

# Problemi vidljivosti

Domagoj Matijević and Domagoj Ševerdija

20. lipnja 2009.

## Sažetak

Za dvije točke kažemo da vide jedna drugu ukoliko ne postoji prepreka koja bi presjecala segment koji ih spaja. Na temelju geometrijskog modela predstaviti ćemo klasične probleme vidljivosti kao što su *problem galerije*, *problem utvrde* i *problem čuvanja terena*. Iznosimo osnovne rezultate vezane uz spomenute probleme i neke od varijacija tih problema.

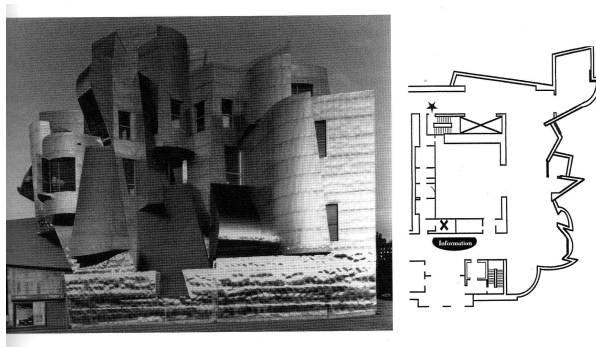
ključne riječi: *visibility problems*, *art gallery problem*, *fortress problem*, *terrain guarding problem*

## 1 Uvod

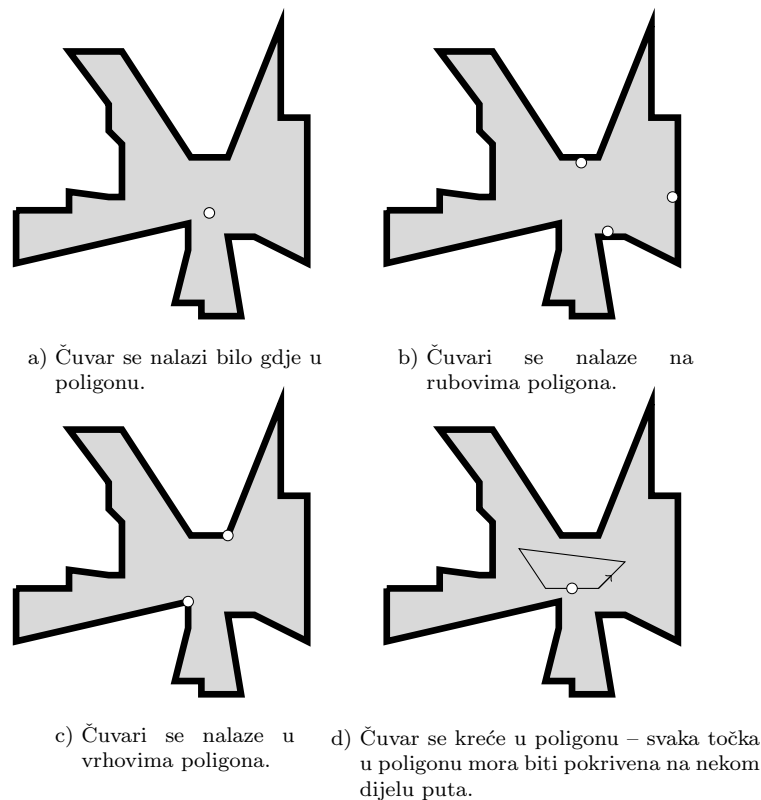
Problemi vidljivosti predstavljaju posebno područje proučavanja u izračunljivoj geometriji (*computational geometry*). Pod pojmom vidljivosti u geometriji podrazumijevamo odnos između dvije točke tako da kažemo da dvije točke vide jedna drugu ukoliko ne postoji prepreka između njih (pojam vidljivosti može imati i druge sinonime: čuvanje, komunikacija, osvjetljenje itd.). Problem vidljivosti nalazi primjene u robotici, planiranju putanje, CAD sustavima [1], postavljanje komunikacijskih antena i sustava za nadziranje [7] itd. U ovom radu čitatelja ćemo upoznati s tri problema vidljivosti, točnije s *problemom galerije*, *problemom utvrde* i *problemom čuvanja terena*.

## 2 Problem galerije s umjetninama

*Problem galerije s umjetninama* (engl. *Art gallery problem*) jedan je od temeljnih problema vidljivosti. Motiviran je problemom smještanja minimalnog broja čuvara u galeriju s umjetninama tako da svi čuvari zajedno promatraju čitavu galeriju (vidi *Sliku 1*).



Slika 1: Galerija s umjetninama i njen tlocrt, slika preuzeta iz [8].



Slika 2: Galerija kao poligon i različiti tipovi čuvanja interijera.

Viktor Klee je 1973. godine postavio slijedeće pitanje:

Koliko je čuvara nužno, a koliko dovoljno da čuvaju umjetnine u galeriji s  $n$  zidova?

## 2.1 Geometrijska svojstva problema

Promatrajmo našu galeriju kao geometrijski lik i u tu svrhu tlocrt naše galerije možemo predstaviti kao jednostavni poligon  $P$ . Poligon  $P$  je potrebno čuvati čuvarima koji su predstavljeni točkama u ravnini. Svaki čuvar vidi određeni dio poligona, a svi čuvari zajedno trebaju vidjeti čitavi poligon. Prirodno pitanje koje se postavlja je koliko čuvara nam je potrebno da čuvamo poligon  $P$ ?

Ovisno o lokaciji i tipu čuvara koje želimo koristiti razlikujemo nekoliko mogućih varijanti čuvanja galerije: čuvari koji se mogu nalaziti u interijeru galerije, čuvari koji se nalaze uz zidove galerije, čuvari koji se nalaze u kutovima galerije i pokretni čuvari (vidi Sliku 2). Uočite da u svim primjerima u Slici 2 čuvari pokrivaju interijer i da ukupni broj čuvara koji pokrivaju poligon varira.

Kod klasičnog problema galerije podrazumijevamo čuvare u vrhovima.

