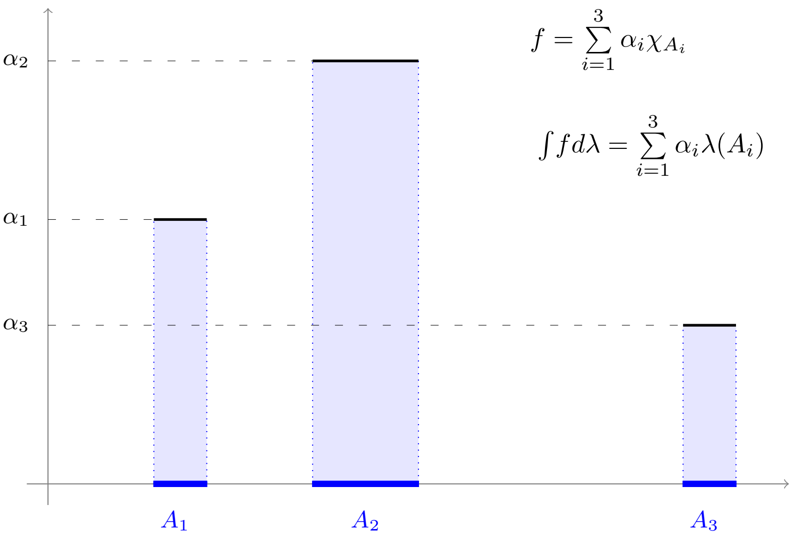
Dragan Jukić



MJERA I INTEGRAL

OSIJEK, 2012.

prof.dr.sc. Dragan Jukić

MJERA I INTEGRAL

Osijek, 2012.

D. Jukić – Mjera i integral.

Izdavač: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku

Recenzenti: Prof.dr.sc. Bojan Basrak
Prof.dr.sc. Tibor Pogány

Lektor: Ivanka Ferčec, prof.

Tehnička obrada: Prof.dr.sc. Dragan Jukić

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 130520099.

ISBN 978-953-6931-52-1

Udžbenik se objavljuje uz suglasnost Senata Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku pod brojem 18/12.

Udžbenik se tiska uz novčanu potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa.

 Tisak: Grafika d.o.o., Osijek

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova je knjiga napisana s namjerom da pomogne studentima Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku pri pripremanju i polaganju ispita iz kolegija **Uvod u teoriju mjere** i **Uvod u teoriju integracije**.

Knjiga je podijeljena u sedam poglavlja: Uvod, Mjera, Izmjerive funkcije, Integracija izmjerivih funkcija, Produkt prostora mjere, Konvergencija izmjerivih funkcija i Dekompozicija mjere. Od čitatelja se pretpostavlja znanje iz matematičke analize. U svim poglavljima teorijski dio ilustriran je mnoštvom primjera. Za većinu zadataka dane su detaljne upute. U svakom poglavlju redom su numerirane definicije, teoremi, leme, propozicije, primjeri i slike.

Autor će biti zahvalan svim čitateljima na njihovim primjedbama u svezi s eventualnim pogreškama, nepreciznostima ili nedostacima koje će koristiti za novo izdanje.

Na kraju, zahvaljujem svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ova knjiga tiska i bude što bolja. To se posebice odnosi na recenzente koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama utjecali na mnoge dijelove teksta.

U Osijeku, rujan 2012. Dragan Jukić

1. Uvod

U osnovnoj i srednjoj školi uči se kako izračunati duljinu jednostavnijih podskupova od $\mathbb{R}$, površinu jednostavnijih podskupova od $\mathbb{R}^2$ i volumen jednostavnijih podskupova od $\mathbb{R}^3$. Postavlja se pitanje kada ti pojmovi imaju smisla te kako ih definirati i za složenije podskupove. Za „lijepe" podskupove u tu svrhu koristi se Riemannov integral, koji se odnosi samo na omeđene realne funkcije.

Teorija mjere je matematička disciplina koja se bavi izučavanjem pojmova kao što su duljina, površina i volumen, i to pod zajedničkim nazivom mjera. Ona nam omogućava da te pojmove definiramo za veću familiju podskupova nego li je to moguće pomoću Riemannova integrala. Osim toga, ona nam omogućava da se Riemannov integral proširi do Lebesgueova integrala, koji je definiran za puno širu klasu funkcija od klase omeđenih funkcija.

U najapstraktnijem slučaju, objekti mjerenja (izmjerivi skupovi) elementi su neke unaprijed zadane familije $\mathcal{A}$ podskupova od nepraznog skupa X. Osim iz matematike, ti objekti mogu biti iz trgovine, s tržnice, iz fizike, itd. Svakom objektu $A \in \mathcal{A}$ mjerenjem se jednoznačno pridružuje vrijednost $\mu(A)$ koju zovemo mjera skupa A. Mjera $\mu(A)$ najčešće je nenegativan broj, koji može predstavljati cijenu objekta, težinu, visinu, temperaturu, površinu, volumen, itd. U pozadini svakog mjerenja leže neka jednostavna pravila (svojstva), koja ne ovise o tome što se mjeri, niti kako se mjeri; preciznije, ta pravila ne ovise o familiji $\mathcal{A}$, niti o tome kako je definirana mjera μ. Pokazalo se da je za uspješan razvoj teorije mjere bitno da familija $\mathcal{A}$ bude σ-algebra, te da mjera μ ima samo nekoliko vrlo jednostavnih svojstava. Više o tome bit će riječi u poglavlju 2. Sada ćemo ukratko prikazati neke nedostatke Riemannovog integrala, koji su također značajno utjecali na razvoj teorije mjere i doveli do apstraktnijeg pojma integrala nego što je to Riemannov integral.

1.1. Neki nedostaci Riemannovog integrala

Dobro nam je poznato iz matematičke analize da je svaka omeđena i po dijelovima monotona funkcija na $[a, b]$ integrabilna u smislu Riemanna[1]. Kratko ćemo pisati da je R-integrabilna. Nadalje, prisjetimo se da je prema Riemannovom teoremu R-integrabilna i svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a njezin integral računa se po Newton-Leibnizovoj formuli:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

gdje je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ bilo koja primitivna funkcija funkcije f, tj. $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$. Pri tome pod derivacijom u rubnim točkama a i b podrazumijevamo odgovarajuće jednostrane derivacije.

[1] Bernhard Riemann (1826.-1866.), njemački matematičar.

Znamo da je R-integrabilna i svaka funkcija koja ima konačno mnogo diskontinuiteta. Koristeći se Lebesgueovom[2] teorijom integrala, u točki 4.5. pokazat ćemo da je funkcija R-integrabilna onda i samo onda ako je njezin skup točaka diskontinuiteta skup Lebesgueove mjere nula (teorem 4.53.).

Među najozbiljnije nedostatke Riemannovog integrala ubrajaju se problemi s primitivnom funkcijom i loše ponašanje integrala prema graničnom prijelazu. Ti problemi, kao i mnogi drugi, značajno su motivirali Lebesguea da u svojoj doktorskoj disertaciji iz 1902. godine razvije apstraktniji pojam integrala.

Problem primitivne funkcije. Prema Newton-Leibnizovoj formuli problem integriranja neprekidne funkcije ekvivalentan je problemu nalaženje primitivne funkcije. Nažalost, ako funkcija nije neprekidna, ta dva problema nisu ekvivalentna. Ilustrirat ćemo primjerima: (i) da postoji R-integrabilna funkcija koja nema primitivnu funkciju, (ii) da postoji funkcija koja ima primitivnu funkciju, ali nije R-integrabilna. Za to će nam trebati sljedeći Darbouxov[3] teorem:

1.1. Teorem (Darboux)
Ako je funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilna na segmentu $[a,b]$, onda njezina derivacija f' prima sve međuvrijednosti, tj. ako su a_1 i b_1 bilo koje dvije točke iz segmenta $[a,b]$ takve da je $a_1<b_1$, onda za svaki t između $f'(a_1)$ i $f'(b_1)$ postoji točka $c\in[a_1,b_1]$ takva da je $f'(c)=t$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $f'(a_1)<t<f'(b_1)$. Definirajmo neprekidnu funkciju $g:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}$ formulom $g(x)=tx-f(x)$. Tada je $g'(x)=t-f'(x)$ i $g'(b_1)<0<g'(a_1)$.

Zbog neprekidnosti funkcija g postiže svoj maksimum na segmentu $[a_1,b_1]$. Kako je $g'(a_1)>0$, lako je zaključiti da se taj maksimum ne može postići u točki a_1. Zaista, u suprotnom bi za svaki $x>a_1$ imali

$$\frac{g(x)-g(a_1)}{x-a_1}\le 0,$$

odakle bi prijelazom na limes $x\to a_1+$ dobili da je $g'(a_1)\le 0$. Slično se pokaže da g svoj maksimum ne može postići u točki b_1. Dakle, funkcija g svoj maksimum postiže u nekoj točki $c\in(a_1,b_1)$. Prema Fermatovom teoremu tada je $g'(c)=0$, tj. $f'(c)=t$. ∎

---

[2]Henri Léon Lebesgue(1875.-1941.), francuski matematičar.
[3]Gaston Darboux (1842.-1917.), francuski matematičar.

1.2. PRIMJER. *Neka je* $[a,b]$ *segment takav da je* $a < 0 < b$. *Funkcija* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *zadana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} -1, \; a \le x \le 0 \\ \;\;1, \; 0 < x \le b \end{cases}$$

R-integrabilna je na segmentu $[a,b]$ *jer ima prekid samo u točki* $x = 0$. *Bez obzira što je formulom* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *dobro definirana funkcija* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, *prema prethodnom teoremu funkcija* f *nema primitivnu funkciju na* $[a,b]$.

1.3. PRIMJER. *Funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definirana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ima primitivnu funkciju

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x^2), & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Budući da f *nije omeđena na* $[0,1]$, *nije ni R-integrabilna.*

Na kraju ovih razmatranja spomenimo i to da je 1881. Volterra[4] konstruirao omeđenu funkciju koja ima primitivnu funkciju, ali nije R-integrabilna. Uvođenjem Lebesgueova integrala riješit će se i taj problem. Preciznije, pokazat će se da je svaka omeđena funkcija koja ima primitivnu funkciju ujedno i Lebesgue integrabilna.

Loše ponašanje prema graničnom postupku. Riemannov integral loše se ponaša prema graničnom postupku. Npr. ako je (f_n) niz R-integrabilnih funkcija na segmentu $[a,b]$ koji konvergira prema funkciji f (tj. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\forall x \in [a,b]$), onda se prirodno postavljaju sljedeća pitanja:

(1) Je li f R-integrabilna?

(2) Postoji li $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$?

(3) Ako su odgovori na prva dva pitanja potvrdni, da li je tada $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$?

Iz osnovnog kursa matematičke analize poznato nam je da će odgovor biti potvrdan na sva tri pitanja ako promatrani niz funkcija uniformno konvergira prema funkciji f. No uniformna neprekidnost prejak je zahtjev jer u stvari znači da niz

$$a_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : a \le x \le b\}$$

konvergira prema nuli. Zato je odgovor na sva tri postavljena pitanja, nažalost, općenito negativan. Ilustrirajmo to sljedećim primjerima.

[4] Vito Volterra (1860.-1940.), talijanski matematičar.

1.4. Primjer.

(1) *Poslažimo racionalne brojeve iz skupa* $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ *u niz* $q_1, q_2, q_3, \ldots$. *Kako je* $\mathbb{Q}$ *prebrojiv skup, to je moguće. Sada definirajmo funkcije* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$*:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *funkcija* f_n *je integrabilna jer ima konačno mnogo prekida. Pri tome je* $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. *Međutim, granična funkcija* $f = \lim_n f_n$ *je tzv. Dirichletova funkcija*

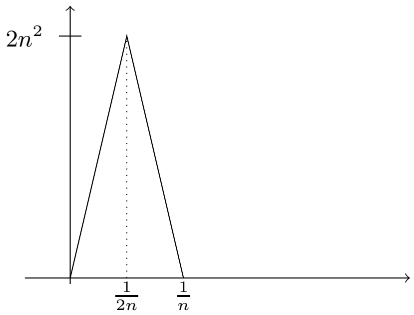
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalan} \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan} \end{cases}$$

koja nije R-integrabilna.

(2) *Sve funkcije* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *definirane formulom*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^3x, & \text{ako je } 0 \le x < \frac{1}{2n} \\ 4n^2 - 4n^3x, & \text{ako je } \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ako je } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

su R-integrabilne i pri tome je $\int_0^1 f_n(x)\,dx = n$. *Prema tome, u skupu* $\mathbb{R}$ *ne postoji* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.



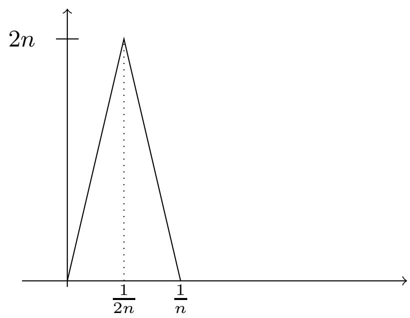
Slika 1. Graf funkcije f_n.

Nije teško pokazati da je $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \equiv 0$. *Kako je* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$, *limes i integral ne „komutiraju” ni u proširenom skupu realnih brojeva.*

(3) *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *neka je formulom*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & \text{ako je } 0 \le x < \frac{1}{2n} \\ 4n - 4n^2x, & \text{ako je } \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ako je } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

definirana funkcija na segmentu $[0,1]$.



Slika 2. Graf funkcije f_n.

Nije teško pokazati, a to je lako zaključiti i sa slike, da je

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

te da niz funkcija (f_n) po točkama konvergira prema funkciji $f \equiv 0$. Zato je $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$.

Na kraju ovih razmatranja napomenimo da će Lebesgueov integral, koji uvodimo u poglavlju 4., značajno popraviti ponašanje integrala prema graničnom postupku.

1.2. Lebesgueov pristup integralu

Riemannov pristup integralu zasnovan je na jednostavnoj činjenici da je lako integrirati stepenastu funkciju (po dijelovima konstantna funkcija). Zadana omeđena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ aproksimira se sa stepenastim funkcijama tako da se uzme neka particija domene $[a, b]$, a toj particiji pridružuju se tzv. donja Darbouxova suma, gornja Darbouxova suma i integralne sume koje predstavljaju aproksimaciju integrala funkcije f. Lebesgue je došao na ideju da umjesto particija domene uzima particije kodomene funkcije f.

Evo jedne dobre, motivirajuće i često spominjane analogije za Lebesgueov pristup integraciji: Na stolu su razbacane kovanice u različitim apoenima. Od osoba R i L traži se ukupna vrijednost tih kovanica. Osoba R redom uzima i zbraja vrijednost kovanica te tako dolazi do ukupne vrijednosti - to bi bio Riemannov pristup. Osoba L prvo kovanice slaže po apoenima u različite hrpice, a zatim u svakoj hrpici pobroji kovanice i pomnoži s odgovarajućim apoenom, sve to na kraju sumira i tako dobiva istu ukupnu vrijednost koju je dobila i osoba R - to bi bio Lebesgueov pristup.

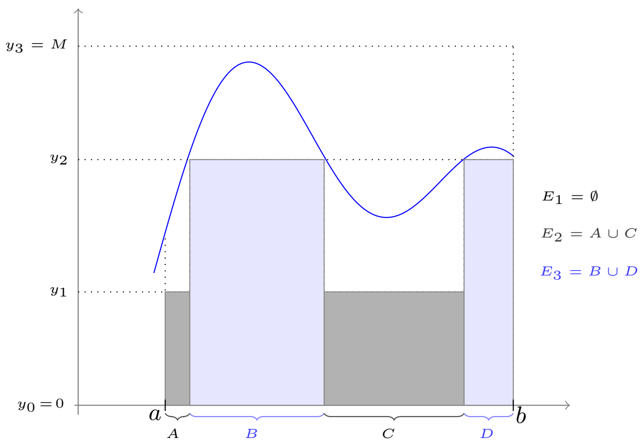
Dobro nam je poznato da je problem integracije povezan s problemom računanja duljine/površine/volumena. Zato, ako se uzimaju particije kodomene kao što je predložio Lebesgue, za svaku particiju kodomene potrebno je znati „izmjeriti" onaj dio domene koji funkcija preslika u pojedini dio particije. Taj problem, kao i mnogi drugi problemi, vodi nas teoriji mjere koju ćemo upoznati u poglavlju 2.

Sada ćemo malo detaljnije prikazati Lebesgueov pristup i probleme koji se tu javljaju. Radi jednostavnosti, neka je f nenegativna funkcija definirana na segmentu $[a, b]$ i odozgo strogo omeđena s M, tj. $0 \leq f(x) < M$ za svaki $x \in [a, b]$. Neka je $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ particija segmenta $[0, M]$ na y-osi. Dakle,

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = M.$$

Definirajmo skupove (za ilustraciju vidi sliku 3.)

$$E_i := f^{-1}([y_{i-1}, y_i)) = \{x \in [a, b] : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$



Slika 3. Lebesgueov pristup integralu.

Tada ako je $\lambda(E_i)$ „duljina skupa E_i", površinu ispod grafa funkcije možemo aproksimirati s tzv. Lebesgueovom sumom

$$y_0\lambda(E_1) + y_1\lambda(E_2) + \cdots + y_{n-1}\lambda(E_n).$$

Na kraju, očekujemo da površina ispod grafa funkcije bude jednaka supremumu skupa svih takvih suma.

Velika poteškoća kod Lebesgueova pristupa sastoji se u tome što on zahtijeva da se izračunaju „duljine" podskupova od $\mathbb{R}$. Npr. za slučaj prikazan na slici 3. potrebno je odrediti „duljine" skupova E_2 i E_3. Ako je svaki od skupova E_i ($i = 1, \ldots, n$) interval ili unija intervala, onda nema problema. Nažalost, skupovi E_i nisu uvijek tako lijepi pa to vodi velikom problemu. Npr. ako je $f = \chi_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}$ karakteristična funkcija skupa $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ i $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = M$, $M > 1$, bilo koja particija segmenta na y-osi, točno dva skupa E_i bit će neprazna: jedan od njih je $[a, b] \cap \mathbb{Q}$, a drugi je $[a, b] \cap \mathbb{I}$. Postavlja se pitanje kako definirati i kako izračunati „duljinu" takvih skupova?

1.3. Pripremni materijal

Za razumijevanje teorije mjere potrebno je dobro poznavati algebru skupova, razumjeti pojam prebrojivosti i dobro poznavati funkcije. Zato ćemo vrlo ukratko ponoviti te i još neke druge stvari.

1.3.1. Nešto osnovno o skupovima

Skupove obično označavamo velikim slovima A, B, C, itd. Svaki skup određen je svojim elementima, koje obično označavamo malim slovima. Ako element x pripada skupu A, pišemo $x \in A$; a ako element x ne pripada skupu A, pišemo $x \notin A$. Prazan skup po definiciji je skup bez ijednog elementa i označava se sa $\emptyset$.

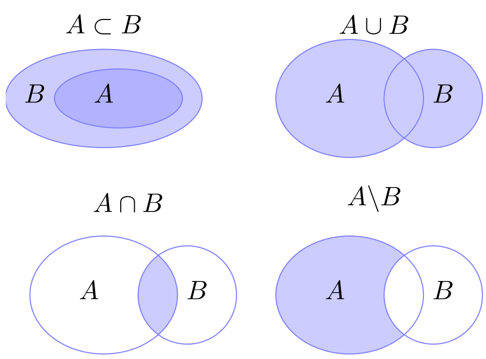
Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda kažemo da je A podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$. Ako je $A \subseteq B$ i ako postoji barem jedan element $b \in B$ koji nije u skupu A, onda kažemo da je A pravi podskup skupa B i pišemo $A \subset B$. Po definiciji, prazan skup je podskup svakog skupa.

Za skupove A i B kažemo da su jednaki ako se sastoje od istih elemenata, tj. ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Ako su skupovi A i B jednaki, pišemo $A = B$.

Osnovne operacije sa skupovima. Prisjetimo se, za skupove A i B definiraju se sljedeće osnovne operacije:

$$\begin{aligned}
A \cup B &:= \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\} \ (\text{unija skupova } A \text{ i } B) \\
A \cap B &:= \{x : x \in A \text{ i } x \in B\} \ (\text{presjek skupova } A \text{ i } B) \\
A \backslash B &:= \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\} \ (\text{razlika skupova } A \text{ i } B).
\end{aligned}$$

Specijalno, ako je je $A \subseteq X$, onda razliku $X \backslash A$ nazivamo komplement skupa A u odnosu na skup X i označavamo s A^c. Dakle, $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$.

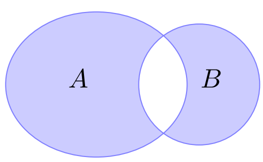


Slika 4. Osnovne skupovne operacije.

Simetrična razlika skupova A i B, u oznaci $A\Delta B$, je skup

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A).$$

$A\Delta B$



Slika 5. Simetrična razlika $A\Delta B$.

Partitivni skup skupa X, u oznaci 2^X ili $\mathcal{P}(X)$, definira se kao skup svih podskupova skupa X, tj.

$$2^X = \{A : A \subseteq X\}.$$

Ako su A i B neprazni skupovi, onda skup svih uređenih parova (a, b) kod kojih je $a \in A$ i $b \in B$ označavamo sa $A \times B$ i zovemo Kartezijev ili direktni produkt skupova A i B. Dakle,

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Uzimanje unije, presjeka i razlike osnovne su operacije među skupovima. Te operacije zovu se Boolove operacije. Neka su A, B, C podskupovi univerzalnog skupa X. Boolove operacije imaju sljedeća svojstva:

1. komutativnost: $A \cap B = B \cap A, \qquad A \cup B = B \cup A$
2. asocijativnost: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. idempotentnost: $A \cap A = A, \qquad A \cup A = A$
4. distributivnost: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C), \qquad A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
5. involutivnost: $\left(A^c\right)^c = A$
6. teoremi A. de Morgana: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

Do sada smo definirali uniju i presjek dvaju skupova. Slično se definira unija i presjek od bilo koliko skupova. Skup čiji su elementi skupovi zovemo familija skupova. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija skupova iz skupa X. Tada se unija skupova familije $\mathcal{F}$, u oznaci $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A$, definira kao najmanji skup koji sadrži sve elemente svih skupova A iz familije $\mathcal{F}$. Dakle, $x \in \bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A$ onda i samo onda ako je x element barem jednog člana A iz familije $\mathcal{F}$. Slično se definira i presjek $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{F}} A$ skupova familije $\mathcal{F}$ kao najveći skup sadržan u svakom skupu iz familije $\mathcal{F}$. Uočimo da je $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$ onda i samo onda ako je x element svakog člana A iz familije $\mathcal{F}$. Teoremi de Morgana vrijede i za familiju skupova, tj.

$$\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^c, \qquad \Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^c.$$

Pri tome se komplementiranje uzima u odnosu na skup X, koji se naziva i univerzalni skup.

Prebrojivi skupovi. Već kao mali naučili smo brojati predmete tako da uspostavimo bijekciju između prstiju na ruci i predmeta. Tu ideju Cantor je proširio i na beskonačne skupove uvodeći sljedeću definiciju: Kažemo da je skup A ekvipotentan skupu B i pišemo $A \sim B$ ako postoji bar jedna bijekcija $f : A \to B$. Lako je pokazati da je ekvipotentnost skupova jedna relacija ekvivalencije, tj. vrijede sljedeća svojstva: (i) refleksivnost: $A \sim A$, (ii) simetričnost: Ako je $A \sim B$, onda je $B \sim A$, (iii) tranzitivnost: Ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, onda je $A \sim C$. Klasa ekvivalencije naziva se kardinalni broj. Za ekvipotentne skupove kaže se još da su ekvivalentni, jednakobrojni ili da imaju isti kardinalni broj.

1.5. PRIMJER. *Navedimo nekoliko primjera ekvipotentnih skupova:*

1. $\{1,2,3,4\} \sim \{a,b,c,d\}$,

2. $\mathbb{N} \sim \{2,4,6,\ldots\}$, *tj. skup svih prirodnih brojeva ekvipotentan je sa skupom svih parnih prirodnih brojeva. Jedna bijekcija sa* $\mathbb{N}$ *na* $\{2,4,6,\ldots\}$ *je dana sa* $n \mapsto 2n$.

3. $\mathbb{N} \sim \{1,3,5,\ldots\}$, *tj. skup svih prirodnih brojeva ekvipotentan je sa skupom svih neparnih prirodnih brojeva. Jedna bijekcija sa* $\mathbb{N}$ *na* $\{1,3,5,\ldots\}$ *je dana sa* $n \mapsto 2n-1$.

4. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. *Jedna bijekcija sa skupa prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$ *na skup cijelih brojeva* $\mathbb{Z}$ *zadana je sa*

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Ova bijekcija ilustrirana je na sljedećoj slici.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots \end{array}$$

5. *Svi intervali realnih brojeva međusobno su ekvipotentni. Jedna bijekcija* $f : (a,b) \to (c,d)$ *zadana je formulom*

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c.$$

6. *Skup* $\mathbb{R}$ *ekvipotentan je sa svakim intervalom* (a, b). *Zaista, budući da je ekvipotentnost relacija ekvivalencije i da su svaka dva intervala ekvipotentna, dovoljno je pronaći jednu bijekciju sa* $\mathbb{R}$ *na* $(0, 1)$. *Traženu bijekciju* $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ *možemo definirati formulom*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^x}.$$

Kardinalni broj skupa A označava se sa $k(A)$. Kao što je ilustrirano u prethodnom primjeru, dva beskonačna skupa mogu imati isti kardinalni broj (tj. biti ekvipotentni) a da je pri tome jedan od njih pravi podskup drugog skupa.

Kažemo da je skup A **konačan** ako je prazan ili postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je skup A ekvipotentan sa skupom $\{1, \ldots, n\}$. Za skup A kažemo da je **beskonačan** ako nije konačan. Skupovi koji su ekvipotentni sa skupom $\mathbb{N}$ nazivaju se **prebrojivi**. Njihov kardinalni broj označava se sa $\aleph_0$ (čitaj: alef nula. Slovo $\aleph$ početno je slovo hebrejskog alfabeta). Konačne i prebrojive skupove nazivamo zajedničkim imenom **diskretni skupovi**.

Primijetimo da je neki skup A prebrojiv onda i samo onda ako se njegovi članovi mogu poredati u niz

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

takav da je $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Naime, ako je $a : \mathbb{N} \to A$ bijekcija, dovoljno je staviti da je $x_n = a(n)$. Ovu ćemo činjenicu često koristiti. Njenu korisnost ilustrirat ćemo već u dokazu sljedeće propozicije.

1.6. Propozicija

Neka je A konačan, a B prebrojiv skup. Tada je skup $A \cup B$ prebrojiv.

Dokaz. Ako je $A = \emptyset$, tvrdnja očigledno vrijedi. Zato nadalje pretpostavimo da je $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \neq \emptyset$. Skup B je prebrojiv pa njegove članove možemo poredati u niz $b_1, b_2, b_3 \ldots$. S novim nizom $a_1, \ldots, a_k, b_1, b_2, b_3, \ldots$ poredani su članovi skupa $A \cup B$, pa je taj skup prebrojiv. ■

1.7. Propozicija

Kartezijev produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv.

Dokaz. Tvrdnja se može pokazati pomoću sljedećeg dijagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & (1,5) & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & (4,5) & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & & & \\
(5,1) & & (5,2) & & (5,3) & & (5,4) & & (5,5) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

tako da uređene parove, počevši od para $(1,1)$ pa nadalje, redom izlistavamo (prebrajamo) u smjeru prikazanom strelicama:

$$(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,5),\ldots \tag{1.1}$$

Budući da su članovi skupa $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ poredani u niz, taj skup je prebrojiv. ■

1.8. PROPOZICIJA
Svaki podskup diskretnog skupa je diskretan.

Dokaz. Neka je A pravi podskup diskretnog skupa S. Po definiciji diskretnog skupa tada je S konačan ili prebrojiv skup. Ako je S konačan skup, onda je i A konačan skup. Zato nadalje pretpostavimo da je S prebrojiv skup. Tada postoji bijekcija $x:\mathbb{N}\to S$. Uočimo da je $S=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, gdje je $x_n := x(n)$. Neka je $x_{|I}: I\to A$ restrikcija bijekcije x na skup $I:=\{n\in\mathbb{N} : x_n\in A\}$. Ta restrikcija je bijekcija pa je $A\sim I$, tj. A i I su ekvipotentni skupovi. Zato je dovoljno pokazati da je skup I konačan ili prebrojiv. Pretpostavimo da I nije konačan, tj. da je beskonačan skup. Uz pomoć principa definicije indukcijom konstruirat ćemo bijekciju $f:\mathbb{N}\to I$, čime ćemo pokazati da je tada I prebrojiv skup. Neka je $f(1):=i_1$, gdje je $i_1:=\min I$. Kako I nije konačan, to je $I\backslash\{i_1\}\neq\emptyset$. Neka je $i_2:=\min I\backslash\{i_1\}$, a zatim definirajmo $f(2):=i_2$. Kada smo već definirali brojeve $i_1,\ldots,i_n$ i vrijednosti $f(1),\ldots,f(n)$, onda stavljamo $i_{n+1} := \min I\backslash\{i_1,\ldots,i_n\}$ i $f(n+1):=i_{n+1}$. Ovako definirana funkcija $f:\mathbb{N}\to I$ je bijekcija. ■

Sljedeća propozicija govori nam da je prebrojiva unija prebrojivih [diskretnih] skupova također prebrojiv [diskretan] skup.

1.9. PROPOZICIJA

(a) Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz prebrojivih skupova. Tada je $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ prebrojiv skup.

(b) Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz diskretnih skupova. Tada je $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ diskretan skup.

Dokaz. (a) Kako je prebrojiv svaki skup A_i, $i\in\mathbb{N}$, njegove elemente možemo poredati u niz:

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4},\ldots$$

Prvo uočimo da je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{a_{ij} : (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$, a zatim definirajmo funkciju $f:\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ na sljedeći način: Neka je $a_{ij}\in\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Tada postoji minimalni indeks i_0 takav da je $a_{ij}\in A_{i_0}$. Kako je $a_{ij}\in A_{i_0}$, postoji jedinstveni indeks j_0 takav da je $a_{ij}=a_{i_0 j_0}$. Stavimo $f(a_{ij}):=(i_0,j_0)$.

Lako je pokazati da je ovako definirana funkcija f injekcija. Zato je $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\sim f\big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$, pa je dovoljno pokazati da je $f\big(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$ prebrojiv skup. Nadalje, kako je $f\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ te kako je $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ prebrojiv skup, prema propoziciji 1.8. skup $f\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$ je konačan ili prebrojiv. Lako je zaključiti da je taj skup prebrojiv jer u suprotnom bi zbog $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \sim f\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big)$ imali da je konačan svaki skup A_i, $i\in\mathbb{N}$, što bi bila kontradikcija.

(b) Definirajmo prebrojive skupove B_i, $i\in\mathbb{N}$, na sljedeći način: Ako je A_i prebrojiv skup, stavimo $B_i := A_i$, a ako je A_i konačan skup, neka je $B_i := A_i\cup\mathbb{N}$. Prema tvrdnji (a) skup $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ je prebrojiv. Nadalje, kako je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$, tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 1.8. ∎

1.10. Korolar

Vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.

(b) Neka su A_i, $i=1,\dots,n$, prebrojivi skupovi. Tada je Kartezijev produkt $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ prebrojiv.

(c) Unija konačno mnogo prebrojiv skupova je prebrojiv skup.

(d) Neka je A konačan, a B prebrojiv skup. Tada je Kartezijev produkt $A\times B$ prebrojiv skup.

Dokaz. (a) Za svaki $n\in\mathbb{N}$ neka je $\mathbb{Q}_n = \big\{\frac{m}{n} : m\in\mathbb{Z}\big\}$. Kako su svi skupovi $\mathbb{Q}_n$, $n\in\mathbb{N}$, prebrojivi i $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_n$, tražena tvrdnja slijedi iz propozicije 1.9.

(b) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da imamo samo dva skupa: A i B. Za svaki $a\in A$ neka je $B_a := \{(a,b) : b\in B\}$. Kako je B prebrojiv, i skup B_a je prebrojiv. Pomoću jednakosti $A\times B = \bigcup_{a\in A} B_a$ koja skup $A\times B$ prikazuje kao prebrojivu uniju prebrojivih skupova i propozicije 1.9. zaključujemo da je $A\times B$ prebrojiv skup.

(c) Neka su $A_1,\dots,A_k$ prebrojivi skupovi. Definirajmo skupove $A_{k+i} := A_1$, $i\in\mathbb{N}$. Kako je $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, tvrdnja slijedi iz propozicije 1.9.

(d) Neka je $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$. Definirajmo prebrojive skupove $B_i := \{(a_i,b) : b\in B\}$, $i=1,\dots,k$, zatim uočimo da je $A\times B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ i na kraju iskoristimo tvrdnju (c). ∎

Može se pokazati da skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ nije prebrojiv. Za sve skupove koji su ekvipotentni sa skupom $\mathbb{R}$ kažemo da imaju kardinalni broj kontinuuma i taj kardinalni broj označavamo sa c. Na kraju ove točke napomenimo da se može pokazati da je skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ekvipotentan sa $\mathbb{R}$.

1.3.2. Nešto osnovno o funkcijama

U ovoj točki ponovit ćemo samo neke osnovne pojmove i oznake o funkcijama koje ćemo nadalje stalno koristiti.

Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Slika funkcije f je skup $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. Slika skupa $A \subseteq X$ u odnosu na funkciju f je skup $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Praslika ili original skupa $B \subseteq Y$ u odnosu na funkciju f je skup $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Očito je $f(A) \subseteq Y$, $f^{-1}(B) \subseteq X$, $f(\emptyset) = \emptyset$ i $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Poznato je da se slika funkcije ne ponaša najbolje prema osnovnim skupovnim operacijama. Naime, ako je $f : X \to Y$ funkcija i $A, B \subseteq X$, općenito je:

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B),\\ f(A \cap B) &\neq f(A) \cap f(B),\\ f(A \backslash B) &\neq f(A) \backslash f(B). \end{aligned}$$

Ipak, može se pokazati da vrijedi:

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B),\\ f(A \backslash B) &\supseteq f(A) \backslash f(B). \end{aligned}$$

Praslika funkcije lijepo se ponaša prema osnovnim skupovnim operacijama, tj. ako su $C, D \subseteq Y$, onda je

$$\begin{aligned} f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),\\ f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),\\ f^{-1}(C \backslash D) &= f^{-1}(C) \backslash f^{-1}(D). \end{aligned}$$

Nadalje, lako je pokazati da vrijedi:

$$\begin{aligned} A &\subseteq f^{-1}(f(A)), \quad \forall A \subseteq X,\\ f(f^{-1}(C) &\subseteq C, \quad \forall C \subseteq Y. \end{aligned}$$

Ako je $(A_i, i \in I)$ bilo koja familija podskupova od X, a $(C_j, j \in J)$ bilo koja familija podskupova od Y, onda vrijedi:

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f(A_i),\\ f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i),\\ f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} C_j\Big) &= \bigcup_{j\in J} f^{-1}(C_j),\\ f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} C_j\Big) &= \bigcap_{j\in J} f^{-1}(C_j). \end{aligned}$$

2. Mjera

Koja osnovna svojstva trebaju imati izmjerivi skupovi i mjera? Odgovor na ova netrivijalna pitanja tražio se više desetljeća, a najprihvatljivijim se pokazalo da familija $\mathcal{A}$ izmjerivih skupova treba tvoriti tzv. σ-algebru, a od mjere μ treba zahtijevati samo neka vrlo jednostavna svojstva.

Motivacije radi, prvo ćemo promotriti problem mjere na skupu $\mathbb{R}$.

2.1. Problem mjere na $\mathbb{R}$

Želja nam je svakom skupu $A \subseteq \mathbb{R}$ pridružiti neki broj $\mu(A)$ kao njegovu mjeru. Pri tome, imajući na umu „duljinu” kao mjeru, željena svojstva mjere bila bi sljedeća:

(i) (nenegativnost) $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$.

(iii) (prebrojiva aditivnost ili σ-aditivnost) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova A_i iz $\mathbb{R}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

gdje $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ označava sumu reda.

(iv) (invarijantnost na translacije) Za $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu(A + x) = \mu(A).$$

(v) Mjera omeđenih intervala $[a, b], (a, b], [a, b)$ i (a, b) jednaka je njihovoj duljini $b - a$.

Zahtjevi (i), (ii), (iv) i (v) potpuno su prirodni. Kako bismo ilustrirali opravdanost zahtjeva σ-aditivnosti, pođimo od jednakosti

$$(0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big] = \Big(\frac{1}{2}, 1\Big] \cup \Big(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\Big] \cup \Big(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\Big] \cup \cdots$$

kojom je interval $(0, 1]$ prikazan kao unija prebrojivo mnogo disjunktnih intervala. Lako je pokazati da je

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big]\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(\Big(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big]\Big) \equiv 1.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \mu\Big(\Big(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big]\Big) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu\Big(\Big(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big]\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.\end{aligned}$$

Nije teško vidjeti da iz zahtjeva (i)-(iii) odmah proizlazi monotonost funkcije μ, tj.

$$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

Zaista, kako je $B = A \cup (B \backslash A) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, pomoću svojstava (i)-(iii) dobivamo

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) + 0 + 0 + \cdots \geq \mu(A).$$

Nažalost, može se pokazati da ne postoji preslikavanje μ sa svojstvima (i) - (v) koje bi bilo definirano na cijelom partitivnom skupu $2^{\mathbb{R}}$ skupa $\mathbb{R}$, a vrijednosti poprimalo u proširenom skupu realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Dokaz ove tvrdnje može se naći npr. u [8, str. 3], a zainteresiranog čitatelja upućujemo i na primjer 2.52. u kojemu je odgovarajuća tvrdnja dokazana na potpuno isti način. Dakle, treba odustati od zahtjeva da mjera bude definirana za svaki skup $A \subseteq \mathbb{R}$. Stoga za područje definicije mjere μ (tj. za familiju izmjerivih skupova) treba uzeti neku pogodnu familiju podskupova od $\mathbb{R}$. Jasno, prazan skup $\emptyset$ trebao bi biti izmjeriv s mjerom $\mu(\emptyset) = 0$. Nadalje, prisjetimo se da se svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}$ može zapisati kao unija najviše prebrojivo mnogo otvorenih intervala. Budući da su otvoreni skupovi u matematici fundamentalni, poželjno je da su i oni izmjerivi. Zbog toga je prirodno zahtijevati da familija izmjerivih skupova bude zatvorena na formiranje prebrojivih unija, tj. da unija najviše prebrojivo mnogo izmjerivih skupova bude izmjeriv skup. I zatvoreni skupovi koji se definiraju kao komplementi otvorenih skupova imaju fundamentalnu ulogu u matematici. Zato je prirodno očekivati da i zatvoreni skupovi budu izmjerivi, tj. da familija izmjerivih skupova bude zatvorena na komplementiranje.

Sumirajmo: (i) prazan skup trebao bi biti izmjeriv, (ii) familija izmjerivih skupova trebala bi biti zatvorena na formiranje prebrojivih unija, (iii) familija izmjerivih skupova trebala bi biti zatvorena na komplementiranje, (iv) intervali bi trebali biti izmjerivi. Izostavimo li zahtjev (iv) koji ima smisla samo na $\mathbb{R}$, generaliziranjem gornjih razmatranja dolazimo do motivacije kako definirati σ-algebru (vidi definiciju 2.1.). Kod definicije općeg pojma mjere na nekom skupu X (za razliku od mjere na $\mathbb{R}$) zahtijevaju se samo svojstva (i), (ii) i (iii) jer preostala dva svojstva nemaju smisla (vidi definiciju 2.17.). Postoji mnoštvo i drugih dubljih razloga da se upravo tako definiraju familija izmjerivih skupova i mjera na njoj.

2.2. σ-algebra

2.1. DEFINICIJA

Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X nazivamo σ-algebra skupova *na skupu X ako ona ima sljedeća svojstva:*

(σ1) $X \in \mathcal{A}$

(σ2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(σ3) *Unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ *kažemo da je* izmjeriv prostor. *Svaki element od* $\mathcal{A}$ *zove se* izmjeriv skup.

Dakle, σ-algebra na skupu X je familija podskupova od X koja sadrži skup X, zatvorena je na komplementiranje i na formiranje prebrojivih unija. Korisno je usporediti definiciju σ-algebre na skupu X s definicijom topologije na skupu X. Prisjetimo se, topološki prostor je par $(X, \mathcal{U})$ gdje je X neprazan skup, a $\mathcal{U}$ familija podskupova od X sa svojstvima:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,

(ii) Unija svake familije skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$,

(iii) Presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$.

Familija $\mathcal{U}$ zove se topološka struktura ili topologija, a njezine članove zovemo otvorenim skupovima.

Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu X. Kako je $\emptyset = X^c$, svojstvo $(\sigma 2)$ povlači $\emptyset \in \mathcal{A}$ i govori nam da uvjet $(\sigma 1)$ iz definicije σ-algebre možemo zamijeniti uvjetom

$(\sigma 1)'$ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Nadalje, također zbog $(\sigma 2)$, umjesto svojstva $(\sigma 3)$ iz definicije 2.1. može se zahtijevati da familija $\mathcal{A}$ bude zatvorena na prebrojive presjeke:

$(\sigma 3)'$ *Presjek prebrojivo elemenata iz* $\mathcal{A}$ *je element iz* $\mathcal{A}$*, tj. za svaki niz* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *skupova iz* $\mathcal{A}$ *vrijedi* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Ako se u definiciji 2.1. umjesto uvjeta $(\sigma 3)$ zahtijeva da $\mathcal{A}$ bude zatvorena na formiranje konačnih unija, dobiva se definicija algebre skupova na skupu X. Očito da je svaka σ-algebra ujedno i algebra. Obrat ne vrijedi, tj. postoji algebra koja nije σ-algebra (vidi primjer 2.4.).

2.2. PRIMJEDBA
Na prvi pogled, korištenje algebri djeluje jednostavnije od korištenja σ*-algebri. Međutim, upravo* σ*-algebra predstavlja ključan napredak u matematičkoj analizi početkom 20. stoljeća.*

2.3. PRIMJER. *Evo nekoliko primjera* σ*-algebri:*

1. *Neka je* X *bilo koji neprazan skup, a* 2^X *njegov partitivni skup. Tada su familije* $\mathcal{A} = 2^X$ *i* $\mathcal{A}' = \{\emptyset, X\}$ *istovremeno i* σ*-algebre i topologije na* X*. Uočimo da je* $\mathcal{A}$ *najveća, a* $\mathcal{A}'$ *najmanja* σ*-algebra na* X*.*

2. *Neka je* $X = \{1, 2, 3\}$*. Familija* $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ *je* σ*-algebra na* X*.*

   Uočimo da je $\mathcal{A}$ *istovremeno i topologija na* X*. Skupovi* $\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}$ *su istovremeno i otvoreni i zatvoreni.*

   Pokažite da je $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, \{2, 3\}\}$ *topologija na skupu* X *koja nije algebra na* X*, pa stoga nije ni* σ*-algebra.*

3. *Neka je $X = [0,1]$. Familija $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, [0,1/2], (1/2,1]\}$ je σ-algebra na X.*

4. *Neka je $X = \mathbb{R}$. Familija $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ diskretan ili A^c diskretan$\}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}$: Očigledno je da $\mathcal{A}$ ima svojstva ($\sigma 1$)-($\sigma 2$). Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$. Ako su svi skupovi A_n diskretni, onda je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ diskretan skup i zato je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Ako je neki skup $A_{n_0}^c$ diskretan, onda je $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$, odakle slijedi da je skup $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ diskretan i zato je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

   Sada ćemo pokazati da familija $\mathcal{A}$ nije zatvorena na proizvoljne unije, što će značiti da $\mathcal{A}$ nije topologija na $\mathbb{R}$. Svaka točka $x \in \mathbb{R}$ je izmjeriv skup. Zato kada bi familija $\mathcal{A}$ bila zatvorena na proizvoljne unije, onda bi svaki podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ bio izmjeriv, što nije točno.

2.4. PRIMJER. *Navedimo nekoliko primjera algebri koje nisu σ-algebre:*

1. *Neka je X bilo koji beskonačan skup. Nije teško pokazati da familija $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A$ konačan ili A^c konačan$\}$ predstavlja jednu algebru na skupu X. Pokažimo da ta algebra nije σ-algebra. U tu svrhu prvo odaberimo bilo koji niz (x_n) međusobno različitih točaka iz X. Svi skupovi $A_n := \{x_{2n-1}\}$, $n \in \mathbb{N}$, pripadaju familiji $\mathcal{A}$. Kako su $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c$ beskonačni skupovi, to znači da $\mathcal{A}$ nije σ-algebra.*

2. *Neka je $\mathcal{A}$ familija koja sadrži $\emptyset$ i sve podskupove od $\mathbb{R}$ koji se mogu prikazati kao unija konačno mnogo intervala oblika $(a,b]$, $(a,+\infty)$ i $(-\infty,b]$, gdje su $a,b \in \mathbb{R}$.*

   Lako je pokazati da je $\mathcal{A}$ algebra. Pokažimo da algebra $\mathcal{A}$ nije σ-algebra. Neka su a,b bilo koja dva realna broja takva da je $b-a>1$. Tada je $(a, b-\frac{1}{n}] \in \mathcal{A}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a, b-\frac{1}{n}] = (a,b)$ i $(a,b) \notin \mathcal{A}$, familija $\mathcal{A}$ nema svojstvo ($\sigma 3$).

Koristeći se definicijom σ-algebre lako je dokazati sljedeću propoziciju.

2.5. PROPOZICIJA
Neka je $(\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ bilo koja familija σ-algebri na skupu X. Tada je $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ također σ-algebra na skupu X.

2.6. PRIMJEDBA
Ilustrirajmo primjerom da unija σ-algebri ne mora biti σ-algebra. Neka je $X = \{1,2,3\}$. Tada su $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}$ i $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,3\}\}$ σ-algebre na X. Kako je $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$, a $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, unija $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ nema svojstvo ($\sigma 3$) pa nije σ-algebra.

Pomoću propozicije 2.5. lako je dokazati sljedeći korolar koji je koristan alat za konstrukciju σ-algebri.

2.7. Korolar
Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa X. Tada je

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}, \ \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\} \tag{2.1}$$

najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je σ-algebra generirana s $\mathcal{F}$.

2.8. Propozicija
Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Tada je

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}^c),$$

gdje je $\mathcal{F}^c = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$.

Dokaz. Kako je $\sigma(\mathcal{F})$ zatvorena na komplementiranje, vrijedi $\mathcal{F}^c \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, odakle slijedi $\sigma(\mathcal{F}^c) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Postupajući analogno, dobiva se $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}^c)$. ■

2.2.1. Borelova σ-algebra

Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Za σ-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$ kaže se da je Borelova σ-algebra na skupu X, i najčešće se označava s $\mathcal{B}(X,\mathcal{U})$, $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}_X$. Članovi od $\mathcal{B}(X)$ zovu se Borelovi skupovi. U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$.

Napomenimo da se ideja σ-aditivnosti, koju ćemo obraditi u sljedećoj točki, pripisuje Borelu[5] i Lebesgueu.

U najopćenitijem slučaju, vrlo je teško eksplicitno opisati σ-algebru $\sigma(\mathcal{F})$ generiranu familijom $\mathcal{F}$. Za Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi ovaj teorem:

2.9. Teorem
Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirana je sa svakom od sljedećih familija:

(a) $\mathcal{F}_1 := \{F \subseteq \mathbb{R} : F \text{ zatvoren}\}$

(b) $\mathcal{F}_2 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$

(c) $\mathcal{F}_3 := \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

(d) $\mathcal{F}_4 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$

(e) $\mathcal{F}_5 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

(f) $\mathcal{F}_6 := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

(g) $\mathcal{F}_7 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

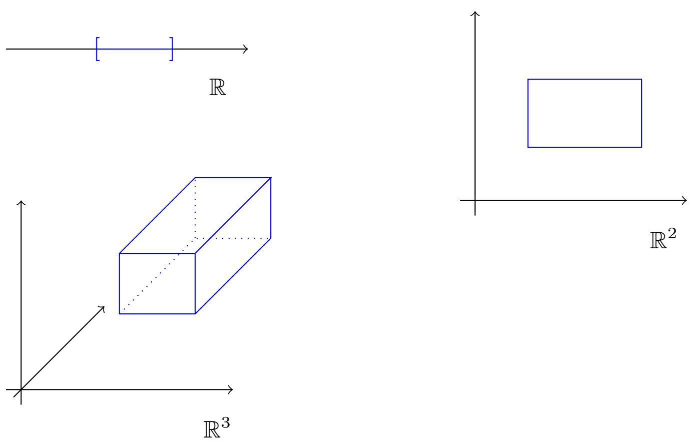
(h) $\mathcal{F}_8 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

---

[5] Emil Borel (1871.-1956.), francuski matematičar.

(i) $\mathcal{F}_9 := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Dokaz teorema 2.9. dat ćemo poslije. Prvo uvedimo pojam d-intervala na $\mathbb{R}^d$. Intervale oblika (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, zovemo **1-intervali**. Neka su $I_1, \dots, I_d$ 1-intervali. Skup oblika $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$ zovemo **d-interval** na $\mathbb{R}^d$.



Slika 6. Intervali na $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$.

2.10. Lema

Svaki neprazan otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^d$ može se prikazati kao unija najviše prebrojivo mnogo međusobno disjunktnih d-intervala oblika

$$\left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : j_i 2^{-k} \leq x_i < (j_i + 1)2^{-k},\ i = 1, \dots, d\right\}, \tag{2.2}$$

gdje su $j_1, \dots, j_d$ neki cijeli brojevi, a k neki prirodan broj.

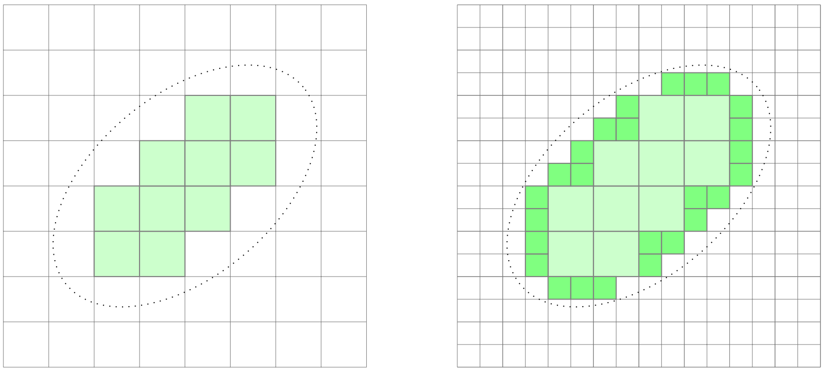
Dokaz. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ sa $\mathcal{C}_k$ označimo familiju svih d-intervala oblika (2.2). Familija $\mathcal{C}_k$ ima sljedeća dva očigledna svojstva:

(a) $\mathcal{C}_k$ je particija skupa $\mathbb{R}^d$,

(b) Ako je $k_1 < k_2$, onda je svaki član iz $\mathcal{C}_{k_2}$ sadržan u nekom članu iz $\mathcal{C}_{k_1}$.

Prvo pokažimo da je $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ prebrojiv skup. U tu svrhu, svakom d-intervalu oblika (2.2) pridružimo točku $(j_1, j_2, \dots, j_d, k) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. Ovako definirano preslikavanje je bijekcija sa $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ na prebrojiv skup $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$. Dakle, skup $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ je prebrojiv. Slično se pokaže da su svi skupovi $\mathcal{C}_k$, $k \in \mathbb{N}$, prebrojivi.

Sada ćemo pokazati da se U može prikazati kao konačna ili prebrojiva unija međusobno disjunktnih d-intervala oblika (2.2). U tu svrhu induktivno ćemo definirati familiju $\mathcal{D}$ na sljedeći način: Na početku ($k = 1$) u $\mathcal{D}$ stavimo sve d-intervale iz $\mathcal{C}_1$ koji su sadržani u skupu U. U k-tom koraku ($k = 2, 3, \ldots$) dodajmo u $\mathcal{D}$ sve d-intervale iz $\mathcal{C}_k$ koji su sadržani u skupu U i koji su disjunktni sa svim d-intervalima stavljenim u $\mathcal{D}$ u nekom ranijem koraku. Za slučaj otvorenog skupa u $\mathbb{R}^2$ prva dva koraka prikazana su na slici 7.



1. korak ($k = 1$) 2. korak ($k = 2$)

Slika 7. Dekompozicija skupa $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Kako je $\mathcal{D} \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$, $\mathcal{D}$ je konačna ili prebrojiva familija međusobno disjunktnih d-intervala oblika (2.2). Nadalje, očito je unija svih članova iz $\mathcal{D}$ sadržana u skupu U. Preostaje pokazati da je skup U sadržan u uniji svih članova iz $\mathcal{D}$. Neka je $x \in U$. Kako je U otvoren skup, svaki d-interval iz $\mathcal{C}_k$ koji sadrži x bit će sadržan u skupu U ako je k dovoljno velik. Neka je k_0 najmanji takav k. Tada d-interval iz $\mathcal{C}_{k_0}$ koji sadrži x pripada familiji $\mathcal{D}$. ■

Dokaz teorema 2.9. Prvo ćemo pokazati da je

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}_1) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_3) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_4) = \sigma(\mathcal{F}_5) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_6) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_7) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_8) \supseteq \sigma(\mathcal{F}_9)$$

a zatim da je $\sigma(\mathcal{F}_9) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Time će dokaz biti kompletan.

Prvo uočimo da su jednakosti u gornjem lancu posljedica propozicije 2.8. Nadalje ćemo stalno koristiti činjenicu da je svaka σ-algebra zatvorena s obzirom na komplementiranje, formiranje prebrojive unije i formiranje prebrojivog presjeka.

(b) Kako je $(-\infty, b) = [b, \infty)^c \in \sigma(\mathcal{F}_1)$, te kako je $\sigma(\mathcal{F}_2)$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}_2$, to je $\sigma(\mathcal{F}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_1)$.

(d) Kako je $(-\infty, b] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, b + \frac{1}{n}) = \Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [b + \frac{1}{n}, \infty)\Big)^c \in \sigma(\mathcal{F}_3)$, te kako je $\sigma(\mathcal{F}_4)$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}_4$, dobivamo $\sigma(\mathcal{F}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_3)$.

(f) Dovoljno je provjeriti da vrijedi $(a, b] = (a, \infty) \cap (-\infty, b] = (a, \infty) \cap (b, \infty)^c \in \sigma(\mathcal{F}_5)$, odakle zaključujući na isti način kao u prethodnim slučajevima dobivamo $\sigma(\mathcal{F}_6) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_5)$.

(g) $[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a-\frac{1}{n}, b] \in \sigma(\mathcal{F}_6)$ implicira $\sigma(\mathcal{F}_7) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_6)$.

(h) Pomoću jednakosti $(a,b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$ koja vrijedi za svaki dovoljno velik prirodan broj n_0 lako se pokaže da je $\sigma(\mathcal{F}_8) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_7)$.

(i) Kako je $[a,b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a-\frac{1}{n}, b) \in \sigma(\mathcal{F}_8)$, slijedi $\sigma(\mathcal{F}_9) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_8)$.

Preostaje pokazati inkluziju $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_9)$. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirana je s familijom $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$. Neka je $U \in \mathcal{U}$. Prema lemi 2.10. U se može prikazati kao konačna ili prebrojiva unija međusobno disjunktnih intervala oblika $[a,b)$, gdje su $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Kako svaki taj interval $[a,b)$ pripada σ-algebri $\sigma(\mathcal{F}_9)$, to je $U \in \sigma(\mathcal{F}_9)$. Dakle, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_9)$. ■

2.11. Teorem

Borelovu σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generira svaka od sljedećih familija:

(a) Familija svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$,

(b) Familija svih zatvorenih poluprostora u $\mathbb{R}^d$ oblika

$$\mathbb{R}^{i-1} \times (-\infty, b] \times \mathbb{R}^{d-i}, \quad b \in \mathbb{R},$$

(c) Familija svih pravokutnika u $\mathbb{R}^d$ oblika

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots \times (a_d, b_d].$$

Dokaz. Ovaj se teorem može dokazati na isti način kao i teorem 2.9. Zato izostavljamo detalje. Tvrdnja pod (a) slijedi iz propozicije 2.8. Sa $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ označimo σ-algebre generirane familijama pod (a), (b) i (c). Kako je svaki član iz familije (b) zatvoren skup, on je sadržan u σ_a i zato je $\sigma_b \subseteq \sigma_a$. Nadalje, svaka pruga oblika $\mathbb{R}^{i-1} \times (a,b] \times \mathbb{R}^{d-i}$ može se prikazati kao razlika dva poluprostora iz familije (b). Zato je ta pruga sadržana u σ_b. Kako se svaki pravokutnik iz familije (c) može prikazati kao presjek odgovarajućih d pruga, to je i pravokutnik sadržan u σ_b, odakle se lako zaključuje da je $\sigma_c \subseteq \sigma_b$. Dakle, za sada smo pokazali da vrijedi

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma_a \supseteq \sigma_b \supseteq \sigma_c.$$

Dokaz inkluzije $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \sigma_c$ provodi se na potpuno isti način kao dokaz odgovarajuće inkluzije u teoremu 2.9. ■

2.2.2. Monotone klase

Za niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ podskupova od X kažemo da je monotono rastući ako je $A_i \subseteq A_{i+1}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. U tom slučaju, ako je $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, pišemo $A_n \uparrow A$.

Niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ je monotono padajući ako je $A_i \supseteq A_{i+1}$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju pišemo $A_n \downarrow A$, gdje je $A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

2.12. Propozicija

Neka je $\mathcal{A}$ algebra na skupu X koja ima barem jedno od sljedeća dva svojstva:

(a) Za svaki niz rastućih skupova iz $\mathcal{A}$ i njihova unija je član od $\mathcal{A}$,

(b) Za svaki niz padajućih skupova iz $\mathcal{A}$ i njihov presjek je član od $\mathcal{A}$.

Tada je $\mathcal{A}$ σ-algebra.

Dokaz. Treba pokazati da je familija $\mathcal{A}$ zatvorena na formiranje prebrojivih unija. Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$. Treba pokazati da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. U tu svrhu definirajmo rastući niz skupova iz $\mathcal{A}$:

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i. \tag{2.3}$$

(a) Po pretpostavci je $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$, odakle pomoću (2.3) dobivamo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
(b) Kako je $(B_i^c)_{i\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz algebre $\mathcal{A}$, po pretpostavci je $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c \in \mathcal{A}$. Zato je $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$, a zbog (2.3) je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. ■

2.13. Definicija

Familija $\mathfrak{M}$ podskupova od X zove se monotona klasa *na skupu X ako ima sljedeća dva svojstva:*

(i) Za svaki niz rastućih skupova iz $\mathfrak{M}$ i njihova unija je član od $\mathfrak{M}$,

(ii) Za svaki niz padajućih skupova iz $\mathfrak{M}$ i njihov presjek je član od $\mathfrak{M}$.

Svaka σ-algebra očito je monotona klasa.

2.14. Korolar

Familija $\mathcal{A}$ podskupova od X je σ-algebra na X onda i samo onda ako je $\mathcal{A}$ algebra i monotona klasa.

Lako je pokazati da je presjek proizvoljne familije monotonih klasa nad istim skupom X također monotona klasa. Za najmanju monotonu klasu koja sadrži familiju $\mathcal{E}$ podskupova od X, tj. za presjek svih monotonih klasa koje sadrže familiju $\mathcal{E}$ kažemo da je generirana sa $\mathcal{E}$ i označavamo je sa $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$.

2.15. Korolar

Ako je $\mathcal{A}$ algebra na X, onda je $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Dokaz. $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ je algebra (vidi zadatak 11., str. 25.) pa iz korolara 2.14. slijedi da je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ ujedno i σ-algebra. Kako je $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, to je $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Preostaje dokazati da je $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Zaista, kako je $\sigma(\mathcal{A})$ monotona klasa (korolar 2.14.) i kako je $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, slijedi $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ jer je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ najmanja monotona klasa koja sadrži $\mathcal{A}$. ■

2.16. PRIMJEDBA

Korisnost monotonih klasa zasniva se upravo na prethodnom korolaru. Kako bismo to vidjeli, pretpostavimo da je svakom podskupu od X (elementu od 2^X) pridružena neka tvrdnja T. Nadalje, pretpostavimo da je ta tvrdnja točna za svaki element neke familije $\mathcal{A} \subseteq 2^X$. Postavlja se pitanje vrijedi li tvrdnja T za svaki element iz $\sigma(\mathcal{A})$.

Neka je $\mathcal{E}$ skup svih podskupova od X za koje vrijedi tvrdnja T. Po pretpostavci tada je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Odgovor na postavljeno pitanje je pozitivan onda i samo onda ako je $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$, a da bi se to pokazalo dovoljno je pokazati da je $\mathcal{E}$ σ-algebra. Međutim, ako je $\mathcal{A}$ algebra, dovoljan je i slabiji uvjet na familiju $\mathcal{E}$. Naime, dovoljno je pokazati da je $\mathcal{E}$ monotona klasa. Zaista, ako je $\mathcal{E}$ monotona klasa, onda je $\mathcal{E} = \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ i zato je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} = \mathfrak{M}(\mathcal{E})$, odakle slijedi $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$. Nadalje, kako je prema prethodnom korolaru $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, dobivamo da je $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$.

Zadaci za vježbu

1. Zadana je σ-algebra $\mathcal{A}$ na skupu X. Dokažite: (a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$. (b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$.

2. Neka je X skup, a $B \subseteq X$. Dokažite: (a) Ako je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, onda je $B \cap \mathcal{A} = \{B \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ jedna σ-algebra na skupu B (vidi propoziciju 4.40.). (b) Ako je $\mathfrak{M}$ monotona klasa na X, onda je $B \cap \mathfrak{M} = \{B \cap M : M \in \mathfrak{M}\}$ također monotona klasa.

3. Neka je $f : X \to Y$ funkcija, a $(A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija podskupova od Y. Dokažite ove tvrdnje: (a) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$. (b) $f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$ $= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$.

4. Neka je $f : X \to Y$ funkcija, a Σ neka σ-algebra na Y. Dokažite da je $f^{-1}(\Sigma) = \{f^{-1}(S) : S \in \Sigma\}$ σ-algebra na X.

5. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor mjere i $f : X \to Y$ funkcija. Dokažite da je $\Sigma := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ jedna σ-algebra na Y.

6. Neka je $f : X \to Y$ funkcija i $\mathcal{A}$ neka σ-algebra na skupu X. Pokažite primjerom da $f(\mathcal{A}) = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ općenito nije σ-algebra na Y.

7. Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X. Za neprazan skup $A \in \mathcal{A}$ kažemo da je atom ako nijedan njegov pravi podskup ne pripada σ-algebri $\mathcal{A}$. a) Neka $\mathcal{A}$ ima n atoma. Dokažite da $\mathcal{A}$ ima najmanje 2^n elemenata. (b) Što su atomi u $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

8. Neka je $X = [0,1]$. Pronađite σ-algebru generiranu sljedećim skupovima i odredite atome: (a) $\{(0,1/2)\}$. (b) $\{[0,1/4),(3/4,1]\}$. (c) $\{[0,3/4],[1/4,1]\}$.

   Rješenje: (a) $\{\emptyset,(0,1/2),\{0\},[1/2,1],[0,1]\}$, tri atoma: $\{0\}$, $(0,1/2)$ i $(0,1/2)^c$. (b) $\{\emptyset,[0,1/4),[1/4,3/4],(3/4,1],[0,3/4],[1/4,1],[0,1/4)\cup(3/4,1],[0,1]\}$, tri atoma: $[0,1/4)$, $[1/4,3/4]$, $(3/4,1]$.

9. Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na X i y neki element koji ne pripada skupu X. Odredite najmanju σ-algebru na $X\cup\{y\}$ koja sadrži familiju $\mathcal{A}$ i y.

   Rješenje: Tražena σ-algebra je $\mathcal{A}\cup\{A\cup\{y\} : A\in\mathcal{A}\}$.

