanja i djelovanja. Učenici koji razumiju odakle formula dolazi neće imati potrebu učiti formule napamet, matematika će im imati puno više smisla i samim time bit će im zanimljivija.

Primjer 6.5.3. *Slika 6.18 prikazuje način na koji učenici mogu doći od formule za površinu pravokutnika do formule za površinu paralelograma, trokuta i trapeza.*



Slika 6.18: Površine geometrijskih likova.

Primjenjući znanje o površini pravokutnika, učenici mogu otkriti formulu za površinu kruga. Prije nego što počnu s otkrivanjem formule za površinu kruga, učenici uče da opseg kruga iznosi $2r\pi$, gdje je r polumjer kruga, a upravo ta činjenica ključna je kod otkrivanja formule za površinu kruga. Krug dijelimo na kružne isječke. Slaganjem kružnih isječaka kao na Slici 6.19 dobivamo oblik čiji je opseg jednak opsegu kruga. Što veći broj isječaka napravimo, sve se više približavamo obliku pravokutnika. Površina kruga tada odgovara površini pravokutnika čija jedna stranica ima duljinu $r\pi$, a druga stranica ima duljinu r.



Slika 6.19: Površina kruga.

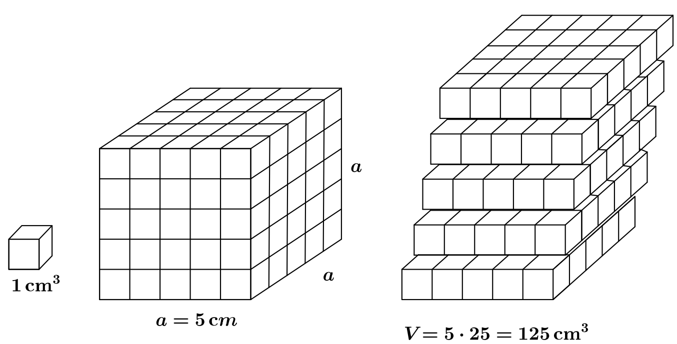
6.5.5 Volumen

Volumenom se mjeri veličina trodimenzionalnog prostora. Volumen ili obujam nekog tijela izražava koliki dio prostora neko tijelo zauzima. Kao i kod površine, prve aktivnosti koje učenicima prezentiramo za razumijevanje pojma volumena trebaju biti povezane s uspoređivanjem volumena tijela. Ako učenicima pokažemo dvije posude različitog oblika, ne možemo očekivati da će oni moći procijeniti koja je posuda većeg, a koja manjeg volumena. Čak i odrasli s dosta iskustva mogu pogriješiti u toj prosudbi. Za bolje razumijevanje pojma volumena možemo se poslužiti sljedećom aktivnošću:

Primjer 6.5.4. *Uzmimo dva papira pravokutnog formata jednake veličine i napravimo od njih oblik valjka spojivši im dvije stranice kao na slici. Dva će se valjka razlikovati po tome što ćemo prvi napraviti tako da spojimo dulje stranice pravokutnika, a drugi spajanjem kraćih stranica. Postavimo ih uspravno. Koji valjak ima veći volumen? Je li njihov volumen jednak?*

To je dobar zadatak i za starije učenike kojima treba postaviti pitanje i reći im da se odluče bez uporabe formule za računanje volumena valjka. Prije nego im se otkrije rješenje, treba zapisati koliko je njih mislilo da prvi ili drugi valjak imaju veći volumen, a koliko njih misli da imaju jednak.

Kao i kod površine, za potpuno razumijevanje pojma volumena važno je da učenici sami otkriju formule za volumene geometrijskih tijela poput prizme, valjka, stošca i piramide. Volumen prizme i volumen piramide u vezi su s umnoškom površine baze i duljine odgovarajuće visine. Kako bi učenici mogli uočiti vezu između površine baze i duljine visine tih tijela, počnimo s volumenom kocke, tijela kojeg često susreću u svom svakodnevnom životu. Kako bi učenici vidjeli da je volumen kocke jednak umnošku površine baze i duljine visine, možemo im zadati da istraže koliko malih kockica veličine 1 cm^3 stane u veliku kocku (Slika 6.20). Cilj je da učenici malim kockicama prvo prekriju dno velike kocke te nakon toga istraže koliko je još kockica potrebno da bi se do vrha napunila velika kocka, tj. u koliko je slojeva potrebno na isti način poslagati kockice u veliku kocku.



Slika 6.20: Volumen kocke.

Idući je korak otrivanje odnosa između volumena prizme i piramide s istom bazom i visinom te isto tako odnos između volumena valjka i stošca s istom bazom i visinom. Taj odnos učenici mogu istražiti na plastičnim ili papirnatim modelima prizme, piramide, valjka i stožca. Aktivnost koja se može predstaviti učenicima može biti u obliku eksperimenta. Prelijevanjem vode, riže ili pijeska iz piramide u prizmu mogu istražiti koliki je volumen piramide u odnosu na volumen prizme, a na isti način mogu otriti i "koliko stožaca može stati u jedan valjak". Cilj je otkriti da točno tri priramide stanu u prizmu jednake baze i visine.

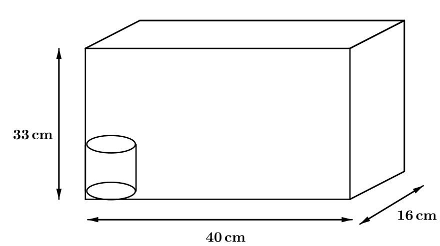
Analogno je s valjkom i stošcem. Dakle, volumen piramide jednak je jednoj trećini volumena prizme, a volumen stošca jednak je jednoj trećini volumena valjka.

Inzistiranjem da učenici sami dođu do formula za površinu i volumen pomažemo im da razviju svoje vještine zdravog razmišljanja te sposobnosti povezivanja i rješavanja problema u svakodnevnom životu.

6.5.6 Mjerne jedinice

Prilikom rješavanja zadataka vezanih uz površinu i volumen, učenici često čine greške pri računanju s različitim mjernim jedinicama u kojima se nalaze dimenzije određenih geometrijskih likova i tijela. Učenici moraju voditi računa u kojim su mjernim jedinicama navedene dimenzije u svakom danom zadatku te donijeti odluku koju će mjernu jedinicu koristiti prilikom izračuna i rješavanja problema. Učenici koji ne razumiju dobro pojam površine i volumena, koji nisu pravilno usvojili mjerne jedinice te oni koji imaju problema s množenjem brojeva, također imaju problema i s pretvaranjem kvadratnih mjernih jedinica (kao što je 40 000 cm$^2 = 4\ m^2$) te kubnih (prostornih) mjernih jedinica. Takvim je učenicima potrebno vizualno predočiti mjerne jedinice na modelima kako bi nakon toga shvatili njihovu pretvorbu. Problemski zadaci, koji zahtijevaju primjenu znanja, također mogu biti pokazatelji lošeg razumjevanja samog pojma površine, volumena i mjernih jedinica te oslanjanja na dane formule bez stvarnog razumjevanja problema i postupaka koji trebaju dovesti do rješenja.
Promotrimo sljedeći problem:

Primjer 6.5.5 (Limenke u kutiji)**.** *Koliko se limenki soka može spremiti u kutiju, ako znamo da limenke imaju promjer* 8 *cm, a visoke su* 11 *cm? (Slika* 6.21.*)*



Slika 6.21: Primjer: limenke u kutiji.

