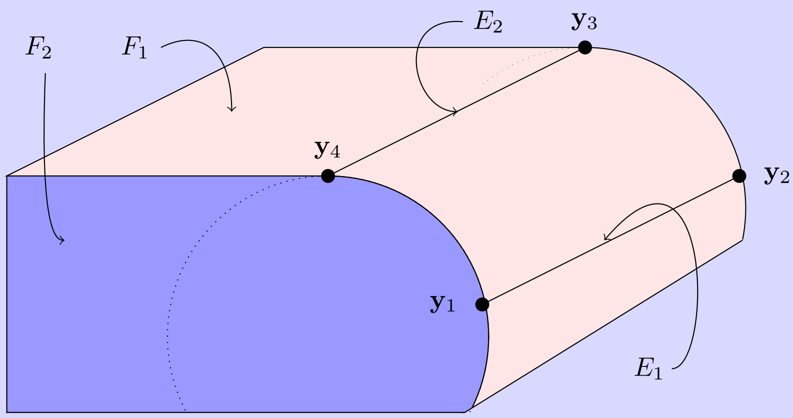
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku



KONVEKSNI SKUPOVI

Dragan Jukić

OSIJEK, 2021.

prof. dr. sc. Dragan Jukić

KONVEKSNI SKUPOVI

Osijek, 2021.

Izdavač:
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku
Trg Ljudevita Gaja 6, Osijek

Odgovorna osoba izdavača:
prof. dr. sc. Kristian Sabo

Recenzenti:
Prof. dr. sc. Zrinka Lukač
Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Prof. dr. sc. Miljenko Marušić
Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilište u Zagrebu

Lektorica:
Marina Tomić, prof.

Tehnička obrada:
Prof. dr. sc. Dragan Jukić

Mjesec i godina objavljivanja publikacije:
lipanj, 2021.

CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 150402062

ISBN 978-953-8154-15-7

Suglasnost za izdavanje ovog sveučilišnog udžbenika donio je Senat Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku na 9. sjednici u akademskoj godini 2020./2021. održanoj 10. lipnja 2021. godine pod brojem 19/21.

Udžbenik se tiska uz novčanu potporu Ministarstva znanosti i obrazovanja.

Tisak: Studio HS Internet d.o.o., Osijek

Svom prvom unuku Mateju Goliku

Sadržaj

PREDGOVOR

Teorija konveksnih skupova relativno je novo područje matematike. Iako nekoliko važnih rezultata datira iz kasnih godina 19. stoljeća, prva sustavna studija bila je knjiga *Theorie der Konvexen Körper* njemačkih autora T. Bonnesena i W. Fenchela iz 1934. godine. U četrdesetim i pedesetim godinama 20. stoljeća otkrivene su brojne korisne primjene konveksnih skupova, osobito u području optimizacije. Važnost tih primjena izazvala je ponovno zanimanje za teoriju konveksnih skupova.

Od čitatelja se pretpostavlja osnovno znanje iz linearne algebre, matematičke analize i topologije. Linearna je algebra važna jer ćemo proučavati konveksne podskupove n-dimenzionalnog euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. Čitatelj bi trebao biti upoznat s teorijom vektorskih prostora. Topološki pojmovi s kojima ćemo se najčešće susretati otvoreni su skupovi, zatvoreni skupovi i kompaktnost. Povremeno ćemo se morati pozivati na neprekidnost, konvergenciju nizova i još neke druge pojmove.

Namjera je ove knjige, pisane za studente koji na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku slušaju kolegij *Konveksni skupovi*, upoznati studente s osnovim pojmovima i rezultatima bogate teorije konveksnih skupova, i stoga nije realno očekivati da ona bude sveobuhvatna i/ili iscrpna. Pri odabiru tema vodilo se računa da gradivo pokrije sadržaj kolegija, da bude primjereno studentima s gore navedenim predznanjem, izloženo na pristupačan način i da ukaže na raznolike primjene teorije konveknih skupova. U svim poglavljima teorijski dio ilustriran je mnoštvom primjera. Na kraju svakog poglavlja dani su zadatci za utvrđivanje izloženog gradiva i proširivanje znanja. Za većinu tih zadataka dane su vrlo detaljne upute. U svakom poglavlju redom su numerirane definicije, propozicije, leme, teoremi, korolari, primjeri i slike.

Autor će biti zahvalan svim čitateljima na njihovim primjedbama u svezi s eventualnim pogreškama, nepreciznostima ili nedostacima koje će koristiti za novo izdanje.

Na kraju, zahvaljujem svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ova knjiga tiska i bude što bolja. To se posebice odnosi na recenzente koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama utjecali na mnoge dijelove teksta.

U Osijeku 19. ožujka 2021. Dragan Jukić

1. Uvod

Teorija konveksnosti relativno je novo područje matematike u kojem se isprepliću svojstva iz geometrije, analize, linearne algebre, topologije i kombinatorike. Bazirana je na jednostavnom geometrijskom konceptu koji joj i daje ime. Ima fundamentalnu ulogu u mnogim područjima optimizacije, a od važnosti je i u funkcionalnoj analizi, teoriji aproksimacija, matematičkoj ekonomiji, statistici itd. Primjerice, ona je osnovni matematički alat za linearno programiranje.