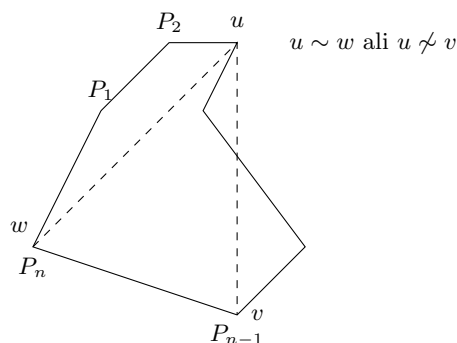
Formalizirajmo sada pojmove: Poligon  $P$  je uređeni niz točaka  $P_1, P_2, \dots, P_n, n \geq 3$  koje zovemo *vrhovima* poligona  $P$  zajedno sa skupom dužina, koje zovemo *rubovi*. Rubovi spajaju vrhove  $P_i$  s  $P_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  i vrh  $P_n$  s  $P_1$ . (vidi Sliku 3). Poligon  $P$  je *jednostavan* ako se nikoja 2 nesusedna ruba ne sijeku. Jednostavan poligon u ravnini omeđuje ravninu na 2 dijela: vanjsko područje (*eksterijer*) i unutarnje područje (*interijer*). Mi ćemo pod pojmom poligona podrazumijevati poligon zajedno s njegovim unutarnjim područjem.

Za točku  $v \in P$  kažemo da je *vidljiva* iz točke  $u \in P$  i pišemo  $u \sim v$  ukoliko je dužina  $\overline{uv}$  u potpunosti sadržana u poligonu  $P$ . Za skup  $Q$  točaka poligona  $P$  kažemo da *čuva* poligon  $P$  ako je svaka točaka poligona  $P$  vidljiva iz barem jedne točke u  $Q$ .

*Triangularizacija* poligona  $P$  je podijela poligona  $P$  u skup trokuta koji su u parovima disjunktni i vrhovi tih trokuta su vrhovi poligona  $P$ , a stranice trokuta su rubovi poligona  $P$  ili dijagonale koje spajaju 2 nesusedna vrha u poligonu  $P$  (Slika 4.a).

Za danu triangularizaciju  $T$  poligona  $P$  definiramo graf  $GT(P)$  na način da su mu vrhovi upravo vrhovi poligona  $P$ , a bridovi su stranice trokuta iz triangularizacije.

*Bojanje* vrhova nekog grafa  $G$  podrazumijeva pridruživanje boja njegovim vrhovima tako da svaka 2 susjedna vrha budu različito obojani. *Kromatski broj* grafa  $G$  je najmanji prirodni broj  $k$  različitih boja za kojeg je bojanje tog grafa moguće. U tom slučaju, kažemo da  $G$  ima kromatski broj  $k$ .



Slika 3: Jednostavni poligon s  $n$  vrhova

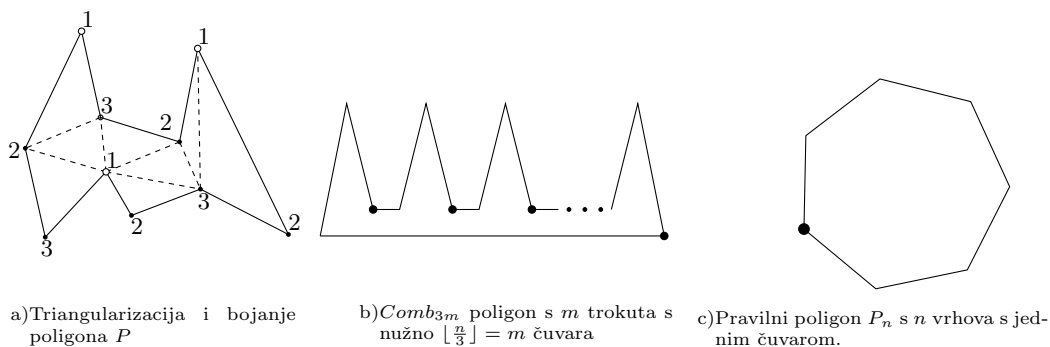
Koristiti ćemo slijedeća dva teorema:

**Teorem 2.1** (Teorem o triangularizaciji, [2]). *Svaki se jednostavan poligon može triangularizirati. Štoviše, svaka triangularizacija  $T$  poligona  $P$  s  $n$  vrhova sadrži  $n - 2$  trokuta*

**Teorem 2.2** ([2]). *Neka je  $P$  jednostavni poligon i  $T$  triangularizacija poligona  $P$ . Tada  $GT(P)$  ima kromatski broj 3.*

## 2.2 Složenost problema

Vratimo se sada na naš problem. Dakle, koliko je potrebno čuvara da bismo čuvali jednostavni poligon  $P$ ? Odgovor na to pitanje daje nam Chvátalov teorem.



a) Triangularizacija i bojanje poligona  $P$

b)  $Comb_{3m}$  poligon s  $m$  trokuta s nužno  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = m$  čuvara

c) Pravilni poligon  $P_n$  s  $n$  vrhova s jednim čuvarom.

Slika 4: Triangularizacija poligona, “češalj” poligon i primjer čuvanja pravilnog poligona.

**Teorem 2.3** (Chvátalov teorem). *Za čuvanje poligonalne galerije s  $n$  vrhova dovoljno je, a ponekad i nužno  $\lfloor n/3 \rfloor^1$  čuvara.*

*Dokaz.* Neka je  $P$  jednostavni poligon s  $n$  vrhova. Po *Tm 2.1* možemo triangularizirati  $P$  i dobivamo graf  $GT(P)$ . Po *Tm 2.2* možemo obojati vrhove grafa  $GT(P)$  tako da bilo koja 2 susjedna vrha grafa  $GT(P)$  budu obojana različitim bojama. Neka su  $\{1, 2, 3\}$  redom oznake boja. Uočite da boje dijele vrhove od  $GT(P)$  u disjunktne particije  $C_1, C_2$  i  $C_3$  (vidi *Sliku 4.a*). Očito, jedna od particija, npr.  $C_1$  sadrži  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  točaka. Kako svaki trokut u triangularizaciji sadrži sve 3 boje, dovoljno je staviti čuvara na vrhove iz  $C_1$ . Tvrdnja teorema dalje slijedi iz činjenice da se svaki trokut može čuvati čuvarom iz jednog vrha i da vrhovi poligona tvore vrhove grafa  $GT(P)$ .