Učenik koji misli proceduralno učenik je koji se oslanja na primjenu postupka umjesto da se oslanja na razumijevanje sadržaja samog problema. Takav će učenik taj problem riješiti tako što će izračunati volumen limenke te volumen kutije, a potom će dijeljenjem volumena kutije s volumenom limenke doći do konačnog rješenja. Takav način traženja rješenja može navesti učenika da čini pogreške te da njegovo konačno rješenje nema smisla. Učinkovitiji način traženja rješenja tog problema bilo bi prilagođivanje dimenzija kutije promjeru i visini limenki.

Nekim bi učenicima rješavanje tog problema znatno olakšalo korištenje konkretnih materijala, odnosno kutije i limenke istih volumena i površina koje su zadane u zadatku.

Mnogi učenici u srednjim školama imaju poteškoće pri rješavanju problemskih zadataka vezanih uz površinu i volumen. Pogledajmo idući primjer.

Primjer 6.5.6. *U kojem će se slučaju bazen najbrže napuniti:*

1. *Bazen puni cijev promjera* 60 *cm.*
2. *Bazen pune dvije cijevi promjera* 30 *cm.*
3. *Bazen pune tri cijevi promjera* 20 *cm.*
4. *Bazen će se jednako brzo napuniti u svim trima slučajevima.*

Pri rješavanju takvih problema može se vidjeti kako učenici razmišljaju te njihovo razumijevanje samog problema. Rješavanjem takvih primjera može se ustanoviti da učenici imaju krivo razmišljanje te su uvjereni da se površina geometrijskih likova i volumen geometrijskih tijela linearno povećava kada se povećavaju njihove dimenzije (npr. očekuju da se površina pravokutnika poveća dvostruko ako se stranice pravokutnika povećaju dvostruko). Od iznime je važnosti učenicima uz pomoć modela, dijagrama i tablica pokazati da se površina i volumen povećavaju polinomijalno nakon što se povećaju dimenzije. Prezentiranje problema na konkretnim modelima pomaže učenicima uočiti u kojem su odnosu i kako se ponašaju volumen i površina pri mijenjaju zadanih dimenzija.

7

DOKAZI BEZ RIJEČI

7.1 Vizualizacija

Matematički koncepti, ideje i metode imaju veliko bogatstvo i povezanost s vizualizacijom na mnogo različitih načina. Upotreba vizualnih odnosa pri rješavanju problema vrlo je korisna. Osnove matematike, kao što su, na primjer, udaljenost ili operacije s brojevima, rodile su se iz konkretnih i vidljivih situacija. Svaki je stručnjak svjestan kako je korisno povezati konkretne slučajeve kada se proučavaju odgovarajući apstraktni objekti. Taj način rada, s posebnim naglaskom na moguće konkretne prikaze objekata kojima pojedinac manipulira kako bi imao što djelotvorniji pristup apstraktnijim vezama kojima mora upravljati, ono je što nazivamo matematička vizualizacija. Činjenica da je vizualizacija važan aspekt u matematici i nastavi matematike nešto je sasvim prirodno ako uzmemo u obzir značenje matematičke aktivnosti i strukturu ljudskog mozga. Kroz matematičke aktivnosti učenici pokušavaju istražiti različite realne situacije koje onda prepoznajemo kao matematičke probleme koje rješavamo.

Vizualizacija se pokazuje korisnom kod otkrivanja odnosa među matematičkim objektima i, naravno, u komunikacijskom procesu koji pogoduje matematičkoj aktivnosti. Ljudska je percepcija vrlo vizualna i stoga nije uopće iznenađujuće što je vizualna potpora uključena u matematičke zadatke ne samo geometrijskog tipa već i u druga područja matematike gdje to baš nije tako očito. Čak i u matematičkim aktivnostima koje su apstraktne našem mozgu matematičari koriste simbole, vizualne dijagrame i mnoge druge mentalne procese koji uključuju vizualizaciju. Povezivanje vizualizacije s misaonim procesima rezultira otkrivanjem novih spoznaja među matematičkim objektima u komunikacijskom procesu, što je dobro za matematičku aktivnost. Zbog toga je učenike potrebno upoznati s procesom vizualizacije u nastavi matematike te ih postupno navikavati na takvo razmišljanje. To nije lak zadatak već predstavlja složen proces koji uključuje kontinuiranu vježbu i praksu kroz mnogo godina, što je, naravno, iskustveni proces za nastavnika. Proces je vizualizacije vrijedno provesti samo ako je moguće stvari približiti učenicima na lakši način, učiniti da im proces učenja bude prirodniji, zanimljiviji i prihvatljiviji. Istina je da slika vrijedi tisuću riječi, ali ono što je bitno jest da slika bude shvaćena ili "dekodirana" na pravi način i da ju onaj tko ju proučava razumije na pravi način inače ne vrijedi ništa.

Tall ([50]) ističe: "Kvaliteta korištenja slika pri rješavanju problema bez da im se robuje daje matematičaru prednost, ali mogu uzrokovati mnoge poteškoće onome koji tek uči."

Vizualizacija treba biti u pratnji logičkog mišljenja kako ne bi došlo do pogrešaka jer nekada sama slika može voditi krivim zaključcima. U nastavi matematike treba biti svjestan i zamki koje nastaju ako pri rješavanju problema koristimo isključivo vizualizaciju.

Vizualizacija je dvosmjeran proces između uma osobe i vanjskog medija. S jedne strane uključuje sposobnost tumačenja i razumijevanja prikazanih informacija kao što su prepoznavanje likova i njihovih karakteristika, tumačenje karata ili proučavanje grafova funkcija. U svakodnevnom životu možemo vizualizirati trodimenzionalne objekte i prostorne odnose, npr. možemo tumačiti sheme za montažu namještaja i strojeva, možemo tumačiti planove i projekte za izgradnju zgrada, možemo interpretirati šablone za šivanje odjevnih predmeta, koristimo vizualnu projekciju za kreiranje stilova vizualnih umjetnosti i tumačimo karte za putovanje do željenog mjesta. Sve su to izvrsni konteksti za učeničke aktivnosti.

Teškoće u vizualnoj interpretaciji kod učenika javljaju se kada ne raspoznaju iste detalje geometrijskih likova i tijela kao nastavnik ili drugi učenici. Preporučuju se tri nastavne strategije za poboljšanje učeničke vizualizacije i geometrijskog zaključivanja:

- reci što vidiš,
- što je jednako, a što različito,
- koliko je različitih.

Kod prve strategije nastavnik, s obzirom na zadanu sliku, proziva svakog učenika da kaže što vidi, a dok svaki učenik govori što vidi, učenik ili nastavnik pokazuju na tu pojedinost. U toj strategiji sudjeluju svi učenici i kako bi se dobili višestruki pogledi na zadanu sliku, a pozornost se usmjerava na detalje za koje nastavnik može predvidjeti da će učenicima biti nejasni te tako nastaviti raspravu fokusirajući se na pojedinosti koje su najvažnije za promatrani problem. Postoje mnoge situacije u kojima je strategija "što je jednako, a što različito" korisna za razvijanje vizualizacije i geometrijskog zaključivanja, npr. uspostavljanje odnosa između geometrijskih likova ili utvrđivanje sličnosti i sukladnosti. Strategija je "koliko je različitih" također korisna za utvrđivanje svojstava geometrijskih oblika i pojmova sukladnosti. Učenicima je izazov pronaći različite oblike unutar drugih ili napraviti nove pomoću zadanih.

Pravilno je rukovanje predmetima i materijalima vrlo korisno za razvoj geometrijskih ideja i vizualizacije. U takvim su zadacima učenici izazvani u promatranim mogućnostima odrediti što je jednako, a što različito. Nastavnici trebaju poticati učenike na jasno izražavanje te razlikovanje i opravdavanje svojih zaključaka.