10. (a) Pokažite da u metričkom prostoru X familija otvorenih skupova tvori σ-algebru onda i samo onda ako je X diskretan metrički prostor, tj. ako je otvoren svaki podskup od X. (b) Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Je li topologija $\mathcal{U}$ ujedno i σ-algebra?

    Uputa: (a) Neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova. Ako je X diskretan metrički prostor, onda je $\mathcal{U}=2^X$. Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ σ-algebra. Neka je $x\in X$. S $K(x,r)$ označimo otovrenu kugla oko x radijusa r. Iz jednakosti $\{x\}=\cap_{n=1}^{\infty}K(x,\frac{1}{n})$ i zatvorenosti σ-algebre $\mathcal{U}$ na prebrojive presjeke slijedi da je $x\in\mathcal{U}$.

11. Neka je $\mathcal{A}$ algebra na X. Pokažite da je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ algebra.

    Uputa: Kako je $X\in\mathcal{A}$ te kako je $\mathcal{A}\subseteq\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ po definiciji, imamo da je $X\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Preostaje pokazati da je monotona klasa $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ zatvorena na komplementiranje i formiranje konačnih unija. U tu svrhu prvo definirajte familiju $\mathfrak{M}_1 := \{B\subseteq X : B^c, B\cup A\in\mathfrak{M}(\mathcal{A}) \text{ za svaki } A\in\mathfrak{M}(\mathcal{A})\}$, a zatim pokažite da je $\mathfrak{M}_1$ monotona klasa koja sadrži $\mathcal{A}$. Zato je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})\subseteq\mathfrak{M}_1$, odakle slijedi da je $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ zatvorena na komplementiranje i na formiranje konačnih unija.

12. Pokažite da je Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ generirana s familijom $\mathcal{K}^d$ svih kompaktnih skupova iz $\mathbb{R}^d$.

    Uputa: Neka je $\mathcal{C}^d$ familija svih zatvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$. Prema teoremu 2.11. je $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)=\sigma(\mathcal{C}^d)$. Kako je $\mathcal{K}^d\subseteq\mathcal{C}^d$, imamo $\sigma(\mathcal{K}^d)\subseteq\sigma(\mathcal{C}^d)$. S druge strane, ako je $C\in\mathcal{C}^d$, onda je za svaki $n\in\mathbb{N}$ skup

    $$C_n := C\cap\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x}\|\le n\}$$

    omeđen i zatvoren pa prema tome i kompaktan, tj. $C_n\in\mathcal{K}^d$. Po konstrukciji je $C=\cup_{n\in\mathbb{N}}C_n\in\sigma(\mathcal{K}^d)$, odakle slijedi da je $\mathcal{C}^d\subseteq\sigma(\mathcal{K}^d)$. Zato je $\sigma(\mathcal{C}^d)\subseteq\sigma(\mathcal{K}^d)$.

13. Skup $\mathbb{Q}$ primjer je Borelova skupa koji nije otvoren, a nije ni zatvoren. Navedite još nekoliko primjera takvih Borelovih skupova.

14. Neka je $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ Borelov skup i $t>0$ realan broj. Dokažite da je $tA=\{ta : a\in A\}$ Borelov skup.

Uputa: Tvrdnja očito vrijedi ako je $A \in \mathcal{I}$, gdje je $\mathcal{I}$ familija svih d-intervala. Neka je $\mathcal{B}_t := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Pokažite da je $\mathcal{B}_t$ σ-algebra, te uočite da je $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, odakle slijedi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{B}_t) = \mathcal{B}_t \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. To znači da je $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

15. Neka je S skup svih brojeva iz segmenta $[0, 1]$ koji u svom decimalnom prikazu sadrže znamenku 7. Dokažite da je S Borelov skup.

Uputa: Skup S_n svih brojeva koji na n-tom decimalnom mjestu imaju znamenku 7 glasi

$$S_n = \bigcup_{k=0}^{10^{n-1}-1} \Big[\frac{k}{10^{n-1}} + \frac{7}{10^n}, \frac{k}{10^{n-1}} + \frac{8}{10^n}\Big).$$

Svaki skup iz te unije je Borelov, pa su zato S_n i $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ Borelovi skupovi.

2.3. Mjera na σ-algebri

Prošireni skup realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ (koristi se i oznaka $[-\infty, \infty]$) po definiciji je $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Uređaj $\leq$ proširuje se sa $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ tako da se definira

$$-\infty < x < \infty, \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Zbrajanje i množenje proširuju se sa $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ tako da se definira:

$$\begin{aligned}
&x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, && x \in \mathbb{R}\\
&x + (\infty) = (\infty) + x = \infty, && x \in \mathbb{R}\\
&x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty, && x > 0\\
&x \cdot (\infty) = (\infty) \cdot x = \infty, && x > 0\\
&x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty, && x < 0\\
&x \cdot (\infty) = (\infty) \cdot x = -\infty, && x < 0\\
&\infty + \infty = \infty\\
&(-\infty) + (-\infty) = -\infty\\
&\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\\
&\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.
\end{aligned}$$

Zbrojevi $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$ ne definiraju se. U mnogim matematičkim disciplinama ne definiraju se ni produkti $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$ i $0 \cdot (-\infty)$. Međutim, u teoriji mjere pokazalo se korisnim te produkte definirati kao:

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0.$$

Od sada pa nadalje treba razlikovati simbol za red $\sum_n a_n$ od simbola za njegovu sumu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.17. Definicija

Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu X. Mjera na $\mathcal{A}$ *svako je preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

(μ1) *(*nenegativnost*) $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$,*

(μ2) $\mu(\emptyset) = 0$,

(μ3) *(σ-*aditivnost *ili* prebrojiva aditivnost*) Za svaki niz $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{2.4}$$

Za $\mu(A)$ kaže se da je mjera skupa *A. Trojka $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zove se* prostor mjere.
Kažemo da je mjera μ konačna *ako je $\mu(X) < \infty$.*

Mjera μ je σ-konačna *ako se skup X može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne μ-mjere, tj. ako postoji niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.*

Skup $A \in \mathcal{A}$ je σ-konačan *s obzirom na mjeru μ ako se može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne μ-mjere.*

Desna strana u (2.4) označava sumu reda. Često se kaže da je μ *mjera na X* ili *mjera na $(X, \mathcal{A})$*.

2.18. PRIMJER. *Navedimo nekoliko primjera mjere:*

1. *Ako za svaki $A \in \mathcal{A}$ stavimo $\mu(A) = 0$, dobivamo tzv.* trivijalnu mjeru.
2. *Neka je na skupu X zadana σ-algebra $\mathcal{A}$. Definirajmo funkciju $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ na sljedeći način: Ako je $A \in \mathcal{A}$ konačan skup s n elemenata, stavimo $\mu(A) = n$. U suprotnom, tj. ako je A beskonačan skup, stavimo $\mu(A) = \infty$. Lako je provjeriti da je μ mjera. Ova mjera zove se* diskretna mjera *ili* mjera prebrojavanja.
3. *Neka je $\mathcal{A}$ bilo koja σ-algebra na skupu X.*
   (a) *Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom*
   $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$
   je mjera.
   (b) *Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom*
   $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ 1, & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$
   nije mjera. Zaista, ako su A_1, A_2 disjunktni neprazni skupovi iz $\mathcal{A}$, onda je $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$, $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$, što nam govori da μ nije σ-aditivna funkcija.
   (c) *Neka je x bilo koja točka iz skupa X. Funkcija $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom*
   $$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako } x \notin A \end{cases}$$
   je mjera. Mjera δ_x zove se mjera koncentrirana u točki x *ili* Diracova mjera koncentrirana u točki x *(ili kraće* Diracova delta mjera*).*

   Općenitije, kažemo da je mjera μ koncentrirana na skupu $B \subset X$ *ako je $\mu(A) = 0$ kad god je $A \cap B = \emptyset$. Ako je $B \in \mathcal{A}$, to je ekvivalentno sa $\mu(A) = \mu(A \cap B)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$, što je lako provjeriti pomoću jednakosti $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.*

4. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Funkcija $\lambda\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\lambda \geq 0$, je mjera.*
5. *Neka je X diskretan skup, $\mathcal{A}$ bilo koja σ-algebra na skupu X i $\lambda : X \to [0, \infty]$ funkcija. Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ zadana formulom*

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \sum\limits_{x \in A} \lambda(x), & \text{ako je } A \neq \emptyset \end{cases}$$

je mjera. Za dokaz σ-aditivnosti može se upotrijebiti lema 2.30.

Posebno, za $\lambda = 1$ dobiva se mjera prebrojavanja, a za $\lambda := \chi_{\{x\}}$ dobivamo Diracovu delta mjeru.

2.19. Propozicija (Osnovna svojstva mjere)
Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Mjera $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ima ova svojstva:

(i) *(monotonost) $(\forall A, B \in \mathcal{A})$ $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.*
Ako je $\mu(A) < \infty$, onda je $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) *(σ-subaditivnost) Za svaki niz $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iii) *(neprekidnost na rastuće nizove) Za svaki rastući niz $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

(iv) *(neprekidnost na padajuće nizove) Neka je $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz $\mathcal{A}$. Ako je $\mu(A_1) < \infty$, onda je*

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. (i) Iz $A, B \in \mathcal{A}$ slijedi $B \backslash A = B \cap A^c \in \mathcal{A}$. Kako je $B = A \cup (B \backslash A)$ i $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, zbog σ-aditivnosti i nenegativnosti mjere je

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A).$$

Ako pretpostavimo da je $\mu(A) < \infty$, onda dobivamo još i $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(ii) Definirajmo pomoćne skupove $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} A_k \in \mathcal{A}$, $i \geq 2$. Očito je $B_i \subseteq A_i$, odakle zbog monotonosti mjere dobivamo $\mu(B_i) \leq \mu(A_i)$. Skupovi B_i međusobno su disjunktni i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Iz σ-aditivnosti mjere μ slijedi

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(iii) Neka su međusobno disjunktni skupovi B_i definirani na isti način kao u dokazu tvrdnje (ii). Tada, osim što je $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, zbog pretpostavke $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ je $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = A_n$, pa iz σ-aditivnosti mjere μ slijedi $\mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$ i

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(iv) Skupovi $A_1 \backslash A_i = A_1 \cap A_i^c \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, tvore rastući niz. Pri tome je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \backslash A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \cap A_i^c) = A_1 \bigcap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\big) = A_1 \bigcap \big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\big)^c = A_1 \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

Primjenom tvrdnje (iii) dobivamo

$$\mu\Big(A_1 \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n). \tag{2.5}$$

Nadalje, kako je $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_n \subseteq A_1$ i $\mu(A_1) < \infty$, prema tvrdnji (i) je

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_1) < \infty$$

i desna strana jednakosti (2.5) može se raspisati kao

$$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

odakle slijedi (iv). ∎

2.20. PRIMJER. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Ako je $\mu(X) = 1$, kaže se da je μ* vjerojatnosna mjera *ili* vjerojatnost, *a $\mathcal{A}$ zovemo σ-*algebra događaja.

Neka je X konačan skup, a $\mathcal{A} = 2^X$. Provjerite da je formulom $\mu(A) = \frac{\mathrm{kard}\,(A)}{\mathrm{kard}\,(X)}$ definirana vjerojatnosna mjera $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$.

Spomenimo da se mjera na $(X, \mathcal{B}(X))$, gdje je $\mathcal{B}(X)$ Borelova σ-algebra, obično zove Borelova mjera na skupu X.

Zadaci za vježbu

1. Neka je X bilo koji neprazan skup. Pokažite da je funkcija $\mu : 2^X \to [0,\infty]$ zadana s
$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ diskretan skup} \\ \infty, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$
mjera na $(X, 2^X)$.

2. Dokažite da je formulom $\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n}\delta_n$, gdje je δ_n Diracova delta funkcija, zadana vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3. Neka su $p, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \le p \le 1$ i $p + q = 1$. Dokažite da je funkcija $\beta_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zadana s
$$\beta_n(B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Uputa: Diracova delta mjera je vjerojatnosna mjera, tj. $\delta_k(\mathbb{R}) = 1$. Zaista, vrijedi:
$$\begin{aligned}
\beta_n(\emptyset) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot 0 = 0, \\
\beta_n\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_k(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_n(A_j), \\
\beta_n(\mathbb{R}) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

4. Neka je μ mjera na $(X, \mathcal{A})$. (a) Dokažite da za sve $A, B \in \mathcal{A}$ vrijedi $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$. (b) Neka je μ konačna mjera. Dokažite da za sve $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ vrijedi
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$
Uputa: (a) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$, $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$, $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, a skupovi $A \cap B$, $A \backslash B$ i $B \backslash A$ su disjunktni. Zato je
$$\begin{aligned}
\mu(A) + \mu(B) &= \big[\mu(A \cap B) + \mu(A \backslash B)\big] + \big[\mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)\big] \\
&= \mu(A \cap B) + \big[\mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A)\big] \\
&= \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B).
\end{aligned}$$

(b) Dokaz je lako provesti matematičkom indukcijom po n služeći se rezultatom pod (a).

5. Neka je μ mjera na $(X, \mathcal{A})$. Dokažite da za svaka dva izmjeriva skupa A i B vrijedi
$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A\Delta B),$$
gdje je $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ simetrična razlika skupova A i B.

   Uputa: Iz $A \subseteq (A\Delta B)\cup B$ slijedi $\mu(A) \leq \mu(A\Delta B)+\mu(B)$, a iz $B \subseteq (A\Delta B)\cup A$ slijedi $\mu(B) \leq \mu(A\Delta B) + \mu(A)$.

6. Neka su $\mu_1, \mu_2, \ldots$ mjere na $(X, \mathcal{A})$, a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nenegativni realni brojevi. Dokažite da je formulom $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i \mu_n(A)$ definirana mjera na $\mathcal{A}$.

7. Neka je μ mjera na $(X, \mathcal{A})$ i $E \in \mathcal{A}$.

   (a) Pokažite da je formulom
$$\mu_{|E}(A) := \mu(A \cap E), \qquad A \in \mathcal{A}$$
definirana nova mjera na $(X, \mathcal{A})$ koja se zove restrikcija mjere μ na skup E.

   (b) Neka je $\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$. Pokažite da je $(E, \mathcal{A}_E, \mu_{|E})$ prostor mjere.

8. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to Y$ funkcija i $\Sigma = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Familija Σ je σ-algebra (vidi zadatak 5. na str. 24.). Neka je $\mu' : \Sigma \to [0, \infty]$ definirana formulom
$$\mu'(B) = \mu(f^{-1}(B)), \qquad B \in \Sigma.$$
Dokažite da je μ' mjera na (Y, Σ). Za mjeru μ' kažemo da je slika mjere μ po funkciji f.

   Uputa: Iskoristite zadatak 3. na str. 24.

9. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite: Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$ sa svojstvom $\mu(A_n \cap A_m) = 0$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, onda je $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

   Uputa: Neka je $E_1 = A_1$ i $B_1 = \emptyset$. Za svaki $n \geq 2$ definirajte skupove
$$E_n := A_n \backslash \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m, \qquad B_n := A_n \cap \Big(\bigcup_{m=1}^{n-1} A_m\Big) = \bigcup_{m=1}^{n-1} (A_n \cap A_m).$$
Tada vrijedi: (i) $A_n = E_n \cup B_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. (ii) Skupovi E_n, $n \in \mathbb{N}$, međusobno su disjunktni. (iii) $\mu(B_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (jer je $\mu(A_n \cap A_m) = 0$, $n \neq m$) i zato je $\mu(A_n) = \mu(E_n)$, $n \geq 1$.

Očito je $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Neka je $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. S n_0 označimo najmanji prirodan broj takav da je $x \in A_{n_0}$. Tada je $x \in E_{n_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dakle, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Konačno,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

10. Mjera μ je polukonačna ako za svaki $A \in \mathcal{A}$ za koji je $\mu(A) = \infty$ postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq A$ i $0 < \mu(B) < \infty$. Svaka σ-konačna mjera je i polukonačna. Je li polukonačna mjera μ iz 1. zadatka?

11. Neka je $(X, 2^X, \mu)$ prostor mjere. Za mjeru μ kažemo da je $0-1$ mjera na X ako je $\mu(2^X) = \{0, 1\}$, $\mu(\{x\}) = 0$ za svaki $x \in X$ i $\mu(X) = 1$. Pokažite da ne postoji $0-1$ mjera na $\mathbb{N}$.

    Uputa: Kada bi postojala $0-1$ mjera μ na $\mathbb{N}$, onda bi bilo $1 = \mu(\mathbb{N}) = \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\{j\}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 0 = 0$.

12. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Definirajte funkciju $\mu^\star : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ formulom

    $$\mu^\star(A) = \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B \in \mathcal{A} \ \&\ \mu(B) < \infty\}.$$

    Dokažite: (a) $\mu^\star$ je mjera. (b) Ako je μ σ-konačna mjera, onda je $\mu^\star = \mu$. (c) Pronađite $\mu^\star$ za mjeru $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiranu formulom

    $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ \infty, & \text{ako je } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

    Uputa: (a) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Po definiciji supremuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu(B) < \infty$ i

    $$\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \mu(B) + \varepsilon.$$

    Tada je (jer su skupovi $B \cap A_n$, $n \in \mathbb{N}$, međusobno disjunktni, $B \cap A_n \subseteq A_n$ i $\mu(B \cap A_n) < \infty$)

    $$\begin{aligned} \mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &\le \mu(B) + \varepsilon = \mu\Big(B \cap \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\Big) + \varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap A_n)\Big) + \varepsilon \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap A_n) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

    odakle zbog proizvoljnosti broja ε slijedi $\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n)$. Dokaz obratne nejednakosti: Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ i za sve $j = 1, \ldots, n$ postoji $B_j \in \mathcal{A}$ takav da je $B_j \subseteq A_j$, $\mu(B_j) < \infty$ i $\mu^\star(A_j) < \mu(B_j) + \varepsilon/2^j$. Zato je

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{A}, \quad \bigcup_{j=1}^{n} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j \quad \& \quad \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) < \infty.$$

Sada dobivamo

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A_j) - \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi $\mu^\star\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^\star(A_j)$. Prijelazom na limes $n \to \infty$ dobivamo obratnu nejednakost.
(b) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Treba pokazati da je $\mu^\star(A) = \mu(A)$. Očito, ako je $A \in \mathcal{A}$ i $\mu(A) < \infty$, onda iz definicije od $\mu^\star$ slijedi $\mu^\star(A) = \mu(A)$. Preostaje razmotriti slučaj $\mu(A) = \infty$. Zbog σ-konačnosti mjere μ postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga je $\mu(A \cap A_n) < \infty$, što povlači $\mu^\star(A \cap A_n) = \mu(A \cap A_n)$. Sada, kako su μ i $\mu^\star$ mjere, dobivamo

$$\begin{aligned}\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap X) = \mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap A_n)\\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) = \mu(A).\end{aligned}$$

(c) $\mu^\star(A) = 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.

13. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokažite: (a) Ako je $A, B \in \mathcal{A}$ i $\mu(A\Delta B) = 0$, onda je $\mu(A) = \mu(B)$. (b) Definirajte relaciju $\sim$ stavljajući $A \sim B$ ako je $\mu(A\Delta B) = 0$. Pokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$. (c) Pretpostavimo da je $\mu(X) < \infty$ i definirajmo funkciju $\bar{d} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ formulom

$$\bar{d}(A, B) = \mu(A\Delta B), \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

Pokažite da je $\bar{d}$ pseudometrika na $\mathcal{A}$, tj. da ima svojstva: $\bar{d}(A, B) \geq 0$, $A = B \Rightarrow \bar{d}(A, B) = 0$, $\bar{d}(A, B) = \bar{d}(B, A)$ i $\bar{d}(A, B) \leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B)$. (d) Neka je $\mathcal{A}/\sim$ skup svih klasa ekvivalencije. Definirajte

$$d([A], [B]) := \bar{d}(A, B) = \mu(A\Delta B), \qquad [A], [B] \in \mathcal{A}/\sim .$$

Pokažite da je d metrika na $\mathcal{A}/\sim$.

Uputa: (a) Pogledajte rješenje 2. zadatka sa str. 88.

14. Pokažite da tvrdnja propozicije 2.19.(iv) općenito ne vrijedi ako je $\mu(A_1) = \infty$.

Uputa: *Primjer 1.*: Neka je μ mjera prebrojavanja na skupu $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$. Definirajte skupove $A_n = 2^n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova, $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, $0 = \mu(A) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty$.
Primjer 2.: Neka je $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, a μ neka bude mjera prebrojavanja. Skupovi oblika (n, ∞), $n \in \mathbb{N}$, tvore padajući niz. Očito je $\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, \infty) = \emptyset$ i $\mu((n, \infty)) = \infty$ za svaki n. Zato vrijedi

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(n, \infty)\Big) \neq \lim_{n\to\infty} \mu((n, \infty)) = \lim_{n\to\infty} \infty = \infty.$$

15. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih skupova iz prostora mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dokazati:
(a) $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\Big) \leq \liminf_n \mu(A_n)$.
(b) Pretpostavimo da je $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) < \infty$. Tada je

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) \geq \limsup_n \mu(A_n).$$

(c) Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Tada je

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = 0.$$

Ova je tvrdnja poznata kao Borel-Cantellijeva[6] lema.

Uputa: (a) Neka je $B_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova i $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. Zato je $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$. (b) Neka je $C_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Niz $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je padajući i $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Zato je $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \limsup_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \limsup_n \mu(A_n)$. (c) Iz pretpostavke $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ slijedi $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) = 0$. $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) = 0$.

[6] Francesco Paolo Cantelli (1875.-1966.), talijanski matematičar.

2.4. Vanjska mjera

2.21. DEFINICIJA
Neka je X skup, a 2^X njegov partitivni skup. Vanjska mjera *na skupu X je svaka funkcija $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ s ovim svojstvima:*

($\mu^\star 1$) $\mu^\star(\emptyset) = 0$,

($\mu^\star 2$) *(*monotonost*)* $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^\star(A) \leq \mu^\star(B)$,

($\mu^\star 3$) *(*σ-subaditivnost*) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz X vrijedi*

$$\mu^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A_i).$$

Zamijetite da će mjera biti ujedno i vanjska mjera onda i samo onda ako je ta mjera definirana na cijelom partitivnom skupu 2^X. Nadalje, vanjska mjera općenito nije i mjera. Evo primjera:

2.22. PRIMJER. *Neka je funkcija $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ zadana formulom*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A = \emptyset \\ 1, & \text{ako je } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Lako je provjeriti da je $\mu^\star$ vanjska mjera. Međutim, $\mu^\star$ nije σ-aditivna funkcija (vidi primjer 2.18. pod 3.b) pa nije ni mjera.

2.23. PRIMJER. *Neka je X skup a $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ ovako definirana funkcija:*

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je skup } A \text{ konačan ili prebrojiv} \\ 1, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Tada je $\mu^\star$ vanjska mjera, ali nije mjera.

U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$, kojoj ćemo posvetiti posebnu pažnju. Prvo uvedimo neke pojmove.

Neka je X skup, $\mathcal{A}$ σ-algebra na X i $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mjera. Ako je skup $B \subseteq X$ izmjeriv, tj. $B \in \mathcal{A}$, onda je

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Drugim riječima, izmjeriv skup B razbija svaki drugi izmjeriv skup A na dva disjunktna izmjeriva skupa $A \cap B$ i $A \cap B^c$ čije se mjere zbrajaju na željeni način.

Vanjska mjera $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ nema to svojstvo. Preciznije, ako je $B \subseteq X$, tj. $B \in 2^X$, zbog σ-subaditivnosti vanjske mjere je

$$\mu^\star(A) \leq \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X \tag{2.6}$$

s tim što se može pojaviti stroga nejednakost kao što je to slučaj za vanjske mjere definirane u primjerima 2.22. i 2.23. Zato uvodimo sljedeću definiciju:

2.24. Definicija
Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu X. Za skup $B \subseteq X$ kažemo da je $\mu^\star$-izmjeriv *ako je*

$$\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X.$$

Iz definicije slijedi da su $\emptyset$ i X $\mu^\star$-izmjerivi. Nadalje, ako je skup B $\mu^\star$-izmjeriv, onda je i B^c $\mu^\star$-izmjeriv skup.

Zbog nejednakosti (2.6), kako bi se dokazalo da je skup $B \subseteq X$ $\mu^\star$-izmjeriv, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c), \qquad \forall A \subseteq X. \tag{2.7}$$

Ako je $\mu^\star(A) = \infty$, onda je očito ispunjena nejednakost (2.7). Dakle, skup B bit će $\mu^\star$-izmjeriv ako nejednakost (2.7) vrijedi za svaki $A \subseteq X$ takav da je $\mu^\star(A) < \infty$.

2.25. Propozicija
Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu X. Ako je $\mu^\star(B) = 0$ ili $\mu^\star(B^c) = 0$, onda je B $\mu^\star$-izmjeriv skup.

Dokaz. Dovoljno je provjeriti da za svaki $A \subseteq X$ vrijedi

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c).$$

Tvrdnja slijedi iz monotonosti vanjske mjere: $\mu^\star(B) = 0$ povlači $\mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c) \leq \mu^\star(B) + \mu^\star(A) = \mu^\star(A)$. Slično, ako je $\mu^\star(B^c) = 0$, dobivamo $\mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c) \leq \mu^\star(A) + \mu^\star(B^c) = \mu^\star(A)$. ■

Sljedeći Carathéodoryjev[7] teorem ključan je za konstrukciju mnogih mjera.

2.26. Teorem (Carathéodory)
Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu X. Sa $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ označimo familiju svih $\mu^\star$-izmjerivih podskupova od X. Tada vrijedi:

(a) *$\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je σ-algebra na skupu X,*

(b) *Restrikcija funkcije $\mu^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ je mjera.*

Dokaz. (a) Već smo zaključili da $\emptyset$ i X pripadaju skupu $\mathcal{M}_{\mu^\star}$, te da je komplement $\mu^\star$-izmjerivog skupa također $\mu^\star$-izmjeriv. Preostaje pokazati zatvorenost familije $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ na formiranje prebrojive unije. Dokaz provodimo u tri koraka: (i) pokazat ćemo da su unija i presjek dva $\mu^\star$-izmjeriva skupa također $\mu^\star$-izmjerivi skupovi, (ii) pokazat ćemo da je prebrojiva unija međusobno disjunktnih $\mu^\star$-izmjerivih skupova također $\mu^\star$-izmjeriv skup, (iii) pokazat ćemo kako se prebrojivu uniju $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ od $\mu^\star$-izmjerivih skupova B_i (ne nužno disjunktnih) može zapisati u obliku prebrojive

[7] Constantin Carathéodory (1873.-1950.), njemački matematičar grčkog porijekla.

unije nekih novih međusobno disjunktnih $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Time će dokaz tvrdnje (a) biti završen.

(i) Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Zbog zatvorenosti familije $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ na komplementiranje, dovoljno je pokazati da je $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$. Neka je $A \subseteq X$ bilo koji podskup. Zbog $\mu^\star$-izmjerivosti skupa B_1 je

$$\begin{aligned} \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)) &= \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) \\ &= \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_1^c \cap B_2). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sada redom pomoću te jednakosti, identiteta $(B_1 \cup B_2)^c = B_1^c \cap B_2^c$, pretpostavke $B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ i na kraju pretpostavke $B_1 \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)^c) &= \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_1^c \cap B_2) \\ &\quad + \mu^\star(A \cap B_1^c \cap B_2^c) \\ &= \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_1^c) \\ &= \mu^\star(A), \end{aligned}$$

čime je završen dokaz $\mu^\star$-izmjerivosti skupa $B_1 \cup B_2$. Osim toga, ako su B_1 i B_2 još i disjunktni, onda iz (2.8) slijedi

$$\mu^\star(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \mu^\star(A \cap B_1) + \mu^\star(A \cap B_2). \tag{2.9}$$

(ii) Neka je $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Koristeći pretpostavku disjunktnosti skupova B_i, tvrdnju (i) prema kojoj je unija konačno mnogo μ-izmjerivih skupova također μ-izmjeriv skup i jednakost (2.9) koja vrijedi za bilo koja dva $\mu^\star$-izmjeriva i disjunktna skupa B_1 i B_2, lako je pokazati da za svaki $A \subseteq X$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n B_i\big)\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap B_i).$$

Zato, zbog $\mu^\star$-izmjerivosti skupa $\bigcup_{i=1}^n B_i$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mu^\star(A) &= \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n B_i\big)\Big) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n B_i\big)^c\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcap_{i=1}^n B_i^c\big)\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nadalje, zbog $A \cap \big(\bigcap_{i=1}^n B_i^c\big) \supseteq A \cap \big(\bigcap_{i=1}^\infty B_i^c\big) = A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\big)^c$ i monotonosti vanjske mjere $\mu^\star$, iz (2.10) dobivamo

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\big)^c\Big),$$

odakle prvo prijelazom na limes $n \to \infty$ slijedi

$$\mu^\star(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big)^c\Big). \tag{2.11}$$

Sada koristeći svojstvo σ-subaditivnosti vanjske mjere $\mu^\star$ nalazimo

$$\begin{aligned}
\mu^\star(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(A \cap B_i) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big)^c\Big) \\
&\geq \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big)\Big) + \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big)^c\Big) \\
&\geq \mu^\star(A).
\end{aligned}$$

Time je dokazana $\mu^\star$-izmjerivost skupa $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

(iii) Neka je $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Definirajmo nove skupove $C_1 := B_1$, $C_i := B_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} B_k$, $i \geq 2$. Skupovi C_i međusobno su disjunktni i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Kako je

$$C_i = B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k = B_i \cap \big(\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k\big)^c = B_i \cap \big(\bigcap_{k=1}^{i-1} B_k^c\big),$$

te kako se prema (i) presijecanjem konačno mnogo $\mu^\star$-izmjerivih skupova opet dobiva $\mu^\star$-izmjeriv skup, skupovi C_i su $\mu^\star$-izmjerivi. Prema (ii) skup $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ je $\mu^\star$-izmjeriv.

(b) Treba provjeriti σ-aditivnost restrikcija funkcije $\mu^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu^\star}$. U tu svrhu neka je $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{M}_{\mu^\star}$. Ako u (2.11) skup A zamijenimo sa $\cup_{i=1}^{\infty} B_i$, dobivamo

$$\mu^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\star(B_i) + 0.$$

Suprotna nejednakost slijedi iz σ-subaditivnosti vanjske mjere $\mu^\star$. ∎

Konstrukcija vanjske mjere. Sada ćemo pokazati kako se pomoću Carathéodoryjeva teorema (teorem 2.26.) mogu konstruirati razni prostori mjere. Krenimo redom. Prvo ćemo definirati neke pojmove i dokazati jednu propoziciju.

2.27. Definicija

*Neka je X neprazan skup. Familiju $\mathcal{C}$ podskupova od X zovemo σ-*pokrivač *od X ako ona ima sljedeća dva svojstva:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$,

(ii) Postoji niz $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ članova iz $\mathcal{C}$ takav da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$.

2.28. Propozicija

Neka je $\mathcal{C}$ neki σ-pokrivač nepraznog skupa X, a $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ bilo koja funkcija sa svojstvom $\tau(\emptyset) = 0$. Definirajmo funkciju $\mu_\tau^\star : 2^X \to [0, \infty]$ formulom

$$\mu_\tau^\star(A) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C} \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \Big\},$$

gdje se infimum uzima po svim nizovima $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u $\mathcal{C}$ takvim da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Funkcija $\mu_\tau^\star$ je vanjska mjera.

Skupovnu funkciju τ iz propozicije 2.28. zovemo proto-mjera. Uočimo da je neprazan skup čiji se infimum traži u definicijskoj formuli od $\mu_\tau^\star(A)$. Naime, po definicije σ-pokrivača $\mathcal{C}$ skup X može se prikazati kao prebrojiva unija članova iz $\mathcal{C}$, pa je onda skup $A \subseteq X$ očito sadržan u uniji tih članova iz $\mathcal{C}$.

2.29. Primjedba

Kako je $\emptyset \in \mathcal{C}$ i $\tau(\emptyset) = 0$, možemo smatrati da se infimum u definicijskoj formuli od $\mu_\tau^\star(A)$ uzima po svim nizovima u $\mathcal{C}$ koji pokrivaju skup A, bez obzira jesu li ti nizovi konačni ili beskonačni. Zaista, ako su $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ i $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} C_i$, onda konačan niz $(C_1, \ldots, C_n)$ možemo nadopuniti do beskonačnog niza $(C_1', C_2', \ldots) := (C_1, \ldots, C_n, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ koji očigledno također pokriva skup A. Pri tome je $\sum_{i=1}^{\infty} \tau(C_i') = \sum_{i=1}^{n} \tau(C_i)$.

Ideja vanjske mjere definirane pomoću proto-mjere ilustrirana je na slici 8.

Slika 8. Na ovoj slici σ-pokrivač $\mathcal{C}$ je skup svih pravokutnika iz $\mathbb{R}^2$, a τ proto-mjera koja pravokutniku pridružuje njegovu površinu. Na lijevoj strani slike krug je prekriven s pet, a na desnoj s devet pravokutnika. Prekrivanje s desne strane daje bolju aproksimaciju površine kruga.

U dokazu propozicije 2.28. koristit ćemo sljedeću lemu:

2.30. LEMA (VIDI NPR. [7])
Neka je $(x_{i,k}, (i,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N})$ *bilo koji niz nenegativnih realnih brojeva, a* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *bilo koja bijekcija. Red* $\sum_n x_{s(n)}$ *konvergira onda i samo onda ako konvergiraju svi redovi* $\sum_k x_{i,k}$*,* $i \in \mathbb{N}$*, te ako je i red* $\sum_i \big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{i,k}\big)$ *konvergentan. Pri tome je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{s(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\sum_{k=1}^{\infty} x_{i,k}\big).$$

Dokaz propozicije 2.28. Za prazan skup imamo $\emptyset \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset$, odakle iz definicije funkcije $\mu_\tau^\star$ dobivamo $\mu_\tau^\star(\emptyset) \le \sum_{i=1}^{\infty} \tau(\emptyset) = 0$. Kako je očito $\mu_\tau^\star \ge 0$, dobivamo $\mu_\tau^\star(\emptyset) = 0$.

Nadalje, $\mu_\tau^\star$ je monotona funkcija, tj.

$$(\forall A, B \subseteq X) \quad A \subseteq B \Rightarrow \mu_\tau^\star(A) \le \mu_\tau^\star(B).$$

To je stoga jer je svaki pokrivač skupa B ujedno i pokrivač skupa A.

Preostaje pokazati da je $\mu_\tau^\star$ σ-subaditivna funkcija. Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz podskupova od X. Treba pokazati da je

$$\mu_\tau^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i).$$

Ako je $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) = \infty$, onda sigurno vrijedi tražena nejednakost. Zato nadalje pretpostavimo da je $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) < \infty$. Tada je ujedno i $\mu_\tau^\star(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema definiciji broja $\mu_\tau^\star(A_i)$, postoji niz skupova $(C_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{C}$ takav da je $A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,k}$, da red $\sum_k \tau(C_{i,k})$ konvergira i da za njegovu sumu vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k}) < \mu_\tau^\star(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{2.12}$$

Očito je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,k}.$$

Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$, pa skupova $C_{i,k}$, $(i,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ima prebrojivo mnogo. Neka je $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bilo koja bijekcija. Pomoću te bijekcije niz skupova $(C_{i,k})_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ može se preindeksirati u novi niz $(C_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Pri tome je

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{i,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{s(n)}.$$

Nadalje, prema lemi 2.30. red $\sum_n \tau(C_{s(n)})$ konvergira onda i samo onda ako konvergiraju svi redovi $\sum_k \tau(C_{i,k})$, $i \in \mathbb{N}$, kao i odgovarajući red suma $\sum_i \big(\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k})\big)$. Pri tome je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_{s(n)}) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k})\Big). \tag{2.13}$$

Kako redovi $\sum_k \tau(C_{i,k})$, $i \in \mathbb{N}$, konvergiraju, preostaje zaključiti da konvergira i red $\sum_i \sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{i,k})$. To slijedi iz (2.12) primjenom poredbenog kriterija.

Iz (2.12) i (2.13) dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_{s(n)}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\mu_\tau^\star(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) + \varepsilon,$$

odakle iz definicije funkcije $\mu_\tau^\star$ slijedi

$$\mu_\tau^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ je $\mu_\tau^\star\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\tau^\star(A_i)$. Time smo dokazali da je $\mu_\tau^\star$ vanjska mjera. ■

Prema Carathéodoryjevom teoremu (teorem 2.26.) $\mathcal{M}_{\mu_\tau^\star}$ je σ-algebra, a restrikcija vanjske mjere $\mu_\tau^\star$ na $\mathcal{M}_{\mu_\tau^\star}$ je mjera. Na taj način možemo konstruirati mnoge mjere.

Zadaci za vježbu

1. Neka je X bilo koji neprebrojiv skup, te $\mu^\star, \nu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjske mjere definirane formulama:

$$\mu^\star(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ diskretan} \\ 1, & A \text{ u suprotnom}, \end{cases} \qquad \nu^\star(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ diskretan} \\ \infty, & A \text{ u suprotnom}. \end{cases}$$

Dokažite: (a) Skup $A \subseteq X$ je $\mu^\star$-izmjeriv onda i samo onda ako je A ili A^c diskretan skup. (b) Svaki skup $A \subseteq X$ je $\nu^\star$-izmjeriv.

Uputa: Općenito, ako je skup vanjske mjere 0, onda su on i njegov komplement izmjerivi (propozicija 2.25.). (a) Neka je jedan od skupova A i A^c diskretan. Tada je $\mu^\star(A) = 0$ ili $\mu^\star(A^c) = 0$, pa je A $\mu^\star$-izmjeriv. Ako niti jedan od skupova A i A^c nije diskretan, onda je $\mu^\star(A) = \mu^\star(A^c) = 1$. Sada za $B = X$ dobivamo $1 = \mu^\star(B) < 2 = \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)$. To po definiciji znači da A nije $\mu^\star$-izmjeriv. (b) Neka je B bilo koji podskup od X. Ako je B diskretan, onda su diskretni i skupovi $B \cap A$ i $B \cap A^c$. Zato je $\nu^\star(B) = \nu^\star(B \cap A) = \nu^\star(B \cap A^c) = 0$, odakle dobivamo

$$(\star) \qquad \nu^\star(B) = \nu^\star(B \cap A) + \nu^\star(B \cap A^c).$$

Ako B nije diskretan skup, onda barem jedan od skupova $B \cap A$ ili $B \cap A^c$ nije diskretan, pa stoga opet imamo jednakost $(\star)$.

2. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, a $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera definirana formulom
$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B \quad \& \quad B \in \mathcal{A}\}.$$
(a) Dokažite da se infimum $\mu^\star(A)$ postiže na nekom nadskupu B skupa A.
(b) Skup $A \in \mathcal{A}$ je $\mu^\star$-izmjeriv i $\mu^\star(A) = \mu(A)$. Dokažite!

   Uputa: (a) Prema definiciji infimuma postoji niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivih skupova takav da je $A \subseteq B_n$ i $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu^\star(A)$. Neka je $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. Pokažimo da je $\mu(B) = \mu^\star(A)$: Iz $A \subseteq B$ slijedi $\mu^\star(A) \leq \mu(B)$. Nadalje, iz $B \subseteq B_n$ slijedi $\mu(B) \leq \mu(B_n)$, odakle prijelazom na limes dobivamo $\mu(B) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu^\star(A)$. Dakle, $\mu(B) = \mu^\star(A)$. (b) Neka je $A \in \mathcal{A}$. Po definiciji je $\mu^\star(A) \leq \mu(A)$. Nadalje, za svaki $B \in \mathcal{A}$ takav da je $A \subseteq B$ imamo $\mu(A) \leq \mu(B)$. Uzimanjem infimuma po svim takvim skupovima B dobivamo $\mu(A) \leq \mu^\star(A)$. Dakle, $\mu(A) = \mu^\star(A)$. Pokažimo da je A $\mu^\star$-izmjeriv. U tu svrhu dovoljno je pokazati da za svaki $B \subseteq X$, $\mu^\star(B) < \infty$, vrijedi $\mu^\star(B) \geq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)$. Neka je $B^\star \in \mathcal{A}$ takav da je $B \subseteq B^\star$ i $\mu^\star(B) = \mu(B^\star)$. Prema (a) takav skup $B^\star$ postoji. Sada imamo
$$\begin{aligned}\mu^\star(B) = \mu(B^\star) &= \mu(B^\star \cap A) + \mu(B^\star \cap A^c) \geq \mu^\star(B^\star \cap A) + \mu^\star(B^\star \cap A^c)\\ &\geq \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)\end{aligned}$$
   Prva nejednakost posljedica je toga što je $\mu \geq \mu^\star$ za svaki izmjeriv skup, a druga vrijedi zbog monotonosti vanjske mjere.

3. Na skupu $\mathbb{N}$ vanjska mjera $\mu^\star$ definirana je formulom:
$$\mu^\star(A) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{ako } A \text{ ima } n \text{ elemenata} \\ 1, & A \text{ beskonačan.} \end{cases}$$
   Pronađite sve $\mu^\star$-izmjerive skupove.

   Uputa: Po definiciji, skup $A \subseteq \mathbb{N}$ je $\mu^\star$-izmjeriv ako je $\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap A) + \mu^\star(B \cap A^c)$ za svaki $B \subseteq \mathbb{N}$. Za $B = \mathbb{N}$ treba biti $(\star)$ $1 = \mu^\star(A) + \mu^\star(A^c)$. Barem jedan od skupova A ili A^c je beskonačan, tj. $\mu^\star(A) = 1$ ili $\mu^\star(A^c) = 1$. Sada je pomoću $(\star)$ lako ustanoviti da su jedino $\mathbb{N}$ i $\emptyset$ $\mu^\star$-izmjerivi skupovi.

4. Neka je $\mu^\star$ aditivna vanjska mjera na X, tj. $\mu^\star(A \cup B) = \mu^\star(A) + \mu^\star(B)$ za svaka dva disjunktna skupa $A, B \subseteq X$. Dokažite da je $\mu^\star$ mjera.

   Uputa: Neka su $A, B \subseteq X$. Skupovi $A \cap B$ i $A \cap B^c$ su disjunktni i zato po pretpostavci imamo $\mu^\star(A) = \mu^\star(A \cap B) + \mu^\star(A \cap B^c)$. To znači da je $\mu^\star$-izmjeriv svaki skup $B \subseteq X$. Prema Carathéodoryjevu teoremu $\mu^\star$ je mjera.

5. Neka je $\mu^\star$ vanjska mjera na X. Dokažite da za svaka dva podskupa A i B od X vrijedi
$$|\mu^\star(A) - \mu^\star(B)| \leq \mu^\star(A \Delta B).$$
   Uputa: Postupite kao kod zadatka 5. sa str. 32.

6. Neka je $\mu^\star$ vanjska mjera na X i $A \subseteq X$ $\mu^\star$-neizmjeriv podskup od X takav da je $\mu^\star(A) < \infty$. Pokažite da postoji skup $S \subseteq A$ takav da je $\mu^\star(S) > 0$ i da S nema $\mu^\star$-izmjerivih podskupova pozitivne mjere.

   Uputa: Neka je $\alpha := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A, B\ \mu^\star\text{-izmjeriv}\}$. Po definiciji supremuma, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\mu^\star$-izmjeriv podskup B_n od A takav da je $(\star)$ $\mu(B_n) > \alpha - 1/n$. Za svaki takav B_n je $\mu(B_n) = \mu^\star(B_n) \leq \mu^\star(A) < \infty$. Skup $B := \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ je $\mu^\star$-izmjeriv, $B \subseteq A$ i $(\star\star)$ $\mu(B) \leq \alpha$. Zbog $B_n \subseteq B$ je $\mu(B_n) \leq \mu(B)$, pa pomoću $(\star)$ i $(\star\star)$ dobivamo $\mu(B) = \alpha$. Neka je $S = A \backslash B$. Kako $A = B \cup (A \backslash B)$ nije $\mu^\star$-izmjeriv, a B je $\mu^\star$-izmjeriv, skup $S = A \backslash B$ nije $\mu^\star$-izmjeriv. Zato je $\mu^\star(S) > 0$ (propozicija 2.25.). Nadalje, pretpostavimo da je T $\mu^\star$-izmjeriv podskup od S. Tada je $B \cup T$ $\mu^\star$-izmjeriv podskup od A. Zbog $B \cap T = \emptyset$ je $\alpha \geq \mu(B \cup T) = \mu(B) + \mu(T) = \alpha + \mu(T)$, odakle slijedi $\mu(T) = 0$.

7. Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X, a $E, F \subseteq X$. Dokažite: (a) Ako je $\mu^\star(E) = 0$, onda je $\mu^\star(E \cup F) = \mu^\star(F)$. (b) Ako je $E \subseteq F$, $\mu^\star(F \backslash E) = 0$ i ako je E $\mu^\star$-izmjeriv, onda je F također μ-izmjeriv skup i vrijedi $\mu^\star(F) = \mu^\star(E)$. (c) Ako je $\mu^\star(E \Delta F) = 0$, onda je $\mu^\star(E) = \mu^\star(F) = 0$.

   Uputa: (a) $\mu^\star(E \cup F) \leq \mu^\star(E) + \mu^\star(F)$, $F \subseteq E \cup F \Rightarrow \mu^\star(F) \leq \mu^\star(E \cup F)$. (b) Skup $F \backslash E$ je $\mu^\star$-izmjeriv (propozicija 2.25.). Skup $F = E \cup (F \backslash E)$ je unija dva $\mu^\star$-izmjeriva skupa pa je i sam $\mu^\star$-izmjeriv. Nadalje, monotonost vanjske mjere daje $\mu^\star(E) \leq \mu^\star(F) \leq \mu^\star(E) + \mu^\star(F \backslash E) = \mu^\star(E)$. (c) $E \backslash F$, $F \backslash E \subseteq \Delta \Rightarrow \mu^\star(E \backslash F) = \mu^\star(F \backslash E) = 0$. Sada imamo $\mu^\star(E) = \mu^\star\big((E \cap F) \cup E \backslash F\big) \leq \mu^\star(E \cap F) + \mu^\star(E \backslash F) = \mu^\star(E \cap F) \leq \mu^\star(F)$. Slično se pokaže da je $\mu^\star(F) \leq \mu^\star(E)$.

8. Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X, $A \subseteq X$ i $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz $\mu^\star$-izmjerivih skupova. Pokažite da je $\mu^\star\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (A \cap E_n)\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mu^\star(A \cap E_n)$.

   Uputa: Stavite $E := E_1$, $B := A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)$. Skup E_1 je $\mu^\star$-izmjeriv, pa koristeći B kao test-skup dobivamo $\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap E_1) + \mu^\star(B \cap E_1^c)$, tj.

$$\mu^\star\Big(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)\Big) = \mu^\star(A \cap E_1) + \mu^\star\Big(A \cap (E_2 \cup \ldots \cup E_n)\Big).$$

   Ako ovaj način zaključivanja ponovimo $n-1$ puta tako da u i-tom koraku za $\mu^\star$-izmjeriv skup uzimamo E_i, a za test-skup $A \cap (E_i \cup \ldots \cup E_n)$, dobivamo $\mu^\star\Big(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap E_i)$. Sada zbog $A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n E_i\big) \subseteq A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\big)$ imamo

$$\sum_{i=1}^n \mu^\star(A \cap E_i) = \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^n E_i\big)\Big) \leq \mu^\star\Big(A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\big)\Big),$$

   odakle slijedi $\sum_{i=1}^\infty \mu^\star(A \cap E_i) \leq \mu^\star\big(\bigcup_{i=1}^\infty (A \cap E_i)\big)$.

9. Neka se σ-pokrivač $\mathcal{C}$ neprebrojivog beskonačnog skupa X sastoji od $\emptyset$, cijelog skupa X i svih jednočlanih podskupova od X. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ na sljedeći način: $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(\{x\}) = 0$ i $\tau(X) = 1$. Nadalje, neka je $\mu_\tau^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera iz propozicije 2.28. Dokažite da je $\mu_\tau^\star = \mu^\star$, gdje je $\mu^\star$ vanjska mjera iz 1. zadatka.

   Uputa: Ako je skup $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ konačan, zapišimo ga kao prebrojivu uniju $A = \left(\bigcup_{i=1}^n \{a_i\}\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^\infty \emptyset\right)$. Tada je $0 \le \mu_\tau^\star(A) \le \sum_{i=1}^n \tau(\{a_i\}) + \sum_{i=n+1}^\infty \tau(\emptyset) = 0$, odakle slijedi $\mu_\tau^\star(A) = 0$. Ako je skup $A \subseteq X$ prebrojiv, možemo ga zapisati kao prebrojivu uniju $A = \bigcup_{i=1}^\infty \{a_i\}$ njegovih članova. Opet se dobiva $\mu_\tau^\star(A) = 0$. Sada pretpostavimo da $A \subseteq X$ nije diskretan skup. Ako je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_i$, $C_i \in \mathcal{C}$, tj. ako je A pokriven s prebrojivo mnogo skupova iz $\mathcal{C}$, onda barem jedan C_i mora biti jednak skupu X. Bez smanjenja općenitosti, neka je $C_1 = X$. Tada je $1 = \tau(C_1) \le \sum_{i=1}^\infty \tau(C_i)$, odakle iz definicije vanjske mjere $\mu_\tau^\star$ (kao infimuma) slijedi $1 \le \mu_\tau^\star(A)$. Nadalje, kako je $A \subseteq X$, to je $\mu_\tau^\star(A) \le \tau(X) = 1$. Time smo pokazali da je $\mu_\tau^\star(A) = 1$ za svaki neprebrojiv skup $A \subseteq X$.

2.5. Dynkinove klase i π-sistemi

Mnoge σ-algebre generirane su nekom familijom podskupova. Jedna te ista σ-algebra može se generirati pomoću različitih familija (vidi npr. teorem 2.9.); uglavnom se koriste σ-pokrivači. Isto tako, jedna te ista mjera na σ-algebri može se konstruirati pomoću različitih σ-pokrivača. Dynkinove klase snažan su alat pomoću kojega se često može utvrditi jednakost mjera.

Za motivaciju, pretpostavimo da su definirane dvije mjere $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ na σ-algebri $\mathcal{A}$ podskupova od X, takve da je $\mu(X) = \nu(X)$. Zanima nas kada će one biti jednake, tj. kada će biti $\mu(A) = \nu(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.

Sada ćemo potražiti nužne uvjete za jednakost mjera. U tu svrhu, radi jednostavnosti pretpostavimo da su μ, ν dvije konačne mjere (tj. da su $\mu(X), \nu(X) < \infty$) takve da je $\mu(X) = \nu(X)$. Neka je

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Koristeći pretpostavku konačnosti mjera μ i ν i svojstva mjere (i) i (iii) iz propozicije 2.19., lako je pokazati da familija $\mathcal{D}$ ima sljedeća svojstva:

(d1) $X \in \mathcal{D}$,

(d2) $(A, B \in \mathcal{D} \quad \& \quad B \subseteq A) \Longrightarrow A \backslash B \in \mathcal{D}$,

(d3) Ako je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathcal{D}$, onda je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

2.31. DEFINICIJA
Neka je X skup. Familija $\mathcal{D}$ podskupova od X sa svojstvima (d1)-d(3) *zove se* d-sistem*,* Dynkinova[8] klasa *ili* Dynkinova familija na skupu X*.*

Navedimo odmah i sljedeću definiciju:

2.32. DEFINICIJA
Neka je X skup. Familiju podskupova od X koja je zatvorena na konačne presjeke zovemo π-sistem na skupu X*.*

Svaka algebra na X je π-sistem na X. Svaka σ-algebra na X je d-sistem i π-sistem na X. Obrnuto ne vrijedi, kao što nam ilustriraju sljedeća dva primjera:

2.33. PRIMJER. *Neka je $X = \{1, 2, \ldots, 2k-1, 2k\}$. Lako je provjeriti da je*

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq X : |A| \text{ je paran broj }\}$$

d-sistem na X, ali nije algebra pa nije ni σ-algebra. Zaista, familija $\mathcal{D}$ nije zatvorena na prebrojive unije: Neka su $A, B \in \mathcal{D}$. Ako je $|A \cap B|$ nula ili paran broj, onda je $|A \cup B|$ paran broj pa je $A \cup B \in \mathcal{D}$. Ako je $|A \cap B|$ neparan broj, onda je $|A \cup B|$ neparan broj pa $A \cup B \notin \mathcal{D}$. Evo jednostavnog primjera: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \notin \mathcal{D}$.

---

[8] Eugene Borisovich Dynkin (1924.-), ruski matematičar.

2.34. PRIMJER. *Navedimo nekoliko važnih primjera π-sistema:*

1. *Sljedeće familije su π-sistemi na $\mathbb{R}$:*
   $\mathcal{E}_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a \le b\}$, $\mathcal{E}_2 = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \le b\}$,
   $\mathcal{E}_3 = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a \le b\}$, $\mathcal{E}_4 = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \le b\} \cup \emptyset$.

   Uočite da nijedna od ovih familija nije algebra. Njihova unija $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$ je π-sistem na $\mathbb{R}$.

2. *Sljedeće familije su π-sistemi na $\mathbb{R}^d$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \big\{(a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times \ldots \times (a_d,b_d) : a_i,b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1,\ldots,d\big\}\\
\mathcal{E}_2 &= \big\{(a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times \ldots \times (a_d,b_d] : a_i,b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1,\ldots,d\big\}\\
\mathcal{E}_3 &= \big\{[a_1,b_1) \times [a_2,b_2) \times \ldots \times [a_d,b_d) : a_i,b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1,\ldots,d\big\}\\
\mathcal{E}_4 &= \big\{[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_d,b_d] : a_i,b_i \in \mathbb{R}, a_i \le b_i, i = 1,\ldots,d\big\} \cup \emptyset.
\end{aligned}$$

   Nijedna od tih familija nije algebra. Njihova unija $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$ je π-sistem na $\mathbb{R}^d$.

Lako je pokazati da je presjek proizvoljno mnogo d-sistema [π-sistema] na skupu X opet d-sistem [π-sistem] na X. Neka je $\mathcal{E}$ bilo koja familija podskupova od X. Presjek svih d-sistema [π-sistema] na X koji sadrže $\mathcal{E}$ najmanji je d-sistem [π-sistem] na X koji sadrži $\mathcal{E}$, označavamo ga s $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ [odnosno s $\pi(\mathcal{E})$] i zovemo d-sistem generiran s $\mathcal{E}$ [π-sistem generiran s $\mathcal{E}$].

2.35. PROPOZICIJA
Neka je $\mathcal{E}$ bilo koji π-sistem na X. Tada je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ algebra na skupu X.

Dokaz. Kao prvo, uočimo da je $X \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ po definiciji d-sistema. Nadalje, ako je $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, prema svojstvu (d2) je $A^c = X \backslash A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Preostaje pokazati da je familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ zatvorena na konačne presjeke. U tu svrhu prvo definirajmo familiju

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : A \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ za svaki } E \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Tvrdimo da je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_1$. Zaista, neka je $A \in \mathcal{E}$. Kako je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, to je $A \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Nadalje, kako je $\mathcal{E}$ π-sistem, za svaki $E \in \mathcal{E}$ je $A \cap E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dakle, $A \in \mathcal{D}_1$.

Sada ćemo dokazati jednakost

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Kako je $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, treba dokazati inkluziju $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_1$. U tu svrhu prvo ćemo pokazati da familija $\mathcal{D}_1$ tvori d-sistem na X:

(d1) Kako je $X \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ te kako za svaki $E \in \mathcal{E}$ vrijedi $X \cap E = E \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, slijedi da je $X \in \mathcal{D}_1$.

(d2) Neka su skupovi $A, B \in \mathcal{D}_1$ takvi da je $B \subseteq A$. Po definiciji familije $\mathcal{D}_1$ tada je $A, B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Osim toga, za svaki $E \in \mathcal{E}$ je $A \cap E, B \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Treba pokazati da je $A \backslash B \in \mathcal{D}_1$, tj. da je $A \backslash B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ i da je $(A \backslash B) \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ za svaki $E \in \mathcal{E}$. Kako je $A, B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ te kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ d-sistem, prema svojstvu (d2) je $A \backslash B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Sada ćemo pokazati da je $(A \backslash B) \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ za svaki $E \in \mathcal{E}$. Neka je $E \in \mathcal{E}$. Zbog $B \subseteq A$ je $B \cap E \subseteq A \cap E$. Kako d-sistem $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ sadrži oba skupa $A \cap E$ i $B \cap E$, prema svojstvu (d2) je $(A \cap E) \backslash (B \cap E) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Iz jednakosti $(A \backslash B) \cap E = (A \cap E) \backslash (B \cap E)$ slijedi da je $(A \backslash B) \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(d3) Pretpostavimo da je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathcal{D}_1$. Treba pokazati da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_1$. Neka je $E \in \mathcal{E}$. Tada je $(A_n \cap E)$ rastući niz skupova iz $\mathcal{D}(\mathcal{E})$. Familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ je d-sistem pa je $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Tvrdnja slijedi iz jednakosti $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)$.

Familija $\mathcal{E}$ sadržana je u d-sistemu $\mathcal{D}_1$. Kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ najmanji d-sistem koji sadrži $\mathcal{E}$, to je $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_1$. Time smo dokazali jednakost $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_1$.

Sada ćemo definirati drugu familiju:

$$\mathcal{D}_2 := \{A \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) : A \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ za svaki } B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}).$$

Uočimo da je familija $\mathcal{D}_2$ zatvorena na konačne presjeke. Zato, pokažemo li da je $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\mathcal{E})$, to će značiti da je familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ zatvorena na konačne presjeke i time će biti kompletiran dokaz da je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ algebra na X.

Preostaje pokazati da je $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Kako je $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$, dovoljno je dokazati inkluziju $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_2$. Kao prvo, lako je pokazati da je $\mathcal{D}_2$ jedan d-sistem na X. U tu svrhu dovoljno je oponašati dokaz da je $\mathcal{D}_1$ d-sistem. Sada ćemo pokazati da je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_2$: Neka je $E \in \mathcal{E}$. Tada je $E \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ jer je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Nadalje, kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}_1$, za svaki $B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ po definiciji familije $\mathcal{D}_1$ je $E \cap B \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Time smo pokazali da je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_2$. Kako je familija $\mathcal{E}$ sadržana u d-sistemu $\mathcal{D}_2$ te kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ najmanji d-sistem koji sadrži $\mathcal{E}$, to je $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_2$. ■

2.36. TEOREM

Neka je $\mathcal{E}$ bilo koji π-sistem na X. Tada je $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$, tj. σ-algebra generirana π-sistemom $\mathcal{E}$ jednaka je d-sistemu generiranim s $\mathcal{E}$.

Dokaz. Svaka σ-algebra je d-sistem, pa je zato $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Preostaje pokazati suprotnu inkluziju $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

Prema propoziciji 2.35. $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ je algebra na X. Kako je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ istovremeno i d-sistem, familija $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ zatvorena je na formiranje prebrojivih unija rastućih skupova. Zato je $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ujedno i σ-algebra (propozicija 2.12.). Kako je $\sigma(\mathcal{E})$ najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{E}$, dobivamo $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$. ■

Sljedeći teorem može biti od velike koristi kada se želi pokazati da se neke dvije mjere podudaraju na σ-algebri.

2.37. Teorem
Neka je σ-algebra $\mathcal{A}$ na skupu X generirana π-sistemom $\mathcal{E}$, tj. $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Nadalje, neka su $\mu, \nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dvije mjere na σ-algebri $\mathcal{A}$, takve da je

$$\mu(E) = \nu(E), \qquad \forall\, E \in \mathcal{E}. \tag{2.14}$$

Ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uvjeta:

(a) $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, *ili*

(b) Postoji rastući niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{E}$ sa svojstvom

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \& \qquad \mu(E_n), \nu(E_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

onda je $\mu = \nu$.

Dokaz. (a) Neka je

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}.$$

Kako je po pretpostavci $\mu(E) = \nu(E)$ za svaki $E \in \mathcal{E}$, slijedi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Kao što znamo iz uvodnog razmatranja, familija $\mathcal{D}$ je d-sistem na X i zato je $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. Prema teoremu 2.36. je $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Zato je $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$, odakle slijedi $\mu_{|\mathcal{A}} = \nu_{|\mathcal{A}}$.
(b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo pomoćne mjere μ_n, ν_n na $(X, \mathcal{A})$:

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n), \quad \nu_n(A) := \nu(A \cap E_n), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Zbog pretpostavki (2.14) i (2.15) je

$$\mu_n(E) = \nu_n(E), \qquad \forall\, E \in \mathcal{E},$$
$$\mu_n(X) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu_n(X) < \infty.$$

Prema (a) zato je $\mu_n = \nu_n$, tj.

$$\mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Neka je $A \in \mathcal{A}$. Kako je

$$A = A \cap X = A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n),$$

te kako je $(A \cap E_n)$ rastući niz skupova iz $\mathcal{A}$, primjenom tvrdnje (iii) iz propozicije 2.19. dobivamo

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap E_n)$$
$$= \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)\Big) = \nu(A).$$

Dakle, $\mu(A) = \nu(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$. ■

Primjenu teorema 2.37. ilustrirat ćemo poslije. Pomoću njega dokazat ćemo da je npr. Lebesgueova mjera jedina mjera na Borelovoj σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ koja svakom d-intervalu pridružuje njegov volumen (propozicija 2.58.). Često ćemo ga koristiti kako bismo pokazali da se neke dvije mjere podudaraju na σ-algebri (vidi npr. teorem 2.86.). Nadalje, taj nam teorem može poslužiti da se pokaže kako se jedna te ista mjera na σ-algebri može konstruirati pomoću različitih σ-pokrivača.

2.6. Lebesgueova vanjska mjera

Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$. Ovu vanjsku mjeru najjednostavnije je definirati pomoću propozicije 2.28. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika (a, b), $a \leq b$. Kako je prazan skup $\emptyset = (a, a) \in \mathcal{C}$, te kako se može pisati $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(-i, i)$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ ovako:

$$\tau((a, b)) := b - a, \qquad a \leq b.$$

Očito je $\tau(\emptyset) = \tau((a, a)) = 0$.

Neka je A podskup od $\mathbb{R}$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $C_i \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup A, tj.

$$\mathcal{C}_A := \Big\{((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) : a_i \leq b_i \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\Big\}.$$

Definirajmo (vidi propoziciju 2.28.) funkciju $\lambda^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ formulom

$$\begin{aligned}\lambda^\star(A) &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i) : C_i \in \mathcal{C} \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\Big\}\\ &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\Big\},\end{aligned}$$

gdje se infimum uzima po svim nizovima iz $\mathcal{C}_A$. Funkciju $\lambda^\star$ zovemo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$.

2.38. Propozicija
Lebesgueova vanjska mjera $\lambda^\star$ je vanjska mjera.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 2.28. ∎

2.39. Primjedba
Kao što je već spomenuto u primjedbi 2.29., možemo smatrati da se infimum u definicijskoj formuli od $\lambda^\star(A)$ uzima po svim nizovima u $\mathcal{C}$ koji pokrivaju skup A, bez obzira jesu li ti nizovi konačni ili beskonačni.

U sljedećem primjeru ilustriramo korisnost ove primjedbe.

2.40. Primjer. *Pokažimo da je $\lambda^\star(\{a\}) = 0$ za svaki $a \in \mathbb{R}$.*

Kako je $\lambda^\star(\{a\}) \geq 0$ zbog nenegativnosti vanjske mjere $\lambda^\star$, dovoljno je pokazati da je $\lambda^\star(\{a\}) \leq 0$. Zaista, kako je

$$\{a\} \subset \Big(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

za svaki realan broj $\varepsilon > 0$, iz definicije vanjske mjere $\lambda^\star$ (kao infimuma) dobivamo

$$\lambda^\star(\{a\}) \le \tau\Big(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi $\lambda^\star(\{a\}) = 0$.