Situacija kad nam je potrebno nužno  $\lfloor n/3 \rfloor$  čuvara za čuvanje poligona možemo primjetiti iz slike poligona  $Comb_n$ ,  $n = 3m$ , gdje  $m$  je broj gornjih trokuta (*Slika 4.b*).  $\square$

Konstruktivni dokaz *Tm 2.3* može nam poslužiti za formuliranje algoritma NADJICUVARE koji će nam za dani jednostavni poligon  $P$  s  $n$  vrhova vratiti  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  vrhova u koje možemo staviti čuvere.

NADJICUVARE( $P$ )

1. triangulariziraj  $P$
2. obojaj s  $\{1, 2, 3\}$  vrhove od  $T$
3. postavi čuvere na vrhove koji su obojani bojom 1.

Gornja procedura se sastoji od 3 koraka, od kojih se svaka može efikasno implementirati. *Korak 1.* moguće je implementirati primjenom Chazelleove procedure za triangularizaciju poligona, a za *korak 2.* postoji jednostavna procedura 3-bojanja grafa. (Detaljnije, vidi [2],[9]).

Primjetimo da *Tm 2.3* odnosno algoritam NADJICUVARE daje općenito gornju među broja čuvara koji su dovoljni da čuvaju bilo koji poligon s  $n$  vrhova. Dakle, sigurno postoji primjeri poligona gdje nam je broj potrebnih čuvara znatno manji nego rješenje koje nam vraća algoritam. Zapravo, mogli bi reći da je procedura NADJICUVARE pesimistična jer, kao što možemo vidjeti na primjeru u *Slici 4.c*, procedura će nam vratiti  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara, premda je dovoljno odabrati jedan vrh poligona da čuva čitav poligon.

Postavlja se pitanje, možemo li osmisliti algoritam koji će nam pronaći *najmanji* broj čuvara potreban za čuvanje nekog poligona  $P$ ? Na žalost, situacija je pesimistična i po tom pitanju jer se može pokazati da problem optimalnog čuvanja galerije s umjetninama pripada klasi takozvanih NP-teških problema<sup>2</sup>. Stoga se u praksi često koriste aproksimacijski algoritmi i heuristike za rješavanje problema.

## 2.3 Varijacije problema

Poznati su i drugi rezultati vezani za nužan i dovoljan broj čuvara ukoliko mijenjamo geometrijski model galerije. Predstaviti ćemo 2 primjera.

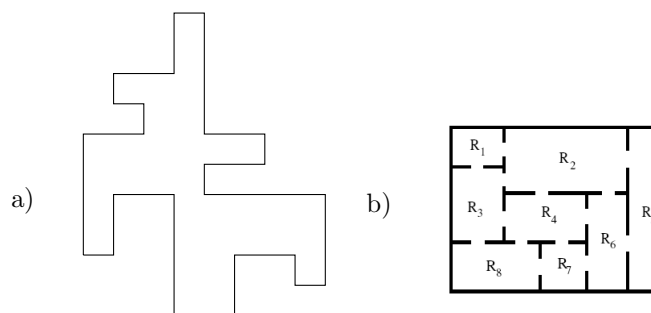
### 2.3.1 Ortogonalna galerija s umjetninama

Za poligon  $P$  kažemo da je *ortogonalan* ako su mu rubovi paralelni s  $x$ -osi ili s  $y$ -osi (*Slika 5.a*).

Na sličan način kao u *Tm 2.3* možemo pokazati da se ortogonalan poligon može podijeliti na konveksne četverokute (analogija triangularizacije) i iz toga lako pokazati da vrijedi slijedeće:

<sup>1</sup> $\lfloor \lfloor \cdot \rfloor \rfloor$  je oznaka za pod funkciju koja zadanom realnom argumentu  $x$  vraća najveći cijeli broj  $x'$  koji je manji ili jednak  $x$ . npr.  $\lfloor \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor = 2$ ,  $2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$

<sup>2</sup>Precizna definicija klase NP-teških problema izlazi iz tematskog okvira ovog članka. Intuitivno, svaki problem za koji kažemo da pripada klasi NP-teških problema je problem koji je 'nemoguće' optimalno riješiti.



Slika 5: Ortogonalna galerija i tradicionalna galerija s umjetninama

**Teorem 2.4.** [2] *Svaki se ortogonalni poligon s  $n$  vrhova može čuvati s  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara.*

### 2.3.2 Pravokutna galerija s umjetninama

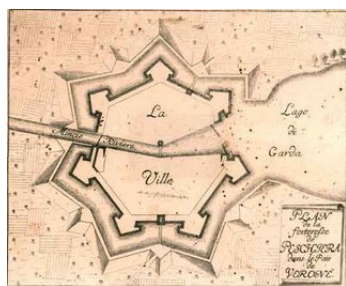
U formulaciji problema galerije s umjetninama, galerija je predstavljena kao jednostavan poligon. Realističniji model galerije bi bila pravokutna zgrada podijeljena u pravokutne sobe (Slika 5.b).

Pitanje je koliko je potrebno čuvara staviti u galeriju da čuva sve sobe? Iz slike možemo uočiti ukoliko stavimo čuvara na vrata između 2 sobe, čuvar može čuvati najviše 2 sobe. Ako galerija ima  $n$  soba onda čitavu galeriju sigurno moramo moći čuvati s  $\lceil \frac{n}{2} \rceil^1$  čuvara. Preciznije, može se pokazati sljedeća tvrdnja:

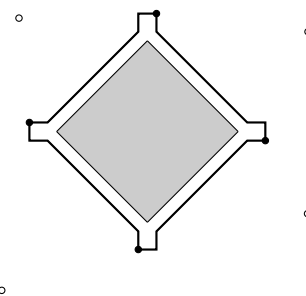
**Teorem 2.5.** [2]  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  čuvara je dovoljno, ali uvijek i nužno za čuvanje svake pravokutnu galerije s  $n$  soba.