Vizualizacija može biti moćan i koristan alat za rad s matematičkim problemima. Jedna od mogućnosti kako vježbati i poticati vizualizaciju kod učenika jest metoda dokazivanja bez riječi.

7.2 Što je dokaz bez riječi?

Za dokaz bez riječi možemo intuicijom zaključiti da je ideja slikom ili nizom slika dokazati neku matematičku tvrdnju, odnosno kroz promatranje, vizualizaciju i misaoni proces shvatiti i otkriti poruku slike. Izraze "dokaz bez riječi" ili "vizualni dokaz" koristimo ako govorimo o figuri koja izražava matematički dokaz s malo ili bez objašnjenja. Postavlja se jedno važno pitanje: Možemo li takav dokaz smatrati pravim dokazom? U nekim se primjerima doista radi o vrlo uvjerljivom dokazu, dok nekada nije tako jer je ponekad analizom slike samo dana ideja i put dokaza. Na taj način slika može biti putokaz učenicima kako sami provesti dokaz. Mada na takav način matematički dokazi nisu precizno napisani, oni imaju važnu ulogu u matematičkom obrazovanju. Stajalište o dokazu bez riječi možemo promatrati kroz formalizam i platonizam. Formalizam ustraje na tome da dokaz može proizaći koristeći samo formalno logičko zaključivanje iz postojećih aksioma. Prema formalizmu, dokaz bez riječi nikako se ne može nazvati pravim matematičkim dokazom jer bez formalne strukture ne možemo nikako garantirati istinitost tvrdnji. Matematičari koji se slažu s formalizmom kažu da se cijene pametne ideje u matematici i lijepo je matematiku predočiti slikama, ali to ne smanjuje njihov skepticizam prema dokazu bez riječi. Slike mogu prikazivati samo jedan određeni slučaj, ali ne mogu prikazati generalizaciju teorema. Čak štoviše, mogu nas dovoditi u zabludu. Za formaliste je dokaz bez riječi pedagoški važan, ali ne dokazuje ništa.

Često se stajališta u matematici svode samo na formalizam i strogost te se na dokaz bez riječi i ostale slične didaktičke dosjetke gleda sa sumnjom, što završi i potpunim odbacivanjem. To potvrđuje i stav dvaju uglednih matematičkih stručnjaka za obrazovanje, T. Eisenberga i T. Dreyfusa, koji kažu da "vizualni argumenti imaju malu vrijednost jer postoji samo jedan način matematičke komunikacije i dokazi bez riječi nisu prihvatljivi". Isto mišljenje s njima dijeli i francuski matematičar Jean Dieudonné koji tvrdi: "Odlučio sam u svoj tekst ne unositi nijedan crtež.", smatrajući pri tome kako je za matematičara ključno da argumenti budu neovisni o slici te da moraju funkcionirati i bez nje. Napomenimo kako neki matematičari čak smatraju da je dokaz bez riječi vulgarizacija matematike.

Suprotnost je tomu platonizam koji je prijateljski naklonjen dokazu bez riječi te ga podržava i smatra ga pravim dokazom. Platonizam se temelji na tome da matematička istinitost postoji bez obzira na semantiku, a naš je zadatak otkriti tu istinitost bilo kojim sredstvima. To ostavlja mogućnost da dokaz bez riječi možemo smatrati pravim dokazom. Slika, iako može predstavljati samo jedan određeni slučaj, pomaže našem mozgu otkriti generalizaciju, omogućava nam bolje shvaćanje generalizacije tvrdnje. Budući da platonizam omogućuje otkrivanje matematičke istinitosti i na druge načine, bez formalne strukture kakvu zahtjeva formalizam, dokaze bez riječi smatramo valjanim dokazima. Primjer tomu jest George Polya koji svima daje uputu: "Nacrtaj sliku!", stoga savjetuje da se problem počne rješavati vizualizacijom. Njegovi su istomišljenici Paul Halmos koji izjavljuje kako je preduvjet matematičkog uspjeha biti rođen s vizualnom sposobnošću te Martin Gardner. Gardner naziva dokaze bez riječi "look-see dijagramima" i kaže: "Nema učinkovitije podrške razumijevanju izvjesnih algebarskih identiteta od dobrog crteža. Svakako, u svrhu dokaza, treba znati manipulirati i simbolima, no u mnogim se slučajevima dosadan dokaz može zamijeniti geometrijski analognim, jednostavnim i lijepim tako da nas valjanost teorema gotovo zaslijepi."

S obzirom da dokaz bez riječi možemo promatrati s tih dvaju stajališta, teško je utvrditi je li dokaz bez riječi zaista dokaz. To može varirati od matematičara do matematičara. Međutim, bio to pravi dokaz ili ne, svi se možemo složiti da je dokaz bez riječi vrijedan alat u matematici, posebice u poučavanju. Za vizualne dokaze matematičkih tvrdnji u kojima u potpunosti izostavljamo opis riječima možemo reći da su matematičke zagonetke koje potiču učeničko razmišljanje. Ispravnim korištenjem dokaza bez riječi na cjelovit način učenici mogu primijeniti usvojeno znanje i učinkovito učiti. Primjenom dokaza bez riječi u nastavi matematike potvrđuju se i poštuju određena didaktička načela, poput načela zornosti i apstraktnosti, a vidi se i velika primjena načela interesa i načela trajnosti znanja. Možemo slobodno reći kako primjenom dokaza bez riječi zadiremo u svako didaktičko načelo. Takvim se načinom poučavanja učenike fokusira na ključna mjesta u dokazu te na bitne elemente dokaza, a i učenici postižu bolju koncentraciju koja je prilikom klasičnog dokazivanja, pri tome se misli na raspisivanje međukoraka i tehničkih dijelova, smanjena. Prilikom dokazivanja potrebno je učenicima ukazati na dijelove dokaza koji možda iz slike nisu očiti, odnosno da učenici trebaju naći namjerno ostavljene "rupe" u dokazu.

Prirodno je da se u nastavi matematike slika stalno koristi kod geometrijskih sadržaja, no i ostali dijelovi gradiva često se mogu vizualizirati, odnosno geometrijski interpretirati.

Također je bitno napomenuti da je za uspjeh pri dokazivanju bitna dobra slika jer je iskustvo pokazalo kako se lošom skicom učenike može dovesti do pogrešaka u zaključivanju te ih tako uputiti na krivi smjer rješavanja problema. Važno je učenike stalno upozoravati na takve pogreške.

Prilikom provođenja dokaza bez riječi slikovni zapis možemo provesti pomoću ploče i krede ili animacijama na računalu, što nam uvelike poboljšava i pojednostavljuje nastavu, a učenik zornije može vidjeti i shvatiti probleme s kojima se suočava.

7.3 Dokazi bez riječi u nastavi matematike

U ovom poglavlju razmotrit ćemo dokaze bez riječi koji bi se mogli uključiti u nastavu matematike. Neki od tih dokaza bit će primjereniji za dodatnu nastavu matematike zbog svoje složenosti, no nijedan dokaz nije toliko složen da ga ne bismo mogli pokazati svim učenicima kako bismo probudili njihovu zainteresiranost.