Ovu tvrdnju možemo dokazati i na drugi način, bez pozivanja na prethodnu primjedbu. Uočimo da je svaki jednočlani skup $\{a\}$ sadržan u uniji otvorenih intervala oblika $\big(a - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, a + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\big)$, $i \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, čiji zbroj duljina iznosi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. Zato je $\lambda^\star(\{a\}) \le \varepsilon$, odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi $\lambda^\star(\{a\}) \le 0$. Kako je $\lambda^\star(\{a\}) \ge 0$ zbog nenegativnosti vanjske mjere $\lambda^\star$, dobivamo da je $\lambda^\star(\{a\}) = 0$.

2.41. PROPOZICIJA
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Tada je

(i) $\lambda^\star([a, b]) = b - a$,

(ii) $\lambda^\star([a, b)) = b - a$,

(iii) $\lambda^\star((a, b]) = b - a$,

(iv) $\lambda^\star((a, b)) = b - a$.

Dokaz. (i) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Otvoreni interval $(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})$ duljine $\tau((a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})) = b - a + \varepsilon$ prekriva segment $[a, b]$, tj.

$$[a, b] \subset \Big(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Zato je

$$\begin{aligned} \lambda^\star([a, b]) &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}\Big\} \\ &\le \tau((a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2})) = b - a + \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobivamo $\lambda^\star([a, b]) \le b - a$. Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratna nejednakost, što će za posljedicu imati $\lambda^\star([a, b]) = b-a$. Neka je $((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ bilo koji niz omeđenih otvorenih intervala koji pokrivaju segment $[a, b]$. Segment $[a, b]$ je kompaktan skup pa otvoreni pokrivač $((a_i, b_i), i \in \mathbb{N})$ ima konačan potpokrivač. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $[a, b] \subseteq \cup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$. Matematičkom indukcijom po n lako je pokazati da je $b - a \le \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, pa je stoga $b - a \le \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Dakle, za svaki niz $((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ vrijedi

$$b - a \le \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i),$$

odakle dobivamo

$$b - a \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : ((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \right\} = \lambda^\star([a, b]).$$

Time je dokazana tvrdnja (i).

(ii) Kako je $[a, b) \subset [a, b]$, monotonost funkcije $\lambda^\star$ i (i) povlače

$$\lambda^\star([a, b)) \leq \lambda^\star([a, b]) = b - a.$$

Preostaje pokazati da je $\lambda^\star([a, b)) \geq b - a$. U tu svrhu neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj takav da je $a < b - \varepsilon$. Tada je $[a, b - \varepsilon] \subset [a, b)$, pa zbog monotonosti funkcije $\lambda^\star$ imamo $\lambda^\star([a, b - \varepsilon]) \leq \lambda^\star([a, b))$. Nadalje, prema (i) je $\lambda^\star([a, b - \varepsilon]) = b - a - \varepsilon$. Dakle, za svaki dovoljno malen $\varepsilon > 0$ vrijedi $b - a - \varepsilon \leq \lambda^\star([a, b))$, odakle slijedi $b - a \leq \lambda^\star([a, b))$.

(iii) i (iv) Postupa se slično kao pod (ii). ■

2.42. DEFINICIJA

Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je izmjeriv u smislu Lebesguea *ili da je* Lebesgueov skup *ako je on $\lambda^\star$-izmjeriv.*

Prema Carathéodory-evom teoremu (teorem 2.26.) familija $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ svih podskupova od $\mathbb{R}$ izmjerivih u smislu Lebesguea je σ-algebra na $\mathbb{R}$, a restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda^\star$ na σ-algebru $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ je mjera. Tu restrikciju označavamo s λ i zovemo Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$. Dakle, za svaki $A \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$ je $\lambda(A) = \lambda^\star(A)$.

2.43. PROPOZICIJA

Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}$ izmjeriv je u smislu Lebesguea, tj. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^\star}$.

Dokaz. Kako je $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ σ-algebra na $\mathbb{R}$, dovoljno je pokazati da je svaki Borelov skup oblika $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, izmjeriv u smislu Lebesguea, tj. $(-\infty, b] \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$. To će implicirati $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^\star}$, jer je Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ najmanja σ-algebra koja sadrži intervale oblika $(-\infty, b]$ (teorem 2.9.).

Pokažimo da je skup $B = (-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, izmjeriv u smislu Lebesguea. U tu svrhu dovoljno je pokazati da za svaki skup $A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^\star(A) < \infty$, vrijedi

$$\lambda^\star(A) \geq \lambda^\star(A \cap B) + \lambda^\star(A \cap B^c).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Tada postoji niz otvorenih intervala $\big((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}\big)$ takvih da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ i

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \lambda^\star(A) + \varepsilon. \tag{2.16}$$

Kako je

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \cap B \qquad \& \qquad A \cap B^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \cap B^c,$$

monotonost i σ-subaditivnost vanjske mjere $\lambda^\star$ povlače

$$\lambda^\star(A\cap B)+\lambda^\star(A\cap B^c)\le\sum_{i=1}^{\infty}\big[\lambda^\star((a_i,b_i)\cap B)+\lambda^\star((a_i,b_i)\cap B^c)\big]. \tag{2.17}$$

Javlja se samo jedna od sljedećih situacija:

a) $(a_i,b_i)\subseteq B=(-\infty,b]$, $(a_i,b_i)\cap B^c=\emptyset$,

b) $(a_i,b_i)\subseteq B^c=(b,\infty)$, $(a_i,b_i)\cap B=\emptyset$, ili

c) $(a_i,b_i)\cap B=(a_i,b]$, $(a_i,b_i)\cap B^c=(b,b_i)$.

Prema propoziciji 2.41., u sva tri slučaja je

$$\lambda^\star((a_i,b_i)\cap B)+\lambda^\star((a_i,b_i)\cap B^c)=b_i-a_i.$$

To ćete lakše provjeriti ako napravite odgovarajuće slike! Sada iz (2.17) i (2.16) dobivamo

$$\lambda^\star(A\cap B)+\lambda^\star(A\cap B^c)\le\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<\lambda^\star(A)+\varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon>0$ slijedi

$$\lambda^\star(A\cap B)+\lambda^\star(A\cap B^c)\le\lambda^\star(A).$$ ■

2.44. PRIMJER. *Izračunajmo Lebesgueovu mjeru nekih jednostavnijih skupova:*

(a) Jednočlani skup $\{a\}\subseteq\mathbb{R}$ je Borelov jer je zatvoren. Prema propoziciji 2.43. on je i Lebesgueov skup, te je $\lambda(\{a\})=\lambda^\star(\{a\})=0$ (vidi primjer 2.40.).

(b) Svi omeđeni intervali iz $\mathbb{R}$ (bez obzira jesu li otvoreni, zatvoreni ili niti otvoreni niti zatvoreni) su Lebesguovi skupovi jer su Borelovi (vidi teorem 2.9.). Zato je (vidi propoziciju 2.41.)

(i) $\lambda([a,b])=\lambda^\star([a,b])=b-a,$

(ii) $\lambda([a,b))=\lambda^\star([a,b))=b-a,$

(iii) $\lambda((a,b])=\lambda^\star((a,b])=b-a,$

(iv) $\lambda((a,b))=\lambda^\star((a,b))=b-a,$

za sve $a,b\in\mathbb{R}$ takve da je $a<b$.

Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$. Prisjetimo se da d-intervalima na $\mathbb{R}^d$ zovemo skupove oblika

$$I = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d,$$

gdje su $T_1, \ldots, T_d$ 1-intervali oblika (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$). Uočite da d-interval može biti otvoren skup, zatvoren skup ili niti otvoren niti zatvoren skup. Volumen d-intervala $I = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_d$ definira se kao produkt duljina 1-intervala $T_1, \ldots, T_d$ i označava se s vol (I). Uočite da je

$$\text{vol}\,(I) = \prod_{i=1}^{d} \lambda(T_i),$$

gdje je λ Lebesqueova mjera na $\mathbb{R}$.

Sada ćemo opet upotrijebiti konstrukciju opisanu propozicijom 2.28. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih otvorenih d-intervala na $\mathbb{R}^d$. Kako je prazan skup $\emptyset \in \mathcal{C}$ (uočite da je npr. $\emptyset = (a, a) \times (-1, 1) \times (-1, 1) \times \ldots \times (-1, 1)$) te kako se cijeli skup $\mathbb{R}^d$ može zapisati kao $\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=1}^{\infty} (-i, i) \times (-i, i) \times \ldots \times (-i, i)$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}^d$. Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ ovako:

$$\tau(I) := \text{vol}(I), \qquad I \in \mathcal{C}.$$

Očito je $\tau(\emptyset) = 0$.

Neka je A podskup od $\mathbb{R}^d$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(I_i, i \in \mathbb{N})$ omeđenih i otvorenih d-intervala koji pokrivaju skup A, tj. takvih da je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Funkciju $\lambda_d^\star : 2^{\mathbb{R}^d} \to [0, \infty]$ definiranu formulom

$$\lambda_d^\star(A) = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}\,(I_i) : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A \Big\}$$

zovemo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^d$.

2.45. PROPOZICIJA
Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ je vanjska mjera.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 2.28. ∎

Radi jednostavnosti, ponekad ćemo funkciju $\lambda_d^\star$ kraće označavati s $\lambda^\star$. Pri tome će iz konteksta biti jasno da se radi o Lebesgueovoj vanjskoj mjeri na $\mathbb{R}^d$, a ne o Lebesgueovoj vanjskoj mjeri na $\mathbb{R}$.

Sada ćemo navesti neke rezultate koji su analogoni odgovarajućih rezultata za Lebesgueovu vanjsku mjeru na $\mathbb{R}$. Stoga čitatelju prepuštamo da kod dokaza tih tvrdnji samostalno provede sve tehničke detalje.

2.46. PRIMJER. *Za svaku točka $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ je $\lambda_d^\star(\{\boldsymbol{x}\}) = 0$.*
Zaista, za svaki $\varepsilon > 0$ točka $\mathbf{x}$ sadržana je u otvorenom d-intervalu

$$I_0 := \Big(x_1 - \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{2}, x_1 + \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{2}\Big) \times \ldots \times \Big(x_d - \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{2}, x_d + \frac{\sqrt[d]{\varepsilon}}{2}\Big)$$

volumena $\mathrm{vol}(I_0) = \varepsilon$. *Zato je* $\lambda_d^\star(\{\boldsymbol{x}\}) \leq \mathrm{vol}(I_0) = \varepsilon$, *odakle zbog proizvoljnosti broja* $\varepsilon > 0$ *slijedi* $\lambda_d^\star(\{\boldsymbol{x}\}) \leq 0$. *Obratna nejednakost* $\lambda_d^\star(\{\boldsymbol{x}\}) \geq 0$ *posljedica je nenegativnosti vanjske mjere.*

Sljedeća je tvrdnja analogon propozicije 2.41.

2.47. PROPOZICIJA
Neka je I *bilo koji* d*-interval na* $\mathbb{R}^d$. *Tada je* $\lambda_d^\star(I) = \mathrm{vol}\,(I)$.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati samo u slučaju kada je I kompaktan d-interval oblika

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]. \tag{2.18}$$

U svim preostalim slučajevima (kada I nije kompakt) dovoljno je modificirati odgovarajuće dijelove dokaza propozicije 2.41., što prepuštamo čitatelju.

Neka je I kompaktan d-interval oblika (2.18). Za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ otvoreni d-interval

$$I_0 := \Big(a_1 - \frac{\varepsilon}{2}, b_1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \times \ldots \times \Big(a_d - \frac{\varepsilon}{2}, b_d + \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

pokriva skup I. Volumen tog otvorenog d-intervala I_0 iznosi

$$\mathrm{vol}(I_0) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k + \varepsilon)$$

i zato je

$$\lambda_d^\star(I) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_I \Big\} \leq \mathrm{vol}(I_0) = \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k + \varepsilon),$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobivamo

$$\lambda_d^\star(I) \leq \prod_{k=1}^{d} (b_k - a_k) = \mathrm{vol}\,(I).$$

Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratna nejednakost, što će za posljedicu imati $\lambda_d^\star(I) = \mathrm{vol}\,(I)$. Neka je $(I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_I$ bilo koji niz omeđenih otvorenih d-intervala koji pokrivaju skup I. Skup I je kompaktan pa otvoreni pokrivač $(I_i, i \in \mathbb{N})$ ima konačan potpokrivač. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $I \subseteq \cup_{i=1}^n I_i$. Tada je $\mathrm{vol}\,(I) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{vol}\,(I_i)$, pa stoga pogotovo vrijedi

$$\mathrm{vol}\,(I) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i),$$

odakle dobivamo $\mathrm{vol}\,(I) \leq \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\, I_i : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_I \Big\} = \lambda_d^\star(I)$. ■

2.48. DEFINICIJA

Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ kažemo da je izmjeriv u smislu Lebesguea *ili da je* Lebesgueov skup *ako je on $\lambda_d^\star$-izmjeriv. Sa $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ označavamo familiju svih podskupova od $\mathbb{R}^d$ izmjerivih u smislu Lebesguea.*

Prema Carathéodory-evom teoremu (teorem 2.26.) familija $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ svih podskupova od $\mathbb{R}^d$ izmjerivih u smislu Lebesguea je σ-algebra na $\mathbb{R}^d$, a restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na σ-algebru $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ je mjera. Tu restrikciju označavamo s λ_d i zovemo Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$. Dakle, za svaki $A \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ je $\lambda_d(A) = \lambda_d^\star(A)$.

2.49. PROPOZICIJA

Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}^d$ izmjeriv je u smislu Lebesguea, tj. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$.

Dokaz. Prema teoremu 2.11. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ najmanja je σ-algebra koja sadrži familiju svih poluprostora u $\mathbb{R}^d$ oblika

$$\mathbb{R}^{i-1} \times (-\infty, b] \times \mathbb{R}^{d-i}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Zato je dovoljno pokazati da je svaki takav poluprostor izmjeriv u smislu Lebesguea, tj. da on pripada familiji $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$, što će implicirati $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. Taj dio dokaza prepuštamo čitatelju, uz napomenu da je u tu svrhu dovoljno modificirati dokaz propozicije 2.43. ■

Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ u potpunosti je određena svojim vrijednostima na otvorenim skupovima. Preciznije, vrijedi:

2.50. PROPOZICIJA

Neka je $d \geq 1$. Za svaki podskup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ vrijedi:

$$\lambda_d^\star(A) = \inf\{\lambda_d^\star(U) : \ U \text{ je otvoren skup i } A \subseteq U\}.$$

Dokaz. Zbog monotonosti vanjske mjere $\lambda_d^\star$, ako je U otvoren skup i $A \subseteq U$, onda je $\lambda_d^\star(A) \leq \lambda_d^\star(U)$. Zato je

$$\lambda_d^\star(A) \leq \inf\{\lambda_d^\star(U) : \ U \text{ je otvoren skup i } A \subseteq U\}.$$

Preostaje dokazati suprotnu nejednakost. Ako je $\lambda_d^\star(A) = \infty$, onda očito vrijedi suprotna nejednakost. Zato nadalje pretpostavljamo da je $\lambda_d^\star(A) < \infty$. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Tada postoji niz $(I_i, i \in \mathbb{N})$ otvorenih d-intervala takvih da je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \& \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) < \lambda_d^\star(A) + \varepsilon.$$

Skup $U_0 := \cup_{i=1}^{\infty} I_i$ je otvoren. σ-subaditivnost od $\lambda_d^\star$ i propozicija 2.47. povlače

$$\lambda_d^\star(U_0) = \lambda_d^\star\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_d^\star(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(I_i) < \lambda_d^\star(A) + \varepsilon.$$

Zato je

$$\inf\{\lambda_d^\star(U):\ U \text{ je otvoren skup i } A\subseteq U\} \le \lambda_d^\star(U_0) < \lambda_d^\star(A)+\varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\inf\{\lambda_d^\star(U):\ U \text{ je otvoren skup i } A\subseteq U\} \le \lambda_d^\star(A).$$

■

2.51. PROPOZICIJA

Lebesgueova vanjska mjera $\lambda_d^\star$ je invarijantna na translacije*, tj.*

$$\lambda_d^\star(A+x) = \lambda_d^\star(A), \qquad A\subseteq \mathbb{R}^d,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Nadalje, skup $A\subseteq\mathbb{R}^d$ je Lebesgueov onda i samo onda ako je skup $A+x$ Lebesgueov za svaki $x\in\mathbb{R}^d$.

Dokaz. Invarijantnost na translacije slijedi iz definicije Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ i činjenice da je volumen d-intervala invarijantan na translacije. Malo detaljnije: Neka je $(I_i, i\in\mathbb{N})$ bilo koji niz otvorenih d-intervala sa svojstvom $A\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty I_i$. Tada otvoreni d-intervali I_i+x, $i\in\mathbb{N}$, pokrivaju skup $A+x$, tj. $A+x\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty(I_i+x)$. Zbog invarijantnosti volumena na translacije je $\sum_{i=1}^\infty \mathrm{vol}\,(I_i+x)=\sum_{i=1}^\infty \mathrm{vol}\,(I_i)$. Prema definiciji Lebesgueove vanjske mjere je $\lambda_d^\star(A+x)\le\sum_{i=1}^\infty \mathrm{vol}\,(I_i+x)=\sum_{i=1}^\infty \mathrm{vol}\,(I_i)$. Dakle, za svaki niz $(I_i, i\in\mathbb{N})$ otvorenih d-intervala koji pokrivaju skup A vrijedi $\lambda_d^\star(A+x)\le\sum_{i=1}^\infty \mathrm{vol}\,(I_i)$, što povlači $\lambda_d^\star(A+x)\le\lambda_d^\star(A)$. Slično se pokaže da vrijedi $\lambda_d^\star(A)\le\lambda_d^\star(A+x)$.

Posljednja tvrdnja slijedi iz prve tvrdnje i činjenice da operacije presijecanja i translacije međusobno „komutiraju”, tj. $(C\cap D)+x=(C+x)\cap(D+x)$, za sve $C,D\subseteq\mathbb{R}^d$ i za svaki $x\in\mathbb{R}^d$. Zaista, neka je A Lebesgueov skup. Po definiciji tada je

$$\lambda^\star(B)=\lambda^\star(B\cap A)+\lambda^\star(B\cap A^c), \qquad \forall B\subseteq\mathbb{R}^d.$$

Ako umjesto B stavimo $B-x$, dobivamo

$$\lambda^\star(B-x)=\lambda^\star((B-x)\cap A)+\lambda^\star((B-x)\cap A^c), \qquad \forall B\subseteq\mathbb{R}^d,$$

što zbog invarijantnosti Lebesgueove vanjske mjere na translacije možemo pisati kao

$$\lambda^\star(B)=\lambda^\star\big(((B-x)\cap A)+x\big)+\lambda^\star\big(((B-x)\cap A^c)+x\big), \qquad \forall B\subseteq\mathbb{R}^d. \quad (2.19)$$

Iskoristimo li činjenicu da operacije presijecanja i translacije „komutiraju”, te očitu jednakost $A^c+x=(A+x)^c$, dobivamo

$$\big((B-x)\cap A\big)+x=B\cap(A+x), \quad \big((B-x)\cap A^c\big)+x=B\cap(A^c+x)=B\cap(A+x)^c,$$

pa (2.19) prelazi u

$$\lambda^\star(B)=\lambda^\star(B\cap(A+x))+\lambda^\star(B\cap(A+x)^c), \qquad \forall B\subseteq\mathbb{R}^d.$$

To znači da je skup $A+x$ izmjeriv u smislu Lebesguea. ■

Prema propoziciji 2.49. je $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$, tj. svaki Borelov skup je Lebesgueov. Prirodno se postavljaju sljedeća dva pitanja: (1) Je li $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, tj. je li svaki Lebesgueov skup ujedno i Borelov? (2) Je li svaki podskup od $\mathbb{R}^d$ izmjeriv u smislu Lebesguea? Odgovor je negativan na prvo pitanje (vidi teorem 3.12.). I na drugo pitanje odgovor je negativan, kao što ilustrira sljedeći primjer (vidi i primjedbu 2.53.).

2.52. PRIMJER. *Definirajmo na segmentu $[0,1]$ relaciju ekvivalencije $\sim$ na sljedeći način: $x \sim y$ ako je $x - y \in \mathbb{Q}$. Lako je provjeriti da se radi o relaciji ekvivalencije:*

refleksivnost: $x \sim x$, *jer* $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$.

simetričnost: $x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \sim x$.

tranzitivnost: $(x \sim y \;\&\; y \sim z) \Rightarrow (x - y \in \mathbb{Q} \;\&\; y - z \in \mathbb{Q}) \Rightarrow x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim z$.

Relacijom $\sim$ segment $[0,1]$ raspada se na disjunktne klase. Neka je $A \subseteq [0,1]$ skup koji sadrži točno jedan element iz svake klase ekvivalencije. Zermelov aksiom izbora osigurava nam egzistenciju skupa A.

Skup $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ je prebrojiv. Svrstajmo njegove članove u niz $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, a zatim definirajmo skupove

$$A_i := A + q_i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dokažimo sljedeće tvrdnje:

(a) *Skupovi A_i, $i \in \mathbb{N}$, međusobno su disjunktni.*

(b) $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \subseteq [-1,2]$.

(c) $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$.

Krenimo redom:
(a) Ako je $x \in A_i \cap A_j = (A+q_i)\cap(A+q_j) \neq \emptyset$, onda postoje brojevi $a, a' \in A \subseteq [0,1]$ takvi da je $x = a + q_i = a' + q_j$. Tada je $a - a' = q_j - q_i \in \mathbb{Q}$, i zato je $a \sim a'$. Kako skup A sadrži samo jednu točku iz svake klase ekvivalencije, mora biti $a = a'$. Zato je i $q_i = q_j$, što povlači $i = j$, pa je $A_i = A_j$.

(b) Kako je $A \subseteq [0,1]$, $q_i \in [-1,1]$, to je $A_i = A + q_i \subseteq [-1,2]$, pa je onda $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \subseteq [-1,2]$.

(c) Za svaki $x \in [0,1]$ postoji točno jedan $a \in A$ takav da je $x - a = q \in \mathbb{Q}$. Očito je $q \in [-1,1]$ jer su $x, a \in [0,1]$. Zato je $q = q_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$, pa je $x = a + q_i \in A + q_i = A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Dakle, $[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$.

Zbog invarijantnosti Lebesgueove vanjske mjere na translacije (propozicija 2.51.) vrijedi

$$\lambda^\star(A_i) = \lambda^\star(A), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Pomoću monotonosti i σ-subaditivnosti vanjske mjere $\lambda^\star$ iz tvrdnje (c) dobivamo

$$1 = \lambda^\star([0,1]) \leq \lambda^\star\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^\infty \lambda^\star(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \lambda^\star(A),$$

odakle slijedi $\lambda^\star(A) > 0$.

Sada ćemo pokazati da skup A nije Lebesgueov, tj. $A \notin \mathcal{M}_{\lambda^\star}$. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$. Tada pomoću propozicije 2.51. dobivamo $A_i = A + q_i \in \mathcal{M}_{\lambda^\star}$, $i \in \mathbb{N}$. Restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda^\star$ na σ-algebru $\mathcal{M}_{\lambda^\star}$ je mjera (vidi teorem 2.26.). Iskoristimo li tu činjenicu, pomoću tvrdnje (b) dobivamo

$$3 = \lambda^\star([-1,2]) \geq \lambda^\star\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \lambda^\star(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \lambda^\star(A),$$

odakle slijedi $\lambda^\star(A) = 0$. To je u suprotnosti s već dokazanom nejednakošću $\lambda^\star(A) > 0$. Dakle, skup A nije Lebesgueov.

2.53. PRIMJEDBA

Talijanski matematičar G. Vitali[9] *prvi je 1905. konstruirao podskup od $\mathbb{R}$ koji nije Lebesgue izmjeriv. Njemu u čast taj je skup nazvan* Vitalijev skup. *I dokaz iz prethodnog primjera koristi njegovu ideju.*

Originalni Vitalijev skup je podskup od $(0, \frac{1}{2})$, no oponaša li se njegov dokaz za bilo koji podskup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ pozitivne Lebesgueove vanjske mjere, $\lambda_d^\star(A) > 0$, dobit će se podskup $V \subseteq A$ koji nije Lebesgue izmjeriv. Ta tvrdnja poznata je kao Vitalijev teorem.

Zanimljivo je da u slučaju kada je A Lebesgue izmjeriv skup konačne mjere, $0 < \lambda_d^\star(A) < \infty$, Vitalijev skup $V \subseteq A$ ima sljedeća dva zanimljiva svojstva: (1) $\lambda_d^\star(V) > 0$ i (2) $\lambda_d^\star(A) = \lambda_d^\star(A \backslash V)$. Jasno je da (1) mora vrijediti jer kad bi bilo $\lambda_d^\star(V) = 0$, skup V bio bi Lebesgue izmjeriv. Drugo svojstvo nećemo dokazivati. Intuitivno, (1) nam govori da skup V ima volumen, a s druge strane, (2) nam govori da V nema volumen. Zbog toga si Vitalijev skup V možemo zamišljati kao neki „magloviti" skup.

---

[9] Giuseppe Vitali (1875.-1932.), talijanski matematičar.

2.7. Lebesgueova mjera

Po definiciji, restrikcija Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na skup $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ je mjera, označavamo je s λ_d (ili kraće samo λ) i zovemo **Lebesgueova mjera**. Uobičajeno je i restrikciju Lebesgueove vanjske mjere $\lambda_d^\star$ na Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ također zvati **Lebesgueova mjera** i označavati je s λ_d (ili kraće samo λ). Pri tome iz konteksta treba biti jasno radi li se o Lebesgueovoj mjeri na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star})$ ili o Lebesgueovoj mjeri na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Često je potrebno Lebesguove skupove aproksimirati s otvorenim ili kompaktnim skupovima. Pri tome se želi da ta aproksimaciju bude dobra u smislu da mjera aproksimirajućeg skupa bude dobra aproksimacija mjere Lebesgueova skupa. Svaki Lebesgueov skup može se proizvoljno dobro aproksimirati izvana s otvorenim, a iznutra s kompaktnim skupom. O tome nam govori sljedeća propozicija.

2.54. PROPOZICIJA
Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgueov skup. Tada vrijedi:

(a) (**regularnost izvana**) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : \ U \text{ je otvoren skup i } A \subseteq U\}$,

(b) (**regularnost iznutra**) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\}$,

(c) (**konačnost na kompaktima**) $\lambda(K) < \infty$ *za svaki kompaktan skup* $K \subseteq \mathbb{R}^d$.

Uočimo: Kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^d$ je zatvoren, pa je i Borelov. Zato je $\lambda(K)$ definiran.

Dokaz propozicije 2.54. (a) Tvrdnja slijedi iz propozicije 2.50.
(b) Kako monotonost od λ povlači

$$\lambda(A) \geq \sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\},$$

preostaje dokazati suprotnu nejednakost. U tu svrhu definirajmo kompaktne skupove

$$B_i := [-i,i]^d = [-i,i] \times \ldots \times [-i,i], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je $\cup_{i=1}^\infty B_i = \mathbb{R}^d$ i $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_i \subset B_{i+1} \subset \ldots$, što povlači

$$A = A \cap \mathbb{R}^d = A \cap \big(\bigcup_{i=1}^\infty B_i\big) = \bigcup_{i=1}^\infty (A \cap B_i)$$

i

$$A \cap B_1 \subset A \cap B_2 \subset \ldots \subset A \cap B_i \subset A \cap B_{i+1} \subset \ldots$$

Borelovi skupovi B_i, $i \in \mathbb{N}$, izmjerivi su po Lebesgueu (propozicija 2.49.), a skup A izmjeriv je po pretpostavci. Kako familija svih Lebesgueovih skupova tvori σ-algebru (teorem 2.26.), svi skupovi $A \cap B_i$, $i \in \mathbb{N}$, su Lebesgueovi. Zato prema tvrdnji (iii) propozicije 2.19. vrijedi

$$\lambda(A) = \lim_{i\to\infty} \lambda(A \cap B_i). \tag{2.20}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$, primjenom tvrdnje (a) na skup $B_i \cap A^c$ nalazimo da postoji otvoren skup U_i takav da je

$$B_i \cap A^c \subseteq U_i \quad \& \quad \lambda(U_i) < \lambda(B_i \cap A^c) + \varepsilon.$$

Zato, iskoristimo li svojstva konačne aditivnosti i monotonosti mjere λ, dobivamo

$$\begin{aligned} \lambda(B_i) &= \lambda(B_i \cap A) + \lambda(B_i \cap A^c) \\ &> \lambda(B_i \cap A) + \lambda(U_i) - \varepsilon \\ &\geq \lambda(B_i \cap A) + \lambda(B_i \cap U_i) - \varepsilon, \end{aligned}$$

odakle je

$$\lambda(B_i) - \lambda(B_i \cap U_i) > \lambda(B_i \cap A) - \varepsilon.$$

Uočimo da posljednju nejednakost možemo zapisati kao

$$\lambda(B_i \cap U_i^c) > \lambda(B_i \cap A) - \varepsilon. \tag{2.21}$$

Skup $K_i := B_i \cap U_i^c$ očito je kompaktan. Nadalje, kako iz $B_i \cap A^c \subseteq U_i$ slijedi $U_i^c \subseteq B_i^c \cup A$, imamo

$$K_i = B_i \cap U_i^c \subseteq B_i \cap (B_i^c \cup A) = B_i \cap A \subseteq A.$$

Nadalje, kako je kompakt K_i sadržan u skupu A, očito je

$$\sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\} \geq \lambda(K_i) = \lambda(B_i \cap U_i^c).$$

Zbog nejednakosti (2.21) je

$$\sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\} \geq \lambda(B_i \cap A) - \varepsilon,$$

odakle prijelazom na limes $i \to \infty$ i uzimajući u obzir (2.20) dobivamo

$$\sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\} \geq \lambda(A) - \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ je

$$\sup\{\lambda(K) : \ K \text{ je kompaktan skup i } K \subseteq A\} \geq \lambda(A).$$

(c) Za svaku točku $x \in K$ odaberimo otvorenu okolinu U_x od x takvu da je $\lambda(U_x) < \infty$. Tada je $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$. Kako je K kompaktan, postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_n$ takvih da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, pa je

$$\lambda(K) \leq \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(U_{x_i}) < \infty.$$

■

2.55. DEFINICIJA
Neka je $(X,\mathcal{U})$ Hausdorffov topološki prostor, a $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor mjere takav da je $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Za mjeru μ kažemo da je regularna *ako vrijedi:*

(i) *(*regularnost izvana*)* *Za svaki skup $A \in \mathcal{A}$ je*

$$\mu(A) = \inf \{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ otvoren}\},$$

(ii) *(*regularnost iznutra*)* *Za svaki otvoren skup U je*

$$\mu(U) = \sup \{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ kompaktan}\},$$

(iii) *(*konačnost na kompaktima*)* *$\mu(K) < \infty$ za svaki kompaktan skup $K \subseteq X$.*

Primijetimo da je $\mu(K)$ definiran. To je zato što su u svakom Hausdorffovom prostoru kompaktni skupovi zatvoreni, pa su i Borelovi.

2.56. PRIMJER. *Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^*})$ je regularna. Isto tako, regularna je i Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ (vidi propoziciju 2.54.).*

Može se pokazati da vrijedi (vidi npr. [3, propozicija 1.5.6, str. 40.]):

2.57. TEOREM
Svaka konačna mjera μ na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ je regularna.

2.58. PROPOZICIJA
Lebesgueova mjera λ jedina je mjera na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ koja svakom d-intervalu pridružuje njegov volumen.

Dokaz. Lebesgueova mjera ima traženo svojstvo (propozicija 2.47.). Neka je μ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ koja svakom d-intervalu pridružuje njegov volumen. Treba pokazati da je $\mu = \lambda$, tj. da je $\mu(A) = \lambda(A)$ za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. U tu svrhu iskoristit ćemo teorem 2.37.

Familija $\mathcal{E}$ svih d-intervala oblika

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d), \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, i = 1, \ldots, d$$

je π-sistem na $\mathbb{R}^d$. Pri tome je $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (teorem 2.11.). Po pretpostavci je

$$\mu(E) = \lambda(E), \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Neka je $E_n := (-n, n) \times (-n, n) \times \ldots \times (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Niz (E_n) je rastući niz skupova iz $\mathcal{E}$ i vrijedi

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad \mu(E_n) = \lambda(E_n) < \infty.$$

Prema teoremu 2.37. je $\mu = \lambda$ na $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ∎

Zadaci za vježbu

1. Neka je $A \subset \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Pokažite da je $\lambda(A) = 0$, gdje je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$.

   Uputa: Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Za svaki $\varepsilon > 0$ je $A \subset \cup_{i=1}^{\infty}\big(a_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\big)$, odakle slijedi $0 \leq \lambda(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

2. Izračunajte Lebesgueovu mjeru skupova: (a) $(0,5)\cap\mathbb{Q}$. (b) $[0,5]$. (c) $\{2\}$. (d) $(0,5]\backslash\mathbb{Q}$. (e) $\big((7,15)\cup(8,16)\big)\cap\mathbb{R}$. (f) $(2,10]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. (g) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\big[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\big]$. (h) $\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\big[9^n, 9^n + \frac{1}{3^n}\big)\backslash\mathbb{Q}\Big) \cap [81, 82]$. (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\big[3, 3 + \frac{1}{n}\big]$.

   Rješenje: (a) 0. (b) 5. (c) 0. (d) 5. (e) 9. (f) 8. (g) 1/9. Segmenti $\big[2^n, 2^n + \frac{1}{10^n}\big]$ su disjunktni. Koristite formulu za sumu geometrijskog reda. (h) 1/9. (i) $\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\big[3, 3 + \frac{1}{n}\big]\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. (a) Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ y-os. Dokažite da je $\lambda(A) = 0$, gdje je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^2$. (b) Formulirajte i dokažite analognu tvrdnju za $\mathbb{R}^n$.

   Uputa: Neka je $\varepsilon > 0$, a $A_n := \big[-\varepsilon 2^{-n}, \varepsilon 2^{-n}\big) \times [-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 4\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Uz oznaku $C_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ imamo $\lambda(A) \leq 4C_0\varepsilon$. Uzmite limes $\varepsilon \to 0$.

4. Neka je p pravac u ravnini zadan jednadžbom $y = ax + b$, $a \neq 0$. Dokažite da je p Lebesgueov skup mjere nula.

   Uputa: Neka je $p_k := p \cap ([k, k+1] \times \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $p \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} p_k$, dovoljno je pokazati da je $\lambda(p_k) = 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajte ekvidistantnu razdiobu $x_i = k + \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, segmenta $[k, k+1]$. Ako je $a > 0$, onda je $p_k \subset \bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1}, x_i] \times [ax_{i-1} + b, ax_i + b]$, a za $a < 0$ je $p_k \subset \bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1}, x_i] \times [ax_i + b, ax_{i-1} + b]$. U oba slučaja je $\lambda(p_k) \leq \sum_{i=1}^{n} |a|(x_i - x_{i-1})^2 = |a|/n$, odakle prijelazom na limes $n \to \infty$ dobivamo $\lambda(p_k) = 0$.

5. (a) Neka je U neprazan otvoren skup u $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{R}^n$). Pokažite da je $\lambda(U) > 0$. (b) Konstruirajte otvoren i neomeđen skup u $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{R}^n$) sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom. (c) Konstruirajte otvoren, neomeđen i putovima povezan skup u $\mathbb{R}^2$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom. (d) Postoji li otvoren, neomeđen i putovima povezan skup u $\mathbb{R}$ sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom ?

   Uputa: Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$. (a) U skup U može se upisati interval, a njegova Lebesgueova mjera veća je od 0. (b) Neka je $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$, npr. $\varepsilon_n = 1/2^n$. Definirajte otvorene skupove $U_n = (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, i stavite $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Koristeći σ-subaditivnost mjere λ dobiva se

$$\lambda(U) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty.$$

Zbog (a) je $\lambda(U) > 0$. (c) Neka su $V_n = \big(-2^{-n}, 2^{-n}\big) \times (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, otvoreni skupovi. Stavite $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Dalje postupite kao u zadatku 3(a). Skup V je otvoren i neomeđen, a geometrijski je jasno da je povezan putovima. (d) Ne. Ako je neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ neomeđen i povezan, onda on sadrži interval oblika $(-\infty, a)$ ili (b, ∞) čija Lebesgueova mjera iznosi $+\infty$.

6. Neka je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ i $t > 0$ realan broj. Dokažite da je $\lambda(tA) = t^d \lambda(A)$ za svaki Borelov skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

   Uputa: Skup tA je Borelov (zadatak 14. na str. 25.). Definirajmo novu mjeru $\mu(A) := \lambda(tA)$. Mjere μ i $t^d\lambda$ podudaraju se na $\mathcal{I}$-familiji svih d-intervala. Kako je $\mathcal{I}$ π-sistem, prema teoremu 2.37. te se mjere podudaraju na $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

7. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgueov skup mjere $\lambda(A) > 0$. (a) Pokažite da za svaki $\alpha \in (0,1)$ postoji otvoreni interval I_α takav da je $\lambda(A \cap I_\alpha) \geq \alpha\lambda(I_\alpha)$. (b) Pokažite da skup $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ sadrži otvoren interval oblika $(-a, a)$, $a > 0$.

   Uputa: (a) Prema definiciji Lebesgueove mjere, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji niz otvorenih intervala $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \varepsilon$. Neka je $\varepsilon < \beta\lambda(A)$, $\beta > 0$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\beta)\lambda(A) \leq (1+\beta)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n).$$

   Iz ove nejednakosti slijedi da postoji barem jedan n takav da je $\lambda(I_n) \leq (1+\beta)\lambda(A \cap I_n)$, tj. $\frac{1}{1+\beta}\lambda(I_n) \leq \lambda(A \cap I_n)$. Za $\beta = \frac{1}{\alpha} - 1$ dobivamo tvrdnju. (b) Prema (a) postoji interval $I = (a, b)$ takav da je $\frac{3}{4}\lambda(I) \leq \lambda(A \cap I)$. Neka je $F := A \cap I$ i $l := \lambda(I) = b - a$. Prvo ćemo pokazati da je $[0, l/2) \subset F - F$: Za $x \in [0, l/2)$ vrijedi

$$F \cup (F + x) \subset I \cup (I + x) \subset (a, b + x).$$

   Kada bi bilo $x \notin F - F$, zbog $F \cap (F + x) = \emptyset$ bilo bi

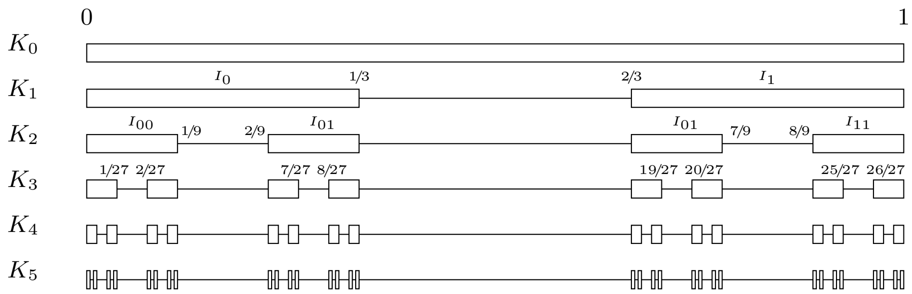
$$2\lambda(F) = \lambda(F) + \lambda(F + x) = \lambda(F \cup (F + x)) \leq b + x - a = l + x < \frac{3}{2}l,$$

   što bi povlačilo $\lambda(F) < \frac{3}{4}l$, tj. $\lambda(A \cap I) < \frac{3}{4}\lambda(I)$. Dakle, pokazali smo da je $[0, l/2) \subset F - F$, odakle očito slijedi $(-l/2, l/2) \subset F - F \subset A - A$.

2.8. Cantorov skup i Cantorova funkcija

Cantorov[10] **trijadski skup** je neprebrojiv kompaktan skup $K \subset [0,1]$ Lebesgueove mjere $\lambda(K) = 0$. Ima izuzetno važnu ulogu u teoriji skupova i analizi.

Konstrukciju Cantorova skupa K započinjemo s jediničnim segmentom $K_0 := [0,1]$. Segment K_0 podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dobivamo skup $K_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Sada konstrukciju nastavljamo indukcijom po n. Skup K_n, $n \geq 2$, dobiva se iz skupa K_{n-1} tako da svaki segment od K_{n-1} podijelimo na tri jednaka podsegmenta i izbacimo srednji interval (vidi sliku 9).



Slika 9. Prvih pet koraka konstrukcije Cantorovog skupa.

Cantorov skup K definira se kao presjek

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Skup K je neprazan jer rubne točke svakog podsegmenta od K_n pripadaju skupu K. Očito je K omeđen i zatvoren skup, pa je i kompaktan.

Uočimo da je K_n unija od 2^n disjunktnih segmenata duljine $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. To ima za posljedicu sljedeće:

(a) Cantorov skup K nema unutrašnjih točaka, tj. $\operatorname{Int} K = \emptyset$.

(b) Cantorov skup K potpuno je nepovezan, tj. za svake dvije točke $x, y \in K$ postoji točka $z \notin K$ koja leži između x i y.

(c) Cantorov skup je Lebesgueov skup mjere $\lambda(K) = 0$.

Dokažimo te tvrdnje:
(a)-(b) Dovoljno je pokazati da se u skup K ne može upisati interval. Zaista, kada bi neki interval bio sadržan u skupu K, onda bi on bio sadržan u svim skupovima K_n, $n \in \mathbb{N}$. To je nemoguće jer se u skup K_n može upisati interval duljine najviše $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Dakle, $\operatorname{Int} K = \emptyset$.

[10] Georg Cantor (1845.-1918.), njemački matematičar.

(c) Uočimo da su svi skupovi K_n, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgueovi skupovi mjere $\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Zato je i skup K kao njihov presjek također Lebesgueov skup. Prema tvrdnji (iv) propozicije 2.19. njegova Lebesgueova mjera iznosi

$$\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Sada ćemo pokazati da je Cantorov skup neprebrojiv. Dokaz ove tvrdnje može se izostaviti kod prvog čitanja. Prije samog dokaza tvrdnje vratimo se na konstrukciju Cantorova skupa K. Izbacivanjem srednjeg intervala iz skupa K_0 dobivamo dva podsegmenta: lijevi I_0 i desni I_1 (vidi sliku 9.). Očito je

$$K_1 = \bigcup_{i_1 \in \{0,1\}} I_{i_1} = I_0 \cup I_1.$$

U sljedećem koraku ($n = 2$) iz skupova I_0, I_1 izbaci se njihov srednji interval. Izbacivanjem srednjeg intervala iz I_0 dobivamo dva podsegmenta: lijevi I_{00} i desni I_{01}; dok izbacivanjem srednjeg intervala iz I_1 dobivamo lijevi I_{10} i desni I_{11} podsegment. Uočimo da je

$$K_2 = \bigcup_{i_1,i_2 \in \{0,1\}} I_{i_1 i_2} = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}.$$

Daljnju numeraciju nastavljamo indukcijom po n. Za $n > 2$, podijelimo skup $I_{i_1 \ldots i_{n-1}}$, $i_k \in \{0,1\}$, na tri jednaka podsegmenta, a zatim izbacimo srednji interval. Dobiveni lijevi podsegment označavamo s $I_{i_1 \ldots i_{n-1} 0}$, a desni s $I_{i_1 \ldots i_{n-1} 1}$. Lako je provjeriti da vrijedi

$$K_n = \bigcup_{i_1,i_2,\ldots,i_n \in \{0,1\}} I_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Za svaki beskonačan niz $(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$, $i_k \in \{0,1\}$, može se promatrati padajući niz segmenata

$$I_{i_1} \supset I_{i_1 i_2} \supset I_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots.$$

Kako se radi o padajućem nizu nepraznih zatvorenih skupova, presjek svih članova ovog niza je neprazan (vidi [7], teorem 16, str. 238.). Nadalje, budući da za dijametre vrijedi

$$\operatorname{diam}(I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = \frac{1}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

presjek $I_{i_1} \cap I_{i_1 i_2} \cap \ldots$ sadrži jednu jedinu točku. Očito, skup svih tako dobivenih točaka je Cantorov skup K.

Neka $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označava skup svih beskonačnih nizova s članovima iz skupa $\{0,1\}$. Ako svakom takvom nizu $(i_1, \ldots, i_k, \ldots)$ iz $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ pridružimo jedinu točku iz presjeka $I_{i_1} \cap I_{i_1 i_2} \cap \ldots$, dobivamo bijekciju između skupa $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i Cantorova skupa K. Zato je

$$\operatorname{kard}(K) = \operatorname{kard}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0},$$

gdje je $\aleph_0$ oznaka za kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$. Kako je $\operatorname{kard}\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ (vidi [7]), Cantorov skup K je neprebrojiv.

Na kraju, napomenimo kako se može pokazati da je spomenuta bijekcija zadana formulom

$$(i_1, \ldots, i_k, \ldots) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2i_k}{3^k}.$$

Cantorova funkcija. U teoriji mjere Cantorova funkcija često se koristi za konstrukciju primjera ili kontraprimjera. Zbog boljeg razumijevanja kako se ona definira, napravit ćemo dvije različite konstrukcije ove funkcije.

Prvo ćemo se prisjetiti konstrukcije Cantorova skupa. Skup K_n, $n \geq 0$, sastoji se od 2^n disjunktnih segmenata (vidi sliku 10.). Neka J_n^k označava k-ti interval slijeva koji ne pripada skupu K_n. Takvih intervala ima ukupno $2^n - 1$. Zaista, neka je l_n broj takvih intervala. Očito je $l_0 = 0$, $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 7$ (vidi sliku 9.). U n-tom koraku konstrukcije Cantorova skupa svaki od 2^{n-1} podsegmenata skupa K_{n-1} daje jedan interval koji se izbacuje. Zato je $l_n = 2^{n-1} + l_{n-1}$, odakle teleskopiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} l_n &= 2^{n-1} + l_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + l_{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + l_{n-3} = \ldots \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + l_{n-2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^1 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Nakon n-tog koraka konstrukcije izbačeni su međusobno disjunktni intervali

$$J_n^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$$

i zato je

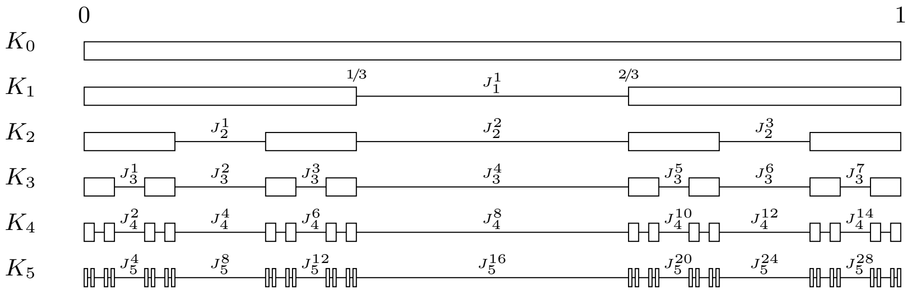
$$K_n^c = \bigcup_{k=1}^{2^n - 1} J_n^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da s lijeve strane od J_n^k ima k podsegmenata skupa K_n. Zato u sljedećem koraku konstrukcije svaki od tih podsegmenata daje po jedan interval (smješten lijevo od J_n^k) koji će se izbaciti. To znači da će nakon $(n+1)$-og koraka konstrukcije interval J_n^k postati (brojano slijeva) $(2k)$-ti po redu interval koji ne pripada skupu K_{n+1}. Tako smo pokazali da vrijedi

$$J_n^k = J_{n+1}^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots 2^n - 1,$$

odakle iteriranjem dobivamo

$$J_n^k = J_{n+m}^{2^m k}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots 2^n - 1. \tag{2.22}$$



Slika 10. Konstrukcija Cantorove funkcije.

Sada ćemo pokazati kako se konstruira Cantorova funkcija $c : [0,1] \to \mathbb{R}$. U svrhu boljeg razumijevanja to ćemo napraviti na dva različita načina.

Prvi način konstrukcije Cantorove funkcije. Uočimo da je

$$K^c = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_n^k\big),$$

a zatim definirajmo funkciju $h : K^c \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{k}{2^n}, \qquad x \in J_n^k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots 2^n - 1. \tag{2.23}$$

Prvo treba pokazati da je s (2.23) dobro definirano pridruživanje, tj. da će se za svaka dva skupa J_n^k, J_r^s koja sadrže x dobiti ista vrijednost $s/2^r = k/2^n$. Zaista, bez smanjenja općenitosti, neka je $r = n + m$. Tada iz (2.22) dobivamo $s = 2^m k$, odakle slijedi $s/2^r = (2^m k)/(2^{n+m}) = k/2^n$.

Pokažimo da je h monotono rastuća funkcija na K^c. Neka su $x, y \in K^c$ takvi da je $x < y$. Kako je $K^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^c$, postoji dovoljno velik prirodan broj n takav da je $x, y \in K_n^c$. Nadalje, kako je $K_n^c = \bigcup_{k=1}^{2^n-1} J_n^k$, postoje prirodni brojevi k_1 i k_2, $1 \le k_1, k_2 \le 2^n - 1$, takvi da je $x \in J_n^{k_1}$, $y \in J_n^{k_2}$. Broj x nalazi se lijevo od y pa je zato $k_1 \le k_2$ (Brojevi k_1 i k_2 govore nam koji su slijeva po redu intervali $J_n^{k_1}$ i $J_n^{k_2}$). Sada iz (2.23) dobivamo $h(x) = k_1/2^n \le k_2/2^n = h(y)$. Time smo pokazali da h monotono raste.

Cantorova funkcija $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ definira se formulom:

$$c(0) = 0, \quad c(1) = 1, \quad c(x) = \begin{cases} h(x), & \text{ako je } x \in K^c \\ \sup\{h(t) : t \in K^c, t \le x\}, & \text{ako je } x \in K \cap (0,1). \end{cases}$$

Pokažimo da je c monotono rastuća i uniformno neprekidna na $[0,1]$.

Prvo ćemo pokazati da je Cantorova funkcija uniformno neprekidna na segmentu $[0,1]$, tj. da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|c(x) - c(y)| < \varepsilon \qquad \text{za sve } x, y \in [0,1] \text{ za koje je } |x - y| < \delta. \tag{2.24}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Prvo odaberimo prirodan broj n_0 takav da je $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$, a zatim za $\delta > 0$ uzmimo bilo koji realan broj takav da je $\delta < \frac{1}{3^{n_0}}$. Pokažimo da za tako odabran $\delta > 0$ vrijedi (2.24).

Dokaz ćemo provesti na „n_0-toj razini", tj. koristeći konstrukciju skupa K_{n_0}. U tu svrhu, prisjetimo se da skup K_{n_0} ima 2^{n_0} podsegmenata jednake duljine $1/3^{n_0}$. Između tih podsegmenata nalaze se intervali $J_{n_0}^s$, $1 \leq s \leq 2^{n_0} - 1$. Duljina svakog intervala $J_{n_0}^s$ iznosi najmanje $1/3^{n_0}$.

Neka su $x, y \in [0, 1]$, bilo koje dvije točke takve da je $|x - y| < \delta$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $x < y$ i pokažimo da vrijedi (2.24).

(a) Slučaj $x = 0$. Tada je $y = |0 - y| < \delta < \frac{1}{3^{n_0}}$, a $c(0) = 0$. Odaberimo bilo koju točku $y' \in J_{n_0}^1 = \left(\frac{1}{3^{n_0}}, \frac{2}{3^{n_0}}\right)$. Dakle, imamo

$$0 = x < y < y' \qquad \& \qquad h(y') = \frac{1}{2^{n_0}}. \tag{2.25}$$

Pomoću tih nejednakosti i činjenice da funkcija $h : K^c \to \mathbb{R}$ monotono raste lako je pokazati da vrijedi

$$0 = c(0) < c(y) \leq h(y'), \tag{2.26}$$

odakle se dobiva željena nejednakost $|c(y) - c(0)| \leq h(y') = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Zaista, ako je $y \in K^c$, zbog nejednakosti (2.25) je $0 < h(y) \leq h(y')$. Kako je $c(y) = h(y)$, imamo nejednakosti (2.26). Ako je pak $y \in K$, zbog (2.25) je

$$0 = c(0) < c(y) = \sup\{h(t) : t \in K^c, t \leq y\} \leq h(y').$$

(b) Slučaj $y = 1$. Tada je $c(y) = 1$, a zbog $|1 - x| < \delta < \frac{1}{3^{n_0}}$ je $1 - \frac{1}{3^{n_0}} < x$. Odaberimo bilo koju točku $x' \in J_{n_0}^{2^{n_0}-1} = \left(1 - \frac{2}{3^{n_0}}, 1 - \frac{1}{3^{n_0}}\right)$. Tada je

$$x' < x < y = 1 \quad \& \qquad h(x') = \frac{2^{n_0} - 1}{2^{n_0}}. \tag{2.27}$$

Pokažimo da vrijedi

$$h(x') \leq c(x) < c(y) = 1, \tag{2.28}$$

odakle će slijediti $|c(y) - c(x)| \leq 1 - h(x') = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Ako je $x \in K^c$, onda je $c(x) = h(x)$. Nadalje, zbog (2.27) je $h(x') \leq h(x) < 1$. Ako je pak $x \in K$, onda je

$$h(x') \leq \sup\{h(t) : t \in K^c, t \leq x\} = c(x) < h(y) = 1.$$

(c) Slučaj $x, y \in (0, 1)$.

Ako je $[x, y] \cap K_{n_0} = \emptyset$, onda postoji interval $J_{n_0}^{k_0}$, $1 \leq k_0 \leq 2^{n_0} - 1$, koji sadrži cijeli segment $[x, y]$. Zato je

$$|c(x) - c(y)| = |h(x) - h(y)| = \left|\frac{k_0}{2^{n_0}} - \frac{k_0}{2^{n_0}}\right| = 0. \tag{2.29}$$

Sada pretpostavimo da je $[x, y] \cap K_{n_0} \neq \emptyset$. Kako je $|x - y| < \delta < \frac{1}{3^{n_0}}$ te kako se između svaka dva podsegmenta od K_{n_0} nalazi najmanje jedan interval $J_{n_0}^s$ $(1 \leq s \leq 2^{n_0} - 1)$ duljine barem $\frac{1}{3^{n_0}}$, segment $[x, y]$ siječe samo jedan podsegment od K_{n_0}. Neka je taj jedinstveni podsegment okružen intervalima $J_{n_0}^{k_0}$ i $J_{n_0}^{k_0+1}$.

Neka su $x' \in J_{n_0}^{k_0}$ i $y' \in J_{n_0}^{k_0+1}$, bilo koje dvije točke takve da je $x' < x$ i $y < y'$. Dakle, imamo

$$x' < x < y < y' \qquad \& \qquad h(x') = \frac{k_0}{2^{n_0}},\ h(y') = \frac{k_0 + 1}{2^{n_0}}. \tag{2.30}$$

Sada ćemo pokazati da je

$$h(x') \leq c(x) \leq c(y) \leq h(y'), \tag{2.31}$$

odakle će slijediti

$$|c(y) - c(x)| \leq h(y') - h(x') = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

U tu svrhu iskoristit ćemo nejednakost (2.30) i činjenicu da funkcija h monotono raste: Ako su $x, y \in K^c$, onda je $c(x) = h(x)$ i $c(y) = h(y)$. Nadalje, zbog (2.30) je $h(x') \leq h(x) \leq h(y) \leq h(y')$, odakle slijedi (2.31). Sada pretpostavimo da je $x \in K$, a $y \in K^c$. Tada je $c(y) = h(y)$, a zbog (2.30) je

$$h(x') \leq c(x) = \sup\{h(t) : t \in K^c, t \leq x\} \leq h(y) \leq h(y'),$$

odakle slijedi (2.31). Konačno, ako su $x, y \in K$, zbog (2.30) je

$$\begin{aligned} h(x') \leq c(x) = \sup\{h(t) : t \in K^c, t \leq x\} &\leq h(z) \\ \leq \sup\{h(t) : t \in K^c, t \leq y\} &= c(y) \leq h(y'). \end{aligned}$$

Time smo kompletirali dokaz uniformne neprekidnosti Cantorove funkcije. Osim toga, jednostavno je uočiti da iz (2.26), (2.28), (2.29) i (2.31) slijedi da je Cantorova funkcija monotono rastuća.

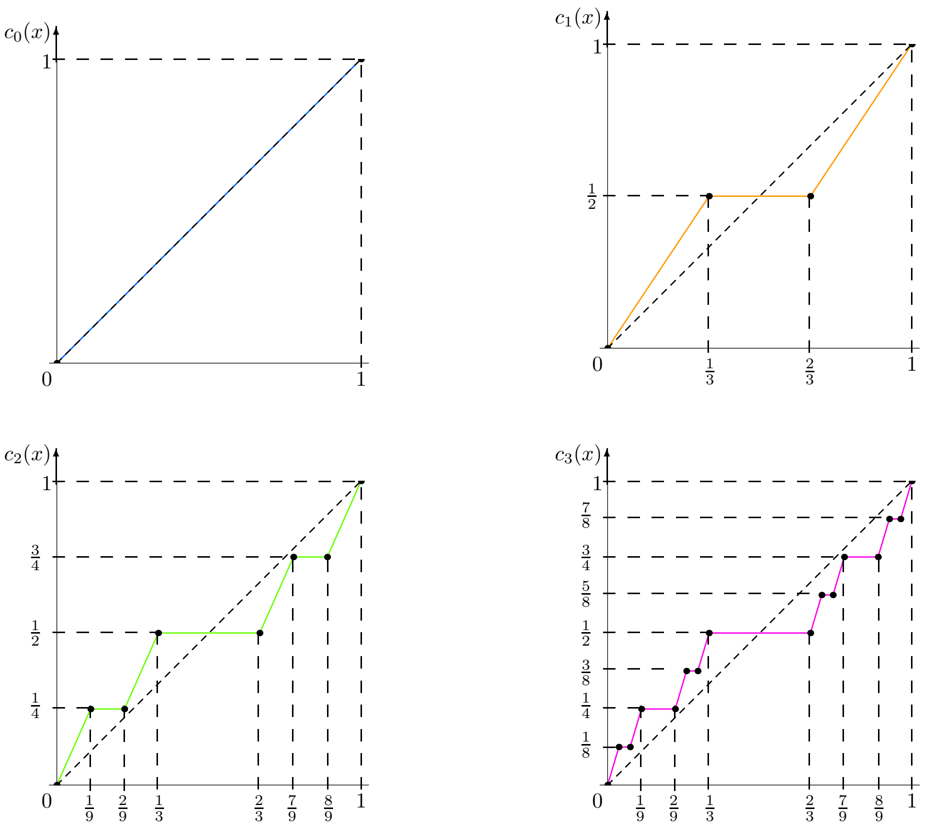
Drugi način konstrukcije Cantorove funkcije. Cantorova funkcija $c : [0, 1] \to \mathbb{R}$ može se dobiti kao limes niza $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastućih i neprekidnih po dijelovima linearnih funkcija $c_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Konstrukciju započinjemo s funkcijom $c_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $c_0(x) = x$. Funkciju $c_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dobivamo tako da c_0 „izravnamo" nad segmentom $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ na način prikazan na slici 10. Sada funkciju c_1 „izravnavamo" nad segmentima $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ i $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ na način prikazan na slici 11. Dobiva se funkcija $c_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Nastavljajući taj postupak „izravnavanja" dobiva se niz $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rastućih i neprekidnih po dijelovima linearnih funkcija $c_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sa sljedećim očiglednim svojstvima:

(i) Svaka funkcija $c_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ po dijelovima je linearna, rastuća i neprekidna. Pri tome je $c_n(0) = 1$, $c_n(1) = 1$.

(ii) „Ravni dio" funkcije c_n sadrži „ravni dio" funkcije c_{n-1}.

(iii) Za svaki $x \in [0,1]$ vrijedi

$$|c_n(x) - c_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$



Slika 11. Konstrukcija Cantorove funkcije pomoću niza funkcija.

Pomoću (2.32) lako se dobiva sljedeća uniformna ocjena:

$$|c_{n+m}(x) - c_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \qquad \text{za svaki } x \in [0,1] \text{ i za svaki } n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Zaista, jednostavnim računom dobivamo:

$$\begin{aligned} |c_{n+m}(x) - c_n(x)| &= \Big| \sum_{k=1}^{m} \big[c_{n+k}(x) - c_{n+k-1}(x) \big] \Big| \leq \sum_{k=1}^{m} \big| c_{n+k}(x) - c_{n+k-1}(x) \big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Nejednakost (2.33) govori nam da je niz $\big(c_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, pa je on i konvergentan. Cantorova funkcija $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ definira se formulom

$$c(x) := \lim_{n\to\infty} c_n(x), \qquad x \in [0,1].$$

Dokažimo da je c neprekidna funkcija. U tu svrhu prvo ćemo pokazati da niz neprekidnih funkcija $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema funkciji c.

Iskoristimo li nejednakost (2.33) tako da u njoj uzmemo limes kada $m \to \infty$, dobivamo:

$$|c(x) - c_n(x)| < \frac{1}{2^n}, \qquad \text{za svaki } x \in [0,1] \text{ i za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $1/2^{n_0} < \varepsilon$. Tada iz posljednje nejednakost slijedi da je

$$|c(x) - c_n(x)| < \varepsilon, \qquad \text{za svaki } x \in [0,1] \text{ i za svaki } n \geq n_0,$$

a to znači da niz funkcija $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema funkciji c.

Kako niz neprekidnih funkcija $\big(c_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema funkciji c, funkcija c je neprekidna.

Zadaci za vježbu

1. Neka je $0.a_1a_2a_3\ldots$ ternarni prikaz realnog broja $x \in [0,1]$, tj.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0,1,2\}.$$

(a) Pokažite da se Cantorov skup K podudara sa skupom svih realnih brojeva iz segmenta $[0,1]$ koji u svom ternarnom prikazu nemaju broj 1, tj.

$$K = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0,2\} \text{ za svaki } n \Big\}.$$

(b) Iskoristite (a) i pokažite da je K neprebrojiv skup.

Uputa: (a) Ako je $x \in K_1$, onda je $x \in [0,1/3]$ ili je $x \in [2/3,1]$. U oba slučaja postoji $a_1 \in \{0,2\}$ takav da je

$$0.a_1 0000\ldots \leq x \leq 0.a_1 2222\ldots$$

Sada se indukcijom lako pokaže da za svaki $x \in K_n$ postoje jednoznačno određeni brojevi $a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}$ takvi da je

$$0.a_1a_2\ldots a_n 0000\ldots \leq x \leq 0.a_1a_2\ldots a_n 2222\ldots$$

Zato, ako je $x \in K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, onda se x može zapisati u obliku $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0,1,2\}$.

Obratno, neka je $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0,1,2\}$. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} \leq x \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3^k},$$

odakle slijedi $x \in K_k$.

(b) Definirajte preslikavanje $h : K \to [0,1]$ na sljedeći način: Za $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, gdje su $a_n \in \{0,1,2\}$, stavite $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$. Preslikavanje h nije injekcija (npr. $h(1/3) = h(2/3)$), ali je surjekcija. To znači da je neki podskup od K ekvipotentan sa $[0,1]$, pa K nije prebrojiv.

2.9. Lebesgue-Stieltjesova mjera na $\mathbb{R}$

Za definiciju ove mjere upotrijebit ćemo konstrukciju opisanu propozicijom 2.28. Neka je $\mathcal{C}$ familija svih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika $(a, b]$, $a \leq b$. Kako je prazan skup $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{C}$ te kako se može pisati $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty}(-i, i]$, familija $\mathcal{C}$ je σ-pokrivač skupa $\mathbb{R}$.

Za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$, s $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $C_i \in \mathcal{C}$, koji pokrivaju skup A, tj.

$$\mathcal{C}_A := \Big\{((a_i, b_i], i \in \mathbb{N}) : a_i \leq b_i \quad \& \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]\Big\}.$$

Nadalje, neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija, tj. neka ima svojstvo da je u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ limes zdesna $F(x_0+) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0<x}} F(x) = F(x_0)$.

2.59. PRIMJEDBA
Zahvaljujući rastu funkcije F, lako je pokazati da u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji limes slijeva $F(x_0-) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} F(x)$ te da je

$$F(x_0-) = \sup\{F(x) : x < x_0\}. \tag{2.34}$$

Osim toga, vrijedi

$$F(x_0-) \leq F(x_0) = F(x_0+), \tag{2.35}$$

pri čemu se jednakost javlja onda i samo onda ako je F neprekidna u točki x_0 (vidi zadatak 1., str. 78.).