## 3 Problem utvrde - Fortress problem

U ovom dijelu predstaviti ćemo *Problem utvrde* (engl. *Fortress problem*). Za razliku od klasičnog problema galerije gdje je zahtjev bio na čuvanju interijera danog poligona  $P$ , ovdje pažnju usmjeravamo na čuvanje eksterijera tog poligona. Problem je motiviran čuvanjem utvrde od navale neprijatelja pomoću čuvara koji su postavljeni na zidove utvrde (Slika 6). Treba odabrati broj čuvara i njihov položaj tako da čitava okolica oko utvrde bude pokrivena.



Slika 6: Utvrda Pescheira del Garda blizu Verone u Italiji



Slika 7: Čuvanje eksterijera vanjskog poligona  $P$  s čuvarima iz vrha (crni kružići) i točkama iz eksterijera (bijeli kružići).

<sup>1</sup> $\lceil \cdot \rceil$  je oznaka za *strop funkciju* koja zadanom realnom argumentu  $x$  vraća najmanji cijeli broj  $x'$  koji je veći ili jednak  $x$ . npr.  $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3 \geq \frac{5}{2} = 2.5$

### 3.1 Geometrijska svojstva problema

Koristeći geometrijske pojmove iz prethodnog odjeljka utvrdu možemo predstaviti kao jednostavni poligon s  $n$  vrhova, područje koje se čuva je eksterijer poligona, a čuvare možemo modelirati kao točke koje mogu biti postavljene na vrhovima poligona, rubovima poligona, eksterijeru poligona ili "pokretne" točke.

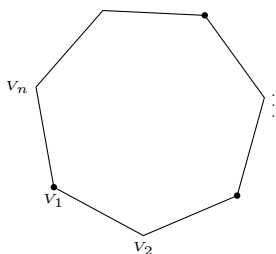
Problem utvrde možemo sada ovako formulirati:

Koliko je čuvara dovoljno, a ponekad i nužno postaviti u vrhove jednostavnog poligona  $P$  s  $n$  vrhova tako da svi čuvari zajedno pokrivaju eksterijer poligona  $P$ ?

### 3.2 Čuvanje utvrde iz vrhova poligona

Slijedeća tvrdnja nam daje uvijek gornju među na broj potrebnih čuvara za čuvanje utvrde.

**Teorem 3.1** (O'Rourke and Wood 1983).  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  čuvara je dovoljno, a ponekad i nužno za čuvanje eksterijera jednostavnog poligona s  $n$  vrhova.



Slika 8: Pravilni poligon  $P_n$  s nužnim  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  čuvarima.

**Dokaz.** Prvo pokažimo na primjeru pravilnog poligona s  $n$  vrhova da je za čuvanje eksterijera  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  nužan broj čuvara.

Iz Slike 8 možemo uočiti da za čuvanje pravilnog poligona s  $n$  vrhova trebamo uzeti svaki drugi vrh kako bi čuvali eksterijer, što znači da moramo odabrati nužno  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  vrhova za čuvanje eksterijera.

Pokažimo sada da za čuvanje eksterijera jednostavnog poligona je dovoljno izabrati  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  čuvara.

Dokaz se temelji na tome da eksterijer danog poligona predstavimo kao interijer nekog drugog poligona na kojeg onda možemo primjeniti Tm 2.3.

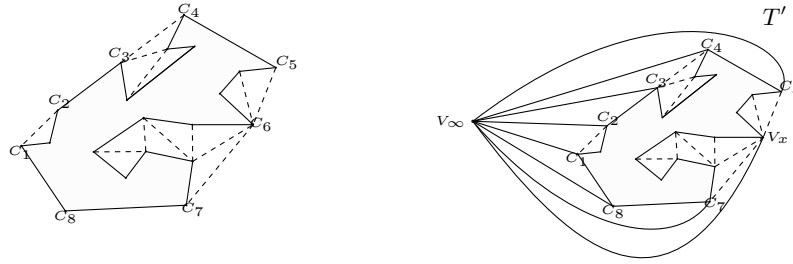
Uzmimo proizvoljni jednostavni poligon  $P$  (Slika 9.a). Pronađimo konveksnu ljusku  $CH(P)$ <sup>3</sup> vrhova poligona  $P$  i triangularizirajmo onaj dio eksterijera poligona  $P$  koji je sadržan u konveksnoj ljusci  $CH(P)$  i eksterijeru poligona  $P$ . Označimo s  $T$  graf čiji su vrhovi upravo vrhovi poligona  $P$ , a rubovi su stranice iz triangularizacije.

Dodajmo sada dodatan vrh  $V_\infty$  u graf  $T$  izvan  $CH(P)$  i učinimo ga susjednim vrhom svim vrhovima u  $CH(P)$  i označimo novonastali graf s  $T'$  (Slika 9.b). Odaberimo sada vrh  $V_x$  iz konveksne ljuske  $CH(P)$  i rastavimo ga na vrhove  $V_{x'}$  i  $V_{x''}$  tako da jedan vrh zadrži rub s  $V_\infty$ , a drugom dodamo rub s  $V_\infty$  na način da novonastali graf  $T'' := (T' \setminus \{V_x\}) \cup \{V_{x'}, V_{x''}\}$  bude planaran, tj. nikoja dva brida mu se ne sjeku (Slika 9.c). Tvrdimo da je  $T''$  triangularizacijski graf novog jednostavnog poligona  $P'$ , kojeg čine vrhovi poligona  $P$  zajedno s vrhom  $V_\infty$ , koji 'dobro' aproksimira eksterijer poligona  $P$ . Definirajmo poligon  $P'$  koristeći slijedeći geometrijski argument: smjestimo vrh  $V_\infty$  u točku koja se nalazi dovoljno daleko te vrhove  $V_{x'}$  i  $V_{x''}$  dovoljno udaljimo jedan od drugoga tako da bridovi grafa  $T''$  postanu ravne linije.