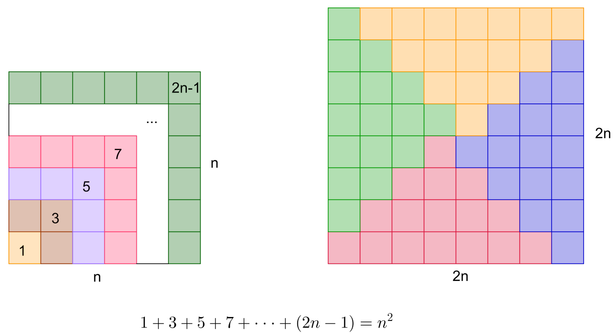
Prikazat ćemo dokaze koji su pogodni za uzrast učenika od prvog do četvrtog razreda srednje škole, a kod nekih ćemo dokaza spomenuti za učenike kojih su razreda primjereni. Naravno, i učenicima možemo dati takve dokaze da ih sami proanaliziraju i ponude nam svoje objašnjenje.

7.3.1 Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva

Počnimo s dokazom algebarskog identiteta

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

U udžbenicima se često pojavljuje objašnjenje zbroja prvih n prirodnih brojeva, no ne i zbroja prvih n neparnih prirodnih brojeva, stoga za njih učenicima možemo ponuditi sljedeći dokaz bez riječi, a objašnjenje dokaza možemo prepustiti i njima.



Slika 7.1: Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Na Slici 7.1 prikazana su dva različita dokaza bez riječi sume prvih n neparnih prirodnih brojeva. Brojevi su na slici prikazani pomoću jediničnih kvadrata pa tako npr. za broj tri imamo tri jedinična kvadrata. Već prvi pogled na sliku upućuje na to da će dokaz biti dan preko površine kvadrata.

Na lijevoj slici možemo vidjeti kako slaganjem kvadratića na takav način dobivamo kvadrat sa stranicom duljine n, odnosno možemo pisati da je

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n\cdot n=n^2.$$

Na desnoj slici imamo sličnu situaciju, samo što je suma prvih n neparnih prirodnih brojeva sada prikazana pomoću "trokuta" kojeg čine jedinični kvadratići. Nadopunjavanjem tog "tokuta" s trima istim takvim "trokutima" na način prikazan na slici, dobivamo kvadrat čija je duljina stranice $2n$, stoga iz slike možemo uočiti

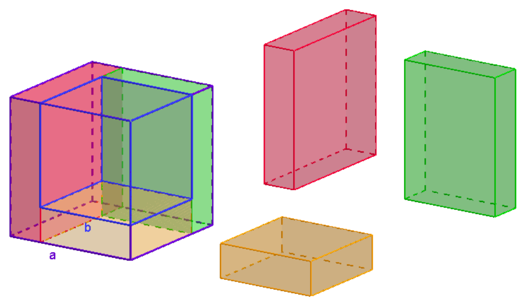
$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\frac{1}{4}(2n)^2=\frac{1}{4}\cdot 4n^2=n^2.$$

7.3.2 Zbroj i razlika kubova

Prisjetimo se formule za zbroj i razliku kubova, koju učenici neizostavno sreću kod algebarskih izraza:

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2),\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

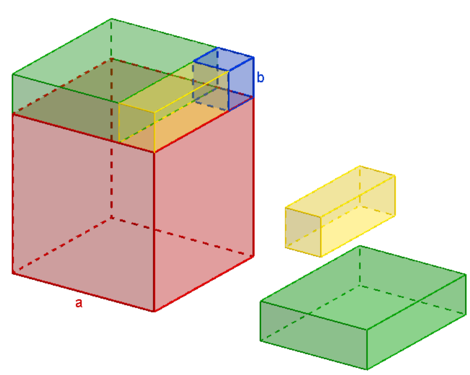
Ovdje učenicima možemo ponuditi i dokaz bez riječi za zbroj i razliku kubova koristeći volumen geometrijskih tijela s kojima se učenici susreću još u osnovnoj školi. Jednostavnom geometrijskom predodžbom učenicima možemo vizualno pojasniti izraze koje učenici obično uče napamet.



Slika 7.2: Razlika kubova.

Pogledajmo Sliku 7.2. U kocku volumena a^3 upisali smo kocku volumena b^3. Ukoliko od volumena a^3 oduzmemo volumen b^3, ostat će nam tri kvadra određenih volumena. Jedan je kvadar volumena $a^2(a-b)$, drugi je volumena $b^2(a-b)$, a treći volumena $ab(a-b)$, pa imamo:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^2(a-b) + b^2(a-b) + ab(a-b) \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$



Slika 7.3: Zbroj kubova.

Kod dokaza bez riječi zbroja kubova, na kocku volumena a^3 dodali smo kocku volumena b^3 (Slika 7.3). To geometrijsko tijelo nadopunili smo do kvadra volumena $a^2(a+b)$. Gledajući sliku možemo zaključiti kako od velikog kvadra moramo oduzeti dva manja kvadra koja smo dobili nadopunjavanjem, kako bismo došli do zbroja kubova. Jedan je kvadar volumena $b^2(a-b)$, a drugi volumena $ab(a-b)$, stoga imamo:

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= a^2(a+b)-(b^2(a-b)+ab(a-b)) \\ &= a^2(a+b)-b(a-b)(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-b(a-b)) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

7.3.3 Odnosi među sredinama

Za aritmetičku, geometrijsku, kvadratnu i harmonijsku sredinu dvaju pozitivnih realnih brojeva a i b vrijedi sljedeći odnos:

$$HS \leq GS \leq AS \leq KS,$$

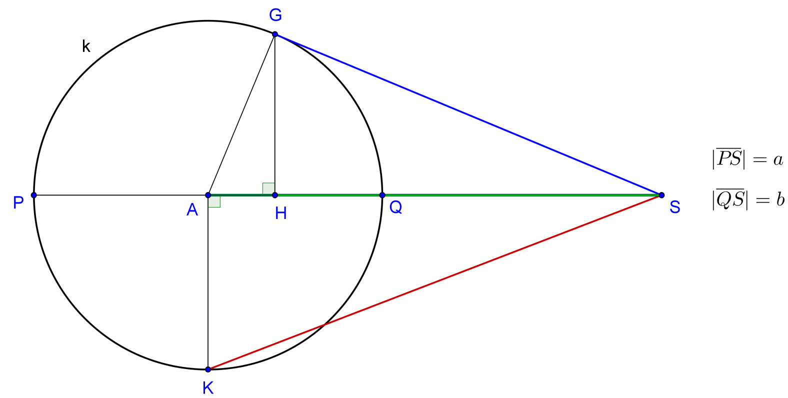
$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

U osnovnoj se školi učenici susreću s pojmom aritmetičke sredine. Kod proučavanja korijena i operacija koje se s njima mogu izvesti, učenike možemo upoznati i s pojmom geometrijske sredine te, dodatno, i harmonijske sredine. Pojam geometrijske sredine javlja se i kod Euklidovog poučka kada se proučava sličnost trokuta, stoga taj sadržaj ne bi smio predstavljati veće dodatno opterećenje učenicima.

Ako bismo učenicima postavili pitanje u kojem su odnosu aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina, do odgovora bi, naravno, mogli doći uvrštavanjem brojeva, što bi se učenici vjerojatno odmah i sjetili napraviti. No sljedeći bi geometrijski dokaz bez riječi odnosa među sredinama, koji je prikazan na Slici 7.4, učenike više potaknuo na razmišljanje i zanimalo bi ih kako smo došli do njega.

Promatrajući ovu sliku, dano nam je do znanja da krenemo od konstrukcije dužina $\overline{PS}$ i $\overline{QS}$. Konstruirajmo dužinu $|PS|=a$ i na njoj odaberimo točku Q takvu da je $|QS|=b$. Zatim konstruirajmo polovište dužine $\overline{PQ}$ i označimo ga točkom A. Vidimo da je $|PQ|=a-b$, stoga je

$$|AP|=|AQ|=\frac{a-b}{2},$$



Slika 7.4: Odnosi među sredinama.

pa je

$$|AS| = |AQ| + |QS| = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Time smo dobili aritmetičku sredinu brojeva a i b.