Definirajmo funkciju $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ ovako:

$$\tau((a, b]) := F(b) - F(a), \qquad a \leq b.$$

Očito je $\tau(\emptyset) = \tau((a, a]) = 0$. Funkciju $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ definiranu formulom

$$\begin{aligned}\mu_F^\star(A) &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\tau((a_i, b_i]) : ((a_i, b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\Big\}\\ &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\big[F(b_i) - F(a_i)\big] : ((a_i, b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\Big\}\end{aligned}$$

zovemo Lebesgue-Stieltjesova[11] vanjska mjera na $\mathbb{R}$ generirana funkcijom F.

2.60. PROPOZICIJA
Funkcija $\mu_F^\star : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ je vanjska mjera.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 2.28. ■

---

[11] Thomas-Jan Stieltjes (1856.-1894.), nizozemski astronom i matematičar.

2.61. PRIMJEDBA
Kao što je već spomenuto u primjedbi 2.29., možemo smatrati da se infimum u definicijskoj formuli od $\mu_F^\star(A)$ uzima po svim nizovima u $\mathcal{C}$ koji pokrivaju skup A, bez obzira jesu li ti nizovi konačni ili beskonačni.

2.62. PROPOZICIJA

$$\mu_F^\star(\{a\}) = F(a) - F(a-), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Kako je $\{a\} \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ za svaki $\varepsilon > 0$, prema prethodnoj primjedbi je $\mu_F^\star(\{a\}) \leq F(a+\varepsilon) - F(a-\varepsilon)$, odakle prijelazom na limes $\varepsilon \to 0$ dobivamo $\mu_F^\star(\{a\}) \leq F(a) - F(a-)$.

Preostaje dokazati suprotnu nejednakost: $\mu_F^\star(\{a\}) \geq F(a) - F(a-)$. Ako je $F(a) = F(a-)$, suprotna nejednakost glasi $\mu_F^\star(\{a\}) \geq 0$ i posljedica je nenegativnosti od $\mu_F^\star$. Zato nadalje pretpostavimo da je $F(a) \neq F(a-)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Vanjska mjera $\mu_F^\star$ definira se kao infimum pa zato postoji niz intervala $(a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, takvih da je $\{a\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$ i

$$\sum_{i=1}^{\infty}[F(b_i) - F(a_i)] < \mu_F^\star(\{a\}) + \varepsilon.$$

Bez smanjenja općenitosti, neka je $a \in (a_1, b_1]$. Odaberimo strogo rastući niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $a_1 < x_n < a$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i da $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tada je $(x_n, a] \subseteq (a_1, a] \subseteq (a_1, b_1]$, pa zbog monotonosti od F imamo $F(a) - F(x_n) \leq F(b_1) - F(a_1)$. Zato je

$$F(a) - F(x_n) \leq F(b_1) - F(a_1) \leq \sum_{i=1}^{\infty}[F(b_i) - F(a_i)] < \mu_F^\star(\{a\}) + \varepsilon,$$

odakle dobivamo

$$F(a) - F(a-) = \lim_{x_n \to a}[F(a) - F(x_n)] \leq \mu_F^\star(\{a\}) + \varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ je $F(a) - F(a-) \leq \mu_F^\star(\{a\})$. ∎

Za lakše pamćenje tvrdnji sljedeće propozicije korisno je na umu imati sljedeće mnemotehničko pravilo: Ako je rubna točka uključena u interval, približavamo joj se izvana; ako nije uključena u interval, približavamo joj se iznutra.

2.63. PROPOZICIJA
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Tada je

(i) $\mu_F^\star([a, b]) = F(b) - F(a-)$,

(ii) $\mu_F^\star([a,b)) = F(b-) - F(a-)$,

(iii) $\mu_F^\star((a,b]) = F(b) - F(a)$,

(iv) $\mu_F^\star((a,b)) = F(b-) - F(a)$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Kako je $[a,b] \subset (a-\varepsilon, b]$, tada je (vidi primjedbu 2.61.) $\mu_F^\star([a,b]) \leq F(b) - F(a-\varepsilon)$, odakle prijelazom na limes $\varepsilon \to 0$ dobivamo $\mu_F^\star([a,b]) \leq F(b) - F(a-)$.

Sada ćemo pokazati da vrijedi i obratna nejednakost, što će za posljedicu imati $\mu_F^\star([a,b]) = F(b) - F(a-)$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Nadalje, neka je $((a_i, b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ bilo koji niz zdesna zatvorenih intervala koji pokrivaju segment $[a,b]$. Funkcija F je neprekidna zdesna u svakoj točki b_i, $i \in \mathbb{N}$, pa zato postoje brojevi $\delta_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, takvi da je

$$F(b_i + \delta_i) - F(b_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{2.36}$$

Segment $[a,b]$ je kompaktan skup i zato otvoreni pokrivač $\big((a_i, b_i + \delta_i), i \in \mathbb{N}\big)$ ima konačan potpokrivač. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i + \delta_i).$$

Matematičkom indukcijom po n lako je pokazati da vrijedi

$$F(b) - F(a-) \leq \sum_{i=1}^{n} [F(b_i + \delta_i) - F(a_i)],$$

odakle pomoću (2.36) dobivamo

$$F(b) - F(a-) \leq \sum_{i=1}^{n} [F(b_i) - F(a_i)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)] + \varepsilon.$$

Kako posljednja nejednakost vrijedi za svaki pokrivač $((a_i, b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, dobivamo

$$F(b) - F(a-) - \varepsilon \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \big(F(b_i) - F(a_i)\big) : ((a_i, b_i], i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_{[a,b]} \right\} = \mu_F^\star([a,b]).$$

Zbog proizvoljnosti broja ε je $F(b) - F(a-) \leq \mu_F^\star([a,b])$. Time je dokazana obratna nejednakost, pa onda i tvrdnja (i).

(ii) Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj takav da je $a < b - \varepsilon$. Kako je $[a, b-\varepsilon] \subset [a,b)$, monotonost funkcije $\mu_F^\star$ i (i) povlače

$$\mu_F^\star([a,b)) \geq \mu_F^\star([a, b-\varepsilon]) = F(b-\varepsilon) - F(a-),$$

odakle uzimanjem limesa $\varepsilon \to 0$ dobivamo $\mu_F^\star([a,b)) \geq F(b-) - F(a-)$.

Preostaje pokazati da vrijedi i suprotna nejednakost. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj. Odaberimo neki strogo rastući niz realnih brojeva $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da je $a < b_1$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Tada je

$$[a,b) \subset (a-\varepsilon, b_1] \bigcup \Big(\bigcup_{i=2}^{\infty} (b_{i-1}, b_i] \Big),$$

odakle zbog monotonosti i σ-subaditivnosti vanjske mjere dobivamo

$$\begin{aligned}\mu_F^\star([a,b)) &\le F(b_1) - F(a-\varepsilon) + \sum_{i=2}^{\infty} \big[F(b_i) - F(b_{i-1})\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} \big[F(b_n) - F(a-\varepsilon)\big] = F(b-) - F(a-\varepsilon).\end{aligned}$$

Konačno, prijelazom na limes $\varepsilon \to 0$ dobivamo $\mu_F^\star([a,b)) \le F(b-) - F(a-)$.

(iii) i (iv) Postupa se slično kao pod (ii). ∎

Prema teoremu 2.26. skup $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$ svih $\mu_F^\star$-izmjerivih podskupova od $\mathbb{R}$ je σ-algebra. Restrikciju vanjske mjere $\mu_F^\star$ na σ-algebru $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$ označavat ćemo s μ_F ili $\mathrm{d}\mu_F$ i zvati **Lebesgue-Stieltjesova mjera** generirana funkcijom F.

Lako je uočiti da se za $F(x) = x$ Lebesgue-Stieltjesova mjera podudara s Lebesgueovom mjerom.

2.64. PROPOZICIJA
Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}$ je $\mu_F^\star$-izmjeriv, tj. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_F^\star}$.

Dokaz. Lako je modificirati dokaz propozicije 2.43. kako bi se pokazalo da je svaki beskonačni interval oblika $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, $\mu_F^\star$-izmjeriv, tj. da pripada σ-algebri $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$. Taj dio dokaza prepuštamo čitatelju.

Prema teoremu 2.11. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ najmanja je σ-algebra koja sadrži familiju svih takvih beskonačnih intervala. Zato je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\mu_F^\star}$. ∎

Uočimo da je $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]$. Primjenom tvrdnje (iv) iz propozicije 2.19. dobivamo kraći dokaz propozicije 2.62.:

$$\mu_F(\{a\}) = \lim_{n\to\infty} \Big[F(a) - F\Big(a - \frac{1}{n}\Big)\Big] = F(a) - F(a-).$$

2.65. PROPOZICIJA
Neka je μ_F Lebesgue-Stieltjesova mjera na σ-algebri $\mathcal{M}_{\mu_F^\star}$. Vrijedi:

(i) Mjera μ_F je σ-konačna.

(ii) Mjera μ_F je konačna onda i samo onda ako je funkcija F omeđena.

Dokaz. (i) Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilo koja dva niza realnih brojeva, takvi da (a_n) strogo pada i divergira prema $-\infty$, (b_n) strogo raste i divergira prema ∞, te da je $a_1 < b_1$. Tada je $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$ i $\mu_F((a_n, b_n]) = F(b_n) - F(a_n)$. Dakle, mjera μ_F je σ-konačna.

(ii) Prvo pretpostavimo da je F omeđena funkcija. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilo koja dva niza sa svojstvima navedenim pod (i). Odgovarajući nizovi funkcijskih vrijednosti $(F(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i $(F(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ omeđeni su i monotoni (uočite da $(F(a_n))$ pada, a $(F(b_n))$ raste), pa su i konvergentni. Neka $F(a_n) \to F_a$, a $F(b_n) \to F_b$. Kako je $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$ i $((a_n, b_n])$ rastući niz izmjerivih skupova, pomoću tvrdnje (iii) iz propozicije 2.19. dobivamo

$$\mu_F(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \mu_F((a_n, b_n]) = \lim_{n\to\infty} \big[F(b_n) - F(a_n)\big] = F_b - F_a < \infty.$$

Time smo pokazali da je mjera μ_F konačna.

Sada pretpostavimo da je mjera μ_F konačna. Treba pokazati da je funkcija F omeđena i odozgo i odozdo. Kada F ne bi bila omeđena odozgo, lako bi se konstruirao strogo rastući niz (b_n) takav da $F(b_n) \to \infty$. Kako je $(0, b_n] \subset \mathbb{R}$, to je $F(b_n) - F(0) \le \mu_F(\mathbb{R})$, odakle bi prijelazom na limes $n \to \infty$ slijedilo $\infty \le \mu_F(\mathbb{R})$, što bi bilo u suprotnosti s pretpostavkom da je μ_F konačna mjera. Slično se pokaže da je F omeđena odozdo. ■

2.66. Propozicija

Lebesgue-Stieltjesova mjera μ_F jedina je mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ koja svakom intervalu $(a, b]$, $a < b$, pridružuje broj $F(b) - F(a)$, tj. $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.

Dokaz. Uz potrebne modifikacije dokaz se svodi na dokaz propozicije 2.58. ■

Zadaci za vježbu

1. Dokazati jednakost (2.34) i nejednakost (2.35).

   Uputa: Zbog rasta funkcije F, skup $\{F(x) : x < x_0\}$ je odozgo omeđen s $F(x_0)$. Neka je $a := \sup\{F(x) : x < x_0\} \le F(x_0)$. Kako je $a \le F(x_0)$, dovoljno je dokazati samo jednakost (2.34), tj. treba pokazati da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $|F(x) - a| < \varepsilon$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Zaista, po definiciji supremuma a postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $a - \varepsilon < F(x_0 - \delta) \le a$. Zato i zbog rasta funkcije F, za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $F(x) \in (a - \varepsilon, a]$.

2. Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < -1 \\ 1 + x, & \text{ako je } -1 \le x < 0 \\ 2 + x^2, & \text{ako je } 0 \le x < 2 \\ 9, & \text{ako je } x \ge 2. \end{cases}$$

Izračunati mjeru μ_F sljedećih skupova: (a) $\{2\}$. (b) $[-1/2, 3)$. (c) $(-1, 0] \cup (1, 2)$. (d) $[0, 1/2) \cup (1, 2]$. (e) $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

Rješenje: (a) $\mu_F(\{2\}) = 3$. (b) $\mu_F([-1/2, 3)) = 7\frac{1}{2}$. (c) $\mu_F((-1, 0] \cup (1, 2)) = 5$. (d) $\mu_F([0, 1/2) \cup (1, 2]) = 7\frac{1}{4}$. (e) $\mu_F(\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}) = 7\frac{1}{4}$. Uputa: $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -1/2\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(1/2, n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, -1/2)$. Zato je npr. $\mu_F(\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_F(1/2, n)) = \lim_{n\to\infty}[F(n-) - F(1/2)] = 9 - 2\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$.

2.10. Prostor potpune mjere

Neka je $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mjera na σ-algebri $\mathcal{A}$ podskupova od X. Prisjetimo se da uređenu trojku $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zovemo prostor mjere, a članove od $\mathcal{A}$ izmjerivi skupovi.

Za skup $N \subseteq X$ kažemo da je μ-**zanemariv** ili kraće **zanemariv** ako postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Dakle, zanemarivi skupovi su podskupovi izmjerivih skupova mjere nula. Uočite da je svaki skup mjere nula ujedno i zanemariv, te da zanemariv skup ne mora biti izmjeriv. Prazan skup $\emptyset$ je zanemariv.

2.67. PRIMJER. *Neka je* $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\big\}$, *a* $\mu = \delta_1$ *Diracova delta mjera koncentrirana u točki* $x = 1$. *Skup* $N = \{2\}$ *nije izmjeriv, ali je zanemariv jer je* $\{2\} \subset \{2, 3\}$ *i* $\delta_1(\{2, 3\}) = 0$.

Neka je $\mathcal{N}_\mu$ skup svih μ-zanemarivih skupova. Ako je $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{A}$, tj. ako σ-algebra $\mathcal{A}$ sadrži sve zanemarive skupove, onda za prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da je **prostor potpune mjere** ili **potpun prostor**, a za mjeru μ da je **potpuna mjera**.

2.68. PRIMJEDBA
Restrikcija vanjske mjere $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ *na* σ*-algebru* $\mathcal{M}_{\mu^\star}$ *je mjera (teorem 2.26.). Ta je restrikcija potpuna mjera. Zaista, neka je* $N \subseteq X$ *zanemariv skup. Tada postoji skup* $B \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$ *takav da je* $N \subseteq B$ *i* $\mu^\star(B) = 0$, *odakle zbog monotonosti funkcije* $\mu^\star$ *slijedi* $\mu^\star(N) = 0$. *Prema propoziciji 2.25. je* $N \in \mathcal{M}_{\mu^\star}$.

Specijalno, Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ *je potpuna. Nažalost, restrikcija Lebesgueove mjere na Borelovu* σ*-algebru* $\mathcal{B}(R)$ *nije potpuna mjera (vidi korolar 3.13.).*

Neka je

$$\mathcal{A}_\mu := \{E \cup N : E \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Kako je $E = E \cup \emptyset$, za svaki $E \in \mathcal{A}$ i kako je $\emptyset$ zanemariv, to je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{A}_\mu$ σ-algebra. U tu svrhu trebat će nam sljedeća propozicija.

2.69. PROPOZICIJA
Skup $A \subseteq X$ *član je familije* $\mathcal{A}_\mu$ *onda i samo onda ako postoje skupovi* $E, F \in \mathcal{A}$ *takvi da je*

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0. \tag{2.37}$$

Dokaz. Neka je $A = E \cup N$, gdje su $E \in \mathcal{A}$ i $N \in \mathcal{N}_\mu$. Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Definiramo li $F := E \cup B \in \mathcal{A}$, dobivamo

$$E \subseteq A = E \cup N \subseteq E \cup B = F.$$

Nadalje, kako je $F \backslash E = B \backslash E \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$, monotonost mjere μ daje $\mu(F \backslash E) \leq \mu(B) = 0$, odakle slijedi $\mu(F \backslash E) = 0$.

Neka su $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da vrijedi (2.37). Pokažimo da je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Iz (2.37) slijedi

$$A = E \cup (A \backslash E) \quad \& \quad A \backslash E \subseteq F \backslash E.$$

Kako je $A \backslash E \subseteq F \backslash E$ i $\mu(F \backslash E) = 0$, skup $A \backslash E$ je zanemariv. ∎

2.70. PROPOZICIJA
Familija $\mathcal{A}_\mu$ je σ-algebra.

Dokaz. Treba pokazati da familija $\mathcal{A}_\mu$ ima svojstva (σ1)-(σ3) iz definicije 2.1.

(σ1) Već smo pokazali da je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$. Specijalno, tada je $\emptyset \in \mathcal{A}_\mu$.

(σ2) Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Prema propoziciji 2.69. tada postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je $E \subseteq A \subseteq F$ i $\mu(F \backslash E) = 0$. Zato je

$$F^c \subseteq A^c \subseteq E^c, \qquad E^c, F^c \in \mathcal{A}.$$

Kako je $E^c \backslash F^c = E^c \cap F = F \backslash E$, to je $\mu(E^c \backslash F^c) = \mu(F \backslash E) = 0$, pa iz propozicije 2.69. slijedi $A^c \in \mathcal{A}_\mu$.

(σ3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}_\mu$. Treba pokazati da je $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}_\mu$. Prema propoziciji 2.69. za svaki n postoje skupovi $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ i $\mu(F_n \backslash E_n) = 0$. Tada je

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty F_n, \qquad \bigcup_{n=1}^\infty E_n, \bigcup_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{A}.$$

Prema propoziciji 2.69. dovoljno je pokazati da je $\mu\big(\big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\big) \backslash \big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big)\big) = 0$. Zaista, kako je $\Big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big) \backslash \Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty (F_n \backslash E_n)$, primijenimo li prvo svojstvo monotonosti a zatim svojstvo σ-subaditivnosti mjere dobivamo

$$\mu\Big(\Big(\bigcup_{n=1}^\infty F_n\Big) \backslash \Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big)\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty (F_n \backslash E_n)\Big) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(F_n \backslash E_n) = 0.$$

■

2.71. DEFINICIJA
Neka su $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ i $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ dva prostora mjere na istom skupu X. Kažemo da je $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ proširenje *od $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ ako je $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ i $\mu_2(A) = \mu_1(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}_1$.*

Sada ćemo pokazati kako se mjera $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ može na prirodan način proširiti do nove mjere $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$. Krenimo intuitivnim razmišljanjem. Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$ (skup A ne mora pripadati σ-algebri $\mathcal{A}$). Uzmimo bilo koje skupove $E, F \in \mathcal{A}$ takve da je

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0.$$

Uočite da iz $\mu(F \backslash E) = 0$ slijedi $\mu(E) = \mu(F)$. Kako se skup A nalazi u „sendviču" skupova E, F iste mjere $\mu(E) = \mu(F)$, te kako se zahtijeva da bude $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$, jasno je da mora vrijediti

$$\tilde{\mu}(A) := \mu(E) = \mu(F) \tag{2.38}$$

ako postoji proširenje $\tilde{\mu}$. Odmah se postavlja pitanje ovisi li tako definirana „mjera" o izboru skupova $E, F \in \mathcal{A}$. Pretpostavimo da su $E_1, F_1 \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$E_1 \subseteq A \subseteq F_1 \quad \& \quad \mu(F_1 \backslash E_1) = 0.$$

Tada je

$$E \subseteq E \cup E_1 \subseteq A \subseteq F \cap F_1 \subseteq F,$$

pa je

$$\mu(E) \leq \mu(E \cup E_1) \leq \mu(F \cap F_1) \leq \mu(F),$$

odakle zbog $\mu(E) = \mu(F)$ dobivamo

$$\mu(E) = \mu(E \cup E_1) = \mu(F \cap F_1) = \mu(F).$$

Na sličan način dobiva se (dovoljno je zamijeniti par E, F s parom E_1, F_1)

$$\mu(E_1) = \mu(E \cup E_1) = \mu(F \cap F_1) = \mu(F_1).$$

Dakle, $\mu(E) = \mu(F) = \mu(E_1) = \mu(F_1)$, što će značiti da naša konstrukcija „mjere" $\tilde{\mu}$ neće ovisiti o izboru para $E, F \in \mathcal{A}$.

Ako je $A \in \mathcal{A}$, stavimo $E = F = A$. Tada je očito $E \subseteq A \subseteq F$ i $\mu(F \backslash E) = 0$, odakle slijedi $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$, tj. $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$. Specijalno je $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

2.72. Propozicija
Neka je $A = E \cup N$, gdje su $E \in \mathcal{A}$ i $N \in \mathcal{N}_\mu$. Tada je

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(E).$$

Dokaz. Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, postoji $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Neka je $F := E \cup B$. Tada je

$$E \subset A = E \cup N \subseteq E \cup B = F.$$

Nadalje, kako je $F \backslash E = B \backslash E \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$, monotonost mjere μ daje $\mu(F \backslash E) \leq \mu(B) = 0$, odakle slijedi $\mu(F \backslash E) = 0$. Tvrdnja slijedi iz definicijske formule (2.38). ■

2.73. Propozicija
Neka je funkcija $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ definirana formulom (2.38). Tada vrijedi:

(a) Funkcija $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ je mjera koja proširuje mjeru $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

(b) $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ je najmanji prostor potpune mjere koji proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$, tj. ako neki drugi prostor potpune mjere $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$, onda je $\mathcal{A}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}_{|\mathcal{A}_\mu} = \tilde{\mu}$.

Dokaz. (a) Već smo pokazali da je $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$. Sada ćemo pokazati da je funkcija $\tilde{\mu}$ mjera na $\mathcal{A}_\mu$, tj. da ima svojstva ($\tilde{\mu}$1)-($\tilde{\mu}$3) iz definicije 2.17.

($\tilde{\mu}$1) Očito je $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$, jer je $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$.

($\tilde{\mu}$2) Iz definicijske formule (2.38) slijedi da je $\tilde{\mu}(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}_\mu$.

($\tilde{\mu}$3) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}_\mu$. Treba pokazati da je

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

Prema propoziciji 2.69. za svaki n postoje skupovi $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$E_n \subseteq A_n \subseteq F_n \quad \& \quad \mu(F_n \backslash E_n) = 0,$$

odakle iz definicijske formule (2.38) slijedi

$$\tilde{\mu}(A_n) = \mu(E_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{A}.$$

U dokazu propozicije 2.70. pokazali smo da je $\mu\big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\big)\backslash\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)\big) = 0$. Kako su po pretpostavci skupovi A_n disjunktni, a $E_n \subseteq A_n$, to su i skupovi E_n disjunktni, pa iz definicijske formule (2.38) dobivamo

$$\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

Time smo pokazali da je $\tilde{\mu}$ mjera.

(b) Kako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ i $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$, prostor mjere $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ je proširenje od $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sada ćemo pokazati da je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ prostor potpune mjere, tj. da je $\tilde{\mu}$ potpuna mjera. Pretpostavimo da je $N \subseteq B$, $B \in \mathcal{A}_\mu$ i $\tilde{\mu}(B) = 0$. Treba pokazati da je $N \in \mathcal{A}_\mu$. Kako je $\tilde{\mu}(B) = 0$, postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je $E \subseteq B \subseteq F$, $\mu(F\backslash E) = 0$ i $0 = \tilde{\mu}(B) = \mu(E) = \mu(F)$. Kako je

$$\emptyset \subseteq N \subseteq F \quad \& \quad \mu(F\backslash\emptyset) = 0,$$

prema propoziciji 2.69. je $N \in \mathcal{A}_\mu$. Osim toga, prema definicijskoj formuli (2.38) je $\tilde{\mu}(N) = \mu(\emptyset) = 0$. To znači da je mjera $\tilde{\mu}$ potpuna.

Sada ćemo pokazati da je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ najmanji prostor potpune mjere koji proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pretpostavimo da je $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ neko drugo proširenje s potpunom mjerom $\hat{\mu}$. Treba pokazati da je $\mathcal{A}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}_{|\mathcal{A}_\mu} = \tilde{\mu}$. Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Zapišimo ga u obliku

$$A = E \cup N, \qquad E \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu.$$

Kako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, po definiciji postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Kako je $(X, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu})$ proširenje od $(X, \mathcal{A}, \mu)$, te kako je $E, B \in \mathcal{A}$, to je $E, B \in \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}(B) = \mu(B) = 0$. Kako je $\hat{\mu}$ potpuna mjera, to $N \subseteq B$ i $\hat{\mu}(B) = 0$ povlači $N \in \hat{\mathcal{A}}$ i $\hat{\mu}(N) = 0$. Sada iz $E, N \in \hat{\mathcal{A}}$ slijedi $A = E \cup N \in \hat{\mathcal{A}}$. Time je pokazano da je $\mathcal{A}_\mu \subseteq \hat{\mathcal{A}}$. Nadalje, iz $E \subseteq A = E \cup N \in \hat{\mathcal{A}}$ dobivamo

$$\hat{\mu}(E) \leq \hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(E) + \hat{\mu}(N) = \hat{\mu}(E),$$

odakle slijedi $\hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(E)$. Kako je $E \in \mathcal{A}$, to je $\hat{\mu}(E) = \mu(E)$ pa je $\hat{\mu}(A) = \mu(E)$. S druge strane, prema propoziciji 2.72. je $\tilde{\mu}(A) = \mu(E)$. Tako smo dokazali da je $\hat{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A)$. ■

2.74. DEFINICIJA

Prostor $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ *zove se* upotpunjenje prostora $(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Pri tome za* σ*-algebru* $\mathcal{A}_\mu$ *kažemo da je* upotpunjenje σ-algebre $\mathcal{A}$, *a za mjeru* $\tilde{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ *da je* upotpunjenje mjere $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

2.75. PROPOZICIJA

Prostor $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}, \lambda^\star_{d|\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}})$ *je upotpunjenje od* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, *gdje je* $\lambda = \lambda^\star_{d|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$.

Za dokaz ove tvrdnje treba nam sljedeća lema:

2.76. LEMA

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$ *Lebesgueov skup. Tada postoje Borelovi skupovi* $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ *takvi da je*

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \lambda(F \backslash E) = 0.$$

Dokaz. Neka je A Lebesgueov skup. Tada je ili (a) $\lambda(A) < \infty$ ili (b) $\lambda(A) = \infty$.

(a) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Prema propoziciji 2.54. postoji kompaktan skup K_n takav da je

$$K_n \subseteq A \quad \& \quad \lambda(A) - \frac{1}{n} < \lambda(K_n).$$

Nadalje, prema propoziciji 2.50. postoji otvoren skup U_n takav da je

$$A \subseteq U_n \quad \& \quad \lambda(U_n) < \lambda(A) + \frac{1}{n}.$$

Kako je $\lambda(A) < \infty$, prema propoziciji 2.19. je

$$\lambda(A \backslash K_n) = \lambda(A) - \lambda(K_n) \quad \& \quad \lambda(U_n \backslash A) = \lambda(U_n) - \lambda(A).$$

Neka je $E := \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, $F := \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Skupovi E i F su Borelovi. Očito je $E \subseteq A \subseteq F$. Nadalje, kako je

$$F \backslash E \subseteq U_n \backslash K_n = (U_n \backslash A) \cup (A \backslash K_n) \quad \& \quad (U_n \backslash A) \cap (A \backslash K_n) = \emptyset,$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\lambda(F\backslash E) &\leq \lambda(U_n\backslash K_n) = \lambda(U_n\backslash A) + \lambda(A\backslash K_n)\\ &= \Big(\lambda(U_n) - \lambda(A)\Big) + \Big(\lambda(A) - \lambda(K_n)\Big) \leq \frac{2}{n},\end{aligned}$$

odakle uzimajući limes $n \to \infty$ dobivamo $\lambda(F\backslash E) = 0$.

(b) Pretpostavimo da je $\lambda(A) = \infty$. Prema lemi 2.10. postoji niz $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ međusobno disjunktnih d-intervala takvih da je $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Svaki d-interval I_n je omeđen i Borelov skup. Zato su i skupovi

$$A_n := A \cap I_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

omeđeni, međusobno disjunktni i Lebesgueovi. Zbog omeđenosti je $\lambda(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Zato, prema već dokazanoj tvrdnji (a), za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje Borelovi skupovi $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ takvi da je $E_n \subseteq A_n \subseteq F_n$ i $\mu(F_n\backslash E_n) = 0$. Neka je $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Tada je $E \subseteq A \subseteq F$ i $\lambda(F\backslash E) = 0$. (vidi dokaz propozicije 2.70.) ■

Dokaz propozicije 2.75. Neka je $(\mathbb{R}^d, \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}, \tilde{\lambda})$ upotpunjenje prostora mjere $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Treba pokazati da je $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d} = \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$ i da je $\tilde{\lambda}(A) = \lambda_d^\star(A)$ za svaki $A \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$.

Kao prvo, prema lemi 2.76. i propoziciji 2.69. je $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}$. Nadalje, kako je $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}, \lambda^\star_{d|\mathcal{M}_{\lambda_d^\star}})$ prostor potpune mjere (vidi primjedbu 2.68.) koji proširuje $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, prema tvrdnji (b) propozicije 2.73. je

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d} \subseteq \mathcal{M}_{\lambda_d^\star} \quad \& \quad \lambda_d^\star(A) = \tilde{\lambda}(A) \quad \text{za svaki } A \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}.$$

Zato je $\mathcal{M}_{\lambda_d^\star} = \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^d}$ i $\tilde{\lambda}(A) = \lambda_d^\star(A)$ za svaki $A \in \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$. ■

2.77. Primjedba

Navedimo bez dokaza da je $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\mu_F^\star}, \mu^\star_{F|\mathcal{M}_{\mu_F^\star}})$ upotpunjenje od $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_F)$, gdje je $\mu_F = \mu^\star_{F|\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

2.78. Definicija

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bilo koji prostor mjere.

(a) Funkciju $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ definiranu formulom

$$\mu^\star(A) = \inf\{\mu(B) : A \subseteq B, B \in \mathcal{A}\} \tag{2.39}$$

zovemo vanjska mjera generirana mjerom μ.

(b) Funkciju $\mu_\star : 2^X \to [0, \infty]$ definiranu formulom

$$\mu_\star(A) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A, C \in \mathcal{A}\} \tag{2.40}$$

zovemo unutarnja mjera generirana mjerom μ.

Očigledno je $\mu^\star(\emptyset) = 0$ i $\mu_\star(\emptyset) = 0$. Zbog monotonosti mjere μ vrijedi:

(i) funkcije $\mu^\star$ i $\mu_\star$ su monotone,

(ii) $\mu_\star(A) \leq \mu(A) \leq \mu^\star(A)$ za svaki $A \subseteq X$,

(iii) $\mu_\star(A) = \mu(A) = \mu^\star(A)$ za svaki $A \in \mathcal{A}$.

2.79. PROPOZICIJA
Funkcija $\mu^\star$ je vanjska mjera.

Dokaz. Definirajmo: $\mathcal{C} := \mathcal{A}$ i $\tau(C) := \mu(C)$, $C \in \mathcal{C}$. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 2.28. ■

2.80. PROPOZICIJA
Funkcija $\mu_\star : 2^X \to [0, \infty]$ definirana s (2.40) ima sljedeća svojstva:

(i) $\mu_\star(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mu_\star(A) \leq \mu_\star(B)$,

(iii) Ako su skupovi $A_i \subseteq X$, $i \in \mathbb{N}$, disjunktni, onda je $\mu_\star\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu_\star(A_i)$.

Dokaz. Svojstva (i) i (ii) su očigledna.
(iii) Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih podskupova od X. Ako je za neki $i \in \mathbb{N}$, $\mu_\star(A_i) = \infty$, onda je zbog (ii) pogotovo $\mu_\star\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) = \infty$, pa vrijedi nejednakost iz (iii). Zato nadalje pretpostavimo da je $\mu_\star(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema definiciji funkcije $\mu_\star$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji skup $C_i \in \mathcal{A}$ takav da je

$$C_i \subseteq A_i \quad \& \quad \mu(C_i) > \mu_\star(A_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{2.41}$$

Neka je $C := \bigcup_{i=1}^\infty C_i \in \mathcal{A}$. Skupovi C_i, $i \in \mathbb{N}$, su disjunktni jer su skupovi A_i disjunktni po pretpostavci. Zato je

$$\mu(C) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty C_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i).$$

Osim toga, kako je $C \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, to je

$$\mu(C) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big).$$

Sada pomoću (2.41) dobivamo

$$\sum_{i=1}^\infty \mu_\star(A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \Big(\mu(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i) + \varepsilon = \mu(C) + \varepsilon \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) + \varepsilon,$$

odakle zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ slijedi tražena nejednakost. ■

2.81. PROPOZICIJA
Neka je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ upotpunjenje prostora $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $A \subseteq X$ bilo koji skup sa svojstvom $\mu^\star(A) < \infty$. Tada je $A \in \mathcal{A}_\mu$ onda i samo onda ako je $\mu_\star(A) = \mu^\star(A)$.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{A}_\mu$. Tada postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ takvi da je (vidi propoziciju 2.69.)

$$E \subseteq A \subseteq F \quad \& \quad \mu(F \backslash E) = 0.$$

Tada je (vidi definiciju 2.78.)

$$\mu(E) \leq \mu_\star(A) \leq \mu^\star(A) \leq \mu(F).$$

Kako je $\mu(E) = \mu(F)$, dobivamo $\mu_\star(A) = \mu^\star(A)$.

Neka je $\mu_\star(A) = \mu^\star(A) < \infty$. Prema propoziciji 2.69. dovoljno je pokazati da postoje skupovi $E, F \in \mathcal{A}$ sa svojstvom $\mu(F \backslash E) = 0$.

Prvo uočimo da je $\mu(A) < \infty$ jer je $\mu_\star(A) \leq \mu(A) \leq \mu^\star(A)$.

Prema definiciji funkcija $\mu_\star$ i $\mu^\star$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje skupovi $C_n, B_n \in \mathcal{A}$ takvi da je

$$C_n \subseteq A \subseteq B_n, \qquad \mu_\star(A) - \frac{1}{n} < \mu(C_n), \quad \mu(B_n) < \mu^\star(A) + \frac{1}{n},$$

što zahvaljujući pretpostavci $\mu_\star(A) = \mu^\star(A)$ za naše potrebe možemo zapisati kao

$$C_n \subseteq A \subseteq B_n, \qquad \mu^\star(A) - \frac{1}{n} < \mu(C_n), \quad \mu(B_n) < \mu_\star(A) + \frac{1}{n}. \tag{2.42}$$

Kako je $\mu(A) < \infty$, zbog $C_n \subseteq A$ je i $\mu(C_n) < \infty$, pa stoga prema propoziciji 2.19. vrijedi

$$\mu(A \backslash C_n) = \mu(A) - \mu(C_n) \quad \& \quad \mu(B_n \backslash A) = \mu(B_n) - \mu(A).$$

Neka je $E := \bigcup_{n=1}^\infty C_n \in \mathcal{A}$, $F := \bigcap_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{A}$. Očito je $E \subseteq A \subseteq F$. Preostaje pokazati da je $\mu(F \backslash E) = 0$. Kako je

$$F \backslash E \subseteq B_n \backslash C_n = (B_n \backslash A) \cup (A \backslash C_n) \quad \& \quad (B_n \backslash A) \cap (A \backslash C_n) = \emptyset,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \mu(F \backslash E) &\leq \mu(B_n \backslash C_n) = \mu(B_n \backslash A) + \mu(A \backslash C_n) \\ &= \Big(\mu(B_n) - \mu(A)\Big) + \Big(\mu(A) - \mu(C_n)\Big). \end{aligned}$$

Nejednakosti $\mu_\star(A) \leq \mu(A) \leq \mu^\star(A)$ i (2.42) povlače

$$\Big(\mu(B_n) - \mu(A)\Big) + \Big(\mu(A) - \mu(C_n)\Big) \leq \Big(\mu(B_n) - \mu_\star(A)\Big) + \Big(\mu^\star(A) - \mu(C_n)\Big) \leq \frac{2}{n}.$$

Dakle, $\mu(F \backslash E) \leq \frac{2}{n}$, odakle uzimajući limes $n \to \infty$ dobivamo $\mu(F \backslash E) = 0$. ■

Zadaci za vježbu

1. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Dokazati da familija $\mathcal{N}_\mu$ svih μ-zanemarivih skupova ima sljedeća svojstva: (a) Ako je $N \in \mathcal{N}_\mu$, a $M \in \mathcal{A}$ i $M \subseteq N$, onda je $M \in \mathcal{N}_\mu$. (b) Ako je $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz μ-zanemarivih skupova, onda je $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ također μ-zanemariv skup.

2. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor potpune mjere. Dokažite: Ako je $A \in \mathcal{A}$, $B \subseteq X$ i $\mu(A\Delta B) = 0$, onda je $B \in \mathcal{A}$ i $\mu(B) = \mu(A)$.

   Uputa: Kako je $A\backslash B, B\backslash A \subseteq A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, potpunost prostora i pretpostavka $\mu(A\Delta B) = 0$ povlače $A\backslash B, B\backslash A \in \mathcal{A}$, $\mu(A\backslash B) = \mu(B\backslash A) = 0$. Sada iz $A\cap B = A\backslash(A\backslash B)$ slijedi $A\cap B \in \mathcal{A}$. Zato je $B = (B\backslash A)\cup(A\cap B) \in \mathcal{A}$. Konačno, iz $\mu(B) = \mu(B\backslash A)+\mu(B\cap A) = \mu(B\cap A)$ i $\mu(A) = \mu(A\backslash B)+\mu(B\cap A) = \mu(B \cap A)$ slijedi $\mu(B) = \mu(A)$.

3. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je lokalno izmjeriv ako je $E \cap A \in \mathcal{A}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\mu(A) < \infty$. Neka je $\bar{\mathcal{A}}$ familija svih lokalno izmjerivih skupova. Očito je $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Ukoliko je $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$, za mjeru μ i prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da su zasićeni. a) Dokažite da je $\bar{\mathcal{A}}$ jedna σ-algebra na X. (b) Pokažite da je svaka σ-konačna mjera zasićena. (c) Neka je μ σ-konačna mjera. Definirajmo funkciju $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ formulom

   $$\bar{\mu}(E) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ako je } E \in \mathcal{A} \\ \infty, & \text{ako je } E \in \bar{\mathcal{A}}\backslash\mathcal{A}. \end{cases}$$

   Dokažite: (c1) $\bar{\mu}$ je mjera na $(X, \bar{\mathcal{A}})$, tj. da prostor $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ proširuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$. (c2) Ako je mjera μ potpuna, onda je i $\bar{\mu}$ potpuna. (c3) Dokažite da je prostor mjere $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ zasićen.

2.11. Borelova mjera

Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Kao i do sada, s $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}_X$ označavamo Borelovu σ-algebru generiranu topologijom $\mathcal{U}$. Mjeru definiranu na Borelovoj σ-algebri zovemo Borelova mjera na X.

2.82. DEFINICIJA
Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor, a $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor mjere takav da je $\mathcal{B}(X)\subseteq\mathcal{A}$. Za mjeru μ kažemo da je lokalno konačna *ako za svaku točku $x\in X$ postoji otvorena okolina $U_x\in\mathcal{U}$ točke x sa svojstvima $x\in U_x$ i $\mu(U_x)<\infty$.*

2.83. PRIMJER. *Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}^d$ je lokalno konačna.*

Lebesgueova mjera je specijalan slučaj Lebesgue-Stieltjesove mjere. U ovoj točki pokazat ćemo da je svaka lokalno konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}$ jednaka nekoj Lebesgue-Stieltjesovoj mjeri μ_F, gdje je $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Takve funkcije imaju posebno važnu ulogu u teoriji vjerojatnosti. Napomenimo samo da se rastuća i zdesna neprekidna funkcija $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ takva da je[12] $F(-\infty)=0$ i $F(\infty)=1$ zove funkcija distribucije na $\mathbb{R}$.

2.84. LEMA
Neka je μ lokalno konačna mjera na X. Ako je $K\subseteq X$ kompaktan skup, onda je je $\mu(K)<\infty$.

Dokaz. Dokaz je identičan dokazu tvrdnje (c) iz propozicije 2.54. ■

2.85. KOROLAR
Neka je μ lokalno konačna mjera na $\mathbb{R}^d$. Ako je $M\subseteq\mathbb{R}^d$ omeđen skup, onda je $\mu(\mathrm{Cl}\,M)<\infty$.

Dokaz. Zatvarač $\mathrm{Cl}\,M$ skupa M je kompaktan, pa iz korolara 2.85. slijedi da je $\mu(\mathrm{Cl}\,M)<\infty$. ■

Ako je zadana lokalno konačna Borelova mjera na $\mathbb{R}$, uzmimo bilo koju točku $c_0\in\mathbb{R}$ i definirajmo funkciju $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ formulom

$$F(x)=\begin{cases}\mu((c_0,x]), & x\ge c_0\\ -\mu((x,c_0]), & x<c_0.\end{cases}$$

Funkcija F je realna (korolar 2.85.), a rastuća je zbog monotonosti mjere μ. U dokazu teorema 2.86. bit će pokazano da je F zdesna neprekidna u svakoj točki. Osim toga, vrijedi

$$\mu((a,b])=F(b)-F(a),\quad a\le b.$$

[12] $F(-\infty)$ označava limes funkcije F u $-\infty$, a $F(\infty)$ limes u ∞.

Obratno, ako je zadana rastuća i zdesna neprekidna realna funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onda postoji jedinstvena lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}$ takva da je

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a), \qquad a \leq b.$$

Sve ovo što smo sada rekli precizno je iskazano i dokazano u sljedeća dva teorema.

2.86. TEOREM
Neka je μ lokalno konačna mjera na skupu $\mathbb{R}$ i $c_0 \in \mathbb{R}$. Tada postoji jedna jedina rastuća i zdesna neprekidna funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:

(a) $F(c_0) = 0$,

(b) $\mu = \mu_F$ *na* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *gdje* μ_F *označava Lebesgue-Stieltjesovu mjeru generiranu funkcijom* F.

Za bilo koju drugu rastuću i zdesna neprekidnu funkciju $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bit će $\mu = \mu_G$ (na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) onda i samo onda ako se G od F razlikuje za neku konstantu.

Dokaz. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom:

$$F(x) = \begin{cases} \mu((c_0, x]), & \text{ako je } c_0 \leq x \\ -\mu((x, c_0]), & \text{ako je } x < c_0. \end{cases}$$

Funkcija F je realna (korolar 2.85.), a rastuća je zbog monotonosti mjere μ.

Sada ćemo pokazati da je F neprekidna zdesna u svakoj točki. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Odaberimo niz različitih realnih brojeva $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji zdesna konvergira prema x. Ako je $c_0 \leq x$, onda je $(c_0, x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, padajući niz intervala pa vrijedi (propozicija 2.19.(iv))

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu((c_0, x_n]) = \mu((c_0, x]) = F(x).$$

Ako je $x < c_0$, onda postoji prirodan broj n_0 takav da je $x_n < c_0$, $n \geq n_0$. Niz intervala $(c_0, x_n]$, $n \geq n_0$, je padajući pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = -\lim_{n\to\infty} \mu((x_n, c_0]) = -\mu((x, c_0]) = F(x).$$

Time smo pokazali da je F zdesna neprekidna u svakoj točki.

(a) Očigledno je $F(c_0) = 0$.

(b) Pokažimo da je $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Za dokaz te tvrdnje upotrijebit ćemo teorem 2.37. Krenimo redom. Familija

$$\mathcal{C} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

generira Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, tj. $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Osim toga, $\mathcal{C}$ je π-sistem na $\mathbb{R}$ (sadrži sve svoje konačne presjeke). Prvo ćemo pokazati da je $\mu = \mu_F$ na $\mathcal{C}$. Neka je $(a, b] \in \mathcal{C}$. Po definiciji Lebesgue-Stieltjesove mjere je $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$. S druge strane, iz definiciji funkcije F lako se provjerava da je $F(b)-F(a)=\mu((a,b])$. Dakle,

$$\mu((a,b]) = \mu_F((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \forall\,(a,b] \in \mathcal{C}. \tag{2.43}$$

Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilo koja dva niza realnih brojeva, takvi da (a_n) strogo pada i divergira prema $-\infty$, (b_n) strogo raste i divergira prema ∞, te da je $a_1 < b_1$. Tada je

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n].$$

Svi skupovi $C_n := (a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, pripadaju familiji $\mathcal{C}$, tvore rastući niz i prema (2.43) vrijedi

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \qquad \& \qquad \mu(C_n) = \mu_F(C_n) = F(b_n) - F(a_n) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.44}$$

Time smo pokazali da su ispunjene sve pretpostavke (a to su (2.43) i (2.44)) za primjenu teorema 2.37., pa je zato $\mu = \mu_F$ na cijeloj σ-algebri $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ako je G neka druga rastuća i zdesna neprekidna funkcija sa svojstvom $\mu_G = \mu(=\mu_F)$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, onda je

$$\begin{aligned} G(x) - G(c_0) &= \mu_G((c_0,x]) = \mu_F((c_0,x]) = F(x) - F(c_0), \qquad x \geq c_0 \\ G(c_0) - G(x) &= \mu_G((x,c_0]) = \mu_F((x,c_0]) = F(c_0) - F(x), \qquad x < c_0. \end{aligned}$$

Dakle, F i G razlikuju se za konstantu. Stoga, ako je $G(c_0) = F(c_0)$, onda je $G = F$. ∎

2.87. Teorem

Neka je $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada postoji jedna jedina lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}$ takva da je

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad a \leq b.$$

Dokaz. Traženo svojstvo ima Lebesgue-Stieltjesova mjera μ_F. Jedinstvenost je pokazana u dokazu teorema 2.86. pod (b). ∎

---

3. Izmjerive funkcije

U teoriji mjere izmjerive funkcije imaju jednako važnu ulogu kao što je imaju neprekidne funkcije u topologiji. U svrhu boljeg razumijevanje prvo ćemo ponoviti osnovne pojmove o proširenom prostoru realnih brojeva $\bar{\mathbb{R}}$ (koristi se i oznaka $[-\infty, \infty]$).

3.1. Topologija na $\bar{\mathbb{R}}$

Za bazu topologije na $\bar{\mathbb{R}}$ uzimaju se svi otvoreni skupovi iz $\mathbb{R}$ kao i skupovi oblika

$$(a, \infty] := (a, \infty) \cup \{\infty\} \quad \text{i} \quad [-\infty, b) := \{-\infty\} \cup (-\infty, b).$$

Dakle, ako je neki skup otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$ onda se on može zapisati u jednom od sljedećih oblika:

$$U, \quad U \cup \{-\infty\}, \quad U \cup \{\infty\}, \quad U \cup \{-\infty, \infty\}, \qquad \text{gdje je } U \text{ otvoren u } \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Obratno ne mora vrijediti. Tako je, na primjer, skup $(a, b) \cup \{\infty\}$ oblika (3.1) ali on nije otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$.

3.1. Propozicija
Neka je $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ Borelova σ-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$. Tada je

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}.$$

Dokaz. (a) Prvo ćemo dokazati inkluziju

$$\big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\} \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}).$$

U tu svrhu dovoljno je pokazati da je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ i da su skupovi $\{-\infty\}, \{\infty\}$ i $\{-\infty, \infty\}$ sadržani u $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}$, a $\overline{\mathcal{U}}$ familija svih otvorenih skupova u $\bar{\mathbb{R}}$. Kako je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\bar{\mathcal{U}})$, to je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Skup $[-\infty, \infty)$ je otvoren u $\bar{\mathbb{R}}$ i zato je $\{\infty\} = \bar{\mathbb{R}} \backslash [-\infty, \infty) \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Slično se zaključuje da je $\{-\infty\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Zato je i $\{-\infty, \infty\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

(b) Trivijalno je pokazati da je familija $\big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}$ jedna σ-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$. Ta familija sadrži sve otvorene skupove u $\bar{\mathbb{R}}$, tj.

$$\overline{\mathcal{U}} \subseteq \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}.$$

Zato je

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\overline{\mathcal{U}}) \subseteq \big\{B \cup C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), C \subseteq \{-\infty, \infty\}\big\}. \qquad \blacksquare$$

3.2. Pojam izmjerive funkcije

3.2. Definicija
Neka su $(X,\mathcal{A})$ i $(Y,\mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ skup i $f : A \to Y$ funkcija. Funkcija f je izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *ili kraće* $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.*

U prethodnoj definiciji $f^{-1}(B)$ označava original skupa B, tj.

$$f^{-1}(B) := \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A.$$

3.3. Teorem
Neka su $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ i $(Z,\mathcal{C})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Nadalje, neka je $f : A \to Y$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva funkcija, a $g : B \to Z$ $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$ izmjeriva funkcija. Ako je $f(A) \subseteq B$, onda je kompozicija $g \circ f : A \to Z$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$ izmjeriva funkcija.

Dokaz. Treba pokazati da je $(g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ za svaki $C \in \mathcal{C}$. U tu svrhu prvo uočimo da za svaki $D \subseteq Z$ vrijedi:

$$(g \circ f)^{-1}(D) = \{x \in A : g(f(x)) \in D\} = \{x \in A : f(x) \in g^{-1}(D)\} = f^{-1}\big(g^{-1}(D)\big).$$

Neka je $C \in \mathcal{C}$. Zbog izmjerivosti funkcije g je $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, a izmjerivost funkcije f povlači da je $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big) \in \mathcal{A}$. ■

U teoriji integracije zanimat će nas samo one funkcije koje primaju vrijednosti u skupu $\mathbb{R}$ ili $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Pri tome se za $\mathcal{B}$ uzima Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, odnosno $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

3.4. Definicija
Neka je $(X,\mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $A \subseteq X$ podskup od X.

Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ kažemo da je $\mathcal{A}$-izmjeriva *ili kraće* izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Za funkciju $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ kažemo da je $\mathcal{A}$-izmjeriva *ili kraće* izmjeriva *ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki skup $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.*

Ako je $(X,\mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, onda za izmjerivu funkciju kažemo da je Borelova *ili* izmjeriva u smislu Borela.

Ako je $(X,\mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_{\lambda_d^*})$, onda za izmjerivu funkciju kažemo da je Lebesgueova *ili* izmjeriva u smislu Lebesguea.

3.5. Primjer. *Neka je $(X,\mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $A \in \mathcal{A}$. Konstantna funkcija $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva. Zaista, pretpostavimo da je $f(x) = y_0$ za svaki $x \in A$. Neka je $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Ako je $y_0 \in B$, onda je $f^{-1}(B) = A \in \mathcal{A}$. Ako $y_0 \notin B$, onda je $f^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{A}$.*

3.6. Teorem
Neka su $(X,\mathcal{A})$ i $(Y,\mathcal{B})$ izmjerivi prostori, $A \subseteq X$ izmjeriv skup i $f : A \to Y$. Pretpostavimo da je $\mathcal{E}$ familija podskupova od Y takva da je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Funkcija f je $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva onda i samo onda ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.

Dokaz. Ako je f $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva, onda je očito $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$, pa je pogotovo $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.

Dokažimo obrat. Neka je $\mathcal{S} := \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$. Prvo pokažimo da je $\mathcal{S}$ jedna σ-algebra na Y: (σ1) Kako je $f^{-1}(Y) = A \in \mathcal{A}$, to je $Y \in \mathcal{S}$. (σ2) Neka je $E \in \mathcal{S}$. Tada je $f^{-1}(E^c) = A \backslash f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. ($\sigma$3) Neka je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{S}$. Iz jednakosti $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)$ slijedi $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.

Po pretpostavci je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$. Kako je $\sigma(\mathcal{E})$ najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{E}$, to je $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{S}$. ∎

3.7. Korolar
Neka je $(X,\mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ izmjeriv skup i $f : A \to \mathbb{R}$ [ili $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$]. Nadalje, pretpostavimo da je $\mathcal{E}$ familija podskupova od $\mathbb{R}$ [odnosno od $\bar{\mathbb{R}}$] takva da je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$ [odnosno $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{E})$]. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$.

3.8. Teorem
Neka je $(X,\mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ bilo koji podskup od X i $f : A \to \mathbb{R}$ [ili $\bar{\mathbb{R}}$] funkcija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(a) f je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

(b) $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ za svaki otvoren skup V u $\mathbb{R}$ [odnosno $\bar{\mathbb{R}}$].

(c) $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ za svaki zatvoren skup C u $\mathbb{R}$ [odnosno $\bar{\mathbb{R}}$].

Dokaz. Neka je $Y = \mathbb{R}$ [odnosno $\bar{\mathbb{R}}$].

(b) $\Rightarrow$ (c). Kao prvo, Y je otvoren skup pa je $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$ po pretpostavci.
Neka je C zatvoren skup u Y. Tada je komplement $Y \backslash C$ otvoren u Y, pa (b) povlači $f^{-1}(Y \backslash C) \in \mathcal{A}$. Iz jednakosti $f^{-1}(C) = A \backslash f^{-1}(Y \backslash C)$ slijedi $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Y je zatvoren skup pa je $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$. Ako je V otvoren skup u Y, onda je komplement $V^c = Y \backslash V$ zatvoren u Y. Tada (c) povlači $f^{-1}(V^c) \in \mathcal{A}$. Zbog jednakosti $f^{-1}(V) = A \backslash f^{-1}(V^c)$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.

(a) $\Rightarrow$ (b) Svaki otvoren skup V iz Y ujedno je i Borelov skup, pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Za dokaz ove tvrdnje upotrijebit ćemo korolar 3.7. Neka je $\mathcal{V}$ familija svih otvorenih skupova u Y. Ta familija generira Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(Y)$, tj. $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{V})$. Iz pretpostavke (b) slijedi $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$ i $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ za svaki $V \in \mathcal{V}$. Prema korolaru 3.7. funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva. ∎

3.9. Korolar
Neka je $(X, \mathcal{B}(X))$ izmjeriv prostor s Borelovom σ-algebrom i neka je $A \in \mathcal{B}(X)$. Svaka neprekidna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ [ili $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$] je izmjeriva.

Dokaz. Neka je $Y = \mathbb{R}$ [odnosno $\bar{\mathbb{R}}$]. Zbog neprekidnosti funkcije f za svaki otvoren skup V u Y postoji otvoren skup U u X takav da je $f^{-1}(V) = A \cap U$. Kako je $U \in \mathcal{B}(X)$, a $A \in \mathcal{B}(X)$ po pretpostavci, to je i $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}(X)$. Tvrdnja slijedi iz teorema 3.8.(b). ■

Sljedeći nam teorem govori da se izmjeriva funkcija definirana na izmjerivom skupu može definirati na različite načine, što se često koristi u literaturi (vidi npr. [3, 13]).

3.10. Teorem
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ izmjeriv skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(a) f *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva.*

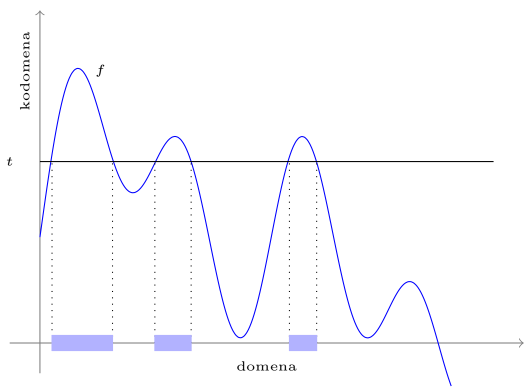
(b) $\big\{x \in A : f(x) \le t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(c) $\big\{x \in A : f(x) < t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(d) $\big\{x \in A : f(x) \ge t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(e) $\big\{x \in A : f(x) > t\big\} \in \mathcal{A}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Na slici 12. ilustrirano je značenje tvrdnje (d).



Slika 12. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva ako je zatamnjeno područje domene izmjeriv skup za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Dokaz teorema 3.10. Ekvivalentnost tvrdnji (b)-(e) slijedi iz jednakosti

$$\begin{aligned}
\big\{x\in A : f(x) < t\big\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big\{x\in A : f(x)\le t-\frac{1}{n}\Big\}\\
\big\{x\in A : f(x) \ge t\big\} &= A\backslash\big\{x\in A : f(x) < t\big\}\\
\big\{x\in A : f(x) > t\big\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big\{x\in A : f(x)\ge t+\frac{1}{n}\Big\}\\
\big\{x\in A : f(x) \le t\big\} &= A\backslash\big\{x\in A : f(x) > t\big\}
\end{aligned}$$

i svojstava σ-algebre.

(a) $\Rightarrow$ (b)-(e). Neka je $t\in\mathbb{R}$. Treba pokazati da je $\big\{x\in A : f(x)\le t\big\}\in\mathcal{A}$. Kako je $[-\infty,t]\in\mathbb{B}(\bar{\mathbb{R}})$, izmjerivost od f povlači $f^{-1}([-\infty,t])\in\mathcal{A}$. Iz jednakosti $f^{-1}([-\infty,t]) = \big\{x\in A : f(x)\le t\big\}$ slijedi $\big\{x\in A : f(x)\le t\big\}\in\mathcal{A}$

(b)-(e) $\Rightarrow$ (a). Familija

$$\mathcal{S} := \{B\subseteq\bar{\mathbb{R}} : f^{-1}(B)\in\mathcal{A}\}$$

je σ-algebra na $\bar{\mathbb{R}}$. Dokaz je isti kao u dokazu teorema 3.6.

Sada ćemo pokazati da σ-algebra S sadrži $\{-\infty\},\{\infty\}$ i Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Kako je

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{-\infty\}) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\big\{x\in A : f(x) < -n\big\}\in\mathcal{A}\\
f^{-1}(\{\infty\}) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\big\{x\in A : f(x) > n\big\}\in\mathcal{A},
\end{aligned}$$

imamo da je $\{-\infty\},\{\infty\}\in S$. Nadalje, kako je $f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathcal{A}$ i kako je $f^{-1}([-\infty,t])\in\mathcal{A}$ po pretpostavci (b), iz jednakosti

$$f^{-1}((-\infty,t]) = f^{-1}([-\infty,t])\backslash f^{-1}(\{-\infty\}),\qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

slijedi da familija S sadrži sve intervale oblika $(-\infty,t]$, $t\in\mathbb{R}$. Ti intervali generiraju Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (teorem 2.9.). Kako je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ najmanja σ-algebra koja sadrži sve takve intervale, slijedi $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subseteq S$.

Prema propoziciji 3.1. svaki Borelov skup $\bar{B}\in\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ može se zapisati kao $\bar{B} = B\cup C$, gdje su $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $C\subseteq\{-\infty,\infty\}$. Kako je $f^{-1}(\bar{B}) = f^{-1}(B)\cup f^{-1}(C)$, a $f^{-1}(B), f^{-1}(C)\in\mathcal{A}$, slijedi $f^{-1}(\bar{B})\in\mathcal{A}$, tj. skup $f^{-1}(\bar{B})$ je izmjeriv. ∎

3.11. Primjer. *Sljedeći primjeri ilustriraju važnost teorema 3.10.*

1. *Neka je $(X,\mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $B\subseteq X$.* Karakteristična funkcija $\chi_B : X\to\mathbb{R}$ *skupa B, definirana formulom*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x\in B\\ 0, & \textit{ako je } x\notin B,\end{cases}$$

izmjeriva je onda i samo onda ako je $B \in \mathcal{A}$. Zaista, prema teoremu 3.10. funkcija χ_B je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in X : \chi_B(x) > t\} \in \mathcal{A}$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, a to je onda i samo onda ako je $B \in \mathcal{A}$.

2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ segment ili interval (otvoren ili poluotvoren), a $f : I \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija. Tada je $\{x \in I : f(x) < t\}$, $t \in \mathbb{R}$, Borelov skup (prazan skup, jednočlani skup, segment ili interval). To znači da je f Borelova funkcija.*

3. Stepenasta funkcija *na skupu X je svaka funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ koja prima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.*

   Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ stepenasta funkcija koja prima vrijednosti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Pomoću teorema 3.10. lako je provjeriti da će f biti $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in X : f(x) = \alpha_i\} \in \mathcal{A}$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Na str. 58. spomenuli smo da postoji Lebesgueov skup koji nije Borelov. Sada ćemo dokazati tu tvrdnju.

3.12. Teorem
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}_{\lambda_d^\star}$, tj. postoji Lebesgueov skup koji nije Borelov.

Dokaz. Neka je $c : [0,1] \to [0,1]$ Cantorova funkcija (vidi točku 2.8.). Zbog neprekidnosti funkcije c, za svaki $y \in [0,1]$ postoji barem jedan $x \in [0,1]$ takav da je $c(x) = y$. Zato funkciju $g : [0,1] \to [0,1]$ možemo definirati na sljedeći način:

$$g(y) := \inf c^{-1}(y) = \inf \{x \in [0,1] : c(x) = y\}.$$

Može se pokazati da je $g(y) \in K$, gdje je K Cantorov skup. Koristeći neprekidnost Cantorove funkcije c sada je lako provjeriti da je $c(g(y)) = y$ za svaki $y \in [0,1]$. To znači da je g injekcija. Nadalje, kako c monotono raste, iz jednakosti $c(g(y)) = y$, $y \in [0,1]$, slijedi da i g monotono raste. Zato je g izmjeriva funkcija (vidi primjer 3.11.(2)). Neka je $A \subset [0,1]$ neki skup koji nije Lebesgueov. Takav skup postoji (primjer 2.52.). Neka je $B := g(A)$. Zbog injektivnosti funkcije g je $A = g^{-1}(B)$. Skup B je podskup Cantorova skupa, pa je Lebesgueov. Skup B nije Borelov. Naime, u suprotnom bismo prema definiciji izmjerive funkcije imali $A = g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pa bi skup A bio Lebesgueov (propozicija 2.43.), što je kontradikcija. ∎

3.13. Korolar
Postoji podskup Cantorova skupa koji nije Borelov skup.

Dokaz. Takav je skup B iz dokaza teorema. ∎

3.3. Svojstva izmjerivih funkcija

3.14. TEOREM
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koje dvije $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:

$$(a)\ \big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\} \in \mathcal{A},$$
$$(b)\ \big\{x \in A : f(x) \le g(x)\big\} \in \mathcal{A},$$
$$(c)\ \big\{x \in A : f(x) = g(x)\big\} \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Za dokaz ovih tvrdnji upotrijebit ćemo teorem 3.10.

(a) Prvo treba uočiti da je $f(x) < g(x)$ onda i samo onda ako postoji racionalan broj $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $f(x) < q < g(x)$. Zbog toga je

$$\big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\big\{x \in A : f(x) < q\big\} \cap \big\{x \in A : q < g(x)\big\}\Big),$$

odakle vidimo da se skup $\big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\}$ može prikazati kao prebrojiva unija skupova iz $\mathcal{A}$, pa je $\big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\} \in \mathcal{A}$.

(b) Prema (a) je $\big\{x \in A : g(x) < f(x)\big\} \in \mathcal{A}$. Sada iz jednakosti

$$\big\{x \in A : f(x) \le g(x)\big\} = A \backslash \big\{x \in A : g(x) < f(x)\big\}$$

slijedi $\big\{x \in A : f(x) \le g(x)\big\} \in \mathcal{A}$.

(c) Tvrdnja slijedi iz (a), (b) i jednakosti

$$\big\{x \in A : f(x) = g(x)\big\} = \big\{x \in A : f(x) \le g(x)\big\} \backslash \big\{x \in A : f(x) < g(x)\big\}. \qquad \blacksquare$$

3.15. PROPOZICIJA
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ i $f : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koja $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Tada je i funkcija αf, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-izmjeriva.