Poznatu Rockafellarovu knjigu [15] smatra se jednom od klasičnih knjiga iz teorije konveksnosti. Vrlo detaljan prikaz teorije konveksnosti može se naći npr. u [16] i [22]. Suvremeni pristup primjenama konveksnosti u optimizaciji može se naći npr. u [21]. Za primjenu konveksnosti u teorijskoj statistici zainteresiranog čitatelja upućujemo, primjerice, na knjigu [20].

Mi se u ovoj knjizi ograničavamo na konveksnost u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Međutim, čitatelj treba znati da se cijela teorija može napraviti u konačno dimenzionalnim vektorskim prostorima, a mnogi će rezultati vrijediti i u beskonačno dimenzionalnim vektorskim prostorima. Na elemente od $\mathbb{R}^n$ gledamo kao na vektor-stupce, a oznaku $\mathbb{R}^{m\times n}$ koristimo za skup svih realnih matrica tipa $m \times n$. Vektore i matrice pisat ćemo isključivo **masnim pismom** (fontom). U skladu s tim, euklidski skalarni produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ vektora $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$ možemo zapisati u matričnom obliku kao $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Nadalje, ako je $x_i \leq y_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$, kratko ćemo pisati $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ili $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$. Od vektorskih normi koristit ćemo isključivo euklidsku normu (ili 2-norma). Jasno, veza između euklidskog skalarnog produkta i euklidske norme jest $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$. Otvorenu kuglu radijusa $r > 0$ s centrom u točki $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, tj. skup $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$, označavat ćemo s $B(\mathbf{x}_0, r)$.

Kao što je to i uobičajeno u matematičkoj literaturi, funkcije, varijable i skupove označavat ćemo *kurzivom*. Za nove pojmove koji se prvi put pojavljuju u tekstu koristit ćemo san serif font.

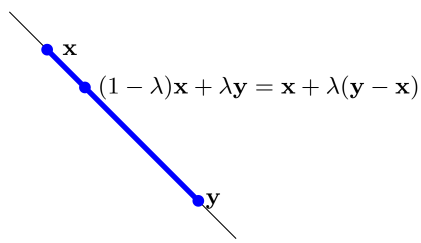
1.1. Konveksni skupovi

Po uzoru na geometriju u trodimenzionalnom euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$, u $\mathbb{R}^n$ definiraju se pravac, zraka, segment, hiperravnina, afina mnogostrukost i neki drugi pojmovi.

Neka su zadane točke (vektori) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Skup

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} : \lambda \in [0,1]\}$$

zovemo segment (ili spojnica) s krajevima $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.



Slika 1. *Pravac kroz točke* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{y}$. *Segment* $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ *označen je plavom bojom.*

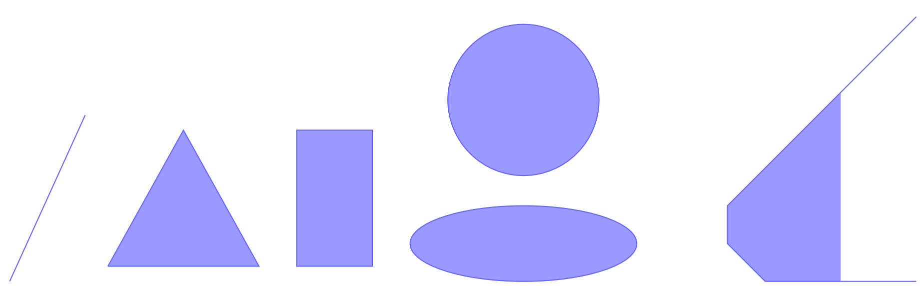
1.1. Definicija

Kažemo da je skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan ako vrijedi

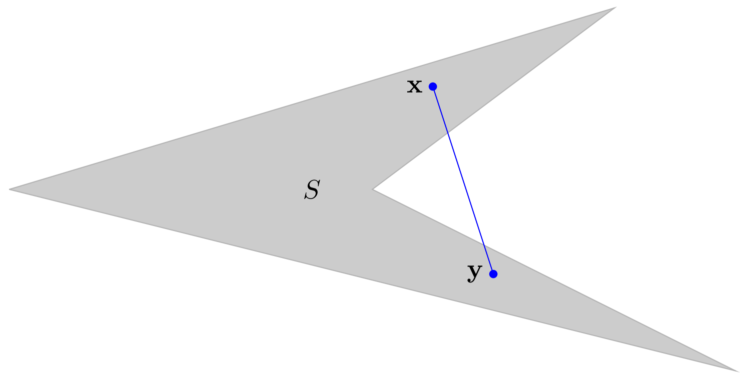
$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K) \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq K.$$

Promatrano geometrijski, skup K konveksan je ako za svake svoje dvije točke sadrži i segment koji spaja te dvije točke. Očigledno, jednočlan je skup konveksan. Prazan skup također smatramo konveksnim.