Konstruiramo li kružnicu k sa središtem u A polumjera $|AQ|$ te iz točke S povučemo tangentu na kružnicu k, pri čemu presjek kružnice i tangente označimo točkom G, možemo zaključiti sljedeće:
kako je $\measuredangle AGS = 90°$, slijedi da je $\triangle AGS$ pravokutan i vidimo da je $|AG| = \frac{a-b}{2}$, pa prema Pitagorinom poučku vrijedi da je

$$\begin{aligned}|GS| &= \sqrt{|AS|^2 - |AG|^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4}} = \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da je $|GS| \leq |AS|$, jer je $\overline{GS}$ kateta trokuta ΔAGS, pa je kraća od hipotenuze $\overline{AS}$, što znači da je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = G$ tj. $\frac{a-b}{2} = 0$, odnosno ako i samo ako je $a = b$.

Iz točke G sada spustimo okomicu na $\overline{PS}$. Presjek okomice i dužine označimo točkom H. Trokut $\triangle GHS$ koji smo dobili spuštanjem okomice pravokutan je trokut. Kako su trokuti $\triangle AGS$ i $\triangle GHS$ slični, prema K-K-K poučku o sličnosti ($\measuredangle ASG$ je zajednički i oba su trokuta pravokutna) možemo postaviti sljedeći omjer:

$$\frac{|HS|}{|GS|} = \frac{|GS|}{|AS|} \Rightarrow |HS| = \frac{|GS|^2}{|AS|} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

U pravokutnom trokutu ΔGHS vrijedi da je $|HS| \leq |GS|$ pa imamo da je

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $G = H$, tj. ako i samo ako je $a = b$.

Sada iz točke A povucimo okomicu na $\overline{PS}$, presjek kružnice i okomice označimo točkom K. Vidimo da je $\triangle AKS$ pravokutan i vrijedi $|AK| = \frac{a-b}{2}$. Pa prema Pitagorinom poučku slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} = |AS| \leq |KS| = \sqrt{|AS|^2 + |AK|^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4}} \\
= \sqrt{\frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{4}} \\
= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},
\end{aligned}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = K$, odnosno ako i samo ako je $a = b$.

Time smo objasnili odnose među matematičkim sredinama.

7.3.4 Pitagorin poučak

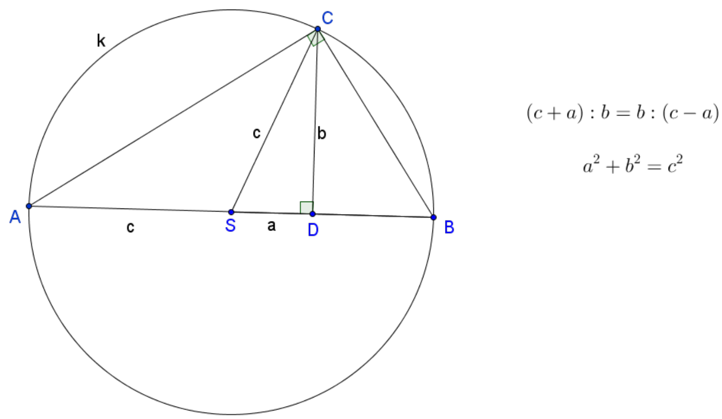
Prisjetimo se najprije kako ovaj čuveni poučak glasi.

Teorem 7.3.1. *Kvadrat duljine hipotenuze jednak je zbroju kvadrata duljina kateta, tj. ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, onda vrijedi jednakost $c^2 = a^2 + b^2$.*

S Pitagorinim se poučkom učenici susreću na kraju osnovne škole, a od tada je neprestano prisutan u različitim geometrijskim temama. Postoje brojni dokazi bez riječi Pitagorina poučka, a ovdje ćemo prikazati dokaz bez riječi (Slika 7.5) u kojem će učenici moći upotrijebiti znanje iz geometrijske teme u kojoj se proučava sukladnost i sličnost.

Konstruirajmo kružnicu k sa središtem S i promjerom $\overline{AB}$, gdje je $|AB| = 2c$. Na $\overline{AB}$ odaberimo točku D tako da je $|SD| = a$. Tada je $|DB| = c - a$. U točki D povučemo okomicu na $\overline{AB}$, a sjecište okomice i kružnice označimo s C.

Prema Talesovom poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice slijedi da je $\measuredangle ACB = 90°$, pa je $\triangle ABC$ pravokutan trokut. Vidimo da su $\triangle BDC$ i $\triangle DCA$ slični i pokažimo to.



Slika 7.5: Pitagorin poučak.

Iz D smo povukli okomicu na $\overline{AB}$, pa je $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90°$. Iz $\triangle ADC$ vidimo kako je $\measuredangle CAD = 90° - \measuredangle DCA$, dok iz $\triangle ABC$ možemo vidjeti da je $\measuredangle ACD + \measuredangle BCD = 90°$ pa je $\measuredangle BCD = 90° - \measuredangle DCA$.

Stoga zaključujemo da je $\measuredangle CAD = \measuredangle BCD$. Kako je $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 90°$ i $\measuredangle CAD = \measuredangle BCD$, slijedi da je i $\measuredangle DCA = \measuredangle DBC$, pa prema K-K-K poučku o sličnosti imamo da je $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Prema tome, vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a} = \frac{|CD|}{|DB|},$$

odakle je

$$\begin{aligned} b^2 &= (c-a)(c+a) \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

7.3.5 Heronova formula za površinu trokuta

Površinu trokuta $\triangle ABC$ možemo odrediti korištenjem Heronove formule

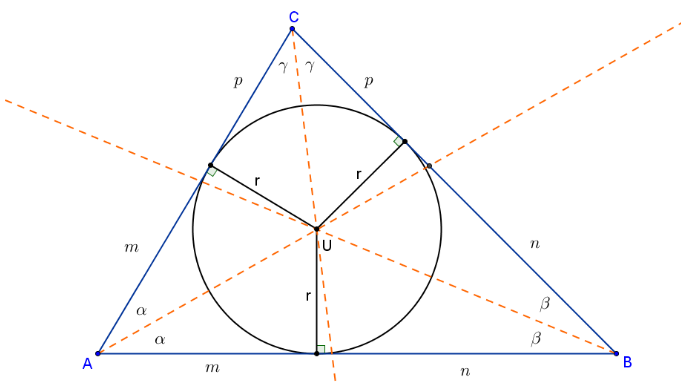
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje su a, b, c duljine stranica tog trokuta, a s poluopseg trokuta, $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Tim dokazom dat ćemo primjer kako se dokazi bez riječi mogu kombinirati sa standardnim dokazima. U svrhu dokaza Heronove formule za površinu trokuta dokazat ćemo dvije pomoćne tvrdnje koristeći dokaz bez riječi: dokaz bez riječi za površinu trokuta i dokaz bez riječi jednog trigonometrijskog identiteta. Nakon toga će iz tih dviju tvrdnji slijediti dokaz Heronove formule. Dokaz koji će biti prikazan primjeren je za učenike koji su u potpunosti upoznati s trigonometrijom.