Dokaz. Ako je $\alpha = 0$, onda je $\alpha f = 0$ konstanta pa je $\mathcal{A}$-izmjeriva.
Za $\alpha \ne 0$ imamo

$$\big\{x \in A : \alpha f(x) < t\big\} = \Big\{x \in A : f(x) < \frac{t}{\alpha}\Big\}, \qquad \alpha > 0$$
$$\big\{x \in A : \alpha f(x) < t\big\} = \Big\{x \in A : f(x) > \frac{t}{\alpha}\Big\}, \qquad \alpha < 0.$$

Tvrdnja slijedi iz teorema 3.10. $\blacksquare$

Neka su $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ dvije funkcije. Iz estetskih razloga funkciju $\max\{f, g\}$ označavamo s $f \vee g$, a funkciju $\min\{f, g\}$ s $f \wedge g$. Dakle, funkcije $f \vee g, f \wedge g : A \to [-\infty, \infty]$ definirane su formulama:

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \qquad x \in A.$$

3.16. PROPOZICIJA
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koje dvije $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Tada su funkcije $f \vee g$ i $f \wedge g$ izmjerive.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 3.10. i identiteta:

$$\begin{aligned}
\big\{x \in A : (f \vee g)(x) \le t\big\} &= \big\{x \in A : f(x) \le t\big\} \cap \big\{x \in A : g(x) \le t\big\} \\
\big\{x \in A : (f \wedge g)(x) \le t\big\} &= \big\{x \in A : f(x) \le t\big\} \cup \big\{x \in A : g(x) \le t\big\}.
\end{aligned}$$ ■

Za svaki niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcija $f_n : A \to [-\infty, \infty]$ definiraju se funkcije $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n, \liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ formulama:

$$\begin{aligned}
&\sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \qquad x \in A \\
&\inf_n f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \qquad x \in A \\
&\limsup_n f_n(x) = \inf\big\{\sup\{f_k(x) : k \ge n\} : n \in \mathbb{N}\big\}, \qquad x \in A \\
&\liminf_n f_n(x) = \sup\big\{\inf\{f_k(x) : k \ge n\} : n \in \mathbb{N}\big\}, \qquad x \in A.
\end{aligned}$$

Dakle, $\limsup_n f_n(x)$ je limes superior (najveća točka gomilanja) niza $(f_n(x))$, a $\liminf_n f_n(x)$ je limes inferior (najmanja točka gomilanja) niza $(f_n(x))$ (vidi [7, str. 116]).

Primijetimo da je uvijek $\liminf_n f_n \le \limsup_n f_n$. Može se pokazati da je $\liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$ onda i samo onda ako postoji $\lim_n f_n(x)$ i vrijedi $\lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)$. Dakle, domena funkcije $\lim_n f_n$ je skup $\{x \in A : \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$.

3.17. PROPOZICIJA
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz $\mathcal{A}$-izmjerivih funkcija $f_n : A \to [-\infty, \infty]$. Tada vrijedi:

(a) Funkcije $\sup_n f_n, \inf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ su $\mathcal{A}$-izmjerive,

(b) Funkcije $\limsup_n f_n, \liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ su $\mathcal{A}$-izmjerive,

(c) Skup $A_0 := \{x \in A : \liminf_n f_n(x) = \limsup_n f_n(x)\}$ je izmjeriv. Funkcija $\lim_n f_n : A_0 \to [-\infty, \infty]$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

Dokaz. (a) Tvrdnja slijedi iz teorema 3.10. i identiteta:

$$\big\{x \in A : \sup_n f_n(x) \leq t\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{x \in A : f_n(x) \leq t\big\}$$

$$\big\{x \in A : \inf_n f_n(x) \geq t\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{x \in A : f_n(x) \geq t\big\}.$$

(b) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirat ćemo funkcije $g_k, h_k : A \to [-\infty, \infty]$:

$$g_k(x) := \sup\{f_n(x) : n \geq k\}, \quad h_k(x) := \inf\{f_n(x) : n \geq k\}, \qquad x \in A.$$

Prema (a) te su funkcije $\mathcal{A}$-izmjerive. Stoga su, isto prema tvrdnji (a), izmjerive i funkcije $\inf_n g_n, \sup_n h_n$. Sada tvrdnja slijedi iz jednakosti $\limsup_n f_n = \inf_n g_n$ i $\liminf_n f_n = \sup_n h_n$.

(c) Iz tvrdnje (b) i teorema 3.14.(c) slijedi izmjerivost skupa A_0. Sada iz jednakosti

$$\big\{x \in A_0 : \lim_n f_n(x) \leq t\big\} = A_0 \cap \big\{x \in A : \limsup_n f_n(x) \leq t\big\}$$

slijedi $\mathcal{A}$-izmjerivost funkcije $\lim_n f_n : A_0 \to [-\infty, \infty]$. ■

Ako su $f, g : A \to [-\infty, \infty]$ dvije funkcije, onda zbroj $f+g$ ne mora biti definiran. To je stoga jer nisu definirani zbrojevi $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$. Međutim, ako obje funkcije primaju vrijednosti iz skupa $[0, \infty)$, $(-\infty, \infty]$ ili $[-\infty, \infty)$, onda je definiran zbroj $f + g$. U iskazu sljedeće propozicije ograničavamo se na skup $[0, \infty]$, iako je iz dokaza jasno da će tvrdnja vrijediti ako se za kodomenu funkcija uzme $(-\infty, \infty]$ ili $[-\infty, \infty)$.

3.18. PROPOZICIJA

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f, g : A \to [0, \infty]$ bilo koje dvije $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Tada je i funkcija $f + g$ $\mathcal{A}$-izmjeriva.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti teorem 3.10. Uočimo da je $(f + g)(x) < t$ onda i samo onda ako postoji racionalan broj $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $f(x) < q$ i $g(x) < t - q$. Zbog toga je

$$\big\{x \in A : (f + g)(x) < t\big\} = \bigcup_{q \in Q} \big[\big\{x \in A : f(x) < q\big\} \cap \big\{x \in A : g(x) < t - q\big\}\big]. \quad (3.2)$$

Skupovi $\big\{x \in A : f(x) < q\big\}$, $\big\{x \in A : g(x) < t - q\big\}$, $q \in \mathbb{Q}$, su $\mathcal{A}$-izmjerivi (teorem 3.10.), pa je i skup $\big\{x \in A : (f + g)(x) < t\big\}$ kao prebrojiva unija njihovih presjeka također $\mathcal{A}$-izmjeriv. ■

3.19. PROPOZICIJA

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f, g : A \to \mathbb{R}$ bilo koje dvije realne i $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:

(a) Funkcija αf je $\mathcal{A}$-izmjeriva za svaki realan broj α,

(b) Funkcija $f+g$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva,

(c) Funkcija $f-g$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva,

(d) Funkcija $|f|^\alpha$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva za svaki realan broj $\alpha > 0$,

(e) Funkcija fg je $\mathcal{A}$-izmjeriva,

(f) Skup $A_0 := \{x \in A : g(x) \neq 0\}$ je izmjeriv. Funkcija $\frac{f}{g} : A_0 \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

Dokaz. (a) Tvrdnja slijedi direktno iz propozicije 3.15.

(b) f i g su realne funkcije pa se ne javlja problem sa zbrojevima $\infty + (-\infty)$ i $(-\infty) + \infty$. Zato identitet (3.2) vrijedi za svaki $x \in A$.

(c) Kako je $f - g = f + (-g)$, tvrdnja slijedi iz (a) i (b).

(d) Uočimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}
\text{za } t \geq 0: \quad & \big\{x \in A : |f(x)|^\alpha \leq t\big\} = \big\{x \in A : -t^{1/\alpha} \leq f(x) \leq t^{1/\alpha}\big\} \\
& = \big\{x \in A : -t^{1/\alpha} \leq f(x)\big\} \cap \big\{x \in A : f(x) \leq t^{1/\alpha}\big\} \\
\text{za } t < 0: \quad & \big\{x \in A : |f(x)|^\alpha \leq t\big\} = \emptyset
\end{aligned}$$

i zato tvrdnja slijedi iz teorema 3.10.

(e) Ova tvrdnja slijedi iz tvrdnji (a)-(d) i jednakosti $fg = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)$.

(f) $\mathcal{A}$-izmjerivost skupa A_0 slijedi iz identiteta:

$$A_0 = \{x \in A : g(x) \neq 0\} = \{x \in A : g(x) > 0\} \cup \{x \in A : g(x) < 0\}.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\Big\{x \in A_0 : \frac{f(x)}{g(x)} \leq t\Big\} = & \Big(\big\{x \in A_0 : g(x) > 0\big\} \cap \big\{x \in A_0 : f(x) \leq t \cdot g(x)\big\}\Big) \\
& \cup\Big(\big\{x \in A_0 : g(x) < 0\big\} \cap \big\{x \in A_0 : f(x) \geq t \cdot g(x)\big\}\Big),
\end{aligned}$$

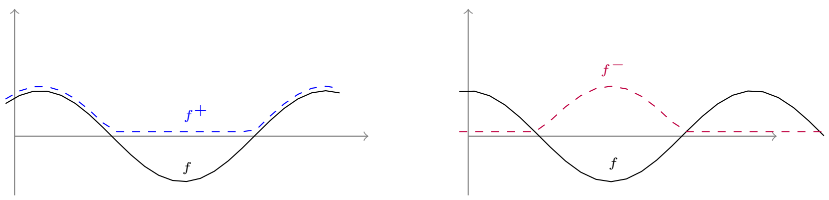
iz (a) i teorema 3.14.(b) slijedi $\mathcal{A}$-izmjerivost funkcije $\frac{f}{g}$. ∎

Za svaku funkciju $f : A \to [-\infty, \infty]$ definiraju se funkcije $|f|, f^+, f^- : A \to [0, \infty]$ formulama:

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}, \qquad x \in A.$$

Funkcija f^+ zove se **pozitivni dio** funkcije f, a f^- zovemo **negativni dio** funkcije f. Uočite da vrijedi:

$$|f| = f^+ + f^-, \qquad f = f^+ - f^-.$$



Slika 13. Funkcije f^+ i f^-.

3.20. Propozicija
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako su funkcije f^+ i f^- $\mathcal{A}$-izmjerive.

Dokaz. Neka je f $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Kako je $f^+ = f \vee 0$, $f^- = (-f) \vee 0$, te kako je konstanta $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija, prema propoziciji 3.16. obje funkcije f^+ i f^- su $\mathcal{A}$-izmjerive.

Obratno, pretpostavimo da su f^+ i f^- $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije. Prema propoziciji 3.15. funkcija $-f^-$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva. Iz jednakosti $f = f^+ + (-f^-)$ lako se zaključi da ni za jedan $x \in A$ zbroj $f^+(x) + (-f^-(x))$ nije nedefiniranog oblika $\infty + (-\infty)$ ili $(-\infty) + \infty$. Zato identitet (3.2) vrijedi za svaki $x \in A$ i daljnji dio dokaza je u potpunosti identičan s dokazom propozicije 3.18. ∎

3.21. Propozicija
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Tada vrijedi:

(a) Neka je $B \subseteq A$ izmjeriv skup. Ako je funkcija f $\mathcal{A}$-izmjeriva, onda je i restrikcija $f_{|B} : B \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija.

(b) Neka je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$ takav da je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Ako je izmjeriva svaka restrikcija $f_{|B_n} : B_n \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, onda je izmjeriva i funkcija f.

Dokaz. Tvrdnje slijede iz sljedećih jednakosti:

$$(a)\quad \{x \in B : f_{|B}(x) < t\} = B \cap \{x \in A : f(x) < t\},$$

$$(b)\quad \{x \in A : f(x) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in B_n : f_{|B_n}(x) < t\}.$$ ∎

3.4. Jednostavne funkcije

U primjeru 3.11. definirali smo stepenastu funkciju i karakterističnu funkciju skupa. Zbog izuzetne važnosti tih pojmova u teoriji integracije, ponovit ćemo definicije.

Stepenasta funkcija na skupu A je svaka funkcija $f : A \to [-\infty, \infty]$ koja prima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.

Neka je $A \subseteq X$ podskup od X. Karakteristična funkcija skupa A je realna funkcija $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A \\ 0, & \text{ako je } x \notin A. \end{cases}$$

Karakteristična funkcija svakog skupa je stepenasta.

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ izmjeriv skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ stepenasta funkcija koja prima vrijednosti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Pomoću teorema 3.10. lako je provjeriti da će f biti $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in A : f(x) = \alpha_i\} \in \mathcal{A}$ za svaki $i = 1, \dots, n$.

Konačnu i izmjerivu stepenastu funkciju zovemo jednostavna funkcija. Preciznije:

3.22. Definicija

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ podskup od X i $f : A \to \mathbb{R}$ stepenasta i $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Tada kažemo da je f jednostavna funkcija s obzirom na izmjeriv prostor *$(X, \mathcal{A})$ ili kraće* jednostavna funkcija.

Svaka jednostavna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ dopušta prikaz u obliku

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \tag{3.3}$$

gdje su $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ disjunktni i izmjerivi skupovi takvi da je $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ su različiti realni brojevi. To se dobiva za $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = f(A)$ i $A_i = f^{-1}(\alpha_i) = \{x \in A : f(x) = \alpha_i\} \in \mathcal{A}$. Takav prikaz zove se standardni prikaz jednostavne funkcije.

Sljedeći teorem govori nam da su jednostavne funkcije „po točkama guste” u prostoru svih izmjerivih funkcija.

3.23. Teorem

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jednostavnih funkcija $f_n : A \to [0, \infty)$ sa sljedećim svojstvima:

(a) $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f(x)$ *za svaki* $x \in A$,

(b) Niz funkcija $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po točkama prema funkciji f, tj.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

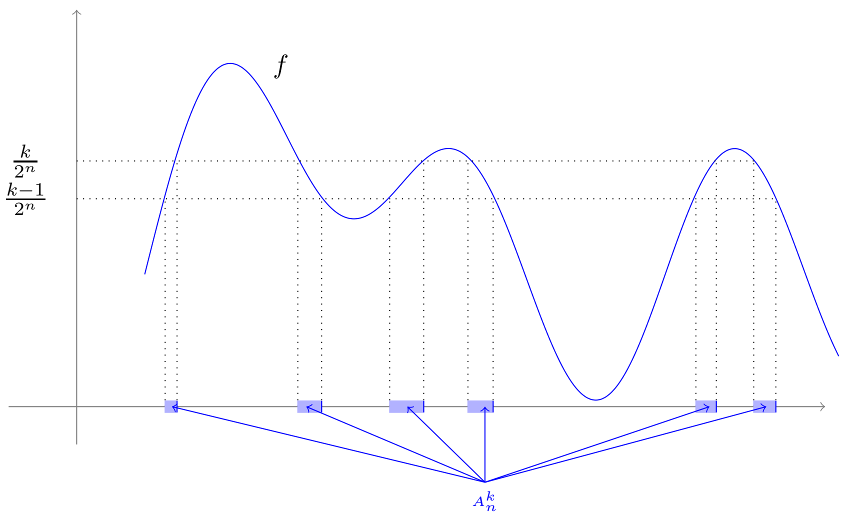
(c) *Ako je funkcija f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema funkciji f na cijelom skupu K.*

Dokaz. Za svaki prirodan broj n definirajmo izmjerive skupove

$$A_n^k := f^{-1}\Big(\Big(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big]\Big) = \big\{x \in A : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n}\big\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n2^n$$
$$F_n := f^{-1}\big((n, \infty]\big).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ skupovi $A_n^1, A_n^2, \ldots, A_n^{n2^n}, F_n$ međusobno su disjunktni, izmjerivi i njihova unija daje skup $f^{-1}\big((0,\infty]\big)$. Stavimo

$$G := A \backslash f^{-1}\big((0,\infty]\big) = f^{-1}(0).$$



Slika 14. U ovom primjeru skup $A_n^k = \big\{x \in A : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n}\big\}$ unija je šest intervala.

Neka su $f_n : A \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, jednostavne funkcije definirane formulom

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\chi_{A_n^k} + n\chi_{F_n}.$$

Uočimo:

1. Ako je $x \in G$, onda je $f(x) = f_n(x) = 0$.

2. Ako je $x \in A_n^k$, onda je

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n} = f_n(x) + \frac{1}{2^n}.$$

3. Ako je $x \in F_n$, onda je $f_n(x) = n < f(x)$.

Sada ćemo dokazati tvrdnje teorema:

(a) Pomoću jednakosti

$$\Big(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\Big] = \Big(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big] \cup \Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\Big], \qquad 1 \leq k \leq n2^n$$
$$(n, \infty] = (n, n+1] \cup (n+1, \infty]$$

dobivamo:

Ako je $x \in A_{n+1}^{2k-1} = f^{-1}\big(\big(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\big]\big)$, onda je $x \in A_n^k = f^{-1}\big(\big(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\big]\big)$ i zato je $f_n(x) = f_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^n}$.

Ako je $x \in A_{n+1}^{2k} = f^{-1}\big(\big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\big]\big)$, onda je $x \in A_n^k = f^{-1}\big(\big(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\big]\big)$ i zato je $f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.

Ako je $x \in f^{-1}\big((n+1, \infty]\big)$, onda je $f_n(x) = n < n+1 = f_{n+1}(x)$.

Ako je $x \in f^{-1}\big((n, n+1]\big)$, onda je $f_n(x) = n \leq f_{n+1}(x)$.

Time smo dokazali tvrdnju (a).

(b) Ako je $f(x) = \infty$, onda je $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ i zato $f_n(x) = n \to \infty = f(x)$. Ako je $0 \leq f(x) < \infty$, onda je $x \in G$ ili postoji dovoljno velik n_0 takav da je $0 < f(x) \leq n$ za svaki $n \geq n_0$, pa je zato $x \in A_n^k$ za svaki $n \geq n_0$ i neki $1 \leq k \leq n2^n$. U oba slučaja je

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n \geq n_0,$$

odakle slijedi $\lim_{n\to\infty} f_(x) = f(x)$. Time smo dokazali da niz (f_n) konvergira po točkama prema funkciji f.

(c) Ako je f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda postoji dovoljno velik n_0 takav da je $0 \leq f(x) \leq n_0$ za svaki $x \in K$ i svaki $n \geq n_0$. Zaključujući na potpuno isti način kao pod (b), dobivamo da je

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}, \qquad x \in K, n \geq n_0,$$

odakle slijedi da niz funkcija (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f na cijelom skupu K. ■

3.24. Teorem

Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnih funkcija $f_n : A \to (-\infty, \infty)$ sa sljedećim svojstvima:

(a) $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq f(x)$ za svaki $x \in A$,

(b) Niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po točkama prema funkciji f, tj.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

(c) *Ako je funkcija f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema funkciji f na cijelom skupu K.*

Dokaz. Dovoljno je modificirati dokaz teorema 3.23. tako da se na samom početku za svaki prirodan broj n dodaju izmjerivi skupovi

$$A_n^{-k} := f^{-1}\Big(\Big(\frac{-k}{2^n}, \frac{-k+1}{2^n}\Big]\Big) = \big\{x \in A : \frac{-k}{2^n} < f(x) \leq \frac{-k+1}{2^n}\big\}, \quad k = 1, 2, \dots, n2^n$$
$$F_{-n} := f^{-1}\big([-\infty, n]\big).$$

Dalje se zaključuje na potpuno isti način. ∎

3.25. Korolar
Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ skup i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija f je $\mathcal{A}$-izmjeriva onda i samo onda ako postoji niz jednostavnih funkcija koji konvergira obično (po točkama) prema funkciji f na cijelom skupu A.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 3.24. i propozicije 3.17. ∎

3.5. Svojstvo „skoro svuda”

3.26. Definicija
Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, a $T \subseteq X$ podskup od X. Ako neka tvrdnja ili svojstvo vrijede za sve $x \in T$ osim za $x \in N$, gdje je $N \subseteq T$ zanemariv skup, onda kažemo da ta tvrdnja ili svojstvo vrijedi μ-skoro svuda na T *ili* μ-gotovo svuda na T.

Ako je iz konteksta jasno na koju mjeru μ i na koji skup T mislimo, onda koristimo kraće nazive: skoro svuda *ili* gotovo svuda.

Za označavanje svojstva koje vrijedi skoro svuda koristi se kratica (s.s.).

Prisjetimo se da je skup $N \subseteq X$ zanemariv ako postoji izmjeriv skup Z (tj. $Z \in \mathcal{A}$) takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Dakle, zanemarivi skupovi su podskupovi izmjerivih skupova mjere nula. Svaki skup mjere nula ujedno je i zanemariv, a zanemariv skup ne mora biti izmjeriv. Ako je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ potpun, onda je svaki zanemariv skup ujedno i izmjeriv (vidi točku 2.10.).

3.27. Primjer. *Sljedeći primjeri ilustriraju upotrebu izraza skoro svuda i kratice (s.s.):*

1. *Za funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ kažemo da su jednake skoro svuda i pišemo $f = g\,(s.s.)$ ako je skup $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ zanemariv.*

2. *Kažemo da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ konvergira skoro svuda prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ i pišemo $\lim_n f_n = f\,(s.s.)$ ako postoji zanemariv skup $N \subseteq X$ takav da niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira i da je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za svaki $x \in X \backslash N$.*

3.28. Teorem

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od X, $(Y, \mathcal{B})$ izmjeriv prostor i $f : A \to Y$ neka $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $g : A \to Y$ bilo koja druga funkcija takva da je $g = f$ (s.s.). Ako je mjera μ potpuna, onda je funkcija g izmjeriva.

Dokaz. Skup $N = \{x \in A : g(x) \neq f(x)\}$ je zanemariv pa postoji izmjeriv skup $Z \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Treba pokazati da je $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.

Neka je $B \in \mathcal{B}$. Tada iz jednakosti

$$\begin{aligned} g^{-1}(B) &= \{x \in A : g(x) \in B\} = \{x \in Z^c \cap A : g(x) \in B\} \cup \{x \in Z \cap A : g(x) \in B\} \\ &= \{x \in Z^c \cap A : f(x) \in B\} \cup \{x \in Z \cap A : g(x) \in B\} \\ &= \big(f^{-1}(B) \cap Z^c \cap A\big) \cup \big(g^{-1}(B) \cap Z \cap A\big) \end{aligned}$$

slijedi $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Naime, kako je $g^{-1}(B) \cap Z \cap A \subseteq Z$, zbog potpunosti mjere μ je $g^{-1}(B) \cap Z \cap A \in \mathcal{A}$. Nadalje, zbog $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ izmjerivosti funkcije f imamo $A, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pa je $f^{-1}(B) \cap Z^c \cap A \in \mathcal{A}$. ■

3.29. Korolar

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od X i $f : A \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $g : A \to [-\infty, \infty]$ bilo koja druga funkcija takva da je $g = f$ (s.s.). Ako je mjera μ potpuna, onda je funkcija g izmjeriva.

3.30. Korolar

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $A \subseteq X$ podskup od X i $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $f_n : A \to [-\infty, \infty]$ koji konvergira skoro svuda prema funkciji $f : A \to [-\infty, \infty]$. Ako je mjera μ potpuna, onda je f izmjeriva funkcija.

Dokaz. Po pretpostavci je $\lim_n f_n = f$ (s.s.) pa je skup

$$N = \{x \in A : \lim_n f_n(x) \text{ ne postoji ili je } \lim_n f_n(x) \neq f(x)\}$$

zanemariv. U svakoj drugoj točki $x \in A \backslash N$ je $f(x) = \lim_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)$.

Prema propoziciji 3.17. funkcija $\liminf_n f_n : A \to [-\infty, \infty]$ je izmjeriva. Dakle, $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ za svaki $x \in A \backslash N$. Prema teoremu 3.28. funkcija f je izmjeriva. ■

3.31. Primjedba

Tvrdnje korolara 3.29. (stoga i teorema 3.28.) i korolara 3.30. ne moraju vrijediti ako mjera μ nije potpuna. Evo primjera:

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nepotpun prostor mjere, a N zanemariv skup koji nije izmjeriv. Karakteristična funkcija $\chi_N : X \to \mathbb{R}$ je skoro svuda jednaka nul funkciji $0 : X \to \mathbb{R}$. Nul funkcija je izmjeriva, a χ_N nije. Time je pokazano da ne vrijedi tvrdnja korolara 3.29. Ne vrijedi ni tvrdnja korolara 3.30. jer niz funkcija čija je svaka funkcija jednaka nul funkciji (koja je izmjeriva) konvergira skoro svuda funkciji χ_N koja nije izmjeriva.

3.32. TEOREM

Neka je $(X, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$ upotpunjenje prostora mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $A \subseteq X$ podskup od X i $f : A \to [-\infty, \infty]$ funkcija. Funkcija f je $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva onda i samo onda ako postoje $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije $f_0, f_1 : A \to [-\infty, \infty]$ takve da vrijedi:

(i) $f_0(x) \le f(x) \le f_1(x)$ *za svaki* $x \in A$,

(ii) $f_0 = f_1$ μ-*(s.s.).*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da postoje $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije f_0, f_1 sa svojstvima (i) i (ii). Prema (ii) skup $N = \{x \in A : f_0(x) \neq f_1(x)\}$ je μ-zanemariv pa postoji μ-izmjeriv skup $Z \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Tada je i $\tilde{\mu}(Z) = 0$ pa iz (i) i (ii) dobivamo $f = f_0$ $\tilde{\mu}$-(s.s.). Nadalje, zbog $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$, svaka $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija je i $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva (vidi definiciju 3.4.). Dakle, imamo da je f_0 $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva funkcija i $f = f_0$ $\tilde{\mu}$-(s.s.). Prema korolaru 3.29. funkcija f je $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva.

$\Leftarrow$ Neka je f $\mathcal{A}_\mu$-izmjeriva funkcija. Dokaz ćemo provesti u dva koraka: (a) f je jednostavna funkcija, (b) opći slučaj.

(a) Neka je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, gdje su $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ disjunktni i $\tilde{\mu}$-izmjerivi skupovi, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ realni brojevi. Tada postoje skupovi $C_1, \ldots, C_n \subseteq X$ i $B_1, \ldots, B_n \subseteq X$ takvi da je

$$C_i \subseteq A_i \subseteq B_i \qquad \& \qquad \mu(B_i \backslash C_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Funkcije $f_0, f_1 : A \to (-\infty, \infty)$ definirane formulama $f_0 := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}$ i $f_1 := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}$ imaju svojstva (i) i (ii): Svojstvo (i) je očigledno. Nadalje, skup $N := \cup_{i=1}^n (B_i \backslash C_i)$ je μ-zanemariv i $f_0(x) = f_1(x)$ za svaki $x \in A \backslash N$, pa vrijedi (ii).

(b) Neka je $f_n : A \to (-\infty, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, niz rastućih jednostavnih funkcija koji konvergira prema funkciji f. Prema teoremu 3.24. takav niz postoji. Prema (a) za svaki $n \in \mathbb{N}$ možemo odabrati $\mathcal{A}$-izmjerive funkcije $f_{0n}, f_{1n} : A \to (-\infty, \infty)$ takve da vrijedi:

($\star$) $f_{0n}(x) \le f_n(x) \le f_{1n}(x)$ za svaki $x \in A$,

($\star\star$) $f_{0n} = f_{1n}$ μ-(s.s.).

Funkcije $f_0 := \limsup_n f_{0n}$ i $f_1 := \liminf_n f_{1n}$ imaju svojstva (i) i (ii). Zaista, iz ($\star$) slijedi

$$f_0(x) \le \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) \le f_1(x) \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

Nadalje, kako je prebrojiva unija zanemarivih skupova također zanemariv skup, iz ($\star$) i ($\star\star$) dobivamo

$$f_0(x) = \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x) = f_1(x) \qquad \text{(s.s.)}.$$

■

Zadaci za vježbu

1. Neka je $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$, $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}, \{\frac{1}{4}\}\}$. Sa $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ označit ćemo σ-algebru generiranu familijom $\mathcal{E}$. Je li funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, izmjeriva?

2. Promatramo izmjeriv prostor $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$. Dokažite da je izmjeriva svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

   Uputa: Za svaki $t \in \mathbb{R}$ je $\{n \in \mathbb{N} : f(n) < t\} \subseteq \mathbb{N}$.

3. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $D \subseteq \mathbb{R}$ gust skup na $\mathbb{R}$. Dokažite da je $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in D$.

   Uputa: Ako je f izmjeriva, onda je $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in D$ (teorem 3.10.). Obratno, neka je $t \in \mathbb{R}$. Skup D je gust na $\mathbb{R}$ pa zato za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $d_n \in D \cap (t, t + 1/n)$. Kako je

$$\{x \in X : f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > d_n\} \in \mathcal{A},$$

   funkcija f je izmjeriva.

4. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ i $\mathcal{E} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Dokažite: (a) Ako je $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ za svaki $E \in \mathcal{E}$, onda je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tj. f je izmjeriva funkcija. (b) Neka su μ, ν dvije konačne mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takve da je $\mu(f^{-1}(E)) = \nu(E)$ za svaki $E \in \mathcal{E}$. Tada je $\mu(f^{-1}(B)) = \nu(B)$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Uputa: (a) Kako je $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, tvrdnja slijedi iz korolara 3.7. (b) Familja $\mathcal{E}$ je π-sistem koji generira $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tvrdnja slijedi iz teorema 2.37.

5. Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ prostori mjere i $f : X \to Y$ izmjeriva funkcija u paru σ-algebri $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Tvori li familija svih skupova oblika $f(A)$, $A \in \mathcal{A}$, σ-algebru na Y?

   Uputa: Općenito ne. Evo primjera: Neka je $X = Y = \mathbb{N}$. Za σ-algebru $\mathcal{A}$ uzmite bilo koju σ-algebru različitu od $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$, a f neka bude konstanta.

6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Dokažite da je njezina derivacija $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija.

   Uputa: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $g_n(x) = \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$ je izmjeriva. Prema tvrdnji (c) propozicije 3.17. tada je izmjeriva i funkcija $\lim_n g_n = f'$.

7. Dokažite da izmjerivost funkcije $|f|$ općenito ne povlači izmjerivost funkcije f.

   Uputa: Prema teoremu 3.12. postoji skup $B \subseteq \mathbb{R}$ koji nije Borelov. Neka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glasi $f = \chi_B - \chi_{B^c}$. Funkcija $|f|$ je konstanta ($|f| = 1$) pa je izmjeriva. Međutim, f nije izmjeriva jer $f^{-1}(1) = B$ nije Borelov skup.

8. Dokazati da za sve $A, B \subseteq X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:
   (a) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$. (b) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$. (c) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$. (d) $\alpha\chi_A + \beta\chi_B = \alpha\chi_{A\backslash B} + (\alpha+\beta)\chi_{A\cap B} + \beta\chi_{B\backslash A}$. (e) $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\Delta B}$, gdje je $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ simetrična razlika.

9. Neka je $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Tada je $A^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$. Dokažite:

$$\chi_A = 1 - \chi_{A^c} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \cdots (1 - \chi_{A_n}).$$

   Množenjem faktora na desnoj strani dobiva se

$$\chi_A = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots i_r \le n} \chi_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}}$$

   Uputa: Upotrijebite formule iz zadatka 8.

10. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$. Pokažite da je $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$.

4. Integracija izmjerivih funkcija

Fundamentalni pojam integrala definira se samo za izmjerive funkcije. Konstrukcija se radi u tri koraka: Prvo se definira integral za nenegativne jednostavne funkcije. Zatim se pojam integrala proširuje na nenegativne izmjerive funkcije. U trećem koraku pravi se proširenje na skup svih izmjerivih funkcija.

4.1. Integral nenegativne jednostavne funkcije

Ako se radi o nenegativnoj elementarnoj funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integral treba zamišljati kao površinu između grafa krivulje i x-osi. Motivirani time uvodimo općenitu definiciju:

4.1. DEFINICIJA
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty)$ jednostavna nenegativna funkcija s prikazom

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{4.1}$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi.

(I) Broj

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \tag{4.2}$$

zove se integral funkcije f s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna *ako je $\int f d\mu < \infty$.*

(II) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) \tag{4.3}$$

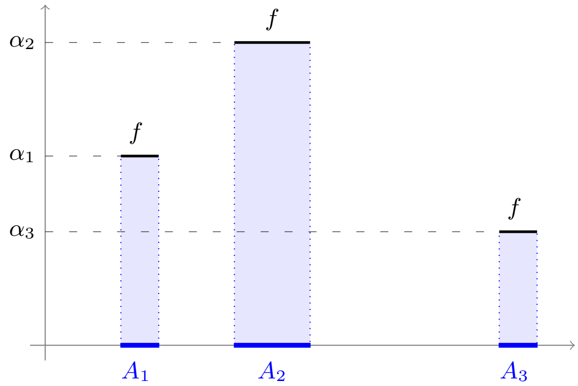
zove se integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f na skupu E.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E *ako je $\int_E f d\mu < \infty$.*

Za integral $\int f d\mu$ koriste se i sljedeće oznake:

$$\int_X f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

Slika 15. ilustrira ideju definicijske formule (4.2).



Slika 15. U ovom primjeru je $f = \alpha_1\chi_{A_1} + \alpha_2\chi_{A_2} + \alpha_3\chi_{A_3}$, gdje su A_1, A_2, A_3 segmenti na $\mathbb{R}$, a mjera μ je Lebesgueova mjera λ na $\mathbb{R}$. Integral $\int f d\lambda = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda(A_i)$ jednak je zbroju površina pravokutnika na slici.

Uočimo sljedeće:

1. Prikaz (4.1) i desna strana od (4.2) neće se promijeniti ako izbacimo članove gdje je $\alpha_i = 0$. Pojasnimo: Ako je $\mu(A_i) < \infty$, onda je sve jasno. Ako je $\mu(A_i) = \infty$, po dogovoru (vidi točku 2.3.) je $\alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$.

2. Očito je $0 \le \int f d\mu \le \infty$.

3. Očito je $\int f d\mu < \infty$ onda i samo onda ako je $\mu(A_i) < \infty$ za svaki α_i strogo veći od 0. Kako je
$$\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{n} A_i$$
i
$$\mu\big(\{x \in X : f(x) > 0\}\big) = \mu\Big(\bigcup_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{n} A_i\Big) = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^{n} \mu(A_i),$$
vidimo da je $\int f d\mu < \infty$ onda i samo onda ako je $\mu\big(\{x \in X : f(x) > 0\}\big) < \infty$. Drugim riječima, integral je konačan (odnosno, funkcija je integrabilna) onda i samo onda ako funkcija iščezava izvan nekog skupa konačne mjere.

4. Očito je $\int f d\mu = 0$ onda i samo onda ako je $\mu(A_i) = 0$ za svaki α_i strogo veći od 0. Uzme li se unija svih takvih skupova A_i, vidimo da je $\int f d\mu = 0$ onda i samo onda ako je $\mu\big(\{x \in X : f(x) > 0\}\big) = 0$. Drugim riječima, $\int f d\mu = 0$ onda i samo onda ako je $f = 0$ (s.s.).

Prvo što treba napraviti je pokazati da integral $\int f d\mu$ ne ovisi o izboru prikaza (4.1) funkcije f pomoću disjunktnih izmjerivih skupova i nenegativnih koeficijenata.

U tu svrhu pretpostavimo da je

$$f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j},$$

gdje su $B_1, \ldots, B_m \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\beta_1, \ldots, \beta_m \geq 0$, neki drugi prikaz funkcije f. Iz prikaza (4.1) možemo eliminirati one skupove A_i za koje je $\alpha_i = 0$, a iz drugog prikaza možemo eliminirati skupove B_j za koje je $\beta_j = 0$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je to već napravljeno u oba prikaza. Tada je

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j \equiv \{x \in X : f(x) > 0\}.$$

Zbog toga, ako je $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, onda je $\alpha_i = \beta_j$. Zahvaljujući tome i σ-aditivnosti mjere μ dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\Big(A_i \bigcap \big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu\Big(B_j \bigcap \big(\bigcup_{i=1}^{n} A_j\big)\Big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

Time smo pokazali da integral $\int f d\mu$ ne ovisi o izboru prikaza (4.1). Zato nadalje, kad god je to potrebno, možemo smatrati da se radi o standardnom prikazu (skupovi $A_1, \ldots, A_n$ su disjunktni, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ različiti realni brojevi).

4.2. PRIMJER. *Neka je $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. Dirichletova*[13] *funkcija, a za mjeru uzmimo Lebesgueovu mjeru λ.*

(a) Kako je $\int \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 = 0$, $\chi_{\mathbb{Q}}$ je integrabilna (na $\mathbb{R}$).

(b) Neka je $E \subseteq \mathbb{R}$ bilo koji izmjeriv skup, npr. segment $[a, b]$. Tada je

$$\int_E \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = \int \chi_E \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = \int \chi_{\mathbb{Q} \cap E} \, d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap E) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Dakle, $\chi_{\mathbb{Q}}$ je integrabilna na svakom izmjerivom podskupu $E \subseteq \mathbb{R}$.

Prisjetimo se da $\chi_{\mathbb{Q}}$ nije integrabilna u smislu Riemanna ni na jednom segmentu.

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Skup svih nenegativnih jednostavnih funkcija definiranih na X označavat ćemo sa $\mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ ili kraće sa $\mathcal{F}_+$. Skup $\mathcal{F}_+$ nije vektorski prostor, ali ima sljedeća svojstva:

[13] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805.-1869.), njemački matematičar.

4.3. Propozicija

Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:

(a) $\alpha f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

(b) $f + g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

(c) $f \leq g \Rightarrow g - f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

(d) $f \vee g,\ f \wedge g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti na dva različita načina. Prvi način predstavlja primjenu već dokazanih tvrdnji, a konstrukciju iz drugog načina iskoristit ćemo u dokazu teorema 4.4.

Prvi način. Po pretpostavci su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$, tj. nenegativne, realne i izmjerive funkcije koje primaju samo konačno mnogo različitih vrijednosti. Zbog toga su i funkcije $\alpha f, f+g, g-f, f \vee g$ i $f \wedge g$ nenegativne, realne i primaju samo konačno mnogo različitih realnih vrijednosti. Izmjerivost funkcija $\alpha f, f+g, g-f, f \vee g$ i $f \wedge g$ slijedi iz propozicija 3.16. i 3.19. □

Drugi način. Neka je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{4.4}$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi. Slično, neka je

$$g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i}, \tag{4.5}$$

gdje su $B_1, \ldots, B_m \in \Sigma$ disjunktni skupovi, a $\beta_1, \ldots, \beta_m$ nenegativni realni brojevi. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. Uočimo da je tada

$$X = X \cap X = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\Big) = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (A_i \cap B_j).$$

(a) Iz prikaza $\alpha f = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i \chi_{A_i}$ lako je zaključiti da je $\alpha f \in \mathcal{F}_+$.

(b) - (d). Prvo uočimo da su skupovi $A_i \cap B_j$ međusobno disjunktni. Nadalje, ako je $x \in A_i \cap B_j$, onda je očito $(f+g)(x) = \alpha_i + \beta_j$, $(g-f)(x) = \beta_j - \alpha_i \geq 0$, $(f \vee g)(x) = \max\{\alpha_i, \beta_j\}$ i $(f \wedge g)(x) = \min\{\alpha_i, \beta_j\}$. Zato je

$$f + g = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j} \tag{4.6}$$

$$
\begin{aligned}
g - f &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (\beta_j - \alpha_i)\chi_{A_i\cap B_j}\\
f \vee g &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \max\{\alpha_i, \beta_j\}\chi_{A_i\cap B_j}\\
f \wedge g &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \min\{\alpha_i, \beta_j\}\chi_{A_i\cap B_j},
\end{aligned}
$$

odakle slijede tvrdnje (b) - (d). ■

4.4. Teorem
Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \ge 0$ realan broj. Tada vrijedi:

(a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ *(*pozitivna homogenost*).*

(b) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *(*aditivnost*).*

(c) $f \le g \Rightarrow \int f d\mu \le \int g d\mu$ *(*monotonost*).*

Dokaz. Neka su f i g zadane s (4.4) i (4.5).

(a) $\int \alpha f d\mu = \int \big(\sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i\chi_{A_i}\big)d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i\mu(A_i) = \alpha\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i) = \alpha\int f d\mu$.

(b) Zahvaljujući tome što integral ne ovisi o prikazu jednostavne funkcije, možemo uzeti da je $f+g$ zadana s (4.6). Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\int (f+g)d\mu &= \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \alpha_i\mu(A_i\cap B_j) + \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \beta_j\mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i\cap B_j)\\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i\cap(\cup_{j=1}^m B_j)) + \sum_{j=1}^m \beta_j\mu(B_j\cap(\cup_{i=1}^n A_i))\\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i\cap X) + \sum_{j=1}^m \beta_j\mu(B_j\cap X) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j\mu(B_j)\\
&= \int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}
$$

(c) Kako je $g - f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ (propozicija 4.3.), to je $\int (g-f)d\mu \ge 0$. Sada pomoću (b) dobivamo: $\int g d\mu = \int (f + (g-f))d\mu = \int f d\mu + \int (g-f)d\mu \ge \int f d\mu$. ■

Sljedeća lema govori nam kako se jednostavno mogu generirati mjere:

4.5. Lema
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ nenegativna jednostavna funkcija. Funkcija $m : \Sigma \to [0, \infty]$ zadana formulom

$$m(E) := \int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu, \qquad E \in \Sigma$$

je mjera na Σ.

Dokaz. Neka je f zadana s (4.4). Tada je

$$f\chi_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i \cap E}, \qquad E \in \Sigma.$$

Skupovi $A_i \cap E \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$, međusobno su disjunktni i zato je

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E). \tag{4.7}$$

Očito je m nenegativna funkcija i $m(\emptyset) = 0$. Preostaje pokazati da je m σ-aditivna funkcija. Neka je $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz Σ. Pomoću (4.7) i σ-aditivnosti mjere μ dobivamo

$$\begin{aligned} m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\Big(A_i \bigcap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_i \cap E_k)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \end{aligned}$$

∎

4.6. Teorem
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, f_n \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, nenegativne jednostavne funkcije sa sljedeća dva svojstva:

(i) $f_n \leq f_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) (f_n) *konvergira po točkama prema* f, *tj.*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{za svaki } x \in X.$$

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Primjenom teorema 4.4. proizlazi

$$\int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \ldots \leq \int f d\mu,$$

pa vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Preostaje dokazati obrnutu nejednakost. U tu svrhu dovoljno je dokazati da za svaki $\varepsilon \in [0,1)$ vrijedi

$$\varepsilon \int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

jer se prijelazom na limes $\varepsilon \to 1$ dobiva obrnuta nejednakost.

Neka je $\varepsilon \in [0,1)$. Definirajmo skupove

$$E_n := \{x \in X : \varepsilon f(x) \leq f_n(x)\} \in \Sigma, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono rastući, pa je zato $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova. Sada ćemo pokazati da je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Za to je dovoljno pokazati da je $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Zaista, kada bi postojao neki $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, onda bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ bilo $f_n(x) < \varepsilon f(x)$, odakle bi se prijelazom na limes $n \to \infty$ dobilo $f(x) \leq \varepsilon f(x)$. Zbog $\varepsilon < 1$ to bi značilo da je $f(x) < f(x)$, što je kontradikcija.

Neka je $m : \Sigma \to [0,\infty]$ mjera iz leme 4.5. Primjenom propozicije 2.19.(iii) dobivamo $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m(X)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \int f\chi_{E_n} d\mu = \int f d\mu. \tag{4.8}$$

Nadalje, iz definicije skupa E_n lako je provjeriti da vrijedi

$$\varepsilon f \chi_{E_n} \leq f_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zato je (teorem 4.4.)

$$\varepsilon \int f\chi_{E_n} d\mu \leq \int f_n d\mu,$$

odakle prijelazom na limes $n \to \infty$ i korištenjem (4.8) dobivamo

$$\varepsilon \int f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

■

4.7. Primjedba

Teorem 4.6. ne vrijedi ako se izostavi uvjet monotonog rasta niza funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Evo dva primjera:

1. *Neka je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$. Definirajmo nenegativne jednostavne funkcije: $f = 0$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, a ipak je $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = 2 \neq 0 = \int f d\lambda$.*

2. *Neka je $X = \mathbb{R}$, a μ Lebesgueova mjera λ. Definirajte: $f = 0$, $f_n = \chi_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Teorem 4.6. neće vrijediti ako se uvjet monotonog rasta niza funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zamijeni uvjetom monotonog pada. Zaista, neka je $X = [0,\infty)$, $f_n(x) = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono pada i konvergira prema $f = 0$, a ipak je $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \infty \neq 0 = \int f d\lambda$.

4.2. Integral nenegativne izmjerive funkcije

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Svaka Σ-izmjeriva nenegativna funkcija $f : X \to [0,\infty]$ može se aproksimirati s nenegativnom jednostavnom funkcijom $g \in \mathcal{F}_+$, $g \leq f$ (vidi teorem 3.23.). To nam daje ideju da proširimo integral na skup svih nenegativnih izmjerivih funkcija. Imamo sljedeću definiciju:

4.8. Definicija
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0,\infty]$ nenegativna Σ-izmjeriva funkcija.

(I) *Broj*

$$\int f d\mu := \sup\left\{ \int g d\mu : g \in \mathcal{F}_+,\ g \leq f \right\} \tag{4.9}$$

zove se integral funkcije f s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna *ako je $\int f d\mu < \infty$.*

(II) *Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj*

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu \tag{4.10}$$

zove se integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f na skupu E.

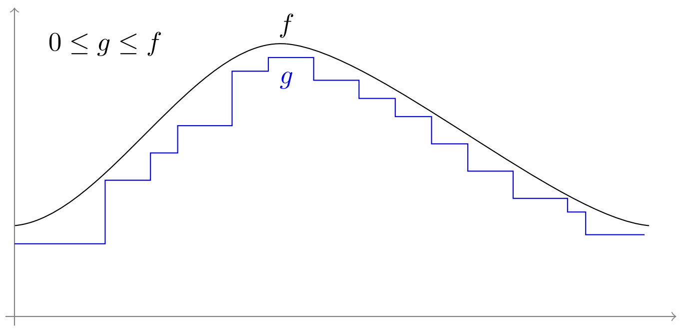
Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E *ako je $\int_E f d\mu < \infty$.*

Za integral $\int f d\mu$ koriste se i sljedeće oznake:

$$\int_X f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

4.9. Primjedba
Lako je vidjeti da je definicija 4.8. konzistentna s definicijom 4.1., tj. ako je $f \in \mathcal{F}_+$ jednostavna nenegativna funkcija, onda se vrijednost integrala dobivena po formuli (4.9) podudara s vrijednošću iz definicije 4.1.

Ideja definicijske formule (4.9) ilustrirana je na slici 16.



Slika 16. Nenegativna Σ-izmjeriva funkcija f aproksimirana je s funkcijom $g \in \mathcal{F}_+$. Mjera μ je Lebesgueova mjera λ na $\mathbb{R}$. Integral $\int g d\lambda$ (površina ispod grafa funkcije g) aproksimacija je integrala $\int f d\lambda$.

4.10. Primjedba

U definiciji 4.8. pretpostavlja se da je funkcija f definirana na cijelom skupu X. Sada ćemo definirati integral nenegativne izmjerive funkcije koja je definirana na izmjerivom podskupu od X. Prije toga korisno je uvesti neke oznake. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $S \in \Sigma$ i $f : S \to [0, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Proširimo funkciju f s nulom na cijeli skup X, tj. definirajmo funkciju $\tilde{f} : X \to [0, \infty]$ formulom

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in S \\ 0, & \text{ako } x \in X \backslash S. \end{cases}$$

Očito je $\tilde{f} = \tilde{f}\chi_S$, ali često je oznaka $\tilde{f}\chi_S$ bolja jer je iz nje odmah vidljivo da ta funkcija iščezava izvan skupa S. Nadalje, kako je

$$\tilde{f}^{-1}(B) = \begin{cases} f^{-1}(B), & \text{ako } 0 \notin B \\ f^{-1}(B) \cup (X \backslash S), & \text{ako je } 0 \in B \end{cases}$$

za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$, lako je zaključiti da je $\tilde{f}$ Σ-izmjeriva funkcija. Sada možemo govoriti i o integralu funkcije f na izmjerivom skupu $E \in \Sigma$, tako da pod integralom $\int_E f\, d\mu$ podrazumijevamo integral $\int_E \tilde{f}\, d\mu$. Dakle, po definiciji je

$$\int_E f\, d\mu := \int_E \tilde{f}\, d\mu = \int_E \tilde{f}\chi_S\, d\mu = \int \tilde{f}\chi_S\chi_E\, d\mu = \int \tilde{f}\chi_{S\cap E}\, d\mu.$$

Za funkciju $\tilde{f}\chi_{S\cap E}$ uobičajeno je koristiti oznaku $f\chi_{S\cap E}$, iako sama funkcija f možda nije definirana izvan skupa $S \cap E$ pa formalno gledano niti produkt $f\chi_{S\cap E}$ nije definiran. Razlog je taj što je vrijednost funkcije $\tilde{f}\chi_{S\cap E}$ u točkama izvan skupa $S \cap E$ jednaka nuli, a na skupu $S \cap E$ podudara se s funkcijom f. To je razlog zašto oznaka $f\chi_{S\cap E}$ ne bi smjela dovesti do zabune, a od velike je koristi jer ne moramo *uvoditi funkciju $\tilde{f}$. U skladu s tim dogovorom koji ćemo nadalje koristiti, imamo da je*

$$\int_E f\,d\mu = \int f\chi_{S\cap E}\,d\mu$$

i specijalno za $E = S$,

$$\int_S f\,d\mu = \int f\chi_S\,d\mu.$$

Dogovor da umjesto $\tilde{f}\chi_{S\cap E}$ koristimo oznaku $f\chi_{S\cap E}$ posebno dolazi do izražaja ako je funkcija f zadana formulom. Primjerice, ako je $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $S = [-1, 1]$ i $E = [0, 2]$, onda u skladu s navedenim dogovorom imamo da je

$$\int_{[0,2]} \sqrt{1-x^2}\,d\mu = \int \sqrt{1-x^2} \cdot \chi_{[0,1]}\,d\mu.$$

Definicijom 4.8. dano je proširenje integrala sa skupa $\mathcal{F}_+$ svih nenegativnih jednostavnih funkcija na skup svih nenegativnih Σ-izmjerivih funkcija. Uočimo da iz definicije 4.8. slijedi monotonost integrala. Zaista, ako je $f \le g$, onda je

$$\Big\{ \int hd\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \le f \Big\} \subseteq \Big\{ \int hd\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \le g \Big\},$$

odakle slijedi

$$\int fd\mu = \sup\Big\{\int hd\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \le f\Big\} \le \sup\Big\{\int hd\mu : h \in \mathcal{F}_+,\ h \le g\Big\} = \int gd\mu.$$

Sada ćemo pokazati da to proširenje integrala ima svojstva iz teorema 4.4. te da se može poopćiti teorem 4.6. Za to nam treba sljedeća propozicija, koja nam zajedno s teoremom 3.23. daje mogućnost da se integral nenegativne izmjerive funkcije definira i na drugi način.

4.11. PROPOZICIJA

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz funkcija iz $\mathcal{F}_+$ koji konvergira prema Σ-izmjerivoj funkciji $f : X \to [0, \infty]$, onda je

$$\int fd\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Po pretpostavci je $0 \le f_n \le f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, pa monotonost integrala povlači

$$0 \le \int f_n d\mu \le \int f_{n+1} d\mu, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

To znači da je $\big(\int f_n d\mu\big)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz pa zato u $[0, \infty]$ postoji $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. Nadalje, po definiciji 4.8. je

$$\int f_n d\mu \le \int fd\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

odakle slijedi

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Preostaje dokazati obrnutu nejednakost. U tu svrhu dovoljno je dokazati da za svaku funkciju $g \in \mathcal{F}_+$, $g \leq f$, vrijedi

$$\int g d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

Neka je $g \in \mathcal{F}_+$ funkcija takva da je $g \leq f$. Tada je $g \wedge f_n \in \mathcal{F}_+$ (propozicija 4.3.), a $(g \wedge f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući niz funkcija iz $\mathcal{F}_+$. Osim toga je $\lim_{n\to\infty}(g \wedge f_n) = g$. Prema teoremu 4.6. je

$$\int g d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (g \wedge f_n) d\mu.$$

Kako je $g \wedge f_n \leq f_n$, monotonost integrala povlači $\int (g \wedge f_n) d\mu \leq \int f_n d\mu$. Dakle, $\int g d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu$. ■

4.12. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f, g : X \to [0, \infty]$ nenegativne Σ-izmjerive funkcije i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:

(a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ *(*pozitivna homogenost*).*

(b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *(*aditivnost*).*

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$ *(*monotonost*).*

Dokaz. Monotonost integrala već smo dokazali.

(a) - (b). Odaberimo rastuće nizove $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcija iz $\mathcal{F}_+$ takve da je $f = \lim_n f_n$ i $g = \lim_n g_n$. Takvi nizovi postoje (vidi teorem 3.23.). Tada su $(\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući nizovi funkcija iz $\mathcal{F}_+$ i pri tome je $\alpha f = \lim_n(\alpha f_n)$, $f + g = \lim_n(f_n + g_n)$. Pomoću propozicije 4.11. te homogenosti i aditivnosti integrala na $\mathcal{F}_+$ (teorem 4.4.) dobivamo

$$\int \alpha f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int \alpha f_n d\mu = \alpha \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \alpha \int f d\mu$$

$$\int (f+g) d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n\to\infty}\Big(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu\Big) = \int f d\mu + \int g d\mu$$ ■

4.13. Propozicija

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f, g : X \to [0, \infty]$ nenegativne i Σ-izmjerive funkcije. Tada vrijedi:

(a) $\int f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ *(s.s.).*

(b) Ako je $f = g$ (s.s.), onda je $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Dokaz. (a) Neka je $\int f d\mu = 0$. Treba pokazati da je zanemariv skup $A := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Kako je $A = f^{-1}((0, \infty]) \in \Sigma$, to znači da treba pokazati da je $\mu(A) = 0$. Definirajmo skupove

$$A_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo da je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Zahvaljujući nejednakosti $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq f$, pomoću teorema 4.12.(c) dobivamo

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{A_n} d\mu \leq \int f d\mu = 0,$$

odakle slijedi $\mu(A_n) = 0$. Zato je $0 \leq \mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.

Obratno, neka je $f = 0$ (s.s.). Odaberimo bilo koji rastući niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funkcija iz $\mathcal{F}_+$ koji konvergira prema funkciji f. Tada je očito $f_n = 0$ (s.s.) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato je $\int f_n d\mu = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (vidi 4. komentar neposredno nakon definicije 4.1.). Sada pomoću propozicije 4.11. i teorema 4.6. dobivamo $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 0$.

(b) Neka je $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Po pretpostavci skup A^c je zanemariv. Osim toga, kako je po teoremu 3.14. c) skup A izmjeriv, izmjeriv je i skup A^c. Budući da je A^c zanemariv i izmjeriv, slijedi $\mu(A^c) = 0$.

Kako je skup A izmjeriv, izmjeriva je i karakteristična funkcija χ_A. Zato su izmjerive i funkcije $f\chi_A$ i $g\chi_A$. Osim toga, vrijedi

$$f\chi_A = g\chi_A.$$

Nadalje, kako je $\{x \in X : f\chi_{A^c}(x) \neq 0\} \subseteq A^c$, $A^c \in \Sigma$ i $\mu(A^c) = 0$, slijedi da je $f\chi_{A^c} = 0$ (s.s.). Slično se pokaže da je i $g\chi_{A^c} = 0$ (s.s.). Zato prema (a) imamo

$$\int f\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_{A^c} d\mu = 0.$$

Sada pomoću teorema 4.12. dobivamo

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f\chi_{A\cup A^c} d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int (f\chi_A + f\chi_{A^c}) d\mu \\ &= \int f\chi_A d\mu = \int g\chi_A d\mu = \int (g\chi_A + g\chi_{A^c}) d\mu = \int g d\mu.\end{aligned}$$

■

U teoriji integrala od izuzetne je važnosti tzv. Levijev[14] teorem koji nam govori da na skupu svih nenegativnih i izmjerivih funkcija integral i limes rastućeg niza funkcija „komutiraju”. Pri tome je dopuštena promjena granične funkcije na zanemarivom skupu. Taj teorem je poznat i pod nazivom Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji.

[14]Beppo Levi (1875.-1961.), talijanski matematičar.

4.14. Teorem (Levijev teorem o monotonoj konvergenciji)
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz Σ-izmjerivih funkcija $f_n : X \to [0, \infty]$ sa sljedeća dva svojstva:

(i) $f_n \le f_{n+1}$ *(s.s.) za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *(s.s.).*

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u dva koraka.

(a) Prvo pretpostavimo da je $f_n \le f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, te da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Tada je

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le f$$

pa monotonost integrala povlači

$$\int f_1 d\mu \le \int f_2 d\mu \le \ldots \le \int f d\mu.$$

To znači da je $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz pa zato postoji $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ i pri tome je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \int f d\mu.$$

Preostaje dokazati obratnu nejednakost

$$\int f d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

U tu svrhu prvo za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo rastući niz $(g_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ nenegativnih jednostavnih funkcija $g_{n,k} : X \to [0, \infty]$ koji konvergira funkciji f_n, tj. $\lim_{k\to\infty} g_{n,k} = f_n$. Prema teoremu 3.23. takav niz postoji. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{c}
g_{1,1} \le g_{1,2} \le \cdots \le g_{1,k} \le \cdots \le g_{1,n} \le g_{1,n+1} \le \cdots \le f_1 \le f \\
g_{2,1} \le g_{2,2} \le \cdots \le g_{2,k} \le \cdots \le g_{2,n} \le g_{2,n+1} \le \cdots \le f_2 \le f \\
\vdots \\
g_{k,1} \le g_{k,2} \le \cdots \le g_{k,k} \le \cdots \le g_{k,n} \le g_{k,n+1} \le \cdots \le f_k \le f \\
\vdots \\
g_{n,1} \le g_{n,2} \le \cdots \le g_{n,k} \le \cdots \le g_{n,n} \le g_{n,n+1} \le \cdots \le f_n \le f \\
\vdots \\
g_{m,1} \le g_{m,2} \le \cdots \le g_{m,k} \le \cdots \le g_{m,n} \le g_{m,n+1} \le \cdots \le f_m \le f \\
\vdots
\end{array}\right\} \tag{4.11}$$

Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo nenegativnu jednostavnu funkciju h_n formulom

$$h_n = \max\{g_{1,n}, g_{2,n}, \ldots, g_{n,n}\}.$$

Vrijedi:

1. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući niz, tj. $h_n \leq h_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$,
2. $h_n \leq f_n \leq f$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i
3. $f = \lim_{n\to\infty} h_n$.

Zaista, pažljivim promatranjem niza nejednakosti (4.11) lako je provjeriti prve dvije tvrdnje. Preostaje pokazati da je $f = \lim_{n\to\infty} h_n$. Kako je $h_n \leq f$, to je $\lim_{n\to\infty} h_n \leq f$. Obrnuto, za svaki (fiksirani) $k \in \mathbb{N}$ i za svaki $n \geq k$ je

$$h_n = \max\{g_{1,n}, g_{2,n}, \ldots, g_{n,n}\} \geq g_{k,n},$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} h_n \geq \lim_{n\to\infty} g_{k,n} = f_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

odakle prijelazom na limes $k \to \infty$ slijedi obratna nejednakost.

Zahvaljujući upravo dokazanim tvdnjama, propoziciji 4.11. i monotonosti integrala dobivamo

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int h_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu,$$

što je tražena obratna nejednakost.

(b) Skupovi $N_0 := \{x \in X : \lim_n f_n(x) \neq f(x)\} \in \Sigma$ i $N_n := \{x \in X : f_n(x) > f_{n+1}(x)\} \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, su zanemarivi. Zato je i skup $B := \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n \in \Sigma$ kao unija zanemarivih skupova također zanemariv. Kako je $B \in \Sigma$, to je $\mu(B) = 0$.

Na skupu $A := B^c$ je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ i $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga će na cijelom skupu X biti $f_n\chi_A \leq f_{n+1}\chi_A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} f_n\chi_A = f\chi_A$. Prema (a) je

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_A d\mu = \int f\chi_A d\mu.$$

Kako je $f = f\chi_A$ (s.s.) i $f_n = f_n\chi_A$ (s.s.) za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz propozicije 4.13.(b) dobivamo $\int f d\mu = \int f\chi_A d\mu$ i $\int f_n d\mu = \int f_n\chi_A d\mu$, $n \in \mathbb{N}$. ■

4.15. Primjer. *Pokažimo da je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2} d\lambda = 1,$$

gdje je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$. Pri tome, budući da podintegralne funkcije $x \mapsto \sqrt[n]{1-x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, nisu definirane na cijelom skupu $X = \mathbb{R}$ već na segmentu $S =$

$[-1,1]$, *pod integralom* $\int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2}d\lambda$ *podrazumijeva se integral* $\int \sqrt[n]{1-x^2}\chi_{[0,1]}d\lambda$ *(vidi primjedbu 4.10.). Dakle, treba pokazati da je*

$$\lim_{n\to\infty} \int \sqrt[n]{1-x^2}\chi_{[0,1]}\, d\lambda = 1.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *definirajmo izmjerivu funkciju* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kao* $f_n = \sqrt[n]{1-x^2}\chi_{[0,1]}$, *tj.*

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{1-x^2}, & \text{ako je } x \in [0,1] \\ 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{R}\backslash[0,1]. \end{cases}$$

Sada ćemo pokazati da taj niz funkcija monotono raste na $\mathbb{R}$ *i da konvergira (na cijelom skupu* $\mathbb{R}$*) prema izmjerivoj funkciji* $f = \chi_{[0,1)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Uočimo da je dovoljno pokazati da te tvrdnje vrijede na segmentu* $[0,1]$. *Kako je* $1-x^2 \le 1$ *za svaki* $x \in [0,1]$, *lako je zaključiti da niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotono raste na* $[0,1]$, *tj.*

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1-x^2} \le \sqrt[n+1]{1-x^2} = f_{n+1}(x), \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nadalje, za svaki $x \in [0,1]$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1-x^2} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in [0,1) \\ 0, & \text{ako je } x = 1 \end{cases} = \chi_{[0,1)}(x).$$

Sada pomoću Levijeva teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{1-x^2}d\lambda = \int \chi_{[0,1)}d\lambda = 1.$$

4.16. Primjedba

Levijev teorem o monotonoj konvergenciji općenito ne vrijedi za Riemannov integral. Evo primjera: Neka je $X = [0,1]$. *Poslažimo racionalne brojeve iz skupa* $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ *u niz* $q_1, q_2, q_3, \ldots$. *Kako je* $\mathbb{Q}$ *prebrojiv skup, to je moguće. Sada definirajmo funkcije* $f_n : X \to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monotono raste,* $\lim_n f_n = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$. *Osim toga, za sve* $x \in [0,1]$ *i za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *je* $0 \le f_n(x) \le 1$.

Svaka funkcija f_n *je R-integrabilna,* $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$, *ali granična funkcija* $\chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ *nije R-integrabilna.*

4.17. Teorem (Levijev teorem za redove)

Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* Σ*-izmjerivih funkcija* $f_n : X \to [0,\infty]$. *Ako red* $\sum_n f_n$ *konvergira, onda je*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Primijenite teorem 4.14. na funkcije $s_n := \sum_{k=1}^n f_k$ (n-ta parcijalna suma reda $\sum_n f_n$) i $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ (suma reda). ∎

4.18. Primjedba
Zbog propozicije 4.13.(b) dovoljno je da red $\sum_n f_n$ konvergira skoro svuda.

4.19. Korolar
Neka je $f : X \to [0,\infty]$ izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere (X,Σ,μ). Funkcija $m : \Sigma \to [0,\infty]$ definirana formulom

$$m(E) := \int_E f d\mu = \int \chi_E f d\mu, \qquad E \in \Sigma$$

je mjera na Σ.

Dokaz. Očito je m nenegativna funkcija. Nadalje,

$$m(\emptyset) = \int \chi_\emptyset f d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Preostaje pokazati σ-aditivnost funkcije m. Neka su $E_1, E_2, \ldots$ disjunktni podskupovi iz Σ. Tada red $\sum_n \chi_{E_n} f$ konvergira prema funkciji $\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f$. Primjenom teorema 4.17. dobivamo

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\Big) = \int \chi_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f d\mu = \int \sum_{n=1}^\infty \chi_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int \chi_{E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^\infty m(E_n).$$ ∎

Za razliku od Riemannovog integrala, integral po mjeri dobro se ponaša prema graničnom postupku. Pri tome se više ne moramo ograničavati na monotono rastuće nizove funkcija, kao što je slučaj u Levijevu teoremu. O tome nam govori sljedeća tzv. Fatouova[15] lema.