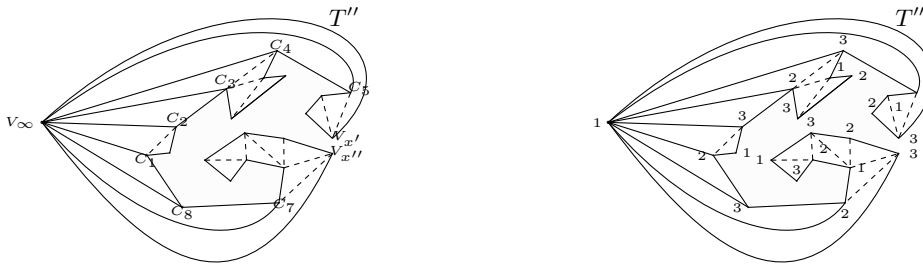
Iz svojstva da se triangularizacijski graf svakog jednostavnog poligona može obojati s 3 boje (Tm 2.2), rasporedimo boje  $\{1,2,3\}$  na graf  $T''$  (Slika 9.d). Razlikujemo 2 slučaja:

- Neka je 1 boja koja se pojavljuje najmanje puta. Ukoliko  $V_\infty$  nije obojan bojom 1 tada je s 1 obojano najviše  $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  vrhova.
- Ukoliko je 1 boja koja se najmanje puta pojavljuje i ukoliko je s 1 obojan  $V_\infty$  tada moramo uzeti drugu boju jer  $V_\infty$  nije vrh s poligona  $P$ . Uzmimo, dakle, slijedeću boju koja se pojavljuje najmanje puta

<sup>3</sup>Najmanji konveksan poligon koji sadrži točke iz  $P$ .



- a) Točke  $C_i, i = 1, \dots, 8$  su vrhovi konveksne ljuske  $CH(P)$  poligona  $P$ . Iscrtane dužine predstavljaju stranice triangularizacije
- b) Vrh  $V_\infty$  spojen sa svim vrhovima od  $CH(P)$  zajedno s triangularizacijom  $T$



- c) Graf  $T''$  kojeg smo dobili iz  $T' \setminus V_x$  i dodali nove vrhove  $V_{x'}, V_{x''}$ .
- d) Ukoliko izaberemo 2 za položaj čuvara na vrhovima poligona, čuvari će pokriti eksterijer i imati ćemo ih  $8 \leq \lceil \frac{20}{2} \rceil = 10$

Slika 9: Prikaz koraka u dokazu *Tm 3.1*.

npr. boja 2. Kako je s 1 obojan vrh  $V_\infty$  uočimo da boje 2 i 3 mogu obojati najviše  $(n + 2) - 1 = n + 1$  vrhova. Slijedi da 2 može bojati najviše  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  vrhova poligona.

Čuvare postavljamo na odabranu boju. Konačno, u oba slučaja čuvari pokrivaju trokute incidentne s  $V_\infty$ . Kako  $V_\infty$  nije čuvar, izabrani čuvari su točke konveksne ljuske  $CH(P)$  koji pokrivaju čitav eksterijer od  $CH(P)$ . Eksterijer poligona  $P$ , a koji se nalazi unutar konveksne ljuske, je također pokriven budući su svi trokuti iz triangularizacije  $T''$  čuvani.  $\square$

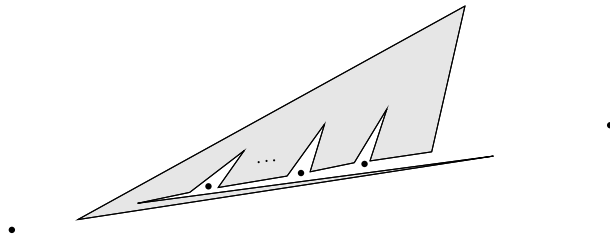
### 3.3 Čuvanje utvrde van poligona

Promotrimo sada problem uz uvjet da čuvari mogu biti bilo gdje u eksterijeru poligona uključujući i same rubove poligona. Iskažimo teorem o dovoljnom i nužnom broju čuvara za čuvanje utvrde izvan poligona.

**Teorem 3.2.**  $\lfloor 6 \rfloor \lceil \frac{n}{3} \rceil$  čuvara je dovoljno, a ponekad i nužno za čuvanje eksterijera poligona  $P$  s  $n$  vrhova.

*Dokaz.* Nužnost u pojedinim slučajevima pokazujemo generičkim primjerom u *Slici 10*. Za eksterijer izvan konveksne ljuske izaberemo 2 čuvara, a za eksterijer unutar poligona odabiremo na sličan način kao i u češalj poligonu nužno  $\lfloor \frac{n-4}{3} \rfloor + 2 = \lceil \frac{n}{3} \rceil, n \geq 4$  čuvara.