Lema 7.3.2. *Površina trokuta jednaka je umnošku radijusa upisane kružnice i poluopsega.*

Na Slici 7.6 možemo vidjeti kako se trokut rastavlja na tri trokuta koji imaju zajednički vrh u središtu trokutu upisane kružnice, a visina je svakog od njih jednaka radijusu upisane kružnice, odakle direktno slijedi da je površina trokuta jednaka $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = s \cdot r$. U svrhu našeg dokaza, kvadrirat ćemo navedenu jednakost pa imamo: $P^2 = r^2 \cdot s^2$.



Slika 7.6: Površina trokuta preko polumjera upisane kružnice.

Lema 7.3.3. *Ako su $\alpha, \beta, \gamma > 0$ takvi da je $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, tada je*

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = 1.$$

Dokaz bez riječi dan je Slikom 7.7, uz oznake kao na Slici 7.8.

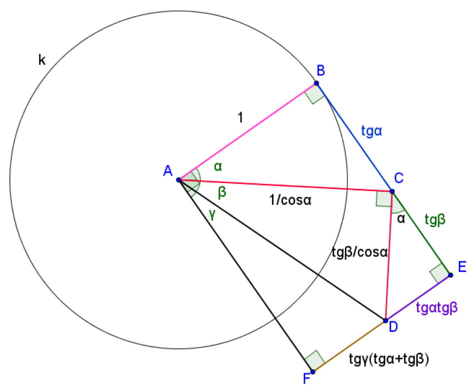
Objasnimo taj dokaz bez riječi i kako smo došli do njega. Najprije konstruiramo pravokutan trokut ΔABC sa šiljastim kutom α (Slika 7.7, 7.8), kome je jedna kateta duljine 1.

Sada iz slike vidimo da je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1}$, odnosno

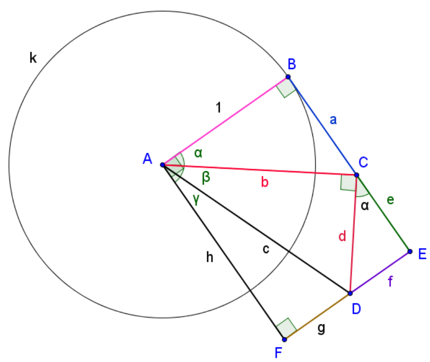
$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

Isto tako i $\cos \alpha = \frac{1}{b}$, pa je

$$b = \frac{1}{\cos \alpha}.$$



Slika 7.7: Dokaz bez riječi Leme 7.3.3.



Slika 7.8: Dokaz bez riječi Leme 7.3.3.

Nakon toga konstruiramo pravokutni trokut ΔACD sa šiljastim kutom β i jednom katetom duljine $\frac{1}{\cos\alpha}$. Iz $\triangle ADC$ imamo da je

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{d}{b} = \frac{d}{\frac{1}{\cos\alpha}} = d\cos\alpha,$$

pa je

$$d = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}.$$

Nadalje, konstruiramo pravokutan trokut ΔCDE sa šiljastim kutom α i hipotenuzom duljine $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}$. Promatrajući $\triangle CDE$ vidimo da je

$$\cos\alpha = \frac{e}{d} = \frac{e}{\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha}} = \frac{e\cos\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

stoga je

$$e = \cos\alpha\,\frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$$

i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f}{e} = \frac{f}{\operatorname{tg}\beta}$ pa je

$$f = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Na kraju konstruiramo pravokutan trokut ΔADF sa šiljastim kutom γ kao što je prikazano na Slici 7.7.

Kako je $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, dobiveni je geometrijski lik četverokut kojemu su nasuprotne stranice jednake duljine te ima jedan pravi kut, prema tome je taj četverokut pravokutnik te vrijedi

$$a + e = h \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = h$$

i

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{g}{h} = \frac{g}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

$$g = \operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$$

te vrijedi da je

$$f + g = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1.$$

Time smo dokazali Lema 7.3.3.

Sada smo spremni dokazati Heronovu formulu. Prema prethodnom i iz Leme 7.3.2 vidimo da je, u oznakama sa Slike 7.6,

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \\ 1 &= \frac{r}{m}\cdot\frac{r}{n} + \frac{r}{m}\cdot\frac{r}{p} + \frac{r}{n}\cdot\frac{r}{p} \\ &= \frac{r^2(p+n+m)}{mnp} \\ &= \frac{r^2 s}{mnp} \\ &= \frac{P^2}{smnp}. \end{aligned}$$

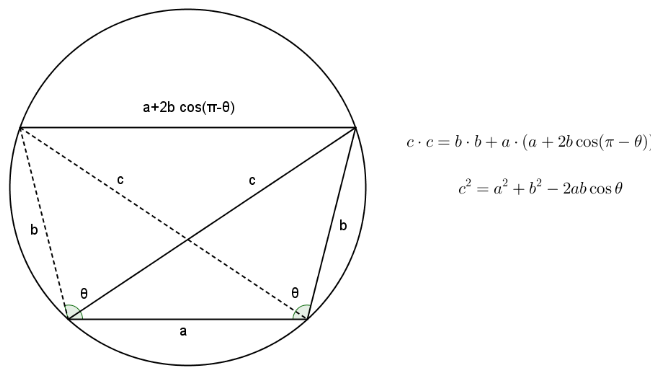
Kako je $s = m + n + p = m + a = n + b = p + c$, vrijedi da je

$$P^2 = smnp = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

te smo time dokazali Heronovu formulu.

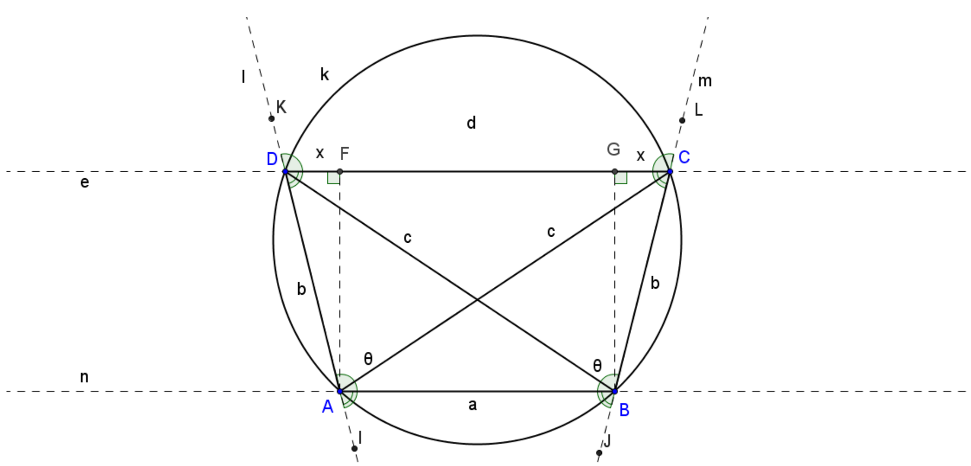
7.3.6 Kosinusov poučak

Kosinusov se poučak najčešće izriče simbolima. Izrecimo ga ovdje riječima: kvadrat duljine stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata duljina drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki umnožak duljina tih stranica i kosinusa kuta između njih.



Slika 7.9: Kosinusov poučak.

Dokaz bez riječi kosinusovog poučka dan je na Slici 7.9 za slučaj kada je kut θ tup. Nakon tog dokaza učenicima možemo pokazati i dokaz bez riječi kosinusovog poučka gdje je kut θ šiljast. Zanimljivost je tog dokaza u tome što učenici moraju primijeniti teorem koji su učili ranije. Uvedimo sada na Slici 7.9 neke oznake.



Slika 7.10: Kosinusov poučak.