4.20. Teorem (Fatouova lema)
Neka je (X,Σ,μ) prostor mjere, a $f : X \to [0,\infty]$ i $f_n : X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije. Ako je $f = \liminf_n f_n$ (s.s.), onda je

$$\int f d\mu \le \liminf_n \int f_n d\mu.$$

[15] Pierre Joseph Louis Fatou (1878.-1929.), francuski matematičar

Dokaz. Neka je $g_n := \inf\{f_k : k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $g_n : X \to [0, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija (propozicija 3.17.), niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono rastući i $g_n \leq f_n$. Po pretpostavci je $f = \liminf_n f_n = \lim_n g_n$ (s.s.).

Pomoću Levijeva teorema dobivamo

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu.$$

Preostaje pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \inf\Big\{ \int f_k d\mu : k \geq n\Big\}.$$

Zaista, kako je $g_n = \inf\{f_k : k \geq n\}$, to je $g_n \leq f_k$ za svaki $k \geq n$. Sada zbog monotonosti integrala imamo

$$\int g_n d\mu \leq \int f_k d\mu, \qquad \forall k \geq n,$$

odakle prvo slijedi

$$\int g_n d\mu \leq \inf\Big\{ \int f_k d\mu : k \geq n\Big\},$$

a zatim

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf\Big\{ \int f_k d\mu : k \geq n\Big\} = \liminf_n \int f_n d\mu.$$

∎

4.21. Primjer. *Sljedeći primjeri pokazuju nam da se u Fatouovoj lemi može javiti stroga nejednakost:*

(a) *Neka je* $f_n = \chi_{[n,n+1]}$. *Tada je* $\liminf_n f_n = 0$, *a* $\int f_n d\lambda = 1$.

(b) *Ako je* $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$, *onda je* $\int f_n d\lambda = 1$, $\liminf_n f_n = 0$.

4.22. Teorem

(Čebiševljeva[16] nejednakost) *Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere,* $f : X \to [0, \infty]$ Σ*-izmjeriva funkcija i* $p \in (0, \infty)$ *fiksan broj. Za svaki* $t > 0$ *definirajmo* Σ*-izmjeriv skup* $A_t := \{x \in X : f(x) \geq t\}$. *Tada je*

$$\mu(A_t) \leq \frac{1}{t^p} \int f^p \chi_{A_t} d\mu \leq \frac{1}{t^p} \int f^p d\mu. \tag{4.12}$$

[16] Пафнутий Львович Чебышев (1821.-1894.), ruski matematičar.

Dokaz. Iz nejednakosti $0 \leq t^p \chi_{A_t} \leq f^p \chi_{A_t} \leq f^p$ zahvaljujući monotonosti integrala (teorem 4.12.(c)) dobivamo

$$\int t^p \chi_{A_t} d\mu \leq \int f^p \chi_{A_t} d\mu \leq \int f^p d\mu.$$

Kako je $\int t^p \chi_{A_t} d\mu = t^p \mu(A_t)$, dobiva se tvrdnja teorema. ∎

4.23. KOROLAR
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Ako postoji strogo pozitivna i integrabilna funkcija $f : X \to (0, \infty]$, mjera μ je σ-konačna.

Dokaz. Treba pokazati da postoji niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ takav da je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\mu(A_n) < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $A_n := \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Prema Čebiševljevoj nejednakosti imamo $\mu(A_n) \leq n \int f d\mu < \infty$. ∎

4.3. Integral izmjerive funkcije

4.24. DEFINICIJA
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija.

(I) Ako je barem jedan od brojeva $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ konačan, onda se definira broj

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \tag{4.13}$$

i zovemo ga integral funkcije f s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna *ako je $\int f d\mu$ konačan.*

(II) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Ako je definiran integral $\int \chi_E f d\mu$, onda broj

$$\int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu \tag{4.14}$$

zovemo integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ *ili kraće* integral funkcije f na skupu E.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E *ako je $\int_E f d\mu < \infty$.*

Jednostavno se provjerava da je ova definicija konzistentna s definicijom 4.8.

Uočimo da je funkcija f integrabilna onda i samo onda ako su oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $f^- d\mu$ konačna.

Za integral $\int f d\mu$ koriste se i sljedeće oznake:

$$\int_X f d\mu, \quad \int f(x) d\mu(x), \quad \int_X f(x) d\mu(x).$$

4.25. PRIMJEDBA
Neka je $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ*-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:*

(i) Integral $\int f d\mu$ *definiran je onda i samo onda ako postoje* Σ*-izmjerive funkcije* $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ *takve da je* $f = f_1 - f_2$ *i da je barem jedan od integrala* $\int f_1 d\mu$ *i* $\int f_2 d\mu$ *konačan.*

(ii) Funkcija f *integrabilna je onda i samo onda ako postoje* Σ*-izmjerive funkcije* $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ *takve da je* $f = f_1 - f_2$ *i da su oba integrala* $\int f_1 d\mu$ *i* $\int f_2 d\mu$ *konačna. Štoviše, pri tome je*

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 \, d\mu. \tag{4.15}$$

Dokaz. U obje tvrdnje očigledan je smjer $\Rightarrow$.

$\Leftarrow$ Neka je $f = f_1 - f_2$, gdje su $f_1, f_2 : X \to [0, \infty]$ Σ-izmjerive funkcije. Iz $f = f_1 - f_2$ slijedi $f^+ \leq f_1$ i $f^- \leq f_2$, pa monotonost integrala daje

$$\int f^+ d\mu \leq \int f_1 d\mu \qquad \& \qquad \int f^- d\mu \leq \int f_2 \, d\mu.$$

(i) Po pretpostavci je barem jedan od integrala $\int f_1 d\mu$ i $\int f_2 d\mu$ konačan. Iz gornjih nejednakosti slijedi da je tada konačan barem jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$, što znači da je definiran integral $\int f d\mu$.

(ii) Po pretpostavci su konačna oba integrala $\int f_1 d\mu$ i $\int f_2 d\mu$ pa iz gornjih nejednakosti slijedi da su konačna oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$. Dakle, f je integrabilna.

Preostaje dokazati jednakost (4.15). Iz jednakosti $f = f_1 - f_2 = f^+ - f^-$ slijedi

$$f_1 + f^- = f^+ + f_2.$$

Zaista, to je očigledno ako su sve vrijednosti $f_1(x), f_2(x), f^+(x)$ i $f^-(x)$ konačne. Nadalje, pažljivijim promatranjem lako je provjeriti da ta jednakost vrijedi i u slučaju kada neki od brojeva $f_1(x), f_2(x), f^+(x)$ ili $f^-(x)$ nije konačan. Iskoristimo li svojstvo aditivnosti integrala (teorem 4.12.) dobivamo

$$\int f_1 d\mu + \int f^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu,$$

odakle zbog konačnosti svih integrala slijedi

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 \, d\mu.$$

■

4.26. PRIMJEDBA

Integral izmjerive funkcije $f : S \to [-\infty, \infty]$ definirane na izmjerivom pravom podskupu S od X formalno se definira kao u primjedbi 4.10., tj. pod integralom $\int_E f\, d\mu$ funkcije f na izmjerivom podskupu E podrazumijevamo integral $\int_E \tilde{f}\, d\mu$, gdje je $\tilde{f} : X \to [-\infty, \infty]$ izmjerivo proširenje funkcije f s nulom na cijeli X. Kako je $\tilde{f} = \tilde{f}\chi_S$, dobivamo

$$\int_E f\, d\mu = \int_E \tilde{f}\, d\mu = \int_E \tilde{f}\chi_S\, d\mu = \int \tilde{f}\chi_S\chi_E\, d\mu = \int \tilde{f}\chi_{S\cap E}\, d\mu = \int f\chi_{S\cap E}\, d\mu.$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog dogovora da se funkcija $\tilde{f}\chi_{S\cap E}$ jednostavnije označi s $f\chi_{S\cap E}$.

4.27. LEMA

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Funkcija f je integrabilna onda i samo onda ako je funkcija $|f|$ integrabilna, tj. ako je $\int |f| d\mu < \infty$.

Dokaz. Kako je $|f| = f^+ + f^-$, imamo $f^+, f^- \le |f|$. Nadalje, prema teoremu 4.12. je

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \qquad \& \qquad \int f^+ d\mu, \int f^- d\mu \le \int |f| d\mu,$$

odakle vidimo da je f integrabilna (oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $f^- d\mu$ su konačna) onda i samo onda ako je $\int |f| d\mu < \infty$. ■

4.28. PROPOZICIJA

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je f integrabilna, onda vrijedi:

(a) $f(x) \in \mathbb{R}$ (s.s.). Preciznije, $\mu(\{x \in X : |f(x)| = \infty\}) = 0$.

(b) Skup $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ je σ-konačan.

Dokaz. Prema lemi 4.27. je $\int |f| d\mu < \infty$.

(a) Neka je $B := \{x \in X : |f(x)| = \infty\} \in \Sigma$. Treba pokazati da je $\mu(B) = 0$. Uočimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $n\chi_B \le |f|$, pa monotonost integrala daje $n\mu(B) = \int n\chi_B d\mu \le \int |f| d\mu$. Dakle,

$$\mu(B) \le \frac{\int |f| d\mu}{n}$$

odakle se dobiva

$$0 \le \mu(B) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\int |f| d\mu}{n} = 0.$$

(b) Neka je $A := \{x \in X : f(x) \neq 0\} \in \Sigma$. Treba pokazati da se skup A može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne mjere. Uočimo skupove $A_n := \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Iz nejednakosti $\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq |f|$ dobivamo

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{A_n} d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty,$$

odakle slijedi $\mu(A_n) < \infty$. Nadalje, kako je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, skup A je σ-konačan. ■

4.29. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ dvije Σ-izmjerive funkcije takve da je $f = g$ (s.s.). Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je definiran i integral $\int g d\mu$ i pri tome je

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Dokaz. Iz $f = g$ (s.s.) lako slijedi $f^+ = g^+$ (s.s.) i $f^- = g^-$ (s.s.). Prema propoziciji 4.13. imamo $\int f^+ d\mu = \int g^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu = \int g^- d\mu$.

Neka je definiran integral $\int f d\mu$, tj. neka je konačan barem jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$. Tada je konačan barem jedan od integrala $\int g^+ d\mu$ i $\int g^- d\mu$. Dakle, definiran je $\int g d\mu$ i pri tome je $\int f d\mu = \int g d\mu$. ■

4.30. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(a) $f = 0$ *(s.s.).*

(b) $\int |f| d\mu = 0$.

(c) $\int f\chi_A d\mu = 0$ *za svaki* $A \in \Sigma$.

Dokaz. $(b) \Rightarrow (a)$. Ako je $\int |f| d\mu = 0$, propozicija 4.13. povlači $|f| = 0$ (s.s.), pa je stoga i $f = 0$ (s.s.).

$(a) \Rightarrow (c)$. Ako je $f = 0$ (s.s.), onda je $f\chi_A = 0$ (s.s.) za svaki $A \in \Sigma$, i zato je $\int f\chi_A d\mu = 0$ (teorem 4.29.).

$(c) \Rightarrow (b)$. Pretpostavimo da je $\int f\chi_A d\mu = 0$ za svaki $A \in \Sigma$. Tada specijalno za $A = X$ dobivamo

$$\int f d\mu = 0.$$

Nadalje, neka je $A_0 := f^{-1}([0, \infty]) \in \Sigma$. Tada je po pretpostavci $\int f\chi_{A_0} d\mu = 0$. Kako je $f^+ = f\chi_{A_0}$, imamo

$$\int f^+ d\mu = \int f\chi_{A_0} d\mu = 0.$$

Sada iz jednakosti $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ slijedi $\int f^- d\mu = 0$. Zato je $\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = 0$. ■

4.31. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

(a) Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je definiran i integral $\int \alpha f d\mu$ i vrijedi

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu. \tag{4.16}$$

(b) Ako je f integrabilna, onda je i αf integrabilna funkcija i pri tome vrijedi gornja formula.

Dokaz. Slučaj $\alpha = 0$ je trivijalan. Zato nadalje pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$.

(a) Neka je definiran integral $\int f d\mu$. Tada je $\int f^+ d\mu < \infty$ ili $\int f^- d\mu < \infty$.

Ako je $0 < \alpha < \infty$, onda je $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ i $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. Pomoću tih jednakosti i teorema 4.12. dobivamo

$$\int (\alpha f)^+ d\mu = \int \alpha f^+ d\mu = \alpha \int f^+ d\mu$$
$$\int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha f^- d\mu = \alpha \int f^- d\mu,$$

odakle zaključujemo da barem jedan od integrala $\int (\alpha f)^+ d\mu$ i $\int (\alpha f)^- d\mu$ mora biti konačan. Dakle, definiran je integral $\int \alpha f d\mu$. Nadalje, vrijedi

$$\int \alpha f d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \alpha \Big(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \Big) = \alpha \int f d\mu.$$

Ako je $-\infty < \alpha < 0$, onda je $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ i $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Da bi se dokazala tvrdnja i u ovom slučaju dovoljno je postupiti na isti način kao u slučaju $0 < \alpha < \infty$.

Time je dokazano da je definiran integral $\int \alpha f d\mu$ i da vrijedi (4.16).

(b) Ako je f integrabilna funkcija, onda su konačna oba integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ pa je prema već dokazanoj tvrdnji (a) definiran integral $\int \alpha f d\mu$ i vrijedi jednakost (4.16). Iz (4.16) slijedi integrabilnost funkcije αf. ∎

4.32. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ bilo koje dvije Σ-izmjerive funkcije takve da je

$$\{x \in X : f(x) = \infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in X : f(x) = -\infty, g(x) = \infty\} = \emptyset,$$

tj. da je definiran i zbroj $f + g : X \to [-\infty, \infty]$. Tada vrijedi:

(a) Ako su definirana oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ i ako su oni istog predznaka u slučaju da su oba beskonačna, onda je definiran i integral $\int (f+g) d\mu$ i vrijedi

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu. \tag{4.17}$$

(b) Ako su f i g integrabilne, onda je i $f+g$ integrabilna funkcija i pri tome vrijedi gornja formula.

Dokaz. (a) Po pretpostavci integrali $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ istog su predznaka u slučaju da su oba beskonačna. Zahvaljujući tome, pažljivim promatranjem vrijednosti integrala $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$, $\int g^+ d\mu$ i $\int g^- d\mu$ lako je zaključiti da se mora pojaviti jedan od sljedeća dva slučaja:

(i) $\int f^- d\mu < \infty$ i $\int g^- d\mu < \infty$, ili

(ii) $\int f^+ d\mu < \infty$ i $\int g^+ d\mu < \infty$.

Zaista, kako je $\int f\, d\mu$ definiran, barem jedan od integrala $\int f^- d\mu$ i $\int f^+ d\mu$ je konačan. Radi određenosti pretpostavimo da je konačan integral $\int f^- d\mu$ (analogno se tretira slučaj kada je $\int f^+ d\mu$ konačan). Ako je konačan integral $\int g^- d\mu$, javlja se slučaj (i). Ako je $\int g^- d\mu = \infty$, javlja se slučaj (ii). Zaista, ako je $\int g^- d\mu = \infty$, budući da je po pretpostavci teorema definiran integral $\int g d\mu$, integral $\int g^+ d\mu$ mora biti konačan. Kako je tada $\int g d\mu = \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = -\infty$ i kako su po pretpostavci integrali $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ istog predznaka u slučaju da su oba beskonačna, integral $\int f^+ d\mu$ mora biti konačan jer bismo u suprotnom imali da je $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \infty$.

Prvo ćemo pokazati da je

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+ \quad \text{i} \quad (f+g)^- \leq f^- + g^-.$$

Zaista, iz

$$f = f^+ - f^- \quad \text{i} \quad g = g^+ - g^-$$

lako se dobivaju sljedeće dvije nejednakosti:

$$f + g \leq f^+ + g^+ \quad \text{i} \quad -(f+g) \leq f^- + g^-.$$

Zato je $(f+g)^+ = \max\{f+g, 0\} \leq f^+ + g^+$ i $(f+g)^- = \max\{-(f+g), 0\} \leq f^- + g^-$.

(i) Razmotrimo prvo slučaj $\int f^- d\mu < \infty$ i $\int g^- d\mu < \infty$. Iz $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ slijedi

$$\int (f+g)^- d\mu \leq \int f^- d\mu + \int g^- d\mu < \infty.$$

Dakle, definiran je integral $\int (f+g) d\mu$.

Nadalje, iz očigledne jednakosti

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

slijedi

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Sada pomoću teorema 4.12. dobivamo

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu.$$

Svi integrali $\int (f+g)^- d\mu$, $\int f^- d\mu$ i $\int g^- d\mu$ su konačni pa iz gornje jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} \int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu, \end{aligned}$$

tj. $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

(ii) Slučaj $\int f^+ d\mu < \infty$ i $\int g^+ d\mu < \infty$. Treba postupiti slično kao pod (i).

(b) Neka su f i g integrabilne funkcija. Tada su oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$ konačna. Prema tvrdnji (a) integral $\int (f+g) d\mu$ je definiran i vrijedi (4.17). ■

4.33. Teorem
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjerive funkcije takve da je $f \leq g$. Ako su definirana oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$, onda je

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu. \tag{4.18}$$

Dokaz. Iz $f \leq g = g^+ - g^- \leq g^+$ slijedi

$$f^+ \leq g^+.$$

Slično, iz $-g \leq -f = f^- - f^+ \leq f^-$ slijedi

$$g^- \leq f^-.$$

Zbog toga vrijedi:

$$\int f^+ d\mu \leq \int g^+ d\mu \tag{4.19}$$

$$\int g^- d\mu \leq \int f^- d\mu. \tag{4.20}$$

Barem jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ mora biti konačan. Isto tako, barem jedan od integrala $\int g^+ d\mu$ i $\int g^- d\mu$ mora biti konačan. To je stoga jer se pretpostavlja da su definirana oba integrala $\int f d\mu$ i $\int g d\mu$. Uočimo da su moguća samo sljedeća dva slučaja:

(i) $\int g^+ d\mu = \infty$ i $\int f^- d\mu = \infty$ ili

(ii) barem jedan od integrala $\int g^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ je konačan.

Ako je $\int g^+ d\mu = \infty$ i $\int f^- d\mu = \infty$, onda mora biti $\int g^- d\mu < \infty$ i $\int f^+ d\mu < \infty$. Tada u (4.18) imamo strogu nejednakost.

Preostaje razmotriti slučaj (ii). Ako je $\int f^- d\mu < \infty$, onda iz (4.20) slijedi $\int g^- d\mu < \infty$. Dakle, obje strane nejednakosti (4.20) konačni su brojevi pa zato od (4.19) smijemo oduzeti (4.20), što će dati traženu nejednakost (4.18).

Ako je $\int g^+ d\mu < \infty$, onda iz (4.19) slijedi $f^+ d\mu < \infty$. U ovom slučaju prvo (4.20) pomnožimo s -1, a zatim dodamo (4.19). Opet dobivamo nejednakost (4.18). To smijemo napraviti jer se s obje strane nejednakosti (4.19) nalaze konačni brojevi. ■

4.34. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je

$$\Big| \int f d\mu \Big| \le \int |f| d\mu. \tag{4.21}$$

Dokaz. Pomoću nejednakosti trokuta, koja vrijedi i u slučaju da je jedan od integrala $\int f^+ d\mu$ ili $\int f^- d\mu$ beskonačan, dobivamo:

$$\begin{aligned} \Big| \int f d\mu \Big| &= \Big| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \Big| \le \Big| \int f^+ d\mu \Big| + \Big| \int f^- d\mu \Big| \\ &= \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int |f| d\mu. \end{aligned}$$ ■

Skup svih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ integrabilnih s obzirom na prostor mjere (X, Σ, μ) označavamo sa $\mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$. Koristit ćemo još i oznake $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^1(X)$ ili $\mathcal{L}^1(\mu)$. Tako npr. ako je iz konteksta jasno što su skup X i σ-algebra Σ, dovoljno je koristiti oznaku $\mathcal{L}^1(\mu)$ da ne bi bilo zabune o kojoj mjeri se radi.

Kao direktnu posljedicu teorema 4.31., teorema 4.32. i teorema 4.33. dobivamo sljedeći teorem koji nam govori da je $\mathcal{L}^1$ realan vektorski prostor, a integral linearni funkcional.

4.35. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f, g : X \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije αf i $f + g$ integrabilne i pri tome vrijedi:

(a) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int d\mu$ *(homogenost).*

(b) $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ *(aditivnost).*

(c) $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$ *(*monotonost*).*

Sljedeći teorem, poznat pod nazivom Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, daje nam koristan kriterij pod kojim integral i limes mogu zamijeniti svoja mjesta. Kao motivacija za pristup integralu preko teorije mjere, prisjetite se koliko oprezni moramo biti kod zamjene integrala i limesa u Riemannovom integralu.

4.36. Teorem (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji)

Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije i neka je $g : X \to [0, \infty]$ integrabilna funkcija. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(i) $f = \lim_n f_n$ *(s.s.),*

(ii) Funkcije f_n dominirane *su funkcijom g, tj.*

$$|f_n| \leq g \quad \text{(s.s.) za svaki } n \in \mathbb{N},$$

onda su sve funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne i vrijedi

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu. \tag{4.22}$$

Dokaz. Što se tiče integrabilnosti funkcija f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, i jednakosti (4.22), zahvaljujući lemi 4.27. i teoremu 4.29., možemo pretpostaviti da je $f = \lim_n f_n$ i $|f_n| \leq g$, $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da je tada $|f| = |\lim_n f_n| = \lim_n |f_n| \leq g$. Iz tih nejednakosti dobivamo

$$\int |f| d\mu, \int |f_n| d\mu \leq \int g d\mu < \infty, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

To znači da su integrabilne sve funkcije f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ (lema 4.27.).

Preostaje dokazati jednakost (4.22). Radi boljeg razumijevanja prvo ćemo se prisjetiti da je uvijek $\liminf_n f_n \leq \limsup_n f_n$, te da je $\liminf_n f_n = \limsup_n f_n$ onda i samo onda ako postoji $\lim_n f_n$ i vrijedi $\lim_n f_n = \liminf_n f_n = \limsup_n f_n$. Nadalje, za svaki niz $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva vrijedi $\limsup_n \alpha_n = -\liminf_n(-\alpha_n)$.

Iz $|f_n| \leq g$ slijedi $0 \leq g + f_n, g - f_n$, odakle pomoću Fatouove leme dobivamo

$$\int g d\mu \pm \int f d\mu \leq \liminf_n \int (g \pm f_n) d\mu.$$

Ove nejednakosti možemo zapisati kao

$$\int g d\mu \pm \int f d\mu \leq \int g d\mu + \liminf_n \Big(\pm \int f_n d\mu \Big).$$

Integral $\int g d\mu$ je konačan pa smijemo kratiti. Dobivamo

$$\pm \int f d\mu \leq \liminf_n \Big(\pm \int f_n d\mu \Big),$$

odnosno

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu,$$

odakle slijedi

$$\limsup_n \int f_n d\mu = \int f d\mu = \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Time je dokazana jednakost (4.22). ■

4.37. PRIMJER. *Pokažimo da je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,10]} \frac{1}{1+nx^2}\, d\lambda = 0.$$

Niz funkcija

$$h_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

konvergira prema nul funkciji i dominiran je funkcijom $g(x) = 1$ koja nije Lebesgue integrabilna. Međutim, niz funkcija

$$f_n := h_n \cdot \chi_{[1,10]} = \frac{1}{1+nx^2} \cdot \chi_{[1,10]}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

također konvergira prema nul funkciji i dominiran je integrabilnom funkcijom $g = 1 \cdot \chi_{[1,10]}$. Po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji sve funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, su Lebesgue integrabilne i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = \int 0\, d\lambda = 0.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,10]} \frac{1}{1+nx^2}\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda,$$

tvrdnja je dokazana.

4.38. PRIMJEDBA
Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji općenito ne vrijedi za Riemannov integral. Kao kontraprimjer može se uzeti niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiran u primjedbi 4.16. Taj niz funkcija dominiran je integrabilnom (u smislu Riemanna) funkcijom $g = 1$.

4.39. TEOREM
Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$, onda vrijedi:

(a) Red $\sum_n f_n$ *konvergira (s.s.).*

(b) Ako je $f = \sum_n f_n$ *(s.s.), onda je*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. (a) Neka je $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| : X \to [0, \infty]$. Pomoću teorema 4.17. i propozicije 4.13. dobivamo $\int g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$. Zato je $g(x) \in \mathbb{R}$ (s.s.) (propozicija 4.28.(a)), odnosno red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergira apsolutno skoro svuda, pa konvergira skoro svuda.

(b) Neka je $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $|s_n| \le g$ (s.s.) i $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ (s.s.). Primjenom teorema 4.36. dobivamo $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu$, odnosno $\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$. ∎

Zadaci za vježbu

1. Neka je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ prostor s mjerom prebrojavanja, tj. $\mu(A)$ je broj elemenata skupa $A \subseteq \mathbb{N}$. Dokažite: (a) Ako je $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$, onda je $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. (b) Za funkciju $f(n) = \frac{\ln 2}{2^n} - e^{-2n}$ izračunajte $\int f d\mu$.

   Uputa: (a) Ako je $f = \chi_A$, $A \subseteq \mathbb{N}$, onda je $\int \chi_A d\mu = \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n)$. Ako je $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$ jednostavna funkcija, onda je

   $$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \int \chi_{A_k} d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

   U općem slučaju prvo ćemo definirati funkcije $g_k(n) := \begin{cases} f(n), & \text{ako je } n \le k \\ 0, & \text{ako je } n > k. \end{cases}$
   Tada je $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija, $g_k \le g_{k+1} \le f$, i pri tome je $\lim_{k\to\infty} g_k = f$. Čak više, $\int g_k d\mu = \sum_{n=1}^{k} f(n)$. Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

   $$\int f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

   (b) $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln 2}{2^n} - e^{-2n} \right) = \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \ln 2 - \frac{1}{e^2 - 1}$

2. Promotrimo prostor mjere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdje je λ Lebesgueova mjera. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju $f_n := n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$. Lako je pokazati da je $f := \lim_{n\to\infty} f_n \equiv 0$. Dokažite: (a) $\int f \, d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda$, (b) Zašto ne smijemo primijeniti Levijev teorem o monotonoj konvergenciji niti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji?

3. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih, Σ-izmjerivih i monotono opadajućih funkcija koji konvergira prema funkciji $f : X \to [0, \infty]$. Dokažite: (a) Ako je funkcija f_1 integrabilna, onda su sve funkcije f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne i pri tome je
$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$
(b) Pokažite primjerom da se općenito ne smije izostaviti integrabilnost funkcije f_1.

   Uputa: (a) Tvrdnja slijedi iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji ako se za majorantu (dominirajuću funkciju) uzme f_1. (b) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajte funkciju $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $f_n = \chi_{[n,\infty)}$, a za mjeru uzmite Lebesgueovu mjeru λ. Tada je $f = \lim_n f_n = 0$, $\int f_n d\lambda = \infty$, $\int f d\lambda = 0$.

4. Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere, gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$, a λ Lebesgueova mjera. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo funkciju $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$. Stavimo $f := \lim_n f_n = 0$. Očito je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} [n\lambda((0, 1/n))] = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1,$$
dok je $\int f d\lambda = \int 0 d\lambda = 0$. Uočite da ovaj rezultat nije u kontradikciji s Lebesgueovim teoremom o dominiranoj konvergenciji jer niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije omeđen (dominiran) integrabilnom funkcijom.

5. Neka je $f : X \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija s obzirom na prostor mjere (X, Σ, μ). Nadalje, neka je $A_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$, $t > 0$. Dokažite:
(a) $\lim_{t\to\infty} \mu(A_t) = 0$. (b) $\lim_{t\to\infty}(t\mu(A_t)) = 0$.

   Uputa: (a) Iskoristite Čebiševljevu nejednakost (4.12). (b) Iz (4.12) dobivamo $t\mu(A_t) \leq \int_{A_t} f d\mu = m(A_t)$. Prema korolaru 4.19. m je mjera, a po pretpostavci je $m(\mathbb{R}) < \infty$. Pokažimo da je $\lim_{t\to\infty} m(A_t) = 0$, odakle će slijediti tvrdnja. Ako je $u > t$, onda je $m(A_u) \leq m(A_t)$, i zato je dovoljno pokazati da niz $\big(m(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema 0. Zaista, kako je $E_n \supseteq E_{n+1}$ i $m(E_1) \leq m(\mathbb{R}) < \infty$, prema propoziciji 2.19.(iv) i propoziciji 4.28. je
$$\lim_{n\to\infty} m(E_n) = m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = m(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0.$$

6. Neka je (Ω, Σ, μ) vjerojatnosni prostor, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $f \geq 0$ i $\int f d\mu = 1$. Pokažite da je funkcija $P : \Sigma \to \mathbb{R}$,
$$P(A) = \int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu, \qquad A \in \Sigma,$$
vjerojatnosna mjera.

   Uputa: Iskoristite korolar 4.19. Očito je $P(\Omega) = 1$.

7. Neka je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$. Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int f\chi_{(-\infty,x]}d\mu$, neprekidna na $\mathbb{R}$.

   Uputa: Pretpostavimo da F nije neprekidna u točki x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoji x_δ takva da je $|x_\delta - x_0| < \delta$ i $\varepsilon \le |F(x_\delta) - F(x_0)|$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_\delta < x_0$. Tada je

   $$F(x_0) = \int f\chi_{(-\infty,x_0]}d\mu = \int f\left[\chi_{(-\infty,x_\delta]} + \chi_{(x_\delta,x_0]}\right]d\mu = F(x_\delta) + \int f\chi_{(x_\delta,x_0]}d\mu$$

   i zato je

   $$\varepsilon \le |F(x_\delta) - F(x_0)| = \left|\int f\chi_{(x_\delta,x_0]}d\mu\right| \le \int \left|f\chi_{(x_\delta,x_0]}\right|d\mu \le \int |f|\chi_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}d\mu.$$

   Specijalno, stavljajući za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ dobivamo

   $$(\star) \qquad \varepsilon \le \int |f|\chi_{[x_0-1/n,x_0+1/n]}d\mu, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Neka je $f_n := |f|\chi_{[x_0-1/n,x_0+1/n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Niz funkcija $(|f| - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući i (s.s.) konvergira prema $|f|$. Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

   $$\int |f|d\mu = \lim_{n\to\infty}\int (|f| - f_n)d\mu = \int |f|d\mu - \lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu.$$

   Dakle, $\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = 0$. Prijelazom na limes kada $n \to \infty$ iz $(\star)$ dobiva se $\varepsilon \le 0$, što je kontradikcija.

8. Dokažite da uz pretpostavke teorema 4.36. vrijedi $\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|d\mu = 0$.
   Uputa: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajte funkciju $h_n(x) = \sup\{|f_k(x) - f(x)| : k \ge n\}$. Kako $f_n \to f$, to $h_n \to 0$. Uočite da je $h_{n+1} < h_n$ za svaki n. Kako je $|f_k - f| \le 2g$, $k \ge n$, to je $h_n \le 2g$. Stavite $g_n = 2g - h_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $0 \le g_1 \le g_2 \le \ldots \le 2g$ i $g_n \to 2g$. Zato $\int g_n d\mu \to \int 2g d\mu$. Teorem o monotonoj konvergenciji povlači $\int h_n d\mu = \int 2g d\mu - \int g_n d\mu \to 0$. Sada iz nejednakosti $\int |f_n - f|d\mu \le \int h_n d\mu$ slijedi $\int |f_n - f|d\mu \to 0$. Štoviše, iz ovog posljednjeg limesa slijedi i dokaz teorema 4.36. Zaista, $\int |f_n - f|d\mu \to 0 \Rightarrow \int (f_n - f)d\mu \to 0$, pa iz $\int f_n d\mu = \int (f_n - f)d\mu + \int f d\mu$ dobivamo $\int f_n d\mu \to \int f d\mu$.

4.4. Integracija na izmjerivom skupu

Postoje dva prirodna načina kako definirati integrabilnost i integral funkcije f na skupu A. Prvi način opisan je definicijom 4.24.(II), koju ponavljamo:

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Ako je definiran integral $\int f\chi_A d\mu$, onda broj

$$\int_A f d\mu := \int f\chi_A d\mu$$

zovemo integral funkcije f na skupu A s obzirom na mjeru μ. Funkcija f je integrabilna na skupu $A \in \Sigma$ ako je $\int_A f d\mu$ konačan broj.

Dakle, funkcija f je integrabilna na skupu $A \in \Sigma$ onda i samo onda ako je integrabilna funkcija $f\chi_A : X \to [-\infty, \infty]$.

Prije nego što navedemo drugu ekvivalentnu definiciju uvest ćemo neke pojmove.

4.40. Propozicija

Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor i $A \subseteq X$ bilo koji neprazan podskup od X. Tada je

$$\Sigma_A := \{S \cap A : S \in \Sigma\}$$

σ-algebra na skupu A.

Dokaz. Treba pokazati da familija Σ_A ima svojstva $(\sigma1)$ - $(\sigma3)$ iz definicije 2.1.
$(\sigma1)$. Kako je $A = X \cap A$, to je $A \in \Sigma_A$.
$(\sigma2)$. Neka je $B \in \Sigma_A$. Tada postoji $S \in \Sigma$ takav da je $B = S \cap A$. Treba pokazati da je $A \backslash B \in \Sigma_A$. Zaista, kako je $X \backslash S \in \Sigma$ i $A \backslash B = (X \backslash S) \cap A$, to je $A \backslash B \in \Sigma_A$.
$(\sigma3)$. Neka je $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz skupova iz Σ_A. Tada postoji niz skupova (S_n) takav da je $B_n = S_n \cap A$, $n \in \mathbb{N}$. Zato je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \cap A) = \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Big) \cap A.$$

■

4.41. Definicija

Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor i $A \subseteq X$ neprazan podskup od X. σ-algebru Σ_A iz propozicije 4.40. zovemo restrikcija σ-algebre Σ na skup A.

Lako se dokaže sljedeća lema:

4.42. Lema

Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor i $A \in \Sigma$ neprazan skup. Tada je

$$\Sigma_A = \{S \in \Sigma : S \subseteq A\}.$$

Sljedeća je tvrdnja očigledna.

4.43. Propozicija

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $A \in \Sigma$ neprazan skup. Funkcija $\mu_{|A} : \Sigma_A \to [0, \infty]$ definirana formulom

$$\mu_{|A}(B) = \mu(B), \qquad B \in \Sigma_A$$

je mjera na (A, Σ_A). Zovemo je restrikcija mjere μ na Σ_A.

Sada ćemo pokazati da se integrabilnost i integral Σ-izmjerive funkcije na skupu $A \in \Sigma$ mogu definirati i na drugi način. Problematiku ćemo smjestiti u prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$. Kao i do sada, s $f_{|A}$ označavat ćemo restrikciju funkcije f na skup A. Dakle, $f_{|A} : A \to [-\infty, \infty]$ definirana je na sljedeći način:

$$f_{|A}(x) = f(x), \qquad x \in A.$$

Lako je pokazati da je funkcija $f_{|A}$ Σ_A-izmjeriva: Neka je $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$. Funkcija f je Σ-izmjeriva pa je $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Zato je $f_{|A}^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B) \in \Sigma_A$.

4.44. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Tada vrijedi:

(a) Integral $\int_A f d\mu$ funkcije f na skupu A definiran je onda i samo onda ako je definiran integral $\int f_{|A} d\mu_{|A}$ funkcije $f_{|A}$ za prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$.

(b) Ako je definiran integral $\int_A f d\mu$, onda je

$$\int_A f d\mu := \int f_{|A} d\mu_{|A}.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u tri koraka:
(i) Neka je $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ nenegativna jednostavna funkcija na skupu X, gdje su $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi. Tada je $f\chi_A = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap A}$. Uočimo da je $f_{|A} : A \to [0, \infty]$ zadana istom formulom kao $f\chi_A$, tj. $f_{|A} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i \cap A}$. Kako je $A_i \cap A \in \Sigma_A$, $i = 1, \ldots, n$, $f_{|A}$ je nenegativna jednostavna funkcija na skupu A. Osim toga, prema propoziciji 4.43. je $\mu_{|A}(A_i \cap A) = \mu(A_i \cap A)$. Sada tvrdnje teorema slijede iz jednakosti

$$\int f\chi_A d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_{|A}(A_i \cap A) = \int f_{|A} d\mu_{|A}.$$

(ii) Neka je $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna Σ-izmjeriva funkcija. Tada postoji rastući niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativnih jednostavnih funkcija $f_n : X \to [0, \infty]$ takav da je $f = \lim_n f_n$ (vidi teorem 3.23.). Lako je pokazati da je $(f_n\chi_A)_{n \in \mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija (definiranih na X) koji konvergira prema $f\lambda_A : X \to [0, \infty]$. Prema teoremu 4.14. zato je

$$\int f\chi_A d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \chi_A d\mu. \tag{4.23}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ restrikcija $f_{n|A} : A \to [0, \infty]$ zadana je istom formulom kao i $f_n \chi_A : X \to [0, \infty]$. Zahvaljujući tome, lako je zaključiti da je $f_{n|A}$ jednostavna nenegativna funkcija na skupu A. Nadalje, kako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz funkcija koji konvergira prema funkciji f, niz nenegativnih jednostavnih funkcija $(f_{n|A})_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući i konvergira prema $f_{|A} : A \to [0, \infty]$. Primjenom teorema 4.14. na prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{n|A} d\mu_{|A} = \int f_{|A} d\mu_{|A}.$$

Kako je $\int f_{n|A} d\mu_{|A} = \int f_n \chi_A d\mu$ (vidi (i)), posljednju jednakost možemo zapisati kao

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \chi_A d\mu = \int f_{|A} d\mu_{|A}. \tag{4.24}$$

Tvrdnje teorema slijede iz (4.23) i (4.24).

(iii) Neka je $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Lako je provjeriti sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} (f\chi_A)^+ &= f^+\chi_A, \quad f^+_{|A} = (f_{|A})^+ \\ (f\chi_A)^- &= f^-\chi_A, = f^-_{|A} = (f_{|A})^-. \end{aligned}$$

Sada pomoću (ii) dobivamo

$$\begin{aligned} \int (f\chi_A)^+ d\mu &= \int f^+\chi_A d\mu = \int f^+_{|A} d\mu_{|A} = \int (f_{|A})^+ d\mu_{|A} \\ \int (f\chi_A)^- d\mu &= \int f^-\chi_A d\mu = \int f^-_{|A} d\mu_{|A} = \int (f_{|A})^- d\mu_{|A}, \end{aligned}$$

odakle lako slijede tvrdnje teorema. ■

Zahvaljujući teoremu 4.44. imamo sljedeću ekvivalentnu definiciju integrabilnosti i integrala Σ-izmjerive funkcije na skupu $A \in \Sigma$.

4.45. Definicija

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Ako je definiran integral $\int f_{|A} d\mu_{|A}$ funkcije $f_{|A}$ za prostor mjere $(A, \Sigma_A, \mu_{|A})$ onda broj

$$\int_A f d\mu := \int f_{|A} d\mu_{|A}$$

zovemo integral funkcije f na skupu A s obzirom na mjeru μ.
Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu $A \in \Sigma$ *ako je $\int_A f d\mu$ konačan broj.*

Sljedeći teorem govori nam da je integrabilna funkcija (integrabilna na X) ujedno integrabilna i na svakom izmjerivom skupu.

4.46. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija i $A \in \Sigma$. Tada vrijedi:

(a) Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je definiran integral $\int_A f d\mu$ za svaki $A \in \Sigma$.

(b) Ako je f integrabilna (na X), onda je f integrabilna na svakom skupu $A \in \Sigma$.

Dokaz. Na cijelom skupu X je $(f\chi_A)^+ = f^+\chi_A \leq f^+$ i $(f\chi_A)^- = f^-\chi_A \leq f^-$. Iz tih nejednakosti zaključujemo:

(a) Ako postoji integral $\int f d\mu$, onda je $\int (f\chi_A)^+ d\mu \leq \int f^+ d\mu < \infty$ ili $\int (f\chi_A)^- d\mu \leq \int f^- d\mu < \infty$. To znači da je definiran integral $\int f\chi_A d\mu$, odnosno integral $\int_A f d\mu$. Time smo dokazali tvrdnju (a).

(b) Ako je f integrabilna na X, onda je $\int (f\chi_A)^+ d\mu \leq \int f^+ d\mu < \infty$ i $\int (f\chi_A)^- d\mu \leq \int f^- d\mu < \infty$. To znači da je konačan integral $\int f\chi_A d\mu$, odnosno integral $\int_A f d\mu$. ∎

Sljedeći teorem nećemo dokazivati.

4.47. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda vrijedi:

(a) $\int_A f d\mu = 0$ za svaki skup $A \in \Sigma$ za koji je $\mu(A) = 0$.

(b) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih skupova iz Σ. Stavimo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada je

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

(c) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz Σ. Stavimo $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tada je

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

(d) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz Σ. Stavimo $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako je $\left|\int_{A_1} f d\mu\right| < \infty$, onda je

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Na kraju ove točke treba spomenuti da zahvaljujući teoremu 4.44. svi rezultati koji vrijede za integral $\int f d\mu$ funkcije $f : X \to [-\infty, \infty]$ vrijede također i za integral $\int_A f d\mu$ funkcije f na izmjerivom skupu $A \in \Sigma$. To se može vidjeti i tako da se uz male modifikacije ponove odgovarajući dokazi. Za ilustraciju navodimo kako glasi modifikacija Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji.

4.48. TEOREM
Neka su $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ-izmjerive funkcije i neka je $g : X \to [0, \infty]$ integrabilna funkcija na skupu $A \in \Sigma$. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

(i) $f = \lim_n f_n$ *(s.s.) na skupu* A,

(ii) $|f_n| \le g$ *(s.s.) na skupu* A *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

onda su sve funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne na skupu A i vrijedi

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

4.49. PRIMJER. *Koristeći teorem o dominiranoj konvergenciji izračunat ćemo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,10]} e^{-nx^4} d\lambda.$$

Neka je $f_n(x) := e^{-nx^4}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \; x \in (0, 10] \\ 1, \; x = 0 \end{cases} = 1\chi_{\{0\}} + 0\chi_{(0,10]}.$$

Nadalje, uočimo da je $f_n(x) := e^{-nx^4} \le 1$ za sve $x \in A = [0, 10]$ i $n \in \mathbb{N}$ te da je $1 \in \mathcal{L}([0, 10])$, tj. $\int_{[0,10]} 1 d\lambda = 10$. Dakle, ispunjeni su svi uvjeti za primjenu teorema o dominiranoj konvergenciji. Dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,10]} e^{-nx^4} d\lambda = \int_{[0,10]} \big(\lim_{n\to\infty} e^{-nx^4}\big) d\lambda = \int_{[0,10]} (1\chi_{\{0\}} + 0\chi_{(0,10]}) d\lambda = 0.$$

4.50. PRIMJER. *Koristeći teorem o monotonoj konvergenciji izračunat ćemo*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,2]} \sqrt[n]{2 - x} d\lambda.$$

U ovom slučaju je $A = [1, 2]$, $f_n(x) = \sqrt[n]{2 - x}$. Prvo treba pokazati da niz (f_n) monotono raste na $[1, 2]$: Za svaki $x \in [1, 2]$ je $2 - x \le 1$, pa je zato $\sqrt[n]{2 - x} \le \sqrt[n+1]{2 - x}$.

Nadalje, imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, \; x \in [1, 2) \\ 0, \; x = 2 \end{cases} = 1\chi_{[1,2)} + 0\chi_{\{2\}}.$$

Prema teoremu o monotonoj konvergenciji imamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,2]}\sqrt[n]{2-x}d\lambda=\int_{[1,2]}\big(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2-x}\big)d\lambda=\int_{[1,2]}(1\chi_{[1,2)}+0\chi_{\{2\}})d\lambda=1.$$

Zadaci za vježbu

---

1. Izračunajte: (a) $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\pi]}\sqrt[n]{\cos x}d\lambda$. (b) $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}e^{-\frac{n^4}{6}x}d\lambda$.

   Uputa: Upotrijebite teorem o dominiranoj konvergenciji. (a) $f_n(x):=\sqrt[n]{\cos x}$, $|f_n(x)|\le 1$ za sve $n\in\mathbb{N}$ i $x\in[0,\pi]$, $\lim_n f_n=\chi_{[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]}$. (b) $f_n(x):=e^{-\frac{n^4}{6}x}\to\chi_{\{0\}}$, $|f_n(x)|\le 1$ za sve $n\in\mathbb{N}$ i $x\in[0,1]$.

2. Neka je $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ [1/x], & \text{inače,}\end{cases}$$

   gdje $[t]$ označava cjelobrojni dio od t. Dokažite: (a) f je izmjeriva. (b) $\int f d\lambda=\infty$.

   Uputa: Neka je $g=\sum_{n=1}^{\infty}n\chi_{(1/(n+1),1/n]}$. Uočite da je $f(x)\ne g(x)\Leftrightarrow x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$, Dakle, $f=g$ (s.s.) na $[0,1]$ jer je skup $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ -zanemariv. (a) g je izmjeriva funkcija, a Lebesgueova mjera λ je potpuna. Zato tvrdnja slijedi iz teorema 3.28. (b) Prema propoziciji 4.13. je $\int_{[0,1]}fd\lambda=\int_{[0,1]}gd\lambda$. Pomoću teorema 4.17. dobivamo

$$\int_{[0,1]}fd\lambda=\int_{[0,1]}gd\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\int n\chi_{(1/(n+1),1/n]}d\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty.$$

4.5. Veza između Riemannovog i Lebesgueovog integrala

Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji osnovni je teorem integralnog računa. Sada ćemo pomoću tog teorema pokazati da je Lebesgueov integral proširenje Riemannovog integrala, tj. da je svaka R-integrabilna funkcija (integrabilna u smislu Riemanna) ujedno integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral podudara s Riemannovim integralom.

Riemannov integral definira se samo za omeđene funkcije definirane na segmentu. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada postoje $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \le f(x) \le M, \qquad \text{za svaki } x \in [a, b].$$

Prisjetimo se osnovnih pojmova o Riemannovom integralu. Rastav ili dekompozicija D segmenta $[a, b]$ je svaki konačan skup točaka $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ koji sadrži par $\{a, b\}$. Nadalje ćemo bez smanjenja općenitosti smatrati da je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Dijametar rastava D definira se kao broj $|D| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$. Sa $\mathcal{D}([a, b])$ ili kraće $\mathcal{D}$ označavat ćemo skup svih rastava segmenta $[a, b]$. Ako je $D_1 \subseteq D_2$, onda kažemo da rastav D_2 profinjuje rastav D_1. Uočimo da $D_1 \cup D_2$ profinjuje D_1 i D_2.

Svakom rastavu $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ pripadaju tzv. donja Darbouxova suma $s(f; D)$ i gornja Darbouxova suma $S(f; D)$:

$$s(f; D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n$$

$$S(f; D) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \dots, n$$

i beskonačno mnogo tzv. integralnih suma:

$$\sigma(f; D, \tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(x_i - x_{i-1}),$$

gdje su $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$ neke točke. Očito je

$$m(b - a) \le s(f; D) \le \sigma(f; D, \tau_1, \dots, \tau_n) \le S(f; D) \le M(b - a). \tag{4.25}$$

Ako je $D_1 \subseteq D_2$, onda je (vidi [4, 8])

$$s(f; D_1) \le s(f; D_2) \qquad \& \qquad S(f; D_2) \le S(f; D_1).$$

Za bilo koja dva rastava D_1 i D_2 očito je $D_1, D_2 \subseteq D_1 \cup D_2$. Pomoću (4.25) i gornjih nejednakosti dobivamo

$$s(f; D_1) \le s(f; D_1 \cup D_2) \le S(f; D_1 \cup D_2) \le S(f; D_2). \tag{4.26}$$

To znači da je skup $\{s(f; D) : D \in \mathcal{D}\}$ omeđen odozgo sa svakom gornjom Darbouxovom sumom, a skup $\{S(f; D) : D \in \mathcal{D}\}$ omeđen je odozdo sa svakom donjom

Darbouxovom sumom. Zato postoje tzv. donji Riemannov integral $I_\star$ i gornji Riemannov integral $I^\star$ funkcije f:

$$I_\star := \sup\{s(f;D) : D \in \mathcal{D}\}, \qquad I^\star := \inf\{S(f;D) : D \in \mathcal{D}\}$$

i pri tome je uvijek $I_\star \leq I^\star$. Funkcija f je R-integrabilna ili integrabilna u smislu Riemanna ako je $I_\star = I^\star$. Ako je funkcija f R-integrabilna, onda se broj $I := I^\star = I_\star$ zove Riemannov integral funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označava se još sa $\int_a^b f(x)dx$.

U daljnjim razmatranjima trebat će nam sljedeći teorem i korolar čiji se dokazi mogu naći u [8, str. 86].

4.51. Teorem (Darboux)
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki rastav D segmenta $[a,b]$ vrijedi

$$|D| < \delta \Longrightarrow I_\star - s(f;D) < \varepsilon \qquad \& \qquad S(f;D) - I^\star < \varepsilon.$$

4.52. Korolar
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija, a $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz rastava

$$D_n = \{x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,r_n}\}$$

segmenta $[a,b]$ takav da je $\lim_{n\to\infty} |D_n| = 0$. Tada vrijedi:

(a) $\lim_{n\to\infty} s(f;D_n) = I_\star$.

(b) $\lim_{n\to\infty} S(f;D_n) = I^\star$.

(c) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda je $\lim_{n\to\infty} \sigma(f;D_n,\tau_{n,1},\ldots,\tau_{n,r_n}) = I$ *za svaki izbor točaka $\tau_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$*

Sada ćemo dokazati tzv. Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost:

4.53. Teorem
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.

(a) Funkcija f je R-integrabilna onda i samo onda ako je ona neprekidna skoro svuda na $[a,b]$.

(b) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda je ona integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral $\int_{[a,b]} f d\lambda$ podudara s Riemannovim integralom $\int_a^b f(x)dx$.

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo rastav D_n segmenta $[a,b]$ s diobenim točkama

$$x_{n,i} = a + \frac{b-a}{2^n} i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Tada za niz rastava (D_n) vrijedi:

$$D_n \subseteq D_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \& \qquad \lim_{n\to\infty} |D_n| = 0.$$

Definirajmo nizove $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnih funkcija na $[a,b]$ na sljedeći način:

$$h_n := \sum_{i=1}^{2^n} m_{n,i}\chi_{[x_{n,i-1},x_{n,i})} + f(b)\chi_{\{b\}}, \qquad m_{n,i} = \inf\{f(x) : x \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]\}$$

$$g_n := \sum_{i=1}^{2^n} M_{n,i}\chi_{[x_{n,i-1},x_{n,i})} + f(b)\chi_{\{b\}}, \qquad M_{n,i} = \sup\{f(x) : x \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]\}.$$

Odmah se vidi da niz funkcija (h_n) raste, a niz (g_n) pada i da je

$$h_n \le f \le g_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Nadalje, imamo

$$\int_{[a,b]} h_n d\lambda = \sum_{i=1}^{2^n} m_{n,i}(x_{n,i} - x_{n,i-1}) = s(f; D_n)$$

$$\int_{[a,b]} g_n d\lambda = \sum_{i=1}^{2^n} M_{n,i}(x_{n,i} - x_{n,i-1}) = S(f; D_n).$$

Zbog (4.27) postoje funkcije $h := \lim_n f_n$ i $g := \lim_n h_n$ i vrijedi

$$h \le f \le g. \tag{4.28}$$

Prema tvrdnji (c) propozicije 3.17. funkcije h i g su λ-izmjerive.

Kako je f omeđena funkcija, postoji konstanta K takva da je

$$|h_n|, |g_n| \le K, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Konstanta K je Lebesgue-integrabilna funkcija na $[a,b]$, $\int_{[a,b]} K d\lambda = K(b-a)$, pa iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji (teorem 4.36.) slijedi da su h i g integrabilne u smislu Lebesguea i da vrijedi

$$\int_{[a,b]} h d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} s(f; D_n)$$

$$\int_{[a,b]} g d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} S(f; D_n).$$

Kako je (korolar 4.52.)

$$\lim_{n\to\infty} s(f; D_n) = I_\star, \qquad \lim_{n\to\infty} S(f; D_n) = I^\star,$$

imamo

$$\int_{[a,b]} hd\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} s(f;D_n) = I_\star \tag{4.29}$$

$$\int_{[a,b]} gd\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} S(f;D_n) = I^\star. \tag{4.30}$$

Stoga je

$$\int_{[a,b]} (g-h)d\lambda = I^\star - I_\star, \tag{4.31}$$

odakle slijedi da je f R-integrabilna onda i samo onda ako je $\int_{[a,b]}(g-h)d\lambda = 0$. Prema teoremu 4.30. je $\int_{[a,b]}(g-h)d\lambda = 0$ onda i samo onda ako je $g-h=0$ (s.s.) na $[a,b]$, tj. ako je

$$h = g \ (s.s.) \text{ na } [a,b]. \tag{4.32}$$

(b) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda vrijedi (4.32). Zbog (4.28) je $h = f$ (s.s.) na $[a,b]$. Kako je h integrabilna u smislu Lebesguea, prema teoremu 4.29. i funkcija f je integrabilna u smislu Lebesguea i pri tome je $\int_{[a,b]} fd\lambda = \int_{[a,b]} hd\lambda$. Zbog (4.29) je $\int_{[a,b]} fd\lambda = I_\star = \int_a^b f(x)dx$.

(a) Prvo ćemo pokazati da je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in [a,b]\backslash\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ onda i samo onda ako je $h(x_0) = g(x_0)$.

Pretpostavimo da je $x_0 \in [a,b]\backslash\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ i $h(x_0) = g(x_0)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $h(x_0) = \lim_{n\to\infty} h_n(x_0)$ i $g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_0)$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon$. Neka je $x_0 \in (x_{n,i-1}, x_{n,i})$. Tada je je $h_n(x_0) = m_{n,i}$, $g_n(x_0) = M_{n,i}$, a za svaki $x \in (x_{n,i-1}, x_{n,i})$ je $m_{n,i} \le f(x) \le M_{n,i}$. Zato za svaki $x \in (x_{n,i-1}, x_{n,i})$ dobivamo

$$|f(x) - f(x_0)| \le M_{n,i} - m_{n,i} = g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon,$$

što znači da je f neprekidna u točki x_0.

Obratno, pretpostavimo da je f neprekidna u točki $x_0 \in [a,b]\backslash\bigcup_{n=1}^\infty D_n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zbog $\lim_{n\to\infty} |D_n| = 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|D_n| < \delta$ za svaki $n \ge n_0$. Neka je $n \ge n_0$. Tada postoji jedinstveni indeks i takav da je $x_0 \in (x_{n,i-1}, x_{n,i})$. Nadalje, za svaki $x \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}])$ vrijedi $|x - x_0| \le x_{n,i} - x_{n,i-1} \le |D_n| < \delta$, pa je zato $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dakle,

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za svaki } x \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}],$$

odakle slijedi

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le m_{n,i} = h_n(x_0) \le g_n(x_0) = M_{n,i} \le f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zato je $g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon$. Time smo pokazali da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $g_n(x_0) - h_n(x_0) < \varepsilon$. To znači da je $\lim_{n\to\infty} \big(g_n(x_0) - h_n(x_0)\big) = 0$, odakle zbog $\lim_n g_n = g$ i $\lim_n h_n = h$ slijedi jednakost $g(x_0) = h(x_0)$.

Sada možemo dokazati tvrdnju (a). Ako je f R-integrabilna, onda vrijedi (4.32), tj. $h = g$ (s.s.) na $[a,b]$. To znači da postoji zanemariv skup $N_0 \subset [a,b]$ takav da je $h(x) = g(x)$ za svaki $x \in [a,b]\backslash N_0$. Neka je $N = N_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right)$. Skup N kao prebrojiva unija zanemarivih skupova također je zanemariv. Za svaki $x \in [a,b]\backslash N$ je $h(x) = g(x)$, pa je f neprekidna u točki x. Time je pokazano da je f neprekidna skoro svuda na $[a,b]$.

Obratno, ako je f skoro svuda neprekidna na $[a,b]$, onda postoji zanemariv skup $N_0 \subset [a,b]$ takav da je f neprekidna na skupu $[a,b]\backslash N_0$. Neka je $N = N_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right)$. Pokažimo da je $h(x) = g(x)$ za svaki $x \in [a,b]\backslash N$, što će povlačiti da je $h = g$ (s.s.) na $[a,b]$, pa će f biti R-integrabilna funkcija. Zaista, ako je $x \in [a,b]\backslash N$, onda je f neprekidna u točki x i zato je $h(x) = g(x)$. ■

4.54. PRIMJER. *Funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ako je } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ako } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

neprekidna je u svakoj iracionalnoj točki i ima prekid u svakoj racionalnoj točki. Kako je njezin skup točaka diskontinuiteta skup Lebesgueove mjere nula, ona je R-integrabilna.

Teorem 4.53. koristan je alat za računanje Lebesgueova integrala. Ilustracije radi, pretpostavimo da treba izračunati Lebesgueov integral $\int f d\lambda$ funkcije $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$. Ako je f R-integrabilna na nizu segmenata $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, gdje $a_n \to -\infty$ i $b_n \to \infty$, definirajmo funkcije $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]} : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $f_n \to f$ pa pomoću Levijeva teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo

$$\int f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f\chi_{[a_n,b_n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Pri tome za računanje Riemannova integrala $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx$ možemo koristiti poznate tehnike (parcijalna integracija, integracija supstitucijom, itd.).

4.55. PRIMJER. *Neka je $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ definirana formulom:*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q} \\ \sin x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Lako je pokazati da je f neprekidna jedino u točki $x = \pi/4$, pa stoga prema tvrdnji (a) teorema 4.53. ona nije R-integrabilna.

Sada ćemo pokazati da je f integrabilna u smislu Lebesguea te da je

$$\int_{[0,\pi/2]} f d\lambda = 1.$$

Kao prvo, funkcija $x \to \sin x$, $x \in [0,\pi/2]$, je neprekidna na $[0,\pi/2]$ pa je i R-integrabilna. Prema tvrdnji (b) teorema 4.53. ona je integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome je

$$\int_{[0,\pi/2]} \sin x \, d\lambda = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1.$$

Nadalje, kako je skup $\mathbb{Q} \cap [0,\pi/2]$ λ-zanemariv, to je $f = \sin$ (s.s.). Zbog toga je (vidi teorem 4.29.) funkcija f integrabilna u smislu Lebesguea i

$$\int_{[0,\pi/2]} f \, d\lambda = \int_{[0,\pi/2]} \sin x \, d\lambda = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

4.56. PRIMJER. *Izračunajmo: (a) $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda$, (b) $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda$.*
(a) Neka je $X = [1,\infty)$, $f : X \to [0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $f_n = f \cdot \chi_{[1,n]}$. Niz nenegativnih izmjerivih funkcija (f_n) je monotono rastući i na cijelom skupu $[0,\infty)$ konvergira prema izmjerivoj funkciji f. Pomoću Levijeva teoremu o monotonoj konvergenciji i definicije integrala na skupu dobivamo

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{x} \chi_{[1,n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{1}{x} d\lambda.$$

Nadalje, kako je funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ neprekidna na segmentu $[1,n]$, prema teoremu 4.53. ona je R-integrabilna na tom segmentu i vrijedi

$$\int_{[1,n]} \frac{1}{x} d\lambda = \int_1^n \frac{1}{x} \, dx = \ln n.$$

Zato je

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda = \infty.$$

Uočimo da funkcija f nije integrabilna (u smislu Lebesguea) na $[1,\infty)$.

(b) $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x^2} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{x^2} \chi_{[1,n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$
Dakle, funkcija $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ je integrabilna na $[1,\infty)$.

Zadaci za vježbu

1. Pokažite da je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \end{cases}$$
R-integrabilna funkcija i izračunajte $\int_0^1 f(x)dx$.

   Uputa: Lako je pokazati da f ima prekid u svakoj racionalnoj točki. Pokažimo da je f neprekidna u svakoj iracionalnoj točki: Neka je $\varepsilon > 0$. Za iracionalan x_0 postoji konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ takvih da je $1/q \geq \varepsilon$. Odaberite dovoljno malen $\delta > 0$ takav da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ne sadrži niti jedan takav racionalan broj. Time ćete pokazati da je f neprekidna u x_0. Skup $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ je zanemariv, pa je f integrabilna u smislu Riemanna. Kako je $f = 0$ (s.s.), to je $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

2. Izračunajte: (a) $\int_{(0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda$. (b) $\int_{(0,1]} \frac{1}{x} d\lambda$.

   Uputa: $f_n := f\chi_{(1/n,1]} \to f$ na $(0,1]$, gdje je f podintegralna funkcija.

3. Dokažite da su funkcije (a) $f(x) = e^{-x^\alpha}$, $\alpha > 0$, (b) $g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, integrabilne na $A = [0,\infty)$ u smislu Lebesguea.

   Uputa: Prema Lebesgueovu teoremu o dominiranoj konvergenciji dovoljno je konstruirati dominirajuću integrabilnu funkciju na A. (a) Ako je $0 \leq x < 1$, onda je $e^{-x^\alpha} \leq 1$. Kako je $\lim_{x\to\infty}\left(x^2 e^{-x^\alpha}\right) = 0$, postoji $M > 0$ takav da je $e^{-x^\alpha} \leq M\frac{1}{x^2}$ za svaki $x \in [1,\infty)$. Zato je $f(x) \leq 1\chi_{[0,1)} + \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)}$. Kako je $\int 1\chi_{[0,1)} d\lambda = 1 < \infty$ i $\int \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)} d\lambda < \infty$ (primjer 4.56.(b)), konstruirana dominirajuća funkcija je integrabilna na A. (b) Postupite kao pod (a) i pokažite da postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|g| \leq 1\chi_{[0,1)} + \frac{M}{x^2}\chi_{[1,\infty)}$.

4. Izračunajte limese sljedećih Riemannovih integrala:
(a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$. (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dx$.
(c) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)} dx$.

   Uputa: (a) Neka je $f_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$. Tada je $\lim_{n\to\infty} f_n = e^x$, $f_n\chi_{[0,n]}e^{-2x}$ konvergira prema e^{-x} i $f_n\chi_{[0,n]}e^{-2x} \leq e^{-x}$. Pomoću teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_{[0,n]}e^{-2x} d\lambda = \int_{[0,\infty)} e^{-x} d\lambda.$$
S druge strane, pomoću teorema o monotonoj kovergenciji dobivamo
$$\int_{[0,\infty)} e^{-x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x} dx = 1.$$

(b) $f_n = (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} \le 1$, $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Primjenom teorema o dominiranoj konvergenciji dobiva se $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx = 0$.

(c) Neka je $X = (0,\infty)$. Definirajmo funkcije $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, formulom $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)}$. Kako je $|\sin(x^{-1}e^x)| \le 1$ za svaki $x \in X$, to je

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ako je } x = 1 \\ 0, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

Neka je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}, & \text{ako je } 0 < x \le 1 \\ x^{-2}, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

Funkcija g je integrabilna na X, $\int_0^\infty g(x)dx = 7/3 < \infty$.

Neka je $n \ge 2$. Ako je $x > 1$, onda iz nejednakosti

$$1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x) \ge x^n > x^2$$

slijedi $f_n(x) \le g(x)$ za svaki $x \in X$ i za svaki $n \ge 2$. Ako je $0 < x \le 1$, onda je

$$1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x) > 1 - \frac{|\sin(x^{-1}e^x)|}{4n} \ge 1 - \frac{1}{4n} \ge 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dakle, na skupu X je $|f_n| = f_n \le g$ za svaki $n \ge 2$. Sada pomoću Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji dobivamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n+\frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)}dx = \int_0^\infty f\,dx = 1.$$

5. Izračunajte $\int_0^\infty e^{-[x]}dx$, gdje je $[x]$ najveće cijelo od x.

   Uputa: Pomoću teorema o monotonoj konvergenciji lako se pokaže da je $\int_0^\infty e^{-[x]}dx = \int_{[0,\infty)} e^{-[x]}d\lambda$. Neka je $f(x) = e^{-[x]}$. Definirajmo funkcije $f_n := e^{-n}\chi_{[n-1,n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$. Sada pomoću korolara 4.39. dobivamo

$$\int_{[0,\infty)} e^{-[x]}d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int e^{-n}\chi_{[n-1,n)} = \sum_{n=1}^\infty e^{-n} = \frac{e}{e-1}.$$

   Dakle, $\int_0^\infty e^{-[x]}dx = \frac{e}{e-1}$.