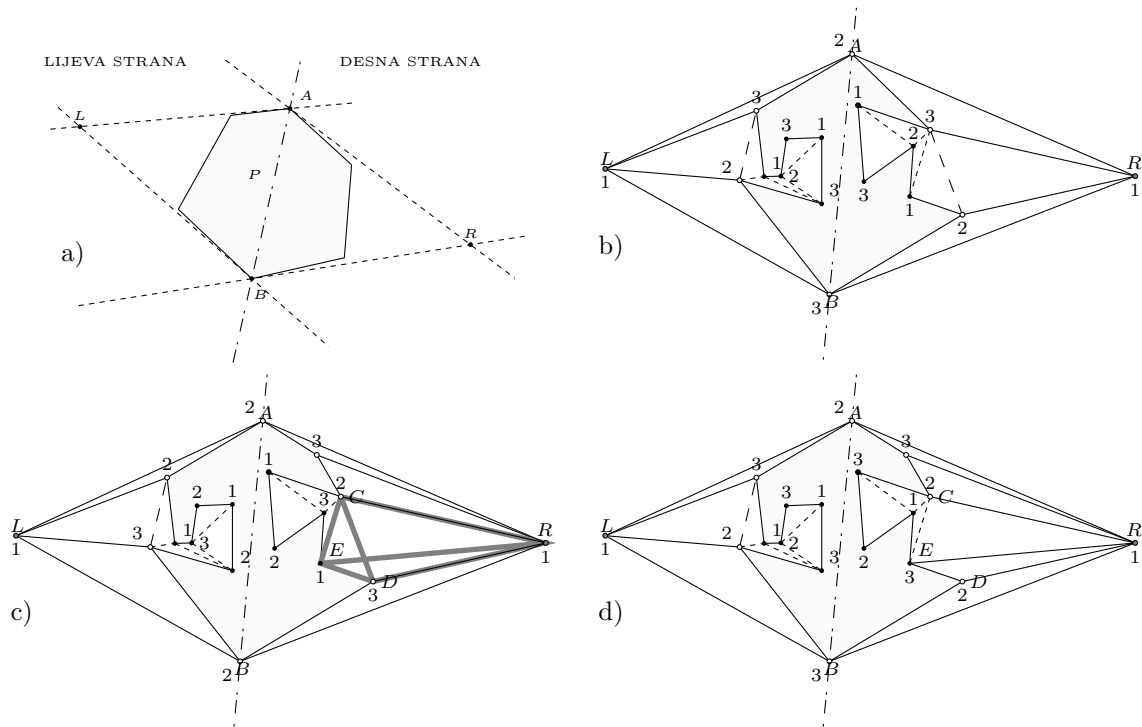
Dokažimo sada dovoljnost. Promotrimo slučaj kada je poligon  $P$  konveksan (*Slika 11.a*) i odredimo dovoljan broj čuvara za eksterijer. Odaberemo 2 vrha: Najviši vrh  $A$  (npr. vrh sa najvećom  $y$  koordinatom) i najniži vrh  $B$  (npr. vrh s najmanjom  $y$  koordinatom), ukoliko ti vrhovi nisu jedinstveni, rotiramo poligon  $P$  dok ne



Slika 10: Poligon sa  $n$  vrhova kojem je nužan broj čuvara  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

dobijemo jedinstveni najviši i najniži vrh (npr. ukoliko je  $P$  kvadrat čije su stranice paralelne s  $x$  odnosno  $y$  osi, možemo ga rotirati za  $45^\circ$  i odaberemo 2 dijagonalno suprotna vrha). Sada na lijevu i desnu odaberemo točke  $L, R$  koje vide najviši i najniži vrh konveksnog poligona  $P$ . Uočite da s čuvarima u točkama  $L, R$  pokrivamo eksterijer poligona, dakle  $2 \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil, n > 3$ .

U slučaju da poligon  $P$  nije konveksan, ideja je da nađemo čuvare za njegovu konveksnu ljusku, a čuvare eksterijera poligona  $P$  koji je sadržan u  $CH(P)$  nađemo tako da triangulariziramo područje i primijenimo  $Tm$  2.3. To možemo napraviti na način prikazano na Slici 11.b.



Slika 11: Čuvanje eksterijera poligona čuvarima izvan poligona.

Dakle, nađemo konveksnu ljusku  $CH(P)$  poligona  $P$  i triangularizirajmo eksterijer poligona  $P$  unutar  $CH(P)$ . Točke  $L, R$  odaberemo na način kako smo prethodno učinili za konveksni poligon. Neka je graf  $G$  graf čiji su vrhovi točke  $L, R$  i vrhovi poligona  $P$ , a rubovi dijagonale koje spajaju  $L$  odnosno  $R$  s vrhovima od  $CH(P)$  s odgovarajuće strane, zajedno sa dijagonalama triangularizacije u eksterijeru unutar konveksne ljuske. Primjetimo da je graf  $G$  graf triangularizacije, međutim ne više jednostavnog poligona da ne možemo



više primjeniti *Tm 2.2*. Stoga moramo dodatno argumentirati da je graf  $G$  3-obojev:

- SLUČAJ 1. Uočite da ukoliko je broj vrhova konveksne ljuste  $CH(P)$  paran broj da je graf  $G$  3-obojev. To možemo učiniti tako da naizmjenično obojamo vrhove konveksne ljuste s 2, 3, a s 1 obojamo  $L, R$ . Uočite da smo time fiksirali bojanje vrhova bridova konveksne ljuste, a koji su zajednički poligonima koji predstavljaju eksterijer unutar konveksne ljuste te možemo 3-obojevati eksterijer unutar poligona (po načelu *ear clipping*, [5]). Kako  $G$  ima  $n + 2$  vrhova po *Tm 2.3*,  $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$  je dovoljno čuvara da pokriju eksterijer od  $P$  i čuvaru možemo staviti na one vrhove od  $G$  koji su obojani s najmanje pojavljivanom bojom.
- SLUČAJ 2. Ukoliko je  $|CH(P)|$  neparan, graf  $G$  ne mora biti 3-obojev (vidi *Sliku 11.c*). Ideja je da se  $G$  modificira tako da postane 3-obojev. Neka je  $CD$  otvor u  $CH(P)$ , tj. eksterijer unutar konveksne ljuste pri bridu  $CD$  (takav otvor postoji jer je  $P$  nekonveksan) i bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da se  $CD$  nalazi na desnoj strani poligona. Odaberimo vrh  $E$  koji s  $C, D$  tvori trokut iz triangularizacije u otvoru  $CD$  takav da zajedno s  $R, C, E, D$  tvori konveksan četverokut  $RCED$ . Načinimo novi graf  $G'$  tako da grafu  $G$  dodamo rub  $ER$ , a oduzmemo rub  $CD$  (ukoliko  $R \not\sim E$ ,  $R, L$  uvijek možemo pomakuti tako da  $R \sim E$ , a da sačuvamo svojstvo da  $L, R$  zajedno vide obje strane konveksne ljuste). Promotrimo da tim postupkom nismo promijenili područje koje trebamo čuvati. Dakle, novonastali graf  $G'$  s  $n + 2$  vrha ima sada paran broj dijagonala spojenih s  $L, R$  (*Slika 11.d*). Primijenimo razmatranje za paran slučaj. Problem može nastati ukoliko  $C, D$  nisu odabrani kao čuvari, ali u tom slučaju mora biti odabran ili  $R$  ili  $E$  što implicira da je eksterijer i dalje pokriven. Zaključujemo da je za čuvanje eksterijera od  $P$  dovoljno  $\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$  čuvara.