Jednakokračnom trapezu osnovica duljine a i d te krakovima duljine b opisali smo kružnicu (Slika 7.10). Promatrajući taj dokaz bez riječi uočimo jednakosti koje su zapisane sa strane. Iz njih možemo iščitati da je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica, a sa slike vidimo kako imamo tetivni četverokut, što upućuje na to da će nam ključni odgovor u dokazu bez riječi dati Ptolomejev poučak.

Teorem 7.3.4 (Ptolomejev poučak)**.** *Ako je četverokut $ABCD$ tetivni, onda vrijedi*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|,$$

tj. umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.

Pogledajmo sada naš dokaz bez riječi na Slici 7.10. Uočimo da je $\measuredangle DAB = \measuredangle KDC$ jer su to kutovi uz presječnicu l paralelnih pravaca e i n, pa je $\measuredangle ADC = 180^\circ - \measuredangle DAB$, tj.

$$\measuredangle ADC = 180^\circ - \theta.$$

Također, $\measuredangle ABC = \theta = \measuredangle DCL$ (kutovi uz presječnicu m paralelnih pravaca e i n), pa je

$$\measuredangle BDC = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \theta.$$

Presjek ortogonalne projekcije iz točke A i točke B na pravac e označimo točkama F i G. Trokuti $\triangle ADF$ i $\triangle BGC$ sukladni su ($\measuredangle DFA = \measuredangle CGB = 90^\circ, b = b$ i $|AF| = |BG|$ visine trapeza) pa je

$$|DF| = |GC| = x.$$

Stoga nam je $x = b\cos(\pi - \theta)$, pa je stranica d duljine

$$d = 2x + a = 2b\cos(\pi - \theta) + a.$$

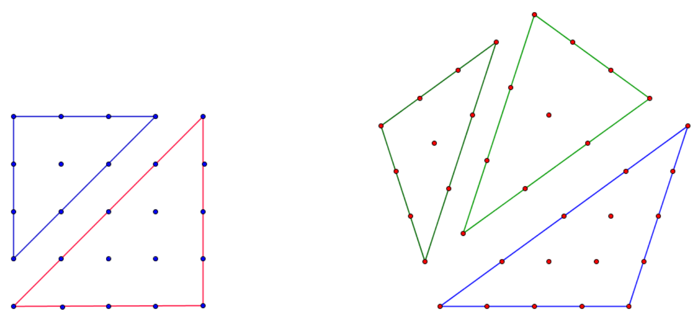
A kako vrijedi da je $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$, slijedi $d = a - 2b\cos\theta$. Prema Ptolomejevom poučku imamo

$$\begin{aligned} c \cdot c &= b \cdot b + a \cdot (a - 2b\cos\theta) \\ c^2 &= b^2 + a^2 + 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

7.3.7 Poligonalni brojevi

Poligonalni su brojevi prirodni brojevi koji se mogu prikazati tako da se odgovarajući broj točkica složi u poligonalni oblik, poput trokuta koji daju trokutaste brojeve ili kvadrata koji daju kvadratne brojeve.

Sljedeći dokaz bez riječi govori o vezama među kvadratnim i trokutastim brojevima te među peterokutnim i trokutastim brojevima. Poligonalne brojeve vizualno možemo predočavati pomoću pravilnih mnogokuta, pa će i ovaj dokaz biti učenicima prikazan na taj način.



Slika 7.11: Veza između kvadratnih i trokutastih te peterokutnih i trokutastih brojeva.

Na lijevoj slici dana nam je veza kvadratnih i trokutastih brojeva. Iz slike možemo vidjeti kako nam je n-ti kvadratni broj prikazan kao suma n-tog i $(n-1)$-og trokutastog broja, tj.

$$K_n = T_n + T_{n-1}.$$

Na desnoj slici dana nam je veza između peterokutnih i trokutastih brojeva. Vidimo iz slike kako će nam n-ti peterokutni broj biti prikazan kao suma jednog n-tog trokutastog broja i dva $(n-1)$-va trokutasta broja, tj.

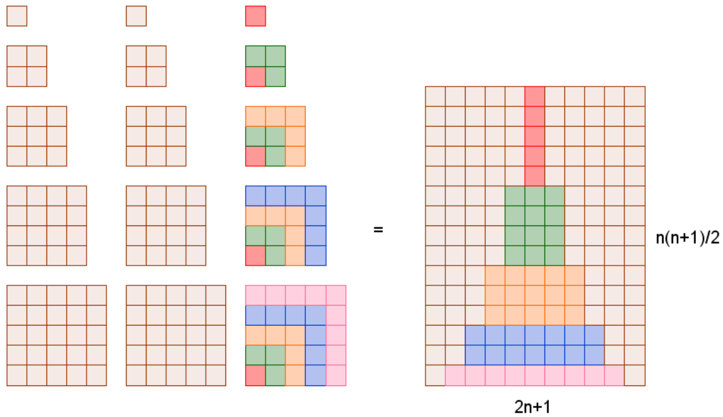
$$P_n = T_n + 2T_{n-1}.$$

7.3.8 Zbroj prvih n kvadratnih brojeva

Kvadrati prirodnih brojeva nazivaju se također i kvadratni brojevi. Promotrimo sada prvih n kvadratnih brojeva:

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, n \in \mathbb{N}.$$

U sklopu matematičke teme u kojoj se uče nizovi može se promatrati primjer niza kojeg čine kvadrati prirodnih brojeva. Kao prirodan nastavak te teme, može se pomatrati dokaz bez riječi za sumu prvih n kvadratnih brojeva.



Slika 7.12: Suma prvih n kvadratnih brojeva.

Za dokaz bez riječi korišteni su jedinični kvadratići preko kojih je jednostavno objašnjena suma prvih n kvadratnih brojeva. Sa slike možemo vidjeti da smo svaki broj niza predstavili određenim brojem jediničnih kvadrata. S lijeve strane jednakosti uočimo da smo tri puta vizualno predočili sumu prvih n kvadratnih brojeva. Preslagivanjem jediničnih kvadrata dobivamo pravokutnik kojemu su duljine stranica $\frac{n(n+1)}{2}$ i $2n+1$. Odatle je

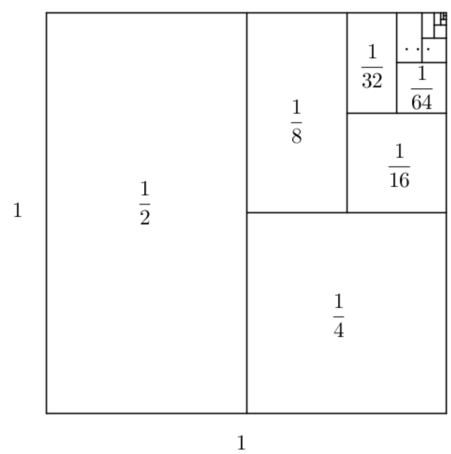
$$\begin{aligned} 3 \cdot (1+4+9+16+\cdots+n^2) &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1) / : 6 \\ 1+4+9+16+\cdots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

7.3.9 Suma geometrijskog reda

U sklopu se nastavne teme u kojoj se obrađuju nizovi često obrađuje i pojam geometrijskog reda. Tako možemo učenicima predočiti i dokaz bez riječi za sumu geometrijskog reda $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ Taj dokaz prikazan je Slikom 7.13.

Ako je stranica kvadrata duljine 1 i taj kvadrat počnemo dijeliti na pola pa opet polovinu na pola itd., dobit ćemo upravo tu sumu, stoga možemo zaključiti da će suma tog geometrijskog reda biti jednaka 1, tj.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1.$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

Slika 7.13: Suma geometrijskog reda.