6. Dokažite jednakost:

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Uputa: Razvijanjem u red dobivamo $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, pa je zato

$$\Big(\frac{\ln x}{1-x}\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \ln^2 x.$$

Funkcije $f_n := (n+1)x^n \ln^2 x$, $n \in \mathbb{N}$ su R-integrabilne. Primjenom korolara 4.39. dobivamo

$$\int_0^1 \Big(\frac{\ln x}{1-x}\Big)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^1 x^n \ln^2 x dx.$$

Pokažite parcijalnom integracijom da je $\int_0^1 x^n \ln^2 x dx = \frac{2}{(n+1)^3}$. Na kraju, iskoristite dobro poznatu jednakost $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4.6. Konveksne funkcije i nejednakosti

Neka je $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ interval. Prisjetimo se da je realna funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna ako je

$$\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y), \qquad \forall \lambda \in [0, 1].$$

To znači da se nad svakim segmentom $[x, y]$ graf konveksne funkcije φ nalazi iznad sekante koja prolazi točkama $(x, \varphi(x))$ i $(y, \varphi(y))$.

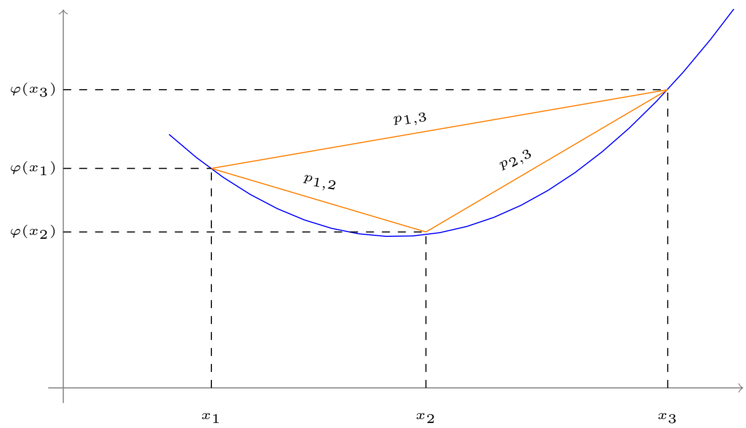
Iz definicije slijedi

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_2)}{x_3 - x_2}, \qquad x_1 < x_2 < x_3. \tag{4.33}$$

Zaista, neka je $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Tada je $1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$ i $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$, pa iz definicije dobivamo $\varphi(x_2) \leq (1-\lambda)\varphi(x_1) + \lambda\varphi(x_3)$. Zato je

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leq \lambda\big(\varphi(x_3) - \varphi(x_1)\big) \qquad \& \qquad \varphi(x_2) - \varphi(x_3) \leq (1-\lambda)\big(\varphi(x_1) - \varphi(x_3)\big).$$

Prva nejednakost daje $\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1}$, a druga $\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$.



Slika 17. Kvocijenti iz (4.33) koeficijenti su smjera pravaca $p_{1,2}, p_{1,3}$ i $p_{2,3}$.

Pomoću (4.33) može se pokazati da je konveksna funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ neprekidna na (a, b).

4.57. Lema

Neka je (a, b) interval, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $z \in (a, b)$. Tada postoji $B \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\varphi(y) \geq \varphi(z) + B(y - z), \qquad y \in (a, b).$$

Dokaz. Neka je $z \in (a,b)$. Za sve $x_1 \in (a,z)$ i $x_3 \in (z,b)$, prema (4.33) vrijedi

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(x_1)}{z-x_1} \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(z)}{x_3-z}.$$

Neka je

$$B := \sup\Big\{\frac{\varphi(z)-\varphi(x_1)}{z-x_1} : x_1 \in (a,z)\Big\}.$$

Tada je

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(x_1)}{z-x_1} \leq B, \qquad \text{za svaki } x_1 \in (a,z) \tag{4.34}$$

$$B \leq \frac{\varphi(x_3)-\varphi(z)}{x_3-z}, \qquad \text{za svaki } x_3 \in (z,b). \tag{4.35}$$

Ako je $y < z$, iz (4.34) za $x_1 = y$ dobivamo $\varphi(y) \geq \varphi(z) + B(y-z)$. Ako je $z < y$, iz (4.35) za $x_3 = y$ dobivamo $\varphi(y) \geq \varphi(z) + B(y-z)$. ■

Sada ćemo dokazati Jensenovu[17] nejednakost:

4.58. TEOREM (JENSENOVA NEJEDNAKOST)
Neka je $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, gdje je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Nadalje, neka je μ mjera na (X,Σ) takva da je $\mu(X) = 1$ i $f : X \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Ako je $f(x) \in (a,b)$ za svaki $x \in X$, onda je

$$\varphi\Big(\int f d\mu\Big) \leq \int (\varphi \circ f) d\mu.$$

Dokaz. Neka je $z = \int f d\mu$. Kako je $a < f < b$, imamo

$$a = a\mu(X) < \int f d\mu < b\mu(X) = b.$$

Dakle, $z \in (a,b)$. Prema lemi 4.57. postoji $B \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi\Big(\int f d\mu\Big) + B(f(x) - \int f d\mu) =: R(x), \qquad \forall x \in X. \tag{4.36}$$

Funkcija φ je neprekidna pa je i izmjeriva (korolar 3.9.). Prema teoremu 3.3. kompozicija $\varphi \circ f$ je izmjeriva funkcija.

Lako je pokazati da je funkcija R integrabilna, pa je zato $\int R^- d\mu < \infty$ i $\int R^+ \int d\mu < \infty$. Nadalje, iz $\varphi \circ f \geq R$ slijedi $(\varphi \circ f)^- \leq R^-$ (vidi dokaz teorema 4.33.), pa monotonost integrala (teorem 4.12.(c)) povlači $\int (\varphi \circ f)^- d\mu \leq \int R^- d\mu < \infty$. To znači da je definiran integral $\int (\varphi \circ f) d\mu$ (kao konačan broj ili $+\infty$). Budući da su definirana oba integrala $\int R d\mu$ i $\int (\varphi \circ f) d\mu$, pomoću teorema 4.33. iz nejednakosti (4.36) dobivamo $\int \varphi \circ f d\mu \geq \varphi(\int f d\mu)$ ■

---

[17] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859.-1925.), danski matematičar.

Prije nego što ilustriramo primjenu Jensenove nejednakosti navodimo sljedeću definiciju:

4.59. DEFINICIJA
(vidi [9]) Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $p = (p_1, \ldots, p_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i neka je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Tada se definira:

Aritmetička sredina $A_n(x;p)$ *brojeva $x_1, \ldots, x_n$ s težinama $p_1, \ldots, p_n$ je broj*

$$A_n(x;p) = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n.$$

Geometrijska sredina $G_n(x;p)$ *brojeva $x_1, \ldots, x_n$ s težinama $p_1, \ldots, p_n$ je broj*

$$G_n(x;p) = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}.$$

Harmonijska sredina $H_n(x;p)$ *brojeva $x_1, \ldots, x_n$ s težinama $p_1, \ldots, p_n$ je broj*

$$H_n(x;p) = \frac{1}{\frac{p_1}{x_1} + \ldots + \frac{p_n}{x_n}}.$$

Kvadratna sredina $K_n(x;p)$ *brojeva $x_1, \ldots, x_n$ s težinama $p_1, \ldots, p_n$ je broj*

$$K_n(x;p) = \sqrt{p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_n^2}.$$

4.60. PRIMJER. *Sada ćemo dokazati tzv.* K-A-G-H nejednakosti*:*

$$K_n(x;p) \geq A_n(x;p) \geq G_n(x;p) \geq H_n(x;p). \tag{4.37}$$

Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $p = (p_1, \ldots, p_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i neka je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Neka je $X = \{1, \ldots, n\}$. Definirajmo mjeru $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ formulom

$$\mu(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}.$$

Nadalje, neka je $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(i) = \ln x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je $\int f d\mu = \sum_{i=1}^n p_i \ln x_i$. Ako za konveksnu funkciju uzmemo $\varphi(x) = e^x$, pomoću Jensenove nejednakosti dobivamo

$$\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} = e^{\sum_{i=1}^n p_i \ln x_i} \leq \int (\varphi \circ f) d\mu = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Time smo pokazali A-G nejednakost: $A_n(x;p) \geq G_n(x;p)$.

Primjenom A-G nejednakosti na brojeve $1/x_1, \ldots, 1/x_n$ dobiva se:

$$\frac{p_1}{x_1} + \ldots + \frac{p_n}{x_n} \geq \frac{1}{x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}},$$

odakle slijedi G-H nejednakost: $G_n(x;p) \geq H_n(x;p)$.

Do sada smo dokazali sljedeće nejednakosti: $A_n(x;p) \geq G_n(x;p) \geq H_n(x;p)$. *Zamjenom* $p_i \to \frac{p_i x_i}{\sum_{k=1}^n p_k x_k}$, $i = 1, \ldots, n$, *iz nejednakosti* $A_n(x;p) \geq H_n(x;p)$ *dobivamo*

$$\frac{p_1 x_1^2}{\sum_{k=1}^n p_k x_k} + \ldots + \frac{p_n x_n^2}{\sum_{k=1}^n p_k x_k} \geq \frac{1}{\frac{p_1}{\sum_{k=1}^n p_k x_k} + \ldots + \frac{p_n}{\sum_{k=1}^n p_k x_k}},$$

odakle slijedi $K_n(x;p) \geq A_n(x;p)$.

Može se pokazati da se u (4.37) javljaju jednakosti onda i samo onda ako je $x_1 = \ldots = x_n$.

4.61. PRIMJER. *Neka su* x, y *bilo koja dva pozitivna realna broja,* $p > 1$ *realan broj i* $q := \frac{p}{p-1} > 1$. *Tada je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Kaže se da su* p *i* q konjugirani eksponenti. *Za* $x_1 = x^p, x_2 = y^q$ *i* $p_1 = \frac{1}{p}, p_2 = \frac{1}{q}$ *iz A-G nejednakosti (4.37) dobivamo* $(x^p)^{1/p}(y^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, *tj.*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{4.38}$$

Gornja jednakost, koja očito vrijedi i u slučaju ako je $x = 0$ *ili* $y = 0$, *poznata je pod nazivom* Youngova[18] nejednakost.

Sljedeći teorem poznat je pod nazivom Hölderova[19] nejednakost.

4.62. TEOREM (HÖLDER)
Neka je (X, Σ, μ) *prostor mjere, a* $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ *izmjerive funkcije. Ako su* p *i* q *konjugirani eksponenti i* $1 < p < \infty$, *onda vrijedi:*

$$\int |fg| d\mu \leq \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q d\mu \Big)^{1/q}. \tag{4.39}$$

Dokaz. Kao prvo, funkcije $|f|^p : X \to [0, \infty]$ i $|g|^p : X \to [0, \infty]$ su izmjerive (propozicija 3.19.(d)). Neka je

$$A := \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p}, \quad B := \Big(\int |g|^q d\mu \Big)^{1/q}.$$

Ako je $A = \infty$ ili $B = \infty$, onda očito vrijedi nejednakost (4.39). Ako je $A = 0$, onda je $f = 0$ (s.s.), što povlači $|fg| = 0$ (s.s.). Tada je $\int |fg| d\mu = 0$ (propozicija 4.13.) pa očito vrijedi nejednakost (4.39). Slično se pokaže da nejednakost (4.39) vrijedi ako je $B = 0$.

Preostaje razmotriti slučaj $0 < A, B < \infty$. Stavimo

$$F := \frac{|f|}{A}, \quad G := \frac{|g|}{B}.$$

[18] William Henry Young (1863.-1942.), engleski matematičar.
[19] Otto Hölder (1859.-1937.), njemački matematičar.

Tada je

$$\int F^p d\mu = \int G^p d\mu = 1.$$

Prema (4.38) vrijedi

$$FG \leq \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q,$$

odakle integriranjem dobivamo $\int FGd\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Množenjem ove nejednakosti s AB dobivamo (4.39). ■

Za $p = q = 2$ nejednakost (4.39) poznata je pod nazivom Schwarzova[20] nejednakost.

4.63. PRIMJER. *Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ bilo koje dvije n-torke realnih brojeva i neka su p, q realni brojevi takvi da je $1 < p < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pokažimo da tada vrijedi tzv. diskretna Hölderova nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{1/q}. \tag{4.40}$$

Neka je $X = \{1, \ldots, n\}$. Definirajmo mjeru $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ formulom

$$\mu(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) = \frac{k}{n}.$$

Nadalje, neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ definirane formulama

$$f(i) = x_i, \ g(i) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tada je $\int |fg|d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$, $\int |f|^p d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ i $\int |g|^q d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$. Sada je lako pokazati da iz (4.39) slijedi (4.40).

Sljedeći teorem poznat je pod nazivom nejednakost Minkowskog[21].

4.64. TEOREM (MINKOWSKI)
Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ izmjerive funkcije. Ako je $1 \leq p < \infty$, onda vrijedi:

$$\Big(\int |f + g|^p d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p d\mu\Big)^{1/p}. \tag{4.41}$$

[20] Karl Hermann Schwarz (1843.-1921.), njemački matematičar.
[21] Hermann Minkowski (1864.-1909.), njemački matematičar i fizičar.

Dokaz. Ako je $\int |f+g|^p d\mu = 0$, $\int |f|^p d\mu = \infty$ ili $\int |g|^p d\mu = \infty$, onda očito vrijedi nejednakost (4.41).

Neka je nadalje $\int |f+g|^p d\mu > 0$, $\int |f|^p d\mu < \infty$ i $\int |g|^p d\mu < \infty$. Za $p=1$ tvrdnja je očigledna. Neka je zato nadalje $p > 1$.

Zbog konveksnosti funkcije $x \to |x|^p$, $p > 1$, vrijedi

$$\Big(\frac{|f|+|g|}{2}\Big)^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p,$$

odakle zbog monotonost integrala dobivamo

$$\int (|f|+|g|)^p d\mu \leq 2^{p-1}\int |f|^p d\mu + 2^{p-1}\int |g|^p d\mu < \infty.$$

Sada ćemo primijeniti Hölderovu nejednakost na oba sumanda s desne strane jednakosti

$$(|f|+|g|)^p = |f|(|f|+|g|)^{p-1} + |g|(|f|+|g|)^{p-1}.$$

Dobivamo

$$\int |f|(|f|+|g|)^{p-1} d\mu \leq \Big(\int |f|^p\Big)^{1/p}\Big(\int (|f|+|g|)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}$$
$$\int |g|(|f|+|g|)^{p-1} d\mu \leq \Big(\int |g|^p\Big)^{1/p}\Big(\int (|f|+|g|)^{(p-1)q}\Big)^{1/q}.$$

Zbrojimo li te nejednakosti i uzmemo li u obzir da je $(p-1)q = p$, imamo

$$\int (|f|+|g|)^p d\mu \leq \Big(\int (|f|+|g|)^p\Big)^{1/q}\Big[\Big(\int |f|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int |g|^p\Big)^{1/p}\Big]$$

Podijelimo li gornju nejednakost s $\Big(\int (|f|+|g|)^p\Big)^{1/q} > 0$ i uzmemo li u obzir da je $1 - 1/q = 1/p$, dobivamo (4.41). ∎

4.65. PRIMJER. *Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ bilo koje dvije n-torke realnih brojeva i neka je $1 \leq p < \infty$. Tada vrijedi tzv. diskretna nejednakost Minkowskog:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\Big)^{1/p}. \tag{4.42}$$

Neka je $X = \{1, \ldots, n\}$, a $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ mjera zadana formulom

$$\mu(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}) = \frac{k}{n}.$$

Definirajmo funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$:

$$f(i) = x_i,\ g(i) = y_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tada je $\int |f+g|^p d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p$, $\int |f|^p d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ i $\int |g|^q d\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$. Iz (4.41) lako se dobiva (4.42).

Zadaci za vježbu

1. Pokažite da je funkcija $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konveksna onda i samo onda ako je za svaku točku $c \in (a, b)$ funkcija $x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}$ rastuća na $(a, b)\backslash\{c\}$.
Uputa: Iskoristite nejednakosti (4.33).

2. (a) Neka je φ konveksna na (a, b), a Ψ konveksna i rastuća na $\varphi((a, b))$. Pokazati da je kompozicija $\Psi \circ \varphi$ konveksna na (a, b). (b) Neka je $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ strogo pozitivna funkcija. Dokažite: Ako je $\log \varphi$ konveksna funkcija, onda je φ konveksna funkcija.
Uputa: (a) Upotrijebite definiciju konveksne funkcije. (b) Slijedi iz (a).

3. Neka je f izmjeriva funkcija na X, μ mjera i
$$\varphi(p) = \int |f|^p d\mu = \|f\|_p^p, \qquad 0 < p < \infty.$$
Neka je $E := \{p : \varphi(p) < \infty\}$.
(a) Neka su $p_1, p_2 \in E$, $p_1 < p_2$. Pokažite da je $[p_1, p_2] \subseteq E$. (b) Pokažite da je funkcija $\log \varphi$ konveksna na interioru skupa E. (c) Neka je $0 < r < p < s$. Pokažite da je $\|f\|_p \le \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$, što implicira $L^r \cap L^s \subseteq L^p$.
Uputa: (a) Svaki $p \in (p_1, p_2)$ može se zapisati kao $p = \lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2$, $\lambda = \frac{p_2-p}{p_2-p_1} \in (0, 1)$. Tada je $|f|^{\lambda p_1+(1-\lambda)p_2} \le \lambda|f|^{p_1} + (1 - \lambda)|f|^{p_2}$, jer je eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$, $a > 0$, konveksna. Sada se zahvaljujući monotonosti integrala lako dobije tvrdnja. (b) Dovoljno je pokazati da je φ konveksna funkcija (vidi prethodni zadatak), što je lako pokazati pomoću nejednakosti navedene u uputi za (a). (c) Iskoristite nejednakost navedenu u uputi za (a).

4. Neka je μ vjerojatnosna mjera na X, a $f, g : X \to [0, \infty]$ izmjerive funkcije takve da je $fg \ge 1$ (s.s.). Pokažite da je $\int f d\mu \int g d\mu \ge 1$.
Uputa: Očito je $\int f d\mu \ge 0$ i $\int g d\mu \ge 0$. Pretpostavimo da su oba integrala konačna, jer u suprotnom dokaz je trivijalan. Prvo iskoritite nejednakost $1 = \mu(X) = \int 1 d\mu \le \int f^{1/2} g^{1/2} d\mu$, a zatim primijenite Schwarzovu nejednakost na funkcije $f^{1/2}$ i $g^{1/2}$.

5. (Obratna Hölderova nejednakost) Neka je $p \in (0, 1)$ ($q = \frac{p}{p-1} < 0$). Dokažite: Ako je $f \in Ł^p$ i $0 < \int |g|^q d\mu < \infty$, onda vrijedi
$$\int |fg| d\mu \ge \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q d\mu\Big)^{1/q}.$$
Uputa: Primijenite Hölderovu nejednakost na funkcije $|g|^{-p}$ i $|fg|^p$ i konjugirane eksponente $P = 1/p$ i $Q = 1/(1 - p)$.

6. (Obratna nejednakost Minkowskog) Neka je $p \in (0, 1)$. Ako su $f, g \in L^p$, onda vrijedi $\|f\|_p + \|g\|_p \le \| \, |f| + |g| \, \|_p$.
Uputa: Primijenite obratnu Hölderovu nejednakost.

4.7. Prostor $L^p(X, \Sigma, \mu)$

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $p \in [1, \infty)$. Sa $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ označavamo skup svih Σ-izmjerivih funkcija $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sa svojstvom da je funkcija $|f|^p$ integrabilna. Ponekad ćemo koristiti neku od sljedećih kraćih oznaka: $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^p(X)$ ili $\mathcal{L}^p(\mu)$. Tako npr. ako je iz konteksta jasno što su skup X i σ-algebra Σ, zadovoljit će nas kraća oznaka $\mathcal{L}^p(\mu)$ s kojom ističemo samo mjeru μ.

4.66. PROPOZICIJA
$\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ je realan vektorski prostor.

Dokaz. Neka su $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada su funkcije $|f|^p$ i $|g|^p$ integrabilne. Iz

$$
\begin{aligned}
|\alpha f|^p &= |\alpha|^p |f|^p \\
|f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \leq (2\max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)
\end{aligned}
$$

slijedi integrabilnost funkcija $|\alpha f|^p$ i $|f+g|^p$ (teorem 4.12.). Dakle, $\alpha f, f+g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$. ■

Prisjetimo se definicije norme. Neka je X bilo koji realan vektorski prostor. Norma je svako preslikavanje $X \to \mathbb{R}$ koje vektoru $x \in X$ pridružuje realan broj $\|x\|$, tako da za sve $x, y \in X$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:

(N1) $\|x\| \geq 0$ (pozitivna semidefinitnost)

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitivna definitnost)

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogenost).

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trokuta).

Normiran vektorski prostor je vektorski prostor snabdjeven normom.

4.67. PROPOZICIJA
Preslikavanje $\| \ \|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, definirano formulom

$$\|f\|_p := \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p}$$

ima svojstva (N1), (N3) i (N4) norme. Osim toga je

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ (s.s.)$$

Dokaz. Svojstva (N1) i (N3) su očigledna. Svojstvo (N4) predstavlja nejednakost Minkowskog, koja vrijedi za $1 \leq p < \infty$. Da je $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (s.s.) slijedi iz teorema 4.30. ■

Kako bi se dobio normiran vektorski prostor, u $\mathcal{L}^p(X,\Sigma,\mu)$ uvodi se relacija ekvivalencije $\sim$. Po definiciji je $f \sim g$ ako je $f = g$ (s.s.). Sa $[f]$ označavat ćemo klasu ekvivalencije koja sadrži funkciju f, a s $L^p(X,\Sigma,\mu)$ ili kraće L^p skup svih klasa. Struktura vektorskog prostora $\mathcal{L}^p(X,\Sigma,\mu)$ prenosi se na $L^p(X,\Sigma,\mu)$ tako da se definira:

$$\begin{aligned}[f]+[g] &= [f+g]\\ \alpha[f] &= [\alpha f].\end{aligned}$$

Lako je pokazati da rezultat definiranih operacija ne ovisi o izboru predstavnika klase. Konačno, u vektorskom prostoru L^p norma se definira formulom

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p.$$

Formulom

$$d([f],[g]) = \|[f]-[g]\|_p$$

definira se udaljenost u L^p. Dakle, (L^p, d) je metrički prostor.

Radi jednostavnosti, nadalje ćemo cijelu klasu $[f]$ označavati kraće sa f. Iz konteksta će biti jasno mislimo li na funkciju ili na klasu.

Prisjetimo se da je metrički prostor (T,d) potpun ako svaki Cauchyjev niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz T konvergira prema nekoj točki t_0 iz T. Potpun normiran vektorski prostor zove se Banachov[22] prostor.

4.68. Teorem ([11, teorem 3.11, str. 67.])
L^p, $1 \le p < \infty$, je potpun metrički prostor.

Zadaci za vježbu

1. (a) Neka je $f : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty]$ zadana formulom $f = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$. Dokažite da je $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, ali $f \notin \mathcal{L}^2(\lambda)$. (b) Neka je $f : \mathbb{R} \to [-\infty,\infty]$, $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$. Dokažite da je $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$ i $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda)$.

   Uputa: (a) Definirajmo funkciju $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ za $x \neq 0$. Tada je $\tilde{f} = f$ (s.s.), pa je zato

   $$\int f d\lambda = \int \tilde{f} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2,$$

   $$\int f^2 d\lambda = \int \tilde{f}^2 d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1]} \frac{1}{x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 \frac{1}{x} dx = \infty.$$

   (b) Postupite slično.

[22] Stefan Banach (1892.-1945.), poljski matematičar.

2. Postoji niz funkcija iz $\mathcal{L}^p$ koji konvergira obično, ali ne konvergira u $\mathcal{L}^p$: Neka je $f_n = n^2\chi_{(0,1/n)}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija definiranih na $\mathbb{R}$ s Lebesgueovom mjerom λ. Dokažite: (a) $\lim_n f_n = 0$. (b) $f_n \in L^p$, $p \geq 1$. (c) $\lim_n \|f_n\|_p = \infty$, $p \geq 1$.

3. Postoji niz funkcija u $\mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, $0 \leq p_1, p_2 < \infty$, koji konvergira u $\mathcal{L}^{p_1}$, ali ne konvergira u $\mathcal{L}^{p_2}$: Neka je $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(n,2n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\lim_n f_n = 0$. Uzmemo li Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}$, dobivamo $\|f_n\|_p = n^{-1+1/p}$. Ako je $p > 1$, onda je $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = 0$, pa $f_n \to 0$ u $\mathcal{L}^p$. Ako je $p = 1$, onda je $\|f_n\| = 1$, pa $f_n \nrightarrow 0$ u $\mathcal{L}^1$.

4. Neka niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ konvergira prema $f : X \to \mathbb{R}$. Ako postoji funkcija $g \in \mathcal{L}^p$ takva da je $|f_n| \leq |g|$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0$.

   Uputa: $|f_n - f|^p \leq \big(|f_n| + |g|\big)^p \leq \big(2\max\{|f_n|, |g|\}\big)^p = 2^p|g|^p$, $|g|^p$ je integrabilna i $\lim_{n\to\infty} |f_n - f|^p = 0$. Tvrdnja slijedi iz Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji.

5. Neka je $\mu(X) < \infty$ i $0 < p < q < \infty$. Dokažite da je $\mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu) \subseteq \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ te da je $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$ za svaku funkciju $f \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$.

   Uputa: Neka je $P = \frac{q-p}{q}$ i $Q = \frac{p}{q}$. Tada je $p = 0 \cdot P + q \cdot Q$. Kako je $P + Q = 1$, to su $1/P$ i $1/Q$ konjugirani eksponenti. Primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $|f|^{0\cdot P}$ i $|f|^{q\cdot Q}$ te konjugirane eksponente $1/P$ i $1/Q$ dobiva se nejednakost

$$\begin{aligned}\int |f|^p d\mu = \int |f|^{0\cdot P}|f|^{q\cdot Q} d\mu &\leq \Big(\int |f|^{\frac{0\cdot P}{P}} d\mu\Big)^P \Big(\int |f|^{\frac{q\cdot Q}{Q}} d\mu\Big)^Q \\ &= \Big(\int 1 d\mu\Big)^P \Big(\int |f|^q d\mu\Big)^Q = \mu(X)^P \Big(\int |f|^q d\mu\Big)^Q,\end{aligned}$$

   pomoću koje je lako dokazati tvrdnje.

6. Neka je $0 < p < q < r < \infty$. Tada je $0 < \frac{1}{r} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} < \infty$ i $\frac{1}{q} = t\frac{1}{p} + (1-t)\frac{1}{r}$, gdje je $t = \frac{1/p-1/q}{1/p-1/r}$. Neka je $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu) \cap \mathcal{L}^r(X, \Sigma, \mu)$. Dokažite da je $f \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$ te da je $\|f\|_q \leq |f|_p^{1-t}\|f\|_r^t$.

   Uputa: Već smo pokazali da je $f \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$ (str. 164., zadatak 3.). Sada ćemo dokaz napraviti na drugi način te usput dobiti i traženu nejednakost. Neka je $P = \frac{r-q}{r-p} \in (0, 1)$ i $Q = 1 - P$. Tada je $q = Pp + Qr$. Primjenom Hölderove nejednakosti na funkcije $|f|^{Pp}$ i $|f|^{Qr}$ te konjugirane eksponente $1/P$ i $1/Q$ dobiva se

$$\int |f|^q d\mu = \int |f|^{Pp}|f|^{Qr} d\mu \leq \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^P \Big(\int |f|^r d\mu\Big)^Q.$$

   Integral $\int |f|^q d\mu$ je konačan jer su konačna oba integrala $\int |f|^p d\mu$ i $\int |f|^r d\mu$. Dakle, $f \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$. Iz gornje nejednakosti elementarnim računom slijedi $\|f\|_q \leq |f|_p^{1-t}\|f\|_r^t$.

7. Neka je $1 \leq p < r < \infty$, a $Z = L^p(X, \Sigma, \mu) \cap L^r(X, \Sigma, \mu)$. Dokažite da je $\| \| : Z \to \mathbb{R}$, definirana formulom $\|f\| := \|f\|_p + \|f\|_r$, norma na Z i da je $(Z, \| \cdot \|)$ Banachov prostor.

   Uputa: Nejednakost trokuta slijedi iz nejednakosti Minkowskog. Koristite teorem 4.68.

8. Neka je $1 \leq p < r < \infty$. Definirajmo $W = L^p + L^r = \{g + h : g \in L^p, h \in L^r\}$. Dokažite da je formulom $\|f\| := \inf\{\|g\|_p + \|h\|_r : g \in L^p, h \in L^r, f = g + h\}$ zadana norma na W i da je $(W, \| \cdot \|)$ Banachov prostor.

   Uputa: Koristite prethodni zadatak.

9. Neka je (Ω, Σ, μ) vjerojatnosni prostor. U teoriji vjerojatnosti izmjeriva funkcija $X : \Sigma \to \mathbb{R}$ zove se slučajna varijabla. Nadalje, integral (ako je definiran) $E(X) := \int X d\mu$ zove se očekivanje slučajne varijable X. Ako je $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, onda se $V(X) := E(X^2) - E(X)^2$ zove varijanca slučajne varijable X. Dokazati: (a) $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \Sigma, \mu) \Rightarrow X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. (b) Dokažite $P(\{|X| \geq \sqrt{4n}\}) \leq \frac{1}{4n}\big(V(X) + E^2(X)\big)$, gdje je $\{|X| \geq \sqrt{4n}\} = \{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq \sqrt{4n}\}$.

   Uputa: (a) Vidi zadatak 5. (b) Pomoću Čebiševljeve nejednakosti (4.12) za $p = 2$ dobiva se $P(\{|X| \geq \sqrt{4n}\}) \leq \frac{1}{4n} E(X^2)$.

5. Produkt prostora mjere

5.1. Produkt izmjerivih prostora

Radi jednostavnosti ovdje se ograničavamo na produkt dvaju izmjerivih prostora. Koristit ćemo uobičajenu oznaku $A \times B$ za Kartezijev (ili direktni) produkt skupova A i B. Dakle, $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

5.1. DEFINICIJA

Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori. Njihov produkt *je izmjeriv prostor $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, gdje je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tzv.* produktna σ-algebra *definirana s*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

Članove familije $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ zovemo izmjerivim pravokutnicima. Dakle, produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ generirana je familijom izmjerivih pravokutnika. Očito je $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jedan π-sistem na $X \times Y$.

5.2. PROPOZICIJA

Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori.

(a) Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ generirana je familijom „cilindara”

$$\mathcal{C} = \{A \times Y : A \in \mathcal{A}\} \cup \{X \times B : B \in \mathcal{B}\}.$$

(b) Produktna σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ najmanja je σ-algebra na $X \times Y$ sa svojstvom da su izmjerive obje projekcije

$$\pi_1 : X \times Y \to X, \quad \pi_1(x, y) = x$$
$$\pi_2 : X \times Y \to Y, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Dokaz. (a) Očito je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, odakle slijedi $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Preostaje dokazati da je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Neka je $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Iz identiteta

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B) \in \sigma(\mathcal{C})$$

slijedi $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Zato je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \sigma(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(\mathcal{C})$.

(b) Neka su $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Kako je

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y, \quad \pi_2^{-1}(B) = X \times B, \tag{5.1}$$

iz (a) slijedi $\pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ i $\pi_2^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. To znači da je π_1 izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{A})$, a π_2 u paru σ-algebri $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Nadalje, iz (5.1) vidimo da svaka druga σ-algebra na $X \times Y$ sa svojstvom da su obje projekcije izmjerive mora sadržavati cilindre. Prema (a) $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je najmanja σ-algebra s tim svojstvom. ■

5.3. TEOREM
Neka su $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori takvi da je* $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ *i* $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. *Ako su ispunjena sljedeća dva uvjeta:*

(i) *Postoji niz* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *skupova iz* $\mathcal{E}$ *takav da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$,

(ii) *Postoji niz* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *skupova iz* $\mathcal{F}$ *takav da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = Y$,

onda je

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}).$$

Dokaz. Iz $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ slijedi $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Neka je $E \in \mathcal{E}$. Pomoću jednakosti $\pi_1^{-1}(E) = E \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \times F_n)$ zaključujemo da je $\pi_1^{-1}(E) \in \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. Postupajući slično dobivamo da je $\pi_2^{-1}(F) \in \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ za svaki $F \in \mathcal{F}$. Sada pomoću teorema 3.6. dobivamo da je projekcija π_1 izmjeriva u paru σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ i $\mathcal{A}$, a π_2 je izmjeriva u paru σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$ i $\mathcal{B}$. Konačno, prema tvrdnji (b) propozicije 5.2. je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$. ■

5.4. PRIMJER. *Borelova* σ*-algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *generirana je familijom* $\mathcal{E} = \{(a, b] : a \leq b\}$ *(teorem 2.9.), a* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *familijom* $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ *(teorem 2.11.). Zato je*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Neka je $E \subseteq X \times Y$. Za svaku točku $(x, y) \in X \times Y$ definiraju se prerezi

$$\begin{aligned}
&(x\text{-prerez skupa } E) \qquad E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \\
&(y\text{-prerez skupa } E) \qquad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.
\end{aligned}$$

Neka je funkcija f definirana na Kartezijevom produktu $X \times Y$. Za svaku točku $(x, y) \in X \times Y$ definiraju se funkcije f_x i f^y formulama

$$\begin{aligned}
f_x(y) &= f(x, y), \qquad y \in Y \\
f^y(x) &= f(x, y), \qquad x \in X.
\end{aligned}$$

Dakle, f_x je restrikcija funkcije na prerez $\{(x, y) : y \in Y\}$, a f^y je restrikcija na prerez $\{(x, y) : x \in X\}$.

5.5. LEMA
Neka su $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori i* $(x, y) \in X \times Y$. *Tada vrijedi:*

(a) *Ako je* $E \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, *onda je* $E_x \in \mathcal{B}$ *i* $E^y \in \mathcal{A}$.

(b) *Ako je* $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ *bilo koja* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-izmjeriva funkcija, onda je* f_x $\mathcal{B}$*-izmjeriva a* f_y *je* $\mathcal{A}$*-izmjeriva funkcija.*

Dokaz. (a) Pokažimo da je $E_x \in \mathcal{B}$. Uočimo da je u tu svrhu dovoljno pokazati da familija
$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X \times Y : F_x \in \mathcal{B}\}$$
sadrži σ-algebru $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Familija $\mathcal{F}$ je σ-algebra na skupu $X \times Y$. Zaista, očito je $X \times Y \in \mathcal{F}$. Nadalje, pomoću identiteta $(F^c)_x = (F_x)^c$ i $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n)_x$ lako je zaključiti da je familija $\mathcal{F}$ zatvorena na komplementiranje i na prebrojive unije.

Sada ćemo pokazati da familija $\mathcal{F}$ sadrži sve izmjerive pravokutnike, tj. $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Neka je $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Tada je $(A \times B)_x = B \in \mathcal{B}$ ili je $(A \times B)_x = \emptyset \in \mathcal{B}$. Dakle, $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Kako je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, zbog $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$.

Na sličan način može se pokazati da je $E^y \in \mathcal{A}$.

(b) Prvo uočimo da za svaki $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ vrijedi
$$(f_x)^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)_x \qquad \& \qquad (f^y)^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)^y.$$
Nadalje, po pretpostavci je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Sada iz (a) slijedi $\left(f^{-1}(B)\right)_x \in \mathcal{B}$ i $\left(f^{-1}(B)\right)^y \in \mathcal{A}$. Dakle, za svaki $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ je $(f_x)^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ i $(f^y)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. ■

5.2. Produktna mjera

Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-konačni prostori mjere. Pokazat ćemo da postoji jedinstvena mjera $\mu \otimes \nu$ na produktu $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, takva da je
$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}.$$
Za dokaz ove tvrdnje trebat će nam sljedeća lema:

5.6. LEMA

Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dva prostora σ-konačne mjere i $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tada vrijedi:

(a) Funkcija $x \mapsto \nu(E_x)$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

(b) Funkcija $y \mapsto \mu(E^y)$ je $\mathcal{B}$-izmjeriva.

Dokaz. Kao prvo, prema lemi 5.5. je $E_x \in \mathcal{B}$ i $E^y \in \mathcal{A}$ i stoga su funkcije $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ dobro definirane.

(a) Dokaz ćemo provesti u dva koraka: (i) slučaj kada je mjera ν konačna. (ii) slučaj kada je ν σ-konačna mjera.

(i) Neka je
$$\mathcal{F} := \{F \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \text{ funkcija } x \mapsto \nu(F_x) \text{ je } \mathcal{A}\text{-izmjeriva}\} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Dovoljno je pokazati da je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

Prvo ćemo pokazati da je $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Neka je $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Tada je

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{ako je } x \in A \\ \emptyset, & \text{ako } x \notin A, \end{cases}$$

odakle dobivamo $\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\chi_A(x)$. Karakteristična funkcija χ_A je izmjeriva, pa je zato $A \times B \in \mathcal{F}$.

Uočimo:

1. Ako su $E, F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ takvi da je $E \subseteq F$, onda je
$$\nu((F \backslash E)_x) = \nu(F_x) - \nu(E_x).$$
2. Ako je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, onda je
$$\nu\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big)_x\Big) = \lim_{n\to\infty} \nu((E_n)_x).$$

Drugim riječima, familija $\mathcal{F}$ je d-sistem (zatvorena je na prave razlike i na unije rastućih skupova). Nadalje, familija $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ je π-sistem (zatvorena je na konačne presjeke). Prema teoremu 2.36. je

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}).$$

Kako d-sistem $\mathcal{F}$ sadrži π-sistem $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, a po definiciji je $\mathcal{D}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ najmanji d-sistem koji sadrži $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, to je $\mathcal{D}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$. Dakle, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

(ii) Mjera ν je σ-konačna. Tada postoji niz $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{B}$ takav da je $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ i $\nu(Y_n) < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo konačnu mjeru ν_n na $\mathcal{B}$ formulom $\nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$. Skupovi Y_n, $n \in \mathbb{N}$, međusobno su disjunktni pa je zato

$$\nu(E_x) = \nu(E_x \cap Y) = \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_x \cap Y_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_x \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x).$$

Prema (i) sve funkcije $x \mapsto \nu_n(E_x)$, $n \in \mathbb{N}$, su $\mathcal{A}$-izmjerive. Prema propoziciji 3.19. izmjerive su funkcije $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \nu_k(E_x)$, $n \in \mathbb{N}$. Sada iz propozicije 3.17. slijedi da je $\mathcal{A}$-izmjeriva i funkcija

$$x \mapsto \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu_k(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x) = \nu(E_x).$$

(b) Postupa se kao pod (a). ■

5.7. TEOREM

Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostori σ-konačne mjere. Tada postoji jedinstvena mjera $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ takva da je

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \qquad A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}. \tag{5.2}$$

Nadalje, za svaki $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y). \tag{5.3}$$

5.8. DEFINICIJA

Mjeru $\mu \otimes \nu$ iz teorema 5.7. zovemo produktna mjera *ili* produkt mjera μ i ν.

Dokaz teorema 5.7. Neka je $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Prema lemi 5.6. funkcije $x \mapsto \nu(E_x)$ i $y \mapsto \mu(E^y)$ su izmjerive. Zato na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ možemo definirati skupovne funkcije $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ formulama:

$$(\mu \otimes \nu)_1(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y), \qquad (\mu \otimes \nu)_2(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x). \tag{5.4}$$

Pokažimo da su $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ mjere na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dovoljno je napraviti dokaz za skupovnu funkciju $(\mu \otimes \nu)_1$, jer za funkciju $(\mu \otimes \nu)_2$ dokaz je analogan. Očito je $(\mu \otimes \nu)_1(\emptyset) = 0$. Neka je $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Stavimo $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ako je $y \in Y$, onda je $(E_n^y)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ i pri tome je $E^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^y$. Zato je $\mu(E^y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n^y)$. Pomoću Levijeva teorema za redove (teorem 4.17.) dobivamo

$$(\mu \otimes \nu)_1(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \mu(E_n^y)\, d\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \otimes \nu)_1(E_n),$$

što znači da je $(\mu \otimes \nu)_1$ prebrojivo aditivna funkcija. Time smo pokazali da je $(\mu \otimes \nu)_1$ mjera na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Kao što smo već spomenuli, na sličan način može se pokazati da je i $(\mu \otimes \nu)_2$ mjera na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

U dokazu leme 5.5. pokazali smo da je $\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\chi_A(x)$. Slično se može pokazati da je $\mu((A \times B)^y) = \mu(A)\chi_B(y)$. Pomoću tih jednakosti lako je pokazati da za sve $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ vrijedi

$$(\mu \otimes \nu)_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \otimes \nu)_2(A \times B). \tag{5.5}$$

Prema tome, mjere $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ podudaraju se na π-sistemu $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Kako je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, prema teoremu 2.37. mjere $(\mu \otimes \nu)_1$ i $(\mu \otimes \nu)_2$ jednake su na cijeloj σ-algebri $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Neka je $\mu \otimes \nu := (\mu \otimes \nu)_1 = (\mu \otimes \nu)_2$. Iz (5.4) i (5.5) dobivamo (5.2) i (5.3). ■

5.9. KOROLAR

Neka je λ Lebesgueova mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, a λ_2 Lebesgueova mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Tada je $\lambda_2 = \lambda \otimes \lambda$.

Dokaz. Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirana je familijom $\mathcal{E} = \{(a,b] : a \leq b\}$ (teorem 2.9.), a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ familijom $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ (teorem 2.11.). Prema teoremu 5.3. je

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Mjere λ_2 i $\lambda_1 \otimes \lambda_1$ podudaraju se na π-sistemu $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Naime, svakom pravokutniku $(a,b] \times (c,d] \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ istu vrijednost $(b-a)(d-c)$ pridružuju obje mjere λ_2 i $\lambda_1 \otimes \lambda_1$. Prema teoremuu 2.37. je $\lambda_2 = \lambda_1 \otimes \lambda_1$ na cijeloj σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$. ■

5.3. Fubinijev teorem

Sljedeća dva teorema (Tonellijev[23] i Fubinijev[24]) govore nam kako se integral po produktnoj mjeri može svesti na dva uzastopna integrala po mjerama faktora.

5.10. Teorem (Tonelli)
Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostori σ-konačne mjere, a $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:

(a) Funkcija $x \mapsto \int_Y f_x d\nu$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva.

(b) Funkcija $y \mapsto \int_X f^y d\mu$ je $\mathcal{B}$-izmjeriva.

(c)

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \Big(\int_X f^y d\mu \Big) d\nu(y) = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu \Big) d\mu(x). \tag{5.6}$$

Dokaz. Dokaz ćemo rastaviti na tri dijela.

(i) Pretpostavimo da je f karakteristična funkcija skupa $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tada je $f_x = \chi_{E_x}$, a $f^y = \chi_{E^y}$, odakle slijedi $\int_Y f_x d\nu = \nu(E_x)$ i $\int_X f^y d\mu = \mu(E^y)$. Sada tvrdnje (a) - (c) slijede iz leme 5.6. i teorema 5.7.

(ii) Zahvaljujući aditivnosti i homogenosti integrala sada je lako provjeriti da tvrdnje (a) - (c) vrijede za nenegativnu jednostavnu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-izmjerivu funkciju.

(iii) Konačno, neka je f bilo koja nenegativna $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-izmjeriva funkcija. Prema teoremu 3.23. tada postoji rastući niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jednostavnih, nenegativnih i $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-izmjerivih funkcija koji konvergira (po točkama) prema funkciji f. Prema (i) za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $x \mapsto \int_Y (f_n)_x d\nu$ je $\mathcal{A}$-izmjeriva, $y \mapsto \int_X (f_n)^y d\mu$ je $\mathcal{B}$-izmjeriva i vrijedi

$$(\star) \qquad \int_{X \times Y} f_n d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \Big(\int_X (f_n)^y d\mu \Big) d\nu(y) = \int_X \Big(\int_Y (f_n)_x d\nu \Big) d\mu(x).$$

---

[23] Leonida Tonelli (1885.-1946.), talijanski matematičar.
[24] Ghirin Guido Fubini (1879.-1943.), talijanski matematičar.

Kako je $\lim_n f_n = f$, to je $\lim_n (f_n)_x = f_x$ i $\lim_n (f_n)^y = f^y$. Nadalje, niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući pa su stoga rastući i nizovi $((f_n)_x)_{n\in\mathbb{N}}$ i $((f_n)^y)_{n\in\mathbb{N}}$. Prema teoremu o monotonoj konvergenicji (teorem 4.14.) je

$$\int_Y f_x d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_Y (f_n)_x d\nu, \qquad \int_X f^y d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n)^y d\mu,$$

pa tvrdnje (a) i (b) slijede iz propozicije 3.17.

Zahvaljujući tome što su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\Big(\int_X (f_n)^y d\mu\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ i $\Big(\int_Y (f_n)_x d\nu\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastući nizovi izmjerivih funkcija koji redom konvergiraju prema izmjerivim funkcijama f, $\int_X f^y d\mu$ i $\int_Y f_x d\nu$, uzimanjem limesa kada $n \to \infty$ u $(\star)$ i pomoću teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo jednakosti (5.6). ■

Uočimo da jednakosti (5.6) vrijede za svaku nenegativnu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-izmjerivu funkciju f, bez obzira je li ona integrabilna ili nije; uzastopni integrali su jednaki, tj. redoslijed integracije može se zamijeniti. Zahvaljujući lemi 4.27. ta nam činjenica može poslužiti za ispitivanje integrabilnost funkcije f (ne nužno nenegativne) s obzirom na produktnu mjeru $\mu\otimes\nu$. Evo primjera:

5.11. Primjer. *Neka je $X\times Y = [0, M]\times[0,\infty)$. Pokažimo da je funkcija $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x, y) = e^{-xy}\sin x$$

integrabilna s obzirom na Lebesgueova mjeru λ_2 na $[0, M]\times[0,\infty)$.

Kao prvo, prema korolaru 5.9. je $\lambda_2 = \lambda\otimes\lambda$, gdje je λ Lebesueova mjera na $\mathbb{R}$. Nadalje, funkcija f je neprekidna pa je stoga i $\lambda\otimes\lambda$-izmjeriva (teorem 3.8.). Pokazat ćemo da je

$$\int_{[0,\infty)\times[0,M]} |f(x, y)| d(\lambda\otimes\lambda) < \infty,$$

odakle će prema lemi 4.27. slijediti integrabilnost funkcije f.

Pomoću nejednakosti

$$|f(x, y)| = |xe^{-xy}|\Big|\frac{\sin x}{x}\Big| \le xe^{-xy} =: g(x, y), \qquad (x, y) \in [0, M]\times[0,\infty),$$

monotonosti integrala i Tonellijeva teorema dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{[0,M]\times[0,\infty)} |f(x, y)| d(\lambda\otimes\lambda) &\le \int_{[0,M]\times[0,\infty)} g(x, y) d(\lambda\otimes\lambda)\\ &= \int_{[0,M]} \Big(\int_{[0,\infty)} g(x, y) d\lambda(y)\Big) d\lambda(x) = \int_0^M \Big(\int_0^\infty xe^{-xy} dy\Big) dx\\ &= \int_0^M 1 dx = M < \infty.\end{aligned}$$

Kod ovog računa koristili smo činjenicu da su podintegralne funkcije Riemann-integrabilne, zbog čega su odgovarajući Lebesgueovi integrali jednaki Riemannovim integralima.

5.12. Teorem (Fubini)

Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ prostori σ-konačne mjere, a $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ funkcija koja je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-izmjeriva i integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\mu \otimes \nu$. Tada vrijedi:

(a1) Postoji skup $N_X \subseteq X$ mjere nula, $\mu(N_X) = 0$, sa svojstvom da je za svaki $x \in X \backslash N_X$ funkcija f_x integrabilna s obzirom na mjeru ν.

(a2) Funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$g(x) = \begin{cases} \int_Y f_x d\nu, & \text{ako je } x \in X \backslash N_X \\ 0, & \text{ako je } x \in N_X \end{cases}$$

integrabilna je s obzirom na mjeru μ.

(b1) Postoji skup $N_Y \subseteq Y$ mjere nula, $\nu(N_Y) = 0$, sa svojstvom da je za svaki $y \in Y \backslash N_Y$ funkcija f^y integrabilna s obzirom na mjeru μ.

(b2) Funkcija $h : Y \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$h(y) = \begin{cases} \int_X f^y d\mu, & \text{ako je } y \in Y \backslash N_Y \\ 0, & \text{ako je } y \in N_Y \end{cases}$$

integrabilna je s obzirom na mjeru ν.

(c)

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \Big(\int_X f^y d\mu \Big) d\nu(y) = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu \Big) d\mu(x). \tag{5.7}$$

Dokaz. Prema lemi 5.5. funkcija f_x je $\mathcal{B}$-izmjeriva. Zato su prema propoziciji 3.20. $\mathcal{B}$-izmjerive obje funkcije $(f_x)^+$ i $(f_x)^-$. Uočimo da je

$$(f_x)^+ = (f^+)_x, \qquad (f_x)^- = (f^-)_x. \tag{5.8}$$

Nadalje, po pretpostavci je f integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\mu \otimes \nu$. To znači da je $\int_{X \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) < \infty$ i $\int_{X \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu) < \infty$. Prema teoremu 5.10. funkcije $x \mapsto \int_Y (f_x)^+ d\nu$ i $x \mapsto \int_Y (f_x)^- d\nu$ su $\mathcal{A}$-izmjerive i vrijedi

$$\begin{aligned} \int_X \Big(\int_Y (f_x)^+ d\nu \Big) d\mu(x) &= \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) < \infty \\ \int_X \Big(\int_Y (f_x)^- d\nu \Big) d\mu(x) &= \int_{X \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu) < \infty. \end{aligned}$$

Iz ovih nejednakosti slijedi da su funkcije $x \mapsto \int_Y (f_x)^+ d\nu$ i $x \mapsto \int_Y (f_x)^- d\nu$ integrabilne s obzirom na mjeru μ, pa zbog toga prema propoziciji 4.28. postoji skup $N_X \subseteq X$ μ-mjere nula sa svojstvom da su te funkcije konačne na $X \backslash N_X$, tj. integrali $\int_Y (f^+)_x d\nu$ i $\int_Y (f^-)_x d\nu$ konačni su za svaki $x \in X \backslash N_X$. To znači da je za svaki $x \in X \backslash N_X$ funkcija f_x integrabilna s obzirom na mjeru ν, što je tvrdnja (a1).

Sada ćemo dokazati tvrdnju (a2). Kako su funkcije $x \mapsto \int_Y (f_x)^+ d\nu$ i $x \mapsto \int_Y (f_x)^- d\nu$ integrabilne s obzirom na mjeru μ, integrabilna je i njihova razlika

$$G(x) = \int_Y (f_x)^+ d\nu - \int_Y (f_x)^- d\nu = \int_Y f_x d\nu.$$

Kako je $G = g$ (s.s.), prema teoremu 4.29. funkcija g je integrabilna (s obzirom na mjeru μ) i pri tome je

$$\int_X g d\mu = \int_X G d\mu = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu\Big) d\mu. \tag{5.9}$$

Pomoću teorema 5.10., (5.8), teorema 4.29. i (5.9) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) &= \int_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) - \int_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu)\\
&= \int_X \Big(\int_Y (f^+)_x d\nu\Big) d\mu(x) - \int_X \Big(\int_Y (f^-)_x d\nu\Big) d\mu(x)\\
&= \int_X \Big(\int_Y (f_x)^+ d\nu\Big) d\mu(x) - \int_X \Big(\int_Y (f_x)^- d\nu\Big) d\mu(x)\\
&= \int_X G(x) d\mu = \int_X \Big(\int_Y f_x d\nu\Big) d\mu.
\end{aligned}$$

Na sličan način mogu se dokazati tvrdnje (b1) i (b2) te jednakost

$$\int_{X\times Y} f d(\mu\otimes\nu) = \int_Y \Big(\int_X f^y d\mu\Big) d\nu.$$

. ■

5.13. PRIMJER. *Neka je* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \infty, 0 < y < 1\}$ *i* $f : A \to \mathbb{R}$ *funkcija zadana formulom*

$$f(x,y) = y \sin x \, e^{-xy}.$$

Pokažimo da je f *integrabilna na* A *s obzirom na produktnu mjeru* $\lambda\otimes\lambda$*, te da se primjenom Fubinijeva teorema dobiva*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big) dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Kao prvo, funkcija f *je* $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-izmjeriva: Kako je* f *neprekidna, ona je* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*-izmjeriva. Tvrdnja slijedi iz jednakosti* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Uočimo da je $|f(x,y)| \le g(x,y)$*, gdje je* $g(x,y) = ye^{-xy}$*. Funkcija* g *je neprekidna, pa je* $\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-izmjeriva. Pomoću monotonosti integrala i Tonellijeva teorema dobivamo*

$$\begin{aligned}
\int_A |f(x,y)| d(\lambda\otimes\lambda) \le \int_A g(x,y) d(\lambda\otimes\lambda) &= \int_0^1 \Big(\int_0^\infty ye^{-xy} dx\Big) dy\\
&= \int_0^1 1 dy = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, f je integrabilna na A s obzirom na mjeru $\lambda \otimes \lambda$. Kod gornjeg računa iskoristili smo činjenicu da su podintegralne funkcije Riemann-integrabilne, zbog čega su odgovarajući Lebesgueovi integrali jednaki Riemannovim integralima. Nadalje, druga jednakost lako se dobiva parcijalnom integracijom.

Prema Fubinijevom teoremu je

$$\int_A f(x,y)d(\lambda\otimes\lambda) = \int_0^1 \Big(\int_0^\infty y\sin x\, e^{-xy}dx\Big)dy = \int_0^\infty \Big(\int_0^1 y\sin x\, e^{-xy}dy\Big)dx.$$

Parcijalnom integracijom dobiva se:

$$\int_0^\infty y\sin x\, e^{-xy}dx = \frac{y}{y^2+1}, \qquad \int_0^1 y\sin x\, e^{-xy}dy = \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big).$$

Zato je

$$\int_0^1 \frac{y}{y^2+1}dy = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big)dx,$$

tj.

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\Big(\frac{1-e^{-x}}{x} - e^{-x}\Big)dx.$$

5.14. PRIMJER. *Neka je $X = Y = [0,1]$, $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ova je funkcija neomeđena u okolini nule pa nije Riemann-integrabilna. Sada ćemo pokazati da ona nije integrabilna niti s obzirom na Lebesgueovu mjeru λ_2 na $[0,1]\times[0,1]$.

Za prvi uzastopni integral iz (5.6) dobivamo:

$$\int_Y \Big(\int_X f(x,y)d\lambda(x)\Big)d\lambda(y) = \int_Y \Big(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\Big)d\lambda(y) = \int_Y \Big(-\frac{1}{1+y^2}\Big)d\lambda(y)$$
$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Zamjenom redoslijeda integracije dobiva se $\int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\lambda(y)\Big)d\lambda(x) = \frac{\pi}{4}$. Dakle, $\int_Y\Big(\int_X f(x,y)d\lambda(x)\Big)d\lambda(y) \neq \int_X\Big(\int_Y f(x,y)d\lambda(y)\Big)d\lambda(x)$ i prema tome funkcija f nije integrabilna s obzirom na produktnu mjeru $\lambda_2 = \lambda\otimes\lambda$.

Zadaci za vježbu

1. Neka su $(X, \mathcal{A}, \mu)$ i $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dva prostora σ-konačnih mjera takva da je $\mathcal{A} \neq 2^X$ i da $\mathcal{B}$ ima neprazan skup mjere nula. Dokažite da produkt $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nije prostor potpune mjere. Specijalno, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$, gdje je λ_2 Lebesgueova mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, nije potpun prostor.

   Uputa: Neka je $Z \in 2^X \setminus \mathcal{A}$, a $N \in \mathcal{B}$ neprazan skup ν-mjere nula, $\nu(N) = 0$. Prema teoremu 5.7. tada je $(\mu \otimes \nu)(X \times N) = 0$. Kako je $Z \times N \subseteq X \times N$, skup $Z \times N$ je $(\mu \otimes \nu)$-zanemariv.

   Neka je $y \in N$. Tada je $Z = (Z \times N)^y$. Ako je produkt $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ potpun, onda je $Z \times N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tada bi iz leme 5.5. slijedilo da je $Z = (Z \times N)^y \in \mathcal{A}$, što je kontradikcija. Dakle, produkt $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ nije prostor potpune mjere.

2. Neka je λ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, μ mjera prebrojavanja na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ karakteristična funkcija skupa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Pokažite da je

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x) \neq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) \Big) d\mu(y).$$

   Zašto to nije u kontradikciji s Tonellijevim teoremom?

   Uputa: Računanjem dobivamo

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\mu(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{x\}} d\mu(y) \Big) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1 d\lambda = \infty,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) \Big) d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\mu = 0.$$

   Mjera μ nije σ-konačna. To je razlog zašto nemamo kontradikciju s Tonellijevim teoremom.

3. Neka je $0 < a < b$. Dokažite:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln(b/a).$$

   Uputa: Neka je $f : [0, \infty) \times [a, b] \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x, y) = e^{-xy}$. Funkcija f je nenegativna i $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-izmjeriva (jer je neprekidna). Prema Tonellijevom teoremu je

$$\int_0^\infty \Big(\int_a^b f(x, y) dy \Big) dx = \int_a^b \Big(\int_0^\infty f(x, y) dx \Big) dy,$$

   tj. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln(b/a)$.

4. Izračunajte $\int_{[0,3]\times[-1,2]} x^2 y\,dxdy$.

5. Dokažite jednakost:
$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$
Uputa: Kako je $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy}dy$, pomoću Fubinijeva teorema dobivamo
$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{\sin x}{x}dx &= \int_0^M \Big(\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy\Big)dx = \int_0^\infty \Big(\int_0^M e^{-xy}\sin x\,dx\Big)dy\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}(1 - ye^{-My}\sin M - e^{-My}\cos M)dy,\end{aligned}$$
odakle se prijelazom na limes kada $M\to\infty$ dobiva tražena jednakost. Integrabilnost funkcije $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$ pokazana je u primjeru 5.11.

6. Konvergencija izmjerivih funkcija

Radi jednostavnosti u ovoj ćemo točki proučavati razne tipove konvergencije realnih izmjerivih funkcija. Svi rezultati mogu se poopćiti i na izmjerive funkcije koje primaju vrijednosti u $[-\infty, \infty]$ tako da na $[-\infty, \infty]$ gledamo kao na (s.s.) $\mathbb{R}$.

6.1. DEFINICIJA
Neka je (X, Σ, μ) *prostor mjere,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* Σ*-izmjerivih realnih funkcija definiranih na* X *i* $f : X \to \mathbb{R}$ Σ*-izmjeriva funkcija. Za niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *kažemo da:*

(a) konvergira skoro svuda *prema funkciji* f *ako postoji* μ*-zanemariv skup* $N \subset X$ *takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in X \backslash N.$$

Pišemo $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *(*μ*-s.s.),* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *(s.s.) ili* $f_n \xrightarrow{s.s.} f$.

(b) konvergira skoro uniformno *prema funkciji* f *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji skup* $E \in \Sigma$ *takav da je* $\mu(E) = 0$ *i da niz* (f_n) *konvergira uniformno prema* f *na skupu* E^c*, tj. ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji skup* $E \in \Sigma$ *takav da je* $\mu(E) = 0$ *i*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E^c} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Pišemo $f_n \xrightarrow{s.u.} f$.

(c) konvergira po mjeri μ *prema funkciji* f *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

Pišemo $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(d) konvergira u $\mathcal{L}^p$ *(*$1 \le p < \infty$*) prema funkciji* f *ako su* $f, f_n \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, i ako je*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu = 0.$$

Pišemo $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

Sljedeći primjeri pokazuju nam da konvergencija skoro svuda i konvergencija po mjeri ne moraju povlačiti niti jednu od preostale tri konvergencije; skoro uniformna konvergencija ne mora povlačiti konvergenciju u $\mathcal{L}^p$; konvergencija u $\mathcal{L}^p$ ne mora povlačiti konvergenciju skoro svuda niti skoro uniformnu konvergenciju.

6.2. PRIMJER. *Promotrimo prostor mjere* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

a) Neka je $f_n = \chi_{[n,n+1]}$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Tada* $f_n \to 0$*,* $f_n \xrightarrow{s.s} 0$*, ali* $f_n \overset{s.u.}{\not\to} 0$*,* $f_n \overset{\lambda}{\not\to} 0$*,* $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\not\to} 0$.

b) *Niz funkcija* $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}$ *konvergira uniformno prema nul-funkciji na* $\mathbb{R}$. *Osim toga,* $f_n \xrightarrow{s.s} 0$, $f_n \xrightarrow{s.u.} 0$, $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, *ali* $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\nrightarrow} 0$.

c) *Neka je* $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$, $n \in \mathbb{N}$. *Lako je pokazati da* $f_n \to 0$, $f_n \xrightarrow{s.s} 0$, $f_n \xrightarrow{s.u.} 0$, $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$, *ali* $f_n \overset{\mathcal{L}^1}{\nrightarrow} 0$.

d) *Svaki* $n \in \mathbb{N}$ *zapišimo u obliku* $n = 2^k + i$, *gdje su* $k \in \mathbb{N}_0$ *i* $0 \le i < 2^k$, *a zatim definirajmo funkciju* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *formulom* $f_n = \chi_{[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}]}$. *Može se pokazati da* $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ *i* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0$. *Kako* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *ne postoji niti za jedan* $x \in [0,1]$, $f_n \overset{s.s.}{\nrightarrow} 0$ *i* $f_n \overset{s.u.}{\nrightarrow} 0$.

6.3. TEOREM

Neka je (X, Σ, μ) *prostor mjere,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* Σ*-izmjerivih realnih funkcija definiranih na* X *i* $f : X \to \mathbb{R}$ Σ*-izmjeriva funkcija. Tada vrijedi:*

(a) *Ako je* $\mu(X) < \infty$ *i ako* $f_n \xrightarrow{s.s.} f$, *onda* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(b) [Egorovljev[25] teorem] *Ako je* $\mu(X) < \infty$ *i ako* $f_n \xrightarrow{s.s.} f$, *onda* $f_n \xrightarrow{s.u.} f$

(c) [Rieszov[26] teorem] *Ako* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *onda postoji podniz* (f_{n_k}) *koji konvergira skoro svuda prema* f, $f_{n_k} \xrightarrow{s.s.} f$.

(d) *Ako* $f_n \xrightarrow{s.u.} f$, *onda* $f_n \xrightarrow{s.s.} f$ *i* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(e) *Ako* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, *onda* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Dokaz. (a) Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Prvo definirajmo izmjerive skupove

$$A_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\},$$

a zatim pomoću njih niz padajućih izmjerivih skupova

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Očito je $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \{x \in X : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$ i zato postoji skup $Z \in \Sigma$ mjere nula takav da je $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq Z$. Kako je $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ izmjeriv skup, slijedi $\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = 0$. Nadalje, budući da je mjera μ konačna, neprekidna je na padajuće nizove (propozicija 2.19.) pa dobivamo

$$0 = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

[25] Димитрий Федорович Егоров (1869.-1931.), ruski matematičar.
[26] Frigyes Riesz (1880.-1956.), mađarski matematičar.