□

Na temelju bojanja grafa  $G$  (odnosno  $G'$ ) čuvaru stavimo na one vrhove koji su obojani s najmanje pojavljivanom bojom. U *Slici 11.b* najmanje pojavljivana boja je 2 pa čuvaru stavljamo u vrhove obojani s 2. Najmanje pojavljivana boja je 1 u *Slici 11.c* pa ovdje čuvaru možemo staviti i u točke  $L$  i  $R$ . Uočimo da ovakvom analizom problema dopuštamo najviše 2 čuvara da budu izvan poligona. Isto tako, uočimo, da dopuštanjem čuvara da budu i izvan poligona "približavamo" se ocjeni čuvanja interijera poligona ( $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  nasuprot  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ).

Problem čuvanja poligona može se generalizirati i na čuvanje istovremeno interijera i eksterijera poligona čuvarima u vrhovima. Takav problem se zove *problem zatvorskog dvorišta* (engl. *prison yard problem*). Iznosimo rezultat iz [3] za problem:

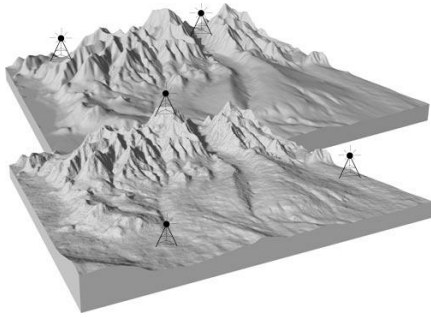
**Teorem 3.3** (Füredi, Kleitman, 1990).  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  čuvara smještenih u vrhovima jednostavnog poligona  $P$  je dovoljno da pokriju zajedno interijer i eksterijer od  $P$  s  $n$  vrhova. Ukoliko je  $P$  nekonveksan, onda je dovoljno  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  čuvara u vrhovima.

## 4 Problem čuvanja terena

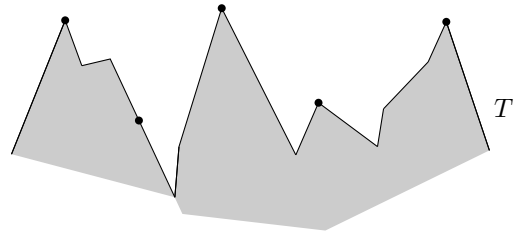
Promotrimo slijedeći scenario:

Na određenom terenu operateri mobilne telefonije žele postaviti komunikacijske antene tako da čitav teren bude pokriven signalom (*Slika 12*). U svrhu minimiziranja cijene same investicije, želja operatera je pokriti teren s što je manje moguće antena.

Ovaj problem možemo formulirati kao *problem čuvanja terena* uz pomoć čuvara koje postavljamo na teren. Cilj nam je pronaći najmanji broj čuvara tako da čitav teren bude čuvan. Takav problem se naziva *problem čuvanja 2.5D terena* (engl. *2.5D terrain guarding problem*). Na žalost i ovaj problem se može pokazati da



Slika 12: 3D teren s postavljenim komunikacijskim antenama.



Slika 13: Ilustracija 1.5D-terena s čuvarima.

pripada klasi tzv. NP-teških problema. Čak štoviše, malo je vjerojatno da se može dobro aproksimirati (može se pokazati da je problem jednako težak kao i generalni *Set cover* problem [7]).

Ukoliko smanjimo dimenziju terena, tj. umjesto trodimenzionalnog područja promatramo poligonalnu liniju dolazimo do tzv. *problem čuvanja 1.5D terena*. Preciznije, za  $x$ -monotonu poligonalnu liniju  $T$  cilj nam je pronaći najmanji broj čuvara koje ćemo postaviti na  $T$  tako da čuvamo svaku točku poligonalne linije (Slika 13).

#### 4.1 Problem čuvanja 1.5D terena

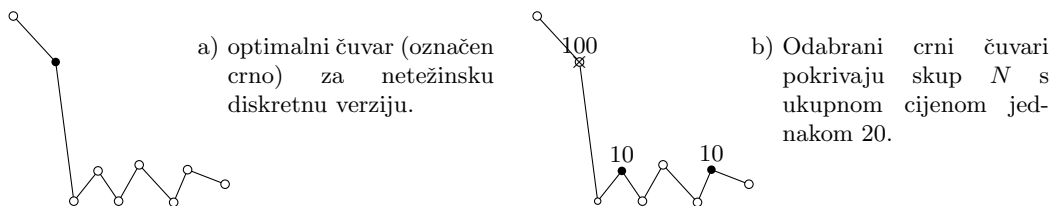
Teren  $T$  je  $x$ -monotona poligonalna linija s  $n$  vrhova. Označimo s  $V$  vrhove terena  $T$ . *Problem čuvanja 1.5D terena* (engl. *1.5D terrain guarding problem*) za  $T$  je problem postavljanja čuvara na  $T$  tako da je svaka točka  $p \in T$  čuvana od strane barem jednog čuvara. Ovisno o tipu i položaju čuvara na terenu  $T$  razlikujemo nekoliko varijanata problema.

#### 4.2 Diskretna verzija

U *diskretnoj* verziji problema dan nam je skup mogućih čuvara  $G \subseteq T$  i skup točaka koje želimo čuvati  $N \subseteq T$ . Cilj je odrediti najmanji skup čuvara  $A \subseteq G$  koji će braniti  $N$ .