Literatura

[1] A.H. Abdullah, E. Zakaria, *The Effects of Van Hiele's Phases of Learning Geometry on Students' Degree of Acquisition of Van Hiele Levels*, Procedia-Social and Behavioral Sciences 102, 251 − 266, 2013

[2] C. Barić, *Koncepti razlomaka i operacije s razlomcima*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[3] V. Barišić, *Mjerenje*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2014

[4] N. Bednarz, *A problem-solving approach to algebra: Accounting for the reasonings and notations developed by students*, u H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Vincent (ur.), The future of the teaching and learning of algebra: Proceedings of the 12th ICMI Study Conference (Vol. 1, 69−78). Melbourne: University of Melbourne, 2001

[5] J. Boaler, *Mathematics from another world: Traditional communities and the alienation of learners*, Journal of Mathematical Behavior, 18(4), 1–19, 2000

[6] M.C. Borba, N. Scheffer, *Sensors, body, technology and multiple representations*, u N.A. Pateman, B.J. Dougherty, J.T. Zilliox (ur.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, 121 − 128), Honolulu: PME, 2003

[7] W. Cox, *Strategic learning in a-level mathematics?*, Teaching Mathematics and its Applications, 13, 11 − 21, 1994

[8] A. Čižmešija, T. Soucie, R. Svedrec, *Primjena geoploče u nastavi matematike*, Poučak, Vol. 13, No. 50, 25 − 39, 2012

[9] M. Debelić, *Učenje matematike putem kreativnog i imitativnog zaključivanja*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[10] R. Even, D. Tirosh, *Teachers' knowledge and understanding of students' mathematical thinking*, u L. English (ur.), International handbook of research in mathematics education (219 – 240), Mahwah, NJ: Erlbaum, 2002.

[11] D. French, *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002

[12] H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, Springer Netherlands, 1973

[13] P. Gerdes, *Sona geometry from Angola. Mathematics of an African tradition*, Monza: Polimetrica, 2006

[14] M. Goos, *Learning mathematics in a classroom community of inquiry*, Journal for Research in Mathematics Education, 35, 258 – 291, 2004

[15] M. Goos, G. Stillman, C. Vale, *Teaching Secondary school mathematics*, Allen and Unwin, Australia, 2008

[16] B.C. Hall, *Using Algebra Tiles Effectively: Tools for Understanding*, Prentice Hall, New Jersey, 1999

[17] M.K. Heid, *Algebra in a technological world*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995

[18] N. Jakovljević, *Učenje i poučavanje algebre*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[19] S. Johnston-Wilder, J. Mason, *Developing thinking in geometry*, The Open University in association with Paul Chapman Publishing, 2005

[20] M. Jukić, *Razvoj geometrijskog mišljenja*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[21] Lj. Jukić Matić, I. Matić, M. Pavlović, *Geometrija i Sherlock Holmes*, Matematika i škola, 75, 195 – 201, 2014

[22] J.J. Kaput, *A research base for algebra reform: Does one exist?*, u D. Owens, M. Reed, G. M. Millsaps (ur.), Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, 71 – 94). Columbus, OH: The Eric Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, 1995

[23] J.J. Kaput, *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*, u The National Council of Teachers of Mathematics & the Mathematical Sciences Education Board, The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium (25 – 26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1998

[24] A. Karjaković, *Oblici algebarskog mišljenja - algebarsko i geometrijsko*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2014

[25] C. Kieran, *The learning and teaching of school algebra*, u D.A. Grouws, Handbook of research on mathematics teaching and learning (390˘419), New York: Macmillan, 1992

[26] E.J. Knuth, A.C. Stephens, N.M. McNeil, M.W. Alibali, *Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations*, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 37, No. 4, 297 – 312, 2006

[27] J. Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell, *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, Mathematics Learning Study Committee, National Research Council, 2001

[28] J. Kilpatrick, J. Swafford, *Helping Children Learn Mathematics*, Mathematics Learning Study Committee, National Research Council, 2002

[29] J. Lithner, *Mathematical Reasoning in Task Solving*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 41, No. 2, 165 – 190, 2000

[30] J. Lithner, *Students mathematical reasoning in university textbook exercises*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 52, No. 1, 29 – 55, 2003

[31] J. Lithner, *A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 67, No. 3, 255 – 276, 2008

[32] J. Lithner, *Learning Mathematics by Creative or Imitative Reasoning*, Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education, 487 – 506, 2015

[33] M. Lopojda, *Proporcionalno rasuđivanje*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2014

[34] M. Mason, *The van Hiele Levels of Geometric Understanding*, u Professional Handbook for Teachers, Geometry: Explorations and Applications, MacDougal Litteil Inc., 2002

[35] J. Mason, M. Spence, *Towards a psychology of knowing-to*, u Teaching mathematics in new times (Proceedings of the 21st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 342 – 349). Brisbane: MERGA, 1998

[36] A. McIntosh, *Common errors in mental computation of students in Grades 3–10*, u B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch, M. Thomas (ur.), Mathematics Education in the South Pacific (Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 457 – 472), Sydney: MERGA, 2002

[37] M. Nađ, *Kako podučavati brojeve*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[38] R.B. Nelsen, *Proofs without words: exercises in visual thinking*, The Mathematical Association of America, 1993

[39] N. Northcote, A. McIntosh, *What mathematics do adults really do in everyday life?*, Australian Primary Mathematics Classroom, Vol. 4, No. 1, 19 – 21, 1999

[40] M. Pavlović, *Kako učiti i podučavati geometriju*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2014

[41] S.E.B. Pirie, T. Kieren, *Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, No. 2, 165 – 190, 1994

[42] G. Polya, *How to solve it*, Garden City, NY, Doubleday, 1957

[43] B. Rittle-Johnson, M.W. Alibali, *Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?* Journal of Educational Psychology, 91, 175 – 189, 1999

[44] D.A. Romano, *Van Hiele-ova teorija o učenju geometrije*, Metodički obzori: časopis za odgojno-obrazovnu teoriju i praksu Vol. 4, No. 7 – 8, 95 – 103, 2009

[45] A. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, M. Orlando, FL: Academic Press, 1985

[46] R. Skemp, *The psychology of learning mathematics*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1987

[47] S.J. Spencer, C.M. Steele, D.M. Quinn, *Stereotype Threat and Women's Math Performance*, Journal of Experimental Social Psychology Vol. 35, 4 − 28, 1999

[48] B. Sriraman, *The Characteristics of Mathematical Creativity*, The Mathematics Educator, Vol. 14, No. 1, 19 − 34, 2004

[49] K. Stacey, H. Chick, *Solving the problem with algebra*, u K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (ur.), The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study (1 − 20), Norwell, MA: Kluwer, 2004

[50] D. Tall, *Calculus and Analysis*, u Mathematical Topics of Instruction, T. Husen, T.N. Postlethwaite (ur.), The International Encyclopaedia of Education, Second Edition, Pergamon Press, 3680 − 3681, 1994

[51] M. Tomašević, *Dokazi bez riječi*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[52] V. Tutnjević, *Osnove algebre u nastavi matematike*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2013

[53] P. Van Hiele, *Structure and insight: A theory of mathematics education*, New York: Academic Press, 1986

[54] A. Vinković, *Komponente matematičke sposobnosti*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015

[55] E. Yackel, G. Hanna: *Reasoning and proof*, A research companion to principles and standards for school mathematics, 227–236, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003

[56] J.A. Van de Walle, K.S. Karp, J.M. Bay-Williams: *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Pearson, New York, 2013

Indeks