Zbog toga, kako je $A_n \subseteq B_n$, slijedi $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

(b) Neka je $\varepsilon > 0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$g_n := \sup_{i\geq n} |f_i - f|.$$

Kako po pretpostavci $f_n \xrightarrow{s.s.} f$, lako je zaključiti da $g_n \xrightarrow{s.s.} 0$. Po tvrdnji (a) zato $g_n \xrightarrow{\mu} 0$. Kako $g_n \xrightarrow{\mu} 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ možemo odabrati prirodan broj n_k takav da je

$$\mu\big(\{x \in X : g_{n_k}(x) > \frac{1}{k}\}\big) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Neka je $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, gdje je

$$A_k := \Big\{x \in X : g_{n_k}(x) > \frac{1}{k}\Big\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Sada ćemo pokazati da niz (f_n) na skupu A^c uniformno konvergira prema f. Neka je $\delta > 0$. Odaberimo prirodan broj k takav da je $1/k < \delta$. Tada je

$$\sup_{i\geq n_k} |f_i(x) - f(x)| = g_{n_k}(x) \leq \frac{1}{k} \quad \text{za svaki } x \in A^c.$$

Zato je

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta \qquad \text{za svaki } x \in A^c \text{ i za svaki } n \geq n_k.$$

To znači da niz funkcija (f_n) konvergira uniformno prema funkciji f na skupu A^c.
(c) Po pretpostavci je $\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Zato za svaki $k \in \mathbb{N}$ po definiciji limesa niza realnih brojeva postoji prirodan broj N_k^0 takav da je

$$\Big|\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\big) - 0\Big| < \frac{1}{2^k}, \qquad n \geq N_k^0$$

Uočite da smo prvo za ε uzeli $\frac{1}{k}$, a zatim iskoristili definiciju limesa niza realnih brojeva. Neka je

$$n_k := \sum_{i=1}^{k} N_i^0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ovako definiran niz (n_k) je strogo rastući niz prirodnih brojeva i vrijedi

$$\mu\big(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\big) < \frac{1}{2^k}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definirajmo skupove:

$$A_k := \Big\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\Big\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Ako $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k$, onda postoji indeks i takav da $x \notin \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k$ i zato je $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$ za sve $k = i, i+1, \ldots$. To znači da na skupu $X \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k$ podniz (f_{n_k}) konvergira prema funkciji f. Kako je

$$\mu\Big(\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$, to je

$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}}$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$ i zato je $\mu\big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} A_k\big) = 0$.

(d) Neka je $\varepsilon > 0$. Kako niz (f_n) konvergira skoro uniformno prema f, postoje $Z \in \Sigma$, $\mu(Z) = 0$, i prirodan broj n_0 takvi da je

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{za sve } n \geq n_0 \text{ i za sve } x \in X \backslash Z.$$

To znači da $f_n \xrightarrow{s.s.} f$. Preostaje pokazati da $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Kako je

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq Z, \qquad n \geq n_0,$$

dobivamo $\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$, odakle slijedi da $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

(e) Neka je $\varepsilon > 0$. Po Čebiševljevoj nejednakosti je

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu.$$

Kako je po pretpostavi $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0$, iz gornje nejednakosti dobivamo $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$. ■

Sljedeći teorem govori nam da su limes po mjeri i limes u $\mathcal{L}^p$ skoro svuda jedinstveni, tj. da se podudaraju do na zanemariv skup.

6.4. Teorem

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz Σ-izmjerivih realnih funkcija definiranih na X i $f, g : X \to \mathbb{R}$ Σ-izmjerive funkcija. Tada vrijedi:

(a) Ako su sve funkcije f, g, f_n iz $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, te ako $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$ i $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} g$, onda je $f = g$ (s.s.).

(b) Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $f_n \xrightarrow{\mu} g$, onda je $f = g$ (s.s.).

Dokaz. (a) Po pretpostavci je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int |f - f_n|^p d\mu\right)^{1/p} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int |g - f_n|^p d\mu\right)^{1/p} = 0$ pa iz nejednakosti Minkowskog

$$\left(\int |f-g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f - f_n|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g - f_n|^p d\mu\right)^{1/p}$$

slijedi $\left(\int |f-g|^p d\mu\right)^{1/p} = 0$. Odatle je $\int |f-g|^p d\mu = 0$ pa prema teoremu 4.30. slijedi $|f-g|^p = 0$ (s.s.), a to je onda i samo onda ako je $f = g$ (s.s.).

(b) Neka je $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci je $\lim_{n\to\infty} \mu\big\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\big\} = 0$ i $\lim_{n\to\infty} \mu\big\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\big\} = 0$. Uočimo da je

$$\begin{aligned} &\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \\ &\quad \subseteq \left\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \bigcup \left\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \end{aligned}$$

jer u suprotnom bi bilo $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$. Zato je $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \mu\big(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}\big) + \mu\big(\{x \in X : |g(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}\big)$, odakle prijelazom na limes kada $n \to \infty$ slijedi $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$. Specijalno, zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$, vrijedi

$$\mu\Big(\Big\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n}\Big\}\Big) = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz jednakosti $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n}\Big\}$ slijedi $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(\{x \in X : |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n}\}\big) = 0$, pa je zato $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. To znači da je $f = g$ (s.s.). ∎

Zadaci za vježbu

1. Neka je λ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija sa $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ definiranih formulom $f_n(x) = ne^{-n|x|}$. Dokažite: (a) $f_n \xrightarrow{\lambda-s.s.} 0$. (b) $f_n \stackrel{\mathcal{L}^1}{\not\to} 0$. (c) $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$.

   Uputa: (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. (b) $\int_{\mathbb{R}} ne^{-n|x|} d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ne^{-n|x|} dx = 2\int_0^{\infty} ne^{-nx} dx = 2$. (c) $\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{\ln n - \ln \varepsilon}{n}\} = (-\frac{\ln n - \ln \varepsilon}{n}, \frac{\ln n - \ln \varepsilon}{n})$ za $n > \varepsilon$. Zato je $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| > \varepsilon\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(\ln n - \ln \varepsilon)}{n} = 0$.

2. Neka je λ Lebesgueova mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranih sa $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{(n,2n)}(x)$. (a) Da li niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $\mathcal{L}^p$, $p \leq 1 < \infty$? (b) Konvergira li niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ po mjeri λ?

Uputa: $\|f_n\|_p^p = \int |f_n|^p d\lambda = \int \frac{1}{n^p}\chi_{(n,2n)} d\lambda = n^{-p}\lambda((n,2n)) = n^{1-p}$. Za $p > 1$ je $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p = 0$ pa, definiramo li $f \equiv 0$, slijedi $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0$, odnosno $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f \equiv 0$. Iz konvergencije u $\mathcal{L}^p$, $p > 1$, slijedi konvergencija u mjeri λ (vidi teorem 6.3.). Preostaje razmotriti slučaj $p = 1$. Pretpostavimo da $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} g$. Tada $f_n \xrightarrow{\lambda} g$ (vidi teorem 6.3.), a zbog (s.s.) jedinstvenosti limesa po mjeri slijedi da je $g = 0$ (λ-s.s.). To bi značilo da je $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_1 = 0$, što bi bila kontradikcija s već pokazanim da je $\|f_n\|_1 = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, niz (f_n) ne konvergira u $\mathcal{L}^1$.

3. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija koji konvergira po mjeri prema funkciji f. Dokažite da tada svaki podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira po mjeri prema f.

4. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija definiranih na izmjerivom skupu E konačne mjere. Dokažite: (a) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ($f : E \to \mathbb{R}$) onda i samo onda ako svaki podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji konvergira po mjeri prema f. (b) $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ($f : E \to \mathbb{R}$) onda i samo onda ako svaki podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji konvergira skoro svuda prema f.

   Uputa: (a) Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$, onda i svaki njegov podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira po mjeri prema f. Obratno, ako $f_n \overset{\mu}{\not\to} f$, onda postoji $\varepsilon > 0$ takav da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n := \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\})$, ne konvergira prema 0. To znači da postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $n_k \geq n$ takav da je $a_{n_k} = \mu(\{x \in E : |f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \geq \delta$. Lako je postići da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bude strogo rastući niz prirodnih brojeva. To bi značilo da podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ kao niti jedan njegov podniz ne konvergiraju po mjeri prema f.

   (b) Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$, onda i $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ pa po Rieszovom teoremu $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ima podniz koji konvergira skoro svuda prema f. Obratno, ako svaki podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ima podniz $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ koji konvergira skoro svuda prema f, onda po tvrdnji a) teorema 6.3. $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergira po mjeri prema f. Prema već dokazanoj tvrdnji (a) tada $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

5. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Niz (f_n) izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ je **Cauchyjev niz u mjeri** μ ako za svaka dva realna broja $\varepsilon, \delta > 0$ postoji prirodan broj $n_0 \equiv n_0(\varepsilon, \delta)$ takav da je

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \delta, \qquad \forall m, n \geq n_0.$$

   Dokažite: Ako je (f_n) Cauchyjev niz u mjeri μ, onda postoji funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ prema kojoj taj niz konvergira po mjeri μ.

   Uputa: Indukcijom je lako dobiti strogo rastući niz $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prirodnih brojeva takav da je $\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k}$. Neka je $E_k := \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}$, $F_n := \bigcup_{k\geq n} E_k$. Tada je

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k\geq n} E_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

odakle prijelazom na limes $n \to \infty$ slijedi $\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\big) = 0$. Neka je $F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ako je $x \in F^c$, onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $x \notin F_{n_0}$. Zato je (a) $|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq 2^{-k}$ za sve $x \in F^c$ i za sve $k \geq n_0$, što povlači (b) $|f_{n_m}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k+1}$ za sve $x \in F^c$ i za sve $m \geq k \geq n_0$. Zbog (a) red $\sum_{k\geq n_0}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ konvergira μ-s.s. nekoj funkciji $g : X \to \mathbb{R}$. Neka je $f = g + f_{n_{n_0}}$. Kako k-ta parcijalna suma reda glasi $f_{n_k} - f_{n_{n_0}}$, iz (b) slijedi da niz $(f_{n_k})_{k\geq n_0}$ konvergira skoro uniformno prema f i zato po tvrdnji d) teorema 6.3. on konvergira i po mjeri μ prema f. Pokažimo da je $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$, što će značiti da $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Neka je $\delta > 0$ bilo koji realan broj. Kako je (f_n) Cauchyjev niz u mjeri μ, postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_r(x)| > \varepsilon/2\}) < \delta/2$ za sve $n, r \geq N_1$. Nadalje, kako niz $(f_{n_k})_{k\geq n_0}$ konvergira po mjeri prema f, postoji $N_2 \geq n_0$ takav da je $\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}) < \delta/2$ za sve $k \geq N_2$. Neka je $N := \max\{N_1, N_2\}$. Kako je $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| > \varepsilon/2\} \cup \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon/2\}$, slijedi $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta$ za svaki $n \geq N$. Time smo pokazali da je $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$.

7. Dekompozicija mjere

U ovom poglavlju obradit ćemo Hanhovu dekompoziciju, Jordanovu dekompoziciju, te Radon-Nikodymov i Lebesgueov teorem o dekompoziciji mjere s predznakom. Ti rezultati spadaju među važnije u teoriji mjere.

7.1. Mjera s predznakom

7.1. DEFINICIJA
Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. Mjera s predznakom *je svaka funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ sa svojstvima:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *(*σ-aditivnost*) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz Σ vrijedi*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{7.1}$$

7.2. PRIMJEDBA

a) *Uočite da na lijevoj strana od (7.1) nije bitan raspored već samo prisutnost skupova A_i. To znači da permutiranje članova polaznog reda s desne strane ne utječe na konvergenciju niti na sumu reda. Zato je polazni red $\sum_i \mu(A_i)$ apsolutno konvergentan u $[-\infty, \infty]$.*

b) *Pokažimo da mjera s predznakom ne može primiti obje vrijednosti $-\infty$ i ∞. U tu svrhu prvo uočimo da zbog σ-aditivnosti za svaki $A \in \Sigma$ mora vrijediti*

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c).$$

Posebno, to znači da suma s desne strane mora biti definirana, tj. ne smije biti oblika $(+\infty) + (-\infty)$ ili $(-\infty) + (+\infty)$. Zato, ako je $\mu(A) = \infty$, onda mora biti $\mu(X) = \infty$; ako je $\mu(A) = -\infty$, onda mora biti $\mu(X) = -\infty$. Zbog toga μ može primiti najviše samo jednu od vrijednosti ∞ i $-\infty$. Nadalje, ako su $A, B \in \Sigma$ takvi da je $A \subseteq B$ i $\mu(B) \in \mathbb{R}$, korištenjem jednakosti

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$$

i postupajući slično lako se pokaže da je $\mu(A) \in \mathbb{R}$.

7.3. DEFINICIJA
Za mjeru s predznakom μ kažemo da je konačna *ako je $\mu(A) \in \mathbb{R}$ za svaki $A \in \Sigma$. Konačnu mjeru s predznakom zovemo* realna mjera.

7.4. PRIMJER.

(a) *Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere i* $f : X \to [-\infty, \infty]$ *integrabilna funkcija. Funkcija* ν *definirana formulom*

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu, \qquad A \in \Sigma$$

je realna mjera.

Ovu ćemo tvrdnju lako dokazati pomoću Lebesgueova teorema o dominiranoj konvergenciji (LTDK). Po pretpostavci f *je integrabilna, pa je zato integrabilna i funkcija* $|f|$ *(lema 4.27.). Neka je* $A \in \Sigma$. *Kako je je* $|f\chi_A| \leq |f|$, *prema LTDK funkcija* $f\chi_A$ *je integrabilna, tj.* $\nu(A) = \int f\chi_A \, d\mu \in \mathbb{R}$. *Preostaje pokazati da je* ν σ*-aditivna funkcija. U tu svrhu neka je* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *niz disjunktnih skupova iz* Σ. *Kako je* $\left|f\chi_{\cup_{i=1}^n A_i}\right| \leq |f|$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim_{n\to\infty} f\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = f\chi_{\cup_{i=1}^\infty A_i}$, *prema LTDK je*

$$\int f\chi_{\cup_{i=1}^\infty A_i} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} \, d\mu.$$

Iskoristimo li i jednakost $f\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n f\chi_{A_i}$, *dobivamo*

$$\begin{aligned}\nu(\cup_{i=1}^\infty A_i) &= \int f\chi_{\cup_{i=1}^\infty A_i} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int f\chi_{A_i} \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i).\end{aligned}$$

Kako je $f = f^+ - f^-$, *uočimo da je*

$$\nu(A) = \underbrace{\int_A f^+ \, d\mu}_{\nu^+(A)} - \underbrace{\int_A f^- \, d\mu}_{\nu^-(A)},$$

što nam govori da se realna mjera ν *može zapisati kao razlika dviju mjera.*

(b) *Ako su* μ_1 *i* μ_2 *dvije mjere na* (X, Σ) *od kojih je barem jedna konačna, onda je razlika* $\mu := \mu_2 - \mu_1$ *mjera s predznakom.*

Zaista, radi određenosti neka je μ_1 *konačna mjera, tj.* $\mu_1(X) < \infty$. *Tada je* $\mu_1(A) \leq \mu_1(X) < \infty$ *za svaki* $A \in \Sigma$ *i zato je dobro definirana funkcija* μ. *Očito je* $\mu(\emptyset) = 0$, *a lako je provjeriti i svojstvo* σ*-aditivnosti funkcije* μ.

7.5. DEFINICIJA

Neka je ν *realna mjera na izmjerivom prostoru* (X, Σ). *Za skup* $A \in \Sigma$ *kažemo da je:*

(a) pozitivan skup *(u odnosu na ν, za mjeru ν) ako je $\nu(A \cap E) \geq 0$ za svaki $E \in \Sigma$,*

(b) negativan skup *(u odnosu na ν, za mjeru ν) ako je $\nu(A \cap E) \leq 0$ za svaki $E \in \Sigma$,*

(b) nul-skup *(u odnosu na ν, za mjeru ν) ako je $\nu(A \cap E) = 0$ za svaki $E \in \Sigma$.*

7.6. PROPOZICIJA

Neka je ν mjera s redpznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Vrijedi:

(i) Skup $A \in \Sigma$ je pozitivan [negativan] onda i samo onda ako je $\nu(E) \geq 0$ [$\nu(E) \leq 0$] za svaki izmjeriv podskup E od A.

(ii) $A \in \Sigma$ je nul-skup onda i samo onda ako je $\nu(E) = 0$ za svaki izmjeriv podskup E od A.

(iii) Svaki izmjeriv podskup pozitivnog [negativnog, nul-] skupa je pozitivan [negativan, nul-] skup.

(iv) Prebrojiva unija pozitivnih [negativnih, nul-] skupova je pozitivan [negativan, nul-] skup.

Dokaz. Lako je provjeriti prve tri tvrdnje. Tvrdnju (iv) dokazat ćemo samo za pozitivne skupove. Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih skupova. Definirajmo pomoćne izmjerive skupove:

$$B_1 := A_1,\ B_i := A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k, \quad i \geq 2.$$

Očito je $B_i \subseteq A_i$. Nadalje, skupovi B_i su disjunktni i vrijedi $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Neka je $E \in \Sigma$ bilo koji podskup od $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Kako je tada

$$E = E \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = E \cap \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap B_i)$$

te kako su skupovi $E \cap B_i$ disjunktni, zbog σ-aditivnost od ν je

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{n} \nu(E \cap B_i).$$

Nadalje, kako je A_i pozitivan skup i $E \cap B_i \subseteq A_i$, prema tvrdnji (iii) je $\nu(E \cap B_i) \geq 0$. Zato je $\nu(E) \geq 0$. ∎

7.2. Hahnova dekompozicja

Pozitivni i negativni skupovi imaju važnu ulogu u iskazu Hahnova[27] teorema. Taj teorem daje standardnu dekompoziciju mjere s predznakom. Za njegov dokaz treba nam sljedeća lema.

7.7. Lema
Neka je μ mjera s preznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada vrijedi:

(i) (neprekidnost na rastuće nizove) *Za svaki rastući niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi*
$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) (neprekidnost na padajuće nizove) *Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ padajući niz skupova iz Σ. Ako je $\mu(A_{i_0}) \in \mathbb{R}$ za neki i_0, onda je*
$$\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. Dovoljno je oponašati dokaz odgovarajućih tvrdnji iz propozicije 2.19. ∎

7.8. Teorem (Hahnova dekompozicija)
Neka je ν mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada postoji par (P, N) izmjerivih skupova takvih da je:

(i) P pozitivan, a N negativan skup,

(ii) $P \cap N = \emptyset$,

(iii) $P \cup N = X$.

Par (P, N) s ovim svojstvima zove se Hahnova dekompozicija *funkcije μ.*

Dokaz. Budući da mjera s predznakom ne može primiti obje vrijednosti ∞ i $-\infty$, radi određenosti pretpostavimo da μ ne prima vrijednost $-\infty$. To znači da je $\mu(E) > -\infty$ za svaki $E \in \Sigma$. Neka je
$$L := \inf\big\{\mu(E) : E \in \Sigma, \mu(E) \leq 0\big\}.$$
Tada postoji niz $(E_n, n \in \mathbb{N})$ izmjerivih skupova E_n, $\mu(E_n) \leq 0$, takvih da je
$$L = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathcal{E}_n$ algebra generirana skupovima $E_1, \ldots, E_n$. Očito je $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{E}_n \subseteq \ldots$.

[27] Hans Hahn (1879.-1934.), austrijski matematičar.

Algebra $\mathcal{E}_n$ ima konačno mnogo članova. Zato postoji $C_n \in \mathcal{E}_n$ takav da je

$$\mu(C_n) = \inf\big\{\mu(E) : E \in \mathcal{E}_n\big\}.$$

Kako je $E_n \in \mathcal{E}_n$, vrijedi

$$L \le \mu(C_n) \le \mu(E_n).$$

Sada ćemo pokazati da za sve $i, n \in \mathbf{N}$ takve da je $i > n$ vrijedi

$$\mu\Big(C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k\Big) \le 0. \tag{7.2}$$

Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Zato pretpostavimo da je $\mu\Big(C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k\Big) > 0$. Iskoristimo li σ-aditivnost od μ, dobivamo da bi tada bilo

$$\mu(C_i) = \mu\Big(C_i \bigcap \Big(\bigcup_{n \le k < i} C_k\Big)\Big) + \mu\Big(C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k\Big) > \mu\Big(C_i \bigcap \Big(\bigcup_{n \le k < i} C_k\Big)\Big).$$

Kako je $C_i \bigcap \Big(\bigcup_{n \le k < i} C_k\Big) \in \mathcal{E}_i$, to bi bila kontradikcija s izborom skupa C_i.

Zahvaljujući (7.2) lako je pokazati da je

$$\mu(\bigcup_{i \ge n} C_i) \le \mu(C_n).$$

U tu svrhu prvo uočimo da vrijedi

$$\bigcup_{i \ge n} C_i = C_n \bigcup \Big(\bigcup_{i > n} \Big(C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k\Big)\Big)$$

i da su međusobno disjunktni skupovi

$$C_n,\ C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k, \quad i > n$$

Sada σ-aditivnost i (7.2) povlače

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{i \ge n} C_i) &= \mu(C_n) + \mu\Big(\bigcup_{i > n} \Big(C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k\Big)\Big) = \mu(C_n) + \sum_{i > n} \mu\Big(C_i \backslash \bigcup_{n \le k < i} C_k\Big) \\ &\le \mu(C_n).\end{aligned}$$

Neka je

$$N := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup_{i \ge n} C_i\Big).$$

Pokažimo da je

$$\mu(N) = L.$$

Prema lemi 7.7. je $\mu(N) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i\geq n} C_i\Big)$. Kako je $L \leq \mu\Big(\bigcup_{i\geq n} C_i\Big) \leq \mu(C_n) \leq \mu(E_n)$ i $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = L$, slijedi $\mu(N) = L$.

Pokažimo da je N traženi skup. Za svaki $B \subseteq N$ je $\mu(B) \leq 0$ jer bismo u suprotnom imali $L = \mu(N) = \mu(B) + \mu(N\backslash B) > \mu(N\backslash B)$, što bi bila kontradikcija s definicijom infimuma L. Slično se zaključi da je $\mu(B) \geq 0$ za svaki $B \subseteq N^c$. ∎

Hahnova dekompozicija nije jedinstvena. Na primjer, neka je $X = [-2,1]$, $\Sigma = \mathcal{B}([-2,1])$ i $\mu(A) = \int_A x\, d\lambda$, gdje je λ Lebesgueova mjera. Tada su $(P_1, N_1) = ([0,1],[-2,0))$ i $(P_2, N_2) = ((0,1],[-2,0])$ dvije različite Hahnove dekompozicije.

Općenito, ako su (P_1, N_1) i (P_2, N_2) Hahnove dekompozicije, onda su skupovi $P_1 \cap N_2$, $P_2 \cap N_1$ i pozitivni i negativni. Zato im mjera mora biti nula, tj. $\mu(P_1 \cap N_2) = \mu(P_2 \cap N_1) = 0$, odakle se lako dobiva:

$$
\begin{array}{cc}
\mu(P_1\backslash P_2) = \mu(P_2\backslash P_1) = 0, & \mu(N_1\backslash N_2) = \mu(N_2\backslash N_1) = 0. \\
\Updownarrow & \Updownarrow \\
\mu(P_1 \Delta P_2) = 0 & \mu(N_1 \Delta N_2) = 0.
\end{array}
$$

Svaka mjera s predznakom može se zapisati kao razlika dviju pozitivnih mjera od kojih je barem jedna konačna. O tome nam govori sljedeći teorem.

7.9. Teorem (Jordanova dekompozicija mjere s predznakom) *Neka je ν mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada postoje pozitivne mjere $\mu^+, \mu^- : \Sigma \to [0,\infty]$ takve da je*

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \tag{7.3}$$

i pri tome je barem jedna od mjera μ^+, μ^- konačna.

Dokaz. Neka je (P, N) Hahnova dekompozicija za μ. Definirajmo funkcije $\mu^+, \mu^- : \Sigma \to [0,\infty]$ formulama

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \qquad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N).$$

Kako je $X = P \cup N$ i $P \cap N = \emptyset$, za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi

$$\mu(E) = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu^+(E \cap P) - \mu^-(E \cap N).$$

Time smo pokazali da je $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Budući da μ ne može primiti obje vrijednosti $-\infty$ i ∞, barem jedna od mjera μ^+, μ^- je konačna. ∎

Neka je $\mu = \mu^+ - \mu^-$, gdje su μ^+ i μ^- definirane u dokazu prethodnog teorema. Fiksirajmo $A \in \Sigma$. Za svaki $B \in \Sigma$ takav da je $B \subseteq A$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu^+(B) - \mu^-(B) \leq \mu^+(B) \leq \mu^+(A), \\
-\mu(B) &= \mu^-(B) - \mu^+(B) \leq \mu^-(B) \leq \mu^-(A).
\end{aligned}
$$

Uočite da posljednje nejednakosti vrijede jer su μ^+ i μ^- mjere. Kako je $A \cap P \subseteq A$, $\mu(A \cap P) = \mu^+(A)$ i $-\mu(A \cap P) = \mu^-(A)$, lako je pokazati da je

$$\mu^+(A) = \sup\big\{\mu(B) \,:\, B \in \Sigma, B \subseteq A\big\},$$
$$\mu^-(A) = \sup\big\{-\mu(B) \,:\, B \in \Sigma, B \subseteq A\big\}.$$

To nam govori da μ^+ i μ^- ne ovise o izboru Hahnove dekompozicije (P, N). Za mjeru μ^+ kažemo da je **pozitivni dio**, a za μ^- da je **negativni dio** od μ. Prikaz $\mu = \mu^+ - \mu^-$ zovemo **Jordanova**[28] **dekompozicija** od μ. Mjeru $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ zovemo **varijacija** od μ. Lako je provjeriti da vrijedi

$$|\mu(E)| \le |\mu|(E), \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Sljedeća propozicija govori nam da je varijacija $|\mu|$ najmanja mjera s tim svojstvom.

7.10. Propozicija
Neka je ν mjera a μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ako je

$$|\mu(E)| \le \nu(E), \qquad \forall E \in \Sigma,$$

onda je

$$|\mu|(E) \le \nu(E), \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Dokaz. Neka je (P, N) Hahnova dekompozicija od μ. Po pretpostavci, za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi

$$\nu(E \cap P) \ge |\mu(E \cap P)| = \mu^+(E),$$
$$\nu(E \cap N) \ge |\mu(E \cap N)| = \mu^-(E).$$

Kako je $(E \cap P) \cap (E \cap N) = \emptyset$ i $(E \cap P) \cup (E \cap N) = E$, vrijedi

$$\nu(E) = \nu(E \cap P) + \nu(E \cap N) \ge \mu^+(E) + \mu^-(E) = |\mu|(E). \qquad \blacksquare$$

7.11. Primjer. *Neka je ν realna mjera iz primjera 7.4. Pokažimo da je varijacija od ν zadana formulom*

$$|\nu|(E) = \int_E |f|\, d\mu, \qquad E \in \Sigma.$$

Neka je $P := \{x \in X : f(x) > 0\}$ i $N := \{x \in X : f(x) \le 0\}$. Tada je $X = P \cup N$ i $P \cap N = \emptyset$. Nadalje, za svaki $E \in \Sigma$ je

$$\nu(E \cap P) = \int_{E \cap P} f\, d\mu = \int\limits_{E \cap \{x \in X : f(x) > 0\}} f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu \ge 0,$$

$$\nu(E \cap N) = \int_{E \cap N} f\, d\mu = \int\limits_{E \cap \{x \in X : f(x) \le 0\}} f\, d\mu = -\int_E f^- d\mu \le 0.$$

[28] Camille Jordan (1838.-1932.), francuski matematičar.

To znači da je P pozitivan, a N negativan skup za ν. Prema tome, (P, N) je Hahnova dekompozicija od ν. Sada po definiciji od ν^+, ν^- i $|\nu|$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\nu^+(E) &= \nu(E \cap P) = \int_E f^+ d\mu \geq 0, \\
\nu^-(E) &= -\nu(E \cap N) = \int_E f^- d\mu \geq 0, \\
|\nu|(E) &= \nu^+(E) + \nu^-(E) = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Vrijednost $|\mu|(X)$ označavamo s $||\mu||$ i zovemo **totalna varijacija** od μ. Uočite da je μ realna mjera onda i samo onda ako je $||\mu|| < \infty$.

7.3. Radon-Nikodymov teorem

Radon[29]-Nikodymov[30] teorem nalazi važne primjene u teoriji vjerojatnosti. Primjerice, koristi se za dokazivanje egzistencije uvjetnog očekivanja.

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ bilo koja Σ-izmjeriva funkcija. Prema korolaru 4.19. funkcija $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$ definirana formulom $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ je mjera. Pomoću propozicije 4.13. lako je zaključiti da

$$(\forall E \in \Sigma)\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0.$$

Zaista, ako je $\mu(E) = 0$, onda je $f\chi_E = 0$ (μ-s.s.) pa prema tvrdnji (a) propozicije 4.13. slijedi $\int f\chi_E\, d\mu = 0$. Zato je $\nu(E) = \int_E f\, d\mu = \int f\chi_E\, d\mu = 0$.

Ovo opažanje motivira nas za uvođenje sljedeće definicije.

7.12. Definicija

Neka je μ mjera a ν mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Kažemo da je ν **apsolutno neprekidna u odnosu na** *μ i pišemo $\nu \ll \mu$ ako vrijedi*

$$(\forall E \in \Sigma)\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0.$$

Sljedeća propozicija djelomično opravdava terminologiju iz prethodne definicije.

7.13. Propozicija

Neka su μ i ν mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ), takve da je ν konačna. Mjera ν je apsolutno neprekidna u odnosu na μ, $\nu \ll \mu$, onda i samo onda ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall E \in \Sigma)\ \mu(E) < \delta \Longrightarrow \nu(E) < \varepsilon.$$

---

[29] Johann Radon (1887.-1956.), austrijski matematičar.
[30] Otton Martin Nikodym (1887.-1974.), američki matematičar poljskog porijekla.

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji odgovarajući $\delta > 0$ i pokažimo da je tada $\nu \ll \mu$. Neka je $E \in \Sigma$ takav da je $\mu(E) = 0$. Po pretpostavci tada je $\nu(E) < \varepsilon$ za svaki $\varepsilon > 0$, odakle slijedi $\nu(E) = 0$.

Neka je $\nu \ll \mu$. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji odgovarajući $\delta > 0$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji $E_\delta \in \Sigma$ takav da je $\mu(E_\delta) < \delta$ i $\nu(E_\delta) \geq \varepsilon$. Uzmajući za δ redom $1/2^k$, $\in \mathbb{N}$, dolazimo do skupova $E_k \in \Sigma$ takvih da je $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$, a $\nu(E_k) \geq \varepsilon$. Neka je

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \in \Sigma.$$

Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mu(E) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

odakle slijedi $\mu(E) = 0$. S druge strane, mjera ν je konačna pa neprekidnost na padajuće nizove daje

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \geq \lim_{n\to\infty} \varepsilon = \varepsilon.$$

Dakle, $\mu(E) = 0$ i $\nu(E) > \varepsilon$, što je kontradikcija s pretpostavkom $\nu \ll \mu$. ∎

7.14. Teorem (Radon-Nikodymov teorem)

Neka su μ i ν dvije mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ) takve da je μ σ-konačna i $\nu \ll \mu$. Tada postoji Σ-izmjeriva funkcija $f : X \to [0, \infty]$ takva da je

$$\nu(E) = \int_E f\,d\mu \qquad \textit{za svaki } E \in \Sigma. \tag{7.4}$$

Osim toga, ako je i ν σ-konačna mjera, onda se može postići da f bude konačna i μ-skoro svuda jedinstvena funkcija.

Funkciju f zovemo gustoća *ili* Radon-Nikodymova derivacija mjere ν po mjeri μ *i često pišemo $d\nu = f d\mu$ ili $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da postoji niz $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ izmjerivih i međusobno disjunktnih skupova takvih da je

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \qquad \mu(X_k) < \infty.$$

Pri tome, ako je σ-konačna i mjera ν, onda možemo smatrati da su svi skupovi X_k i ν-konačne mjere, tj. $\nu(X_k) < \infty$. Zaista, kako je μ σ-konačna mjera, postoji niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ izmjerivih skupova takvih da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < \infty$. Pri tome bez smanjenja općenitosti možemo smatrati da su skupovi A_i međusobno disjunktni, jer u suprotnom možemo A_i zamijeniti sa skupom $A_i' := A_i \backslash \bigcup_{k=1}^{i-1} A_i$. Ako mjera ν nije σ-konačna, dovoljno je staviti $X_k = A_k$. Ako je σ-konačna i mjera ν, onda postoji niz $(B_l)_{l\in\mathbb{N}}$ izmjerivih i međusobno disjunktnih skupova takvih da je $X = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l$, $\nu(B_l) < \infty$. Tada je $X = \bigcup_{i,l\in\mathbb{N}} A_i \cap B_l$ i svaki skup $A_i \cap B_l$ je istovremeno i μ-konačan i ν-konačan. Kako izmjerivih skupova $A_i \cap B_l$ ima prebrojivo mnogo, možemo ih poredati u niz $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Što se tiče egzistencije tražene funkcije f, dokaz teorema bit će kompletiran ako pokažemo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji Σ-izmjeriva funkcija $f_k : X \to [0,\infty]$ koja iščezava na $X\backslash X_k$, ne prima vrijednost ∞ ako je ν σ-konačna mjera, i za koju vrijedi

$$\nu(E \cap X_k) = \int_E f_k \, d\mu, \qquad \forall E \in \Sigma. \tag{7.5}$$

Zaista, stavimo li da je

$$f := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f_k,$$

funkcija f primat će vrijednosti u skupu $[0,\infty)$ ako je ν σ-konačna mjera i bit će Σ-izmjeriva jer je jednaka limesu niza Σ-izmjerivih funkcija, a kako se taj niz $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ sastoji od rastućih nenegativnih funkcija, prema teoremu o monotonoj konvergenciji je

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Konačno, kako je $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap X_k)$, tada će biti

$$\nu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap X_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(E \cap X_k) = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{n} f_k d\,\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Na kraju ćemo dokazati da je funkcija f μ-skoro svuda jedinstvena ako je mjera ν σ-konačna.

Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$ i pokažimo da postoji funkcija f_k s traženim svojstvima. U tu svrhu promatrajmo izmjeriv prostor (X_k, Σ_k), gdje je $\Sigma_k := \Sigma \cap X_k$. Zbog konačnosti mjere μ na X_k za svaki racionalan broj $q > 0$ formulom

$$\mu_q := \nu - q\mu$$

dobro je definirana mjera s predznakom $\mu_g : \Sigma_k \to [0,\infty]$. Neka je (P_q, N_q) odgovarajuća Hahnova dekompozicija za μ_q. Prisjetimo se, P_q je pozitivan skup, N_q negativan skup, $X_k = P_q \cup N_q$ i $P_q \cap N_q = \emptyset$. Uzmimo da je $(P_0, N_0) = (X_k, \emptyset)$ po definiciji. Tada vrijedi:

$$(\forall p, q \in \mathbb{Q}, 0 \le p < g) \Longrightarrow \mu(N_p \backslash N_q) = 0. \tag{7.6}$$

Zaista, kako je $N_p\backslash N_q = N_p \cap P_q$, po tvrdnji (iii) iz propozicije 7.6. skup $N_p\backslash N_q$ je negativan u odnosu na μ_p i pozitivan u odnosu na μ_q, tj.

$$(\nu - p\mu)(N_p\backslash N_q) \leq 0 \leq (\nu - q\mu)(N_p\backslash N_q),$$

odakle direktno slijedi $\mu(N_p\backslash N_q) \leq 0$. Kako je $\mu(N_p\backslash N_q) \geq 0$, dobivamo da je $\mu(N_p\backslash N_q) = 0$.

Sada ćemo pokazati da nadalje bez smanjenja općenitosti možemo smatrati da vrijedi:

$$(\forall p, q \in \mathbb{Q}, 0 \leq p < g) \Longrightarrow N_p \subseteq N_q. \tag{7.7}$$

U tu svrhu, neka je

$$N := \bigcup_{\substack{p,q\in\mathbb{Q} \\ 0\leq p<q}} N_p\backslash N_q.$$

Uočite da je $\mu(N) = 0$, a kako je $\nu \ll \mu$ slijedi i da je $\nu(N) = 0$. Zato za svaki racionalan broj $q > 0$ vrijedi

$$\mu_q(N) = \nu(N) - q\mu(N) = 0.$$

Nadalje, za svaki racionalan broj $q > 0$ definirajmo

$$\hat{N}_q := N_q \cup N, \quad \hat{P}_q := X\backslash\hat{N}_q = P_q\backslash N.$$

Nije teško pokazati da za sve racionalne brojeve p i q takve da je $0 \leq p < q$ vrijedi $\hat{N}_p\backslash\hat{N}_q = \emptyset$, odakle slijedi $\hat{N}_p \subseteq \hat{N}_q$. Osim toga, lako je pokazati da je $\hat{N}_q$ negativan, a $\hat{P}_q$ pozitivan skup u odnosu na μ_q. Zato, ako je potrebno, svaku Hahnovu dekompozicju (P_q, N_q) možemo zamijeniti s $(\hat{P}_q, \hat{N}_q)$ i na taj ćemo način dobiti traženo svojstvo (7.7).

Kao što smo to opravdali, nadalje smatramo da vrijedi svojstvo (7.7). Definirajmo funkciju $f_k : X \to [0, \infty]$ na sljedeći način:

$$f_k(x) := \begin{cases} \inf\{q : \ q > 0 \text{ racionalan broj i } x \in N_q\}, & \text{ako je } x \in X_k \\ 0, & \text{ako je } x \in X\backslash X_k, \end{cases}$$

pri čemu po definiciji smatramo da je $\inf\emptyset = \infty$. Uočimo da funkcija f_k ima sljedeća svojstva:

1. Ako je $x \in N_q$, onda je $f_k(x) \leq q$.

2. Ako $x \notin N_q$, onda $x \notin N_p$ za svaki $p < q$ i zato je $f_k(x) \geq q$.

3. Uočimo da je
$$\{x \in X : f_k(x) = \infty\} \subseteq \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q>0}} P_q.$$

4. Ako je mjera ν σ-konačna, onda je skup

$$\{x \in X : f_k(x) = \infty\}$$

μ-zanemariv. Dokaz ove tvrdnje je jednostavan. Radi jednostavnijeg zapisa neka je $A := \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q>0}} P_q$. Kako je $\{x \in X : f_k(x) = \infty\} \subseteq A$, dovoljno je pokazati da je $\mu(A) = 0$. Pretpostavimo da je $\mu(A) > 0$. Za svaki racionalan broj $q > 0$ je $A \subseteq P_q$, a kako je P_q pozitivan skup za $\mu_q = \nu - q\mu$, bilo bi $\nu(A) - q\mu(A) \geq 0$. Specijalno, za svaki $n \in \mathbb{N}$ bi imali $\nu(A) \geq n\mu(A)$, odakle bismo prijelazom na limes $n \to \infty$ dobili $\nu(A) = \infty$, što bi bila kontradikcija s činjenicom da je mjera ν konačna na X_k.

Pokažimo da je f_k izmjeriva funkcija. Treba pokazati da je za svaki $t \in \mathbb{R}$ izmjeriv skup

$$\{x \in X : f_k(x) < t\}$$

Kako je taj skup prazan za $t \leq 0$, nadalje pretpostavimo da je $t > 0$. Tada je

$$\{x \in X : f_k(x) < t\} = \{x \in X_k : f_k(x) < t\} \cup (X \backslash X_k)$$

i zato je dovoljno pokazati da je skup $\{x \in X_k : f_k(x) < t\}$ Σ-izmjeriv. U tu svrhu odaberimo niz (q_n) strogo rastućih racionalnih brojeva takvih da je $0 < q_n < t$ i $\lim_{n\to\infty} q_n = t$. Dovoljno je pokazati da je

$$\{x \in X_k : f_k(x) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{q_n}.$$

To je lako napraviti pomoću (7.7) i gore navedena dva svojstva funkcije f_k. Zaista, ako je $x \in X_k$ takav da je $f_k(x) < t$, onda je $f_k(x) < q_n$ za neki n i zato je $x \in N_{q_n}$. Obrnuto, ako je $x \in N_{q_n}$, onda je $f(x) \leq q_n < t$.

Sada ćemo dokazati jednakost (7.5). Neka je $E \in \Sigma$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\left(N_{\frac{i}{n}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ je rastući niz zanemarivih skupova. Zato i kako je $N_0 = 0$ po definiciji, imamo

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} N_{\frac{i}{n}} = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_{\frac{i+1}{n}} \backslash N_{\frac{i}{n}}$$

pa $E \cap X_k$ možemo zapisati kao

$$E \cap X_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} \overbrace{E \cap \left(N_{\frac{i+1}{n}} \backslash N_{\frac{i}{n}}\right)}^{\text{označimo s } E_i} \bigcup \overbrace{\left(E \backslash \bigcup_{i=0}^{\infty} N_{\frac{i}{n}}\right)}^{\text{označimo s } E_\infty}$$

Zbog disjunktnosti skupova iz gornjeg prikaza dobivamo

$$\nu(E \cap X_k) = \nu(E_\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i).$$

Kako je

$$E_i \subseteq N_{\frac{i+1}{n}} \backslash N_{\frac{i}{n}} = N_{\frac{i+1}{n}} \cap N^c_{\frac{i}{n}} = N_{\frac{i+1}{n}} \cap P_{\frac{i}{n}},$$

na skupu E_i vrijedi

$$\frac{i}{n} \leq f_k \leq \frac{i+1}{n}$$

i zato je

$$\frac{i}{n}\mu(E_i) \leq \int_{E_i} f_k \, d\mu \leq \frac{i+1}{n}\mu(E_i). \tag{7.8}$$

Nadalje, kako je $E_i \subseteq N_{\frac{i+1}{n}} \cap P_{\frac{i}{n}}$, vrijedi

$$(\nu - \frac{k}{n}\mu)(E_i) \geq 0 \quad \text{i} \quad (\nu - \frac{i+1}{n}\mu)(E_k) \leq 0$$

tj.

$$\frac{i}{n}\mu(E_i) \leq \nu(E_i) \leq \frac{i+1}{n}\mu(E_i) \tag{7.9}$$

Iz (7.8) i (7.9) slijedi

$$\nu(E_i) - \frac{1}{n}\mu(E_i) \leq \int_{E_i} f_k \, d\mu \leq \nu(E_i) + \frac{1}{n}\mu(E_i). \tag{7.10}$$

Pokažimo da je

$$\nu(E_\infty) = \int_{E_\infty} f_k \, d\mu. \tag{7.11}$$

Na skupu E_∞ funkcija f_k prima vrijednost ∞. Ako je $\mu(E_\infty) > 0$, budući da je $(\nu - \frac{i}{n}\mu)(E_\infty) \geq 0$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, slijedi $\nu(E_\infty) = \infty$. Ako je $\mu(E_\infty) = 0$, zbog $\nu \ll \mu$ je $\nu(E_\infty) = 0$. U oba slučaja vrijedi jednakost.

Dodavajući jednakost (7.11) u (7.10) i zbrajajući po svim $i \in \mathbb{N}$ dobiva se

$$\nu(E \cap X_k) - \frac{1}{n}\mu(E \cap X_k) \leq \int_E f_k \, d\mu \leq \nu(E \cap X_k) + \frac{1}{n}\mu(E \cap X_k). \tag{7.12}$$

Kako je $\mu(E \cap X_k) \leq \mu(X_k) < \infty$, to je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu(E \cap X_k) = 0$ i zato iz (7.12) slijedi

$$\nu(E \cap X_k) = \int_E f_k \, d\mu.$$

Time smo pokazali da postoji Σ-izmjeriva funkcija $f : X \to [0, \infty]$ za koju vrijedi (7.4).

Kako bismo kompletirali dokaz teorema, pretpostavimo da je mjera ν σ-konačna i dokažimo sljedeće dvije tvrdnje:

(a) Možemo smatrati da je $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konačna funkcija, tj. da je

$$f^{-1}(\infty) = \{x \in X : f(x) = \infty\} = \emptyset.$$

(b) Funkcija f je jedinstvena do na μ-(s.s.) svojstvo.

(a) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ skup $\{x \in X : f_k(x) = \infty\}$ je μ-zanemariv kao što smo pokazali ranije. Kako je

$$\{x \in X : f(x) = \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : f_k(x) = \infty\},$$

a prebrojiva unija zanemarivih skupova je također zanemariv skup, pokazali smo da je $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ μ-zanemariv skup. Budući da je f izmjeriva funkcija, taj je skup Σ-izmjeriv i mjere nula. Zbog toga je $f = f\chi_{f^{-1}(\infty)}$ (s.s.) također izmjeriva funkcija i prema propoziciji 4.13. je $\int_E f\, d\mu = \int_E f\chi_{f^{-1}(\infty)}\, d\mu$ za svaki $E \in \Sigma$. Zato, ako je $\{x \in X : f(x) = \infty\} \neq \emptyset$, možemo funkciju $f : X \to [0, \infty]$ zamijeniti s realnom funkcijom $f\chi_{f^{-1}(\infty)} : X \to [0, \infty)$

(b) Neka su $f, g : X \to [0, \infty)$ dvije Σ-izmjerive funkcije takve da je

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu, \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Treba pokazati da je skup $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ μ-zanemariv. Neka je $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih i međusobno disjunktnih skupova takvih da je

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k,\ \ \nu(X_k) < \infty.$$

Kako je

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X_k : f(x) \neq g(x)\}$$

i kako je prebrojiva unija zanemarivih skupova zanemariv skup, dovoljno je pokazati da su svi skupovi $\{x \in X_k : f(x) \neq g(x)\}$ μ-zanemarivi, tj. da je $(g - f)\chi_{X_k} = 0$ (μ-s.s.). Neka je $k \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci za svaki skup $E \in \Sigma$ vrijedi

$$\nu(X_k \cap E) = \int f\chi_{X_k\cap E}\, d\mu = \int g\chi_{X_k\cap E}\, d\mu < \infty.$$

Prema teoremu 4.32. zato je definiran integral $\int (g - f)\chi_{X_k\cap E}\, d\mu$ i vrijedi

$$\int (g - f)\chi_{X_k\cap E} d\mu = \int g\chi_{X_k\cap E}\, d\mu - \int f\chi_{X_k\cap E}\, d\mu = 0.$$

Drugim riječima, za svaki $E \in \Sigma$ je $\int_E (g - f)\chi_{X_k}\, d\mu = 0$. Prema teoremu 4.30. tada je $(g - f)\chi_{X_k} = 0$ (μ-s.s.). ■

7.4. Lebesgueova dekompozicija

7.15. DEFINICIJA
Neka su μ, ν dvije mjere s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Kažemo da su μ i ν međusobno okomite *ili* singularne *i pišemo $\mu \perp \nu$ ako postoji $A \in \Sigma$ takav da je A nul-skup za μ, a A^c nul-skup za ν.*

Ako su μ i ν međusobno singularne mjere s predznakom i A skup iz prethodne definicije, onda za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E \cap A),\\ \mu(E) &= \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \nu(E \cap A^c).\end{aligned}$$

Zato kažemo da je ν koncentrirana na skupu A, a μ koncentrirana na skupu A^c.

7.16. PRIMJEDBA
Lako je pokazati da će mjere $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ biti singularne onda i samo onda ako postoji skup $A \in \Sigma$ takav da je $\mu(A) = 0$ i $\nu(A^c) = 0$.

7.17. PRIMJER. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada su mjere μ^+ i μ^- međusobno singularne. Zaista, neka je (P, N) Hahnova dekompozicija od μ. Tada je $P \cap N = \emptyset$, $X = P \cup N$ i za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi*

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P), \qquad \mu^-(E) = -\mu(E \cap N).$$

Zato je $\mu^+(N) = \mu(N \cap P) = \mu(\emptyset) = 0$ i $\mu^-(P) = -\mu(P \cap N) = -\mu(\emptyset) = 0$.

7.18. LEMA

(a) Neka su na izmjerivom prostoru (X, Σ) zadane realne mjere ν_1, ν_2 i μ takve da je $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$. Tada je $(\nu_2 - \nu_1) \perp \mu$.

(b) Neka je μ mjera, a ν mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ako je $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$, onda je $\nu = 0$.

Dokaz. (a) Po pretpostavci postoje skupovi $A_1, A_2 \in \Sigma$ takvi da je A_1 nul-skup za ν_1, A_1^c nul-skup za μ, A_2 nul-skup za ν_2 i A_2^c nul-skup za μ. Neka je $A := A_1 \cap A_2$. Po tvrdnji (iii) iz propozicije 7.6. skup A je nul-skup i za ν_1 i za ν_2, pa je A nul-skup i za $\nu_2 - \nu_1$. Nadalje, po tvrdnji (iv) iste propozicije skup $A^c = A_1^c \cup A_2^c$ je nul-skup za μ.
(b) Kako je po pretpostavci $\nu \perp \mu$, postoji skup $A \in \Sigma$ takav da je on nul-skup za μ, a njegov komplement A^c nul-skup za ν. Treba pokazati da je $\nu(E) = 0$ za svaki $E \in \Sigma$. Kako je $\mu(E \cap A) = 0$, pretpostavka $\nu \ll \mu$ povlači $\nu(E \cap A) = 0$. Očito je $\nu(E \cap A^c) = 0$ jer je A^c nul-skup za ν i $E \cap A^c \subseteq A^c$. Zato je $\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = 0$. ∎

7.19. Teorem (Lebesgueova dekompozicija mjere)
Neka su $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ *dvije mjere na izmjerivom prostoru* (X, Σ). *Ako je* ν σ*-konačna mjera, onda postoje i jedinstvene su mjere* ν_a *i* ν_s *na* (X, Σ) *takve da je*

(i) $\nu = \nu_a + \nu_s$,

(ii) $\nu_a \ll \mu$,

(iii) $\nu_s \perp \mu$.

Mjeru ν_a *nazivamo* apsolutno neprekidni dio, *a* ν_s singularni dio *mjere* ν *u odnosu na mjeru* μ.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je ν konačna mjera. Neka je

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \in \Sigma : \mu(A) = 0\}.$$

Po pretpostavci mjera ν je konačna pa skup $\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}$ ima supremum. Odaberimo niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{N}_\mu$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Neka je

$$N := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Koristeći svojstvo σ-subaditivnosti mjere μ lako je pokazati da je $\mu(N) = 0$. Zato je $\nu(N) \leq \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}$ i

$$\nu(A_n) \leq \nu(N) \leq \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

odakle prijelazom na limes $n \to \infty$ dobivamo

$$\nu(N) = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Definirajmo mjere ν_a i ν_s formulama

$$\begin{aligned} \nu_s(E) &:= \nu(E \cap N), \quad E \in \Sigma \\ \nu_a(E) &:= \nu(E \cap N^c), \quad E \in \Sigma. \end{aligned}$$

Tada je očito $\nu = \nu_a + \nu_s$. Kako je $\mu(N) = 0$ i $\nu_s(N^c) = 0$, to je $\nu_s \perp \mu$. Sada ćemo pokazati da je $\nu_a \ll \mu$. Neka je $E \in \Sigma$ takav da je $\mu(E) = 0$. Treba pokazati da je $\nu_a(E) = \nu(E \cap N^c) = 0$. Zaista je tako jer bismo u suprotnom imali

$$\nu(N \cup (E \cap N^c)) = \nu(N) + \nu(E \cap N^c) > \nu(N),$$

što bi bila kontradikcija.

Preostaje pokazati jedinstvenost Lebesgueove dekompozicije. Neka je $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ rastav mjere ν takav da je $\nu'_a \ll \mu$ i $\nu'_s \perp \mu$. Tada je očito $(\nu_a - \nu'_a) \ll \mu$, a tvrdnja

(a) leme 7.18. povlači $(\nu_s - \nu'_s)\perp\mu$. Sad ćemo pokazati da je $\nu_a = \nu'_a$. Kako je $\nu_a - \nu'_a = \nu_s - \nu'_s$, imamo $(\nu_a - \nu'_a) \ll \mu$ i $(\nu_a - \nu'_a)\perp\mu$. Po tvrdnji (b) iz leme 7.18. je $\nu_a - \nu'_a = 0$. Slično se pokaže da je $\nu_s - \nu'_s = 0$.

Slučaj kada je ν σ-konačna mjera svodi se na prethodna razmatranja. Neka je

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_k,$$

pri čemu su skupovi X_k međusobno disjunktni i izmjerivi. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $\Sigma_k := \{E \in \Sigma : E \subseteq X_k\}$, a ν_k i μ_k restrikcije mjera ν i μ na izmjeriv prostor (X_k, Σ_k). Primjenom gornje konstrukciju na ν_k i μ_k dobivamo niz $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ skupova takvih da je $N_k \subseteq X_k$ i $\mu(N_k) = 0$. Neka je $N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Tada mjere ν_a i ν_s definriane formulama $\nu_a(E) = \nu(E \cap N^c)$, $\nu_s(E) = \nu(E \cap N)$ daju traženu Lebesgueovu dekompoziciju. ∎

Zadaci za vježbu

1. Neka su μ_1 i μ_2 dvije realne mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ), a λ_1 i λ_2 bilo koja dva realna broja. Dokažite: (a) $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ je realna mjera. (b) $|\lambda_1\mu_1| = |\lambda_1||\mu_1|$. Uputa: (a) Za svaki niz (E_n) izmjerivih skupova vrijedi

$$\begin{aligned}(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \lambda_1\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) + \lambda_2\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)\\ &= \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_n) + \lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1\mu_1(E_n) + \lambda_2\mu_2(E_n))\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)(E_n).\end{aligned}$$

(b) Neka je (P, N) Hahnova dekompozicija od μ_1. Ako je $\lambda_1 \geq 0$, onda je (P, N) Hahnova dekompozicija i od $\lambda\mu_1$ pa je zato $|\lambda_1\mu_1|(E) = (\lambda_1\mu_1)^+(E) + (\lambda_1\mu_1)^-(E) = (\lambda_1\mu_1)(E\cap P) - (\lambda_1\mu_1)(E\cap N) = \lambda_1\mu_1(E\cap P) - \lambda_1\mu_1(E\cap N) = \lambda_1\mu_1^+(E) + \lambda_1\mu_1^-(E) = |\lambda_1||\mu_1|(E)$. Ako je $\lambda_1 < 0$, onda je (N, P) Hahnova dekompozicija od $\lambda\mu_1$ pa je zato $|\lambda_1\mu_1|(E) = (\lambda_1\mu_1)^+(E) + (\lambda_1\mu_1)^-(E) = (\lambda_1\mu_1)(E\cap N) - (\lambda_1\mu_1)(E\cap P) = \lambda_1\mu_1(E\cap N) - \lambda_1\mu_1(E\cap P) = -\lambda_1(\mu_1(E\cap P) - \mu_1(E\cap N)) = |\lambda_1|(\mu_1^+(E) + \mu_1^-(E)) = |\lambda_1||\mu_1|(E)$.

2. Neka su μ_1 i μ_2 dvije realne mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ). Dokažite: (a) da postoji najveća realna mjera $\mu_1 \wedge \mu_2$ koja je manja i od μ_1 i od μ_2. (b) da postoji najmanja realna mjera $\mu_1 \vee \mu_2$ koja je veća i od μ_1 i od μ_2.

   Uputa: (a) Definirajte $(\mu_1 \wedge \mu_2)(E) := \min\{\mu_1(E), \mu_2(E)\} = \frac{1}{2}(\mu_1(E) + \mu_2(E) - |\mu_1(E) - \mu_2(E)|)$. (b) Definirajte $(\mu_1 \vee \mu_2)(E) := \max\{\mu_1(E), \mu_2(E)\} = \frac{1}{2}(\mu_1(E) + \mu_2(E) + |\mu_1(E) - \mu_2(E)|)$.

3. Neka su λ, ν i μ σ-konačne mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ). Dokažite: (a) Ako je $\nu \ll \mu$ i ako je f nenegativna izmjeriva funkcija, onda je $\int f\, d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$. (b) Ako je $\lambda \ll \mu$ i $\nu \ll \mu$, onda je $\frac{d(\lambda+\nu)}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{d\nu}{d\mu}$. (c) Ako je $\nu \ll \lambda \ll \mu$, onda je $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu}$. (d) Ako je $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$, onda je $\frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}$.

   Uputa: (a) Ako je $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ nenegativna jednostavna funkcija sa standardnim prikazom, onda je $\int \varphi\, d\nu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \nu(E_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{E_i} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int \varphi \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$. Neka je $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz nenegativnih jednostavnih funkcija koji po točkama konvergira prema funkciji f. Tada je $\int f\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$. (b) Prvo uočimo da je $\lambda + \nu \ll \mu$. Za svaki $E \in \Sigma$ je $\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$ i $\lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\mu} d\mu$. Zato je $(\lambda+\nu)(E) = \int \left(\frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$. (c) Za svaki $E \in \Sigma$ je $\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda = \int_E \frac{d\nu}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\mu} d\mu$. Uočite da zadnja jednakost slijedi iz tvrdnje (a). (d) Prema (c) je $\frac{d\nu}{d\nu} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}$. Kako je $\frac{d\nu}{d\nu} = 1$, slijedi tvrdnja.

4. Neka su μ i ν mjere na izmjerivom prostoru takve da je $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ za neku izmjerivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$. U uvodnom razmatranju kod točke 7.3. pokazali smo da je mjera ν apsolutno neprekidna u odnosu na μ. (a) Dokažite da je mjera ν singularna s μ ako i samo ako je $f \equiv 0$ (μ-s.s.). (b) Dokažite da za svaku izmjerivu funkciju $g : X \to [0, \infty]$ vrijedi $\int g\, d\nu = \int g f\, d\mu$.

   Uputa: (a) Ako se postupi slično kao u uvodnom razmatranju kod točke 7.3., pomoću propozicije 4.13. lako je zaključiti:

$$\begin{aligned} \mu \perp \nu \quad &\iff \quad \exists A \in \Sigma,\ \nu(A) = \mu(A^c) = 0 \\ &\overset{prop.\ 4.13.}{\iff} \quad f = 0\ (\mu\text{-s.s.})\ \text{ na } A\ \&\ \mu(A^c) = 0 \\ &\iff \quad f = 0\ (\mu\text{-s.s.})\ \text{ na } X. \end{aligned}$$

   (b) Postupite slično kao u prethodnom zadatku pod (a).

5. Neka su na izmjerivom prostoru (X, Σ) zadane realne mjere ν_1, ν_2 i μ. Dokažite: (a) Ako je $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$, onda je $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2) \perp \mu$ za sve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. (b) Ako je $\nu_1 \ll \mu$ i $\nu_2 \ll \mu$, onda je $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2) \ll \mu$ za sve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

   Uputa: (a) Oponašajte dokaz tvrdnje (a) iz leme 7.18. (b) Ako je $\mu(E) = 0$, onda je $\nu_1(E) = 0$ i $\nu_2(E) = 0$ pa je zato $(c_1\nu_1 + c_2\nu_2)(E) = 0$.

6. Ilustrirajmo primjerom da Radon-Nikodymov teorem ne mora vrijediti ako mjera μ nije σ-konačna. Neka je $X = [0, 1]$, a za σ-algebru Σ uzmimo familiju svih Lebesgueovih skupova iz $[0, 1]$. Nadalje, neka ν bude Lebesgueova mjera λ, a μ mjera prebrojavanja (μ nije σ-konačna!). Tada je ν konačna mjera i apsolutno neprekidna u odnosu na μ. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji Σ-izmjeriva funkcija $f : X \to [0, \infty]$ takva da je

$\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ za svaki $E \in \Sigma$. Specijalno, tada bismo imali

$$1 = \nu(X) = \int_X f\,d\mu \tag{7.13}$$

i zato će dokaz biti kompletiran ako pokažemo da je $f \equiv 0$, jer tada ne može vrijediti (7.13). Preostaje pokazati da je $f \equiv 0$ ili ekvivalentno da je $E_0 := \{x \in X : f(x) \neq 0\} = \emptyset$. Kako je ν konačna mjera, f je integrabilna po mjeri μ, tj. $\nu(X) = \int_X f\,d\mu < \infty$. Zbog toga je skup E_0 σ-konačan s obzirom na mjeru prebrojavanja μ (vidi propoziciju 4.28.), odakle lako slijedi da je E_0 najviše prebrojiv skup i zato je $\nu(E_0) = 0$. Nadalje, kako je $0 = \nu(E_0) = \int_{E_0} f\,d\mu = \int f\chi_{E_0}\,d\mu$, tvrdnja (a) iz propozicije 4.13. povlači $f\chi_{E_0} = 0$ (μ-s.s.), tj. $\{x \in E_0 : f(x) \neq 0\}$ je μ-zanemariv, a kako je μ mjera prebrojavanja, to znači da je $E_0 = \emptyset$.

7. Neka je $(X, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, δ_x Diracova mjera koncentrirana u točki x, a λ Lebesgueova mjera. Pokažite da je $\delta_x \perp \lambda$.

   Uputa: Iskoristite primjedbu 7.16.

Literatura

[1] N. Antonić, B. Vrdoljak, *Mjera i integracija*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2001.

[2] R. G. Bartle, *The Elements of Integration*, Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.

[3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[5] B. K. Driver, *Analysis Tools with Examples*, http://math.ucsd.edu/~driver/DRIVER/book.htm.

[6] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[7] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, I dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[8] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, II dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[9] J. Pečarić, *Nejednakosti*, HMD, Zagreb, 1994.

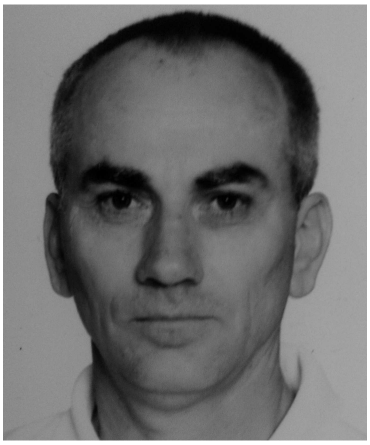
[10] H. L. Royden, *Real Analysis*, 3rd ed., Macmillan, New York, 1988.

[11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[12] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[13] H. J. Wilcox, D. L. Myers, *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1994.

Indeks



Dr.sc. Dragan Jukić, redoviti profesor u trajnom zvanju, rođen je 26. veljače 1962. godine u Bračeviću, općina Split. Od 1963. godine živi u Belišću, gdje je 1977. završio osnovnu školu. Srednju školu završio je 1981. u Valpovu. Diplomirao je matematiku i fiziku na Pedagoškom fakultetu u Osijeku (1986.), a magistrirao (1990.) i doktorirao (1996.) na Matematičkom odjelu PMF-a u Zagrebu.

Radio je kao asistent na Ekonomskom fakultetu u Osijeku (1987.-1995.), predavač na Poljoprivrednom fakultetu u Osijeku (1995.-1997.) i izvanredni profesor na Prehrambeno-tehnološkom fakultetu u Osijeku (1997.-2001.). Od 2001. godine zaposlen je na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku. U znanstveno-nastavno zvanje redovitog profesora izabran je 2004. godine.

Osnovno područje znanstvenog interesa prof.dr.sc. Dragana Jukića je primijenjena i numerička matematika. Dosad je objavio oko pedeset radova u znanstvenim časopisima i zbornicima s međunarodnih konferencija. Aktivno je sudjelovao kao istraživač na četiri znanstvena projekta, a trenutno je voditelj jednog znanstvenog programa i jednog znanstvenog projekta koje financira Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske. Bio je mentor ili sumentor na dvije doktorske disertacija iz područja matematike.

Član je uređivačkog odbora međunarodnih znanstvenih časopisa *Mathematical Communications* i *Journal of Classical Analysis*, kao i stručnog časopisa *Osječki matematički list*. Od 2004. godine je referent za matematički referativni časopis *Mathematical Reviews*.

Od 1996. godine član je Programskog i Organizacijskog odbora međunarodnih konferencija *International Conference on Operational Research* koje organizira Hrvatsko društvo za operacijska istraživanja. Od 2009. član je Znanstvenog odbora međunarodnih konferencija *Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing* koje organizira Matematički odsjek PMF-a u Zagrebu. Bio je član znanstvenog odbora 4. i 5. Hrvatskog matematičkog kongresa.

Član je Hrvatskog matematičkog društva (HMD), Hrvatskog društva za operacijska istraživanja (HDOI) i međunarodnih udruženja: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Mathematical Association of America (MAA), Mathematical Programming Society (MPS-ISI), Institute for Operations Research and the Management Science (INFORMS).