Dodatno se može odrediti cijena svakog potencijalnog čuvara iz  $G$ , tj. funkcija  $w : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  pa se problem svodi na pronalaženje podskupa čuvara  $A \subseteq G$  tako da je  $\sum_{g \in A} w(g)$  najmanja, tj. ukupna cijena odabranih čuvara je najmanja moguća.

Promotrimo primjer na *Slici 14* za slučaj kad je  $G = N = V$ . Uočimo da težinski slučaj ne ovisi isključivo o geometriji terena, već ponajprije o induciranim cijenama na čuvarima.



Slika 14: Primjer diskretne verzije problema kad je  $G = N = V$

Uočimo da u prvom slučaju na *Slici 14* jedan čuvar pokriva čitav  $N$ , dok u drugom slučaju, bez obzira što imamo više čuvara koji pokrivaju  $N$ , oni su "isplativiji" nego da smo odabrali čuvara s težinom 100.

### 4.3 Jednostrana verzija

Možemo dodatno staviti restrikciju na smjer gledanja čuvara pa takvu varijantu problema formuliramo: Za dani skup mogućih čuvara  $G \subseteq T$  i skup točaka koje želimo čuvati  $N \subseteq T$  razlikujemo:

1. *čuvanje s lijeva* - svaka točka iz  $N$  mora biti čuvana s lijeva.
2. *čuvanje s desna* - svaka točka iz  $N$  mora biti čuvana s desna.

Posebnost jednostrane verzije problema je što možemo efikasno pronaći optimalan skup čuvara  $A$ . Predstaviti ćemo algoritam iz [7] za pronalaženje čuvara za čuvanje s lijeva danog terena  $T$ . Na simetričan način se može definirati algoritam za čuvanje s desna.

---

LEFT-GUARDING ( $T, N, G$ )

$A \leftarrow \emptyset$     ▷ skup koji će sadržavati čuvare

**for**  $p \in N$  processed from left to right    ▷ prolazimo skupom  $N$  s lijeva na desno

**if**  $p$  is not yet seen by  $A$  **then**    ▷ ako  $p$  nije viđen od  $A$

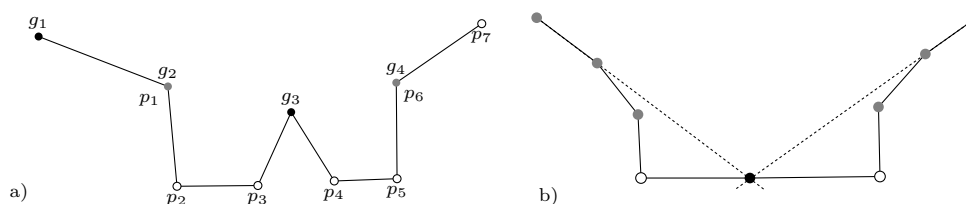
$A \leftarrow A \cup \{L(p)\}$     ▷ u skup čuvara  $A$  dodajmo najlijevijeg čuvara od  $p$

**return**  $A$

---

Na *Slici 15.a* imamo primjer kad su skupovi  $G, N \subset T$  ne nužno disjunktne i prikazano je optimalno rješenje za obostrano i jednostrano čuvanje s lijeva terena  $T$  (tj. čuvanje  $N$  s  $G$ ).

Dakle,  $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  i  $N = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ , rješenje koje vraća LEFT-GUARDING algoritam je  $A = \{g_1, g_2, g_3\}$  dok bi rješenje za obostrano čuvanje terena bilo  $A = \{g_3\}$ .



Slika 15: Čuvanje terena ovisno o karakteru čuvara

### 4.4 Generalna verzija

U *generalnoj* verziji problema cilj je pronaći najmanji skup čuvara  $G \subseteq T$  koji vidi svaku točku na terenu  $T$ . Dakle, čuvari mogu biti bilo koja točke na terenu  $T$  i moraju biti čuvane sve točke terena  $T$ .

Zaista, ponekad je optimalnije odabrati točku koja nije iz vrha da čuva dio terena, što se možemo uvjeriti iz *Slike 15.b*. Uočimo da odabrana točka na terenu vidi sve što vide susjedni vrhovi (označeni bijelo). U slučaju da smo zahtjevali da čuvari budu iz vrhova mogli smo uzeti bijele vrhove. Ovaj primjer pokazuje, ukoliko imamo slobodu odabira čuvara na terenu ne znači da su optimalni čuvari isključivo u vrhovima.

Na žalost, i ovaj problem pripada klasi NP-teških problema, ali se može efikasno aproksimirati. Slijedeći teorem nam kaže da je moguće pronaći algoritam koji će nam vratiti ukupan broj čuvara čiji broj ne premašuje 'previše' optimalan broj čuvara:

**Teorem 4.1** ([7]). *Postoji 4-aproksimacijski algoritam za problem čuvanja 1.5D terena.*

## Literatura

- [1] P. Colley, *Visibility problems and optimization in computational geometry*, doctoral thesis, Queen University, Kingston, Ontario, Canada, 1998
- [2] J. Urrutia, *Art Gallery and Illumination problems*, survey, 2004.
- [3] Z. Füredi, D. J. Kleitman, *The Prison Yard Problem*, *Combinatorica*, vol. 14, no. 3, 1994
- [4] P. K. Agarwal, *Covering, Packing and Art Gallery problems*, lecture notes, 2007.
- [5] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, International Series of Monographs on Computer Science, No. 3, Oxford University Press, 1987
- [6] Fortress problem, <http://www.cs.mcgill.ca/~cs507/projects/1998/eposse/>
- [7] K. Elbassioni, D. Matijevic, J. Mestre, D. Severdija, *Improved Approximations for Guarding 1.5 Dimensional Terrains*, arXiv:0809.0159, 2008.
- [8] M. Aigner, G. M. Ziegler, and K.H. Hofmann, *Proofs from the Book*, Springer-Verlag, 2003.
- [9] B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, *Discrete Comput. Geom.*, 6(5):485-524, 1991.