Lako je pokazati da je presjek proizvoljne familije konveksnih skupova također konveksan skup.



Slika 2. *Primjeri konveksnih skupova u ravnini.*



Slika 3. *Skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ nije konveksan.*

1.2. Primjedba
Nije točno da je skup S konveksan ako ima svojstvo

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S \Longrightarrow \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in S.$$

Za kontraprimjer možemo uzeti skup S svih racionalnih brojeva. Između svaka dva racionalna broja nalazi se beskonačno mnogo iracionalnih brojeva. Zato skup racionalnih brojeva nije konveksan iako ima gornje svojstvo.

1.3. Primjer. Neka su zadani vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, i realan broj β. Skup

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \beta\}$$

nazivamo hiperravnina, a skupovi

$$H^-_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \le \beta\}$$
$$H^+_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \ge \beta\}$$

nazivaju se zatvoreni poluprostori određeni hiperravninom $H_{\mathbf{a},\beta}$. Vektor $\mathbf{a}$ zovemo vektor normale na hiperravninu $H_{\mathbf{a},\beta}$. Lako je pokazati da su skupovi $H_{\mathbf{a},\beta}$, $H^-_{\mathbf{a},\beta}$ i $H^+_{\mathbf{a},\beta}$ konveksni i zatvoreni.

Ako je iz konteksta jasno o kojem vektoru normale $\mathbf{a}$ i o kojem β se radi, izostavljat ćemo ih u označavanju hiperravnine i odgovarajućih poluprostora te pisati samo H, H^- ili H^+. Nadalje, radi lakšeg je izražavanja često korisno H^- [odnosno H^+] zvati negativnim [odnosno pozitivnim] zatvorenim poluprostorom određenim hiperravninom H. Iz istog razloga, otvorene i konveksne skupove $H^-\backslash H$ [odnosno $H^+\backslash H$] zvat ćemo negativnim [odnosno pozitivnim] otvorenim poluprostorom određenim s H.

1.4. Definicija
Neka su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Skup

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

zovemo poliedar u $\mathbb{R}^n$.

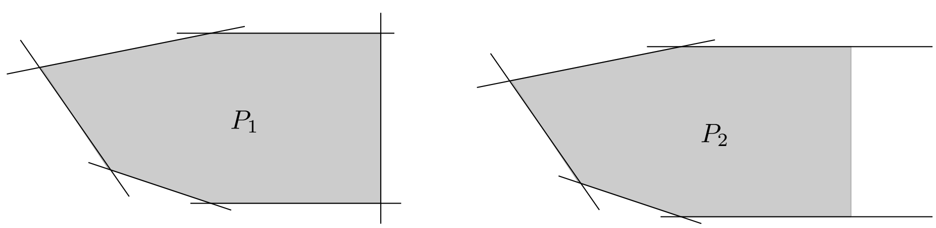
1.5. Primjedba

1. Prazan je skup $\emptyset$ poliedar jer ga možemo zapisati kao $\emptyset = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0}\mathbf{x} \leq -1\}$.
2. Cijeli je skup $\mathbb{R}^n$ poliedar jer je $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0}\mathbf{x} \leq 1\}$.

Prazan skup i cijeli prostor $\mathbb{R}^n$ zatvoreni su i konveksni skupovi.

3. Ako je neki redak $\mathbf{a}^{i_0}$ matrice $\mathbf{A}$ jednak nul-retku ($\mathbf{a}^{i_0} = \mathbf{0}$), vrijedi:
   (a) Ako je $b_{i_0} < 0$, P je prazan skup.
   (b) Ako je $b_{i_0} \geq 0$, i_0-ti redak $\mathbf{a}^{i_0}$ suvišan je i možemo ga izostaviti iz matrice $\mathbf{A}$.

   Zato nadalje pretpostavimo da su svi retci matrice $\mathbf{A}$ različiti od nul-retka. Tada na poliedar P možemo gledati kao na presjek konačno mnogo zatvorenih poluprostora. Zato je on konveksan i zatvoren, a zovemo ga još i konveksni poliedar.



Slika 4. $P_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ *jest omeđen, a* $P_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ *jest neomeđen poliedar.*

Od sada pa nadalje koristit ćemo sljedeće oznake: $\operatorname{Int} S$ za nutrinu (interior), $\operatorname{Cl} S$ za zatvorenje (zatvarač) i $\operatorname{Bd} S$ za rub (granicu, frontu) skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.6. Propozicija
Neka je zadan poliedar

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$

gdje su $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *i* $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_m]^T \in \mathbb{R}^m$. *Tada vrijedi:*

(i) $\operatorname{Cl} P = P$,

(ii) $\operatorname{Int} P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{b}\}$,

(iii) $\operatorname{Bd} P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \;\&\; (\mathbf{A}\mathbf{x})_i = b_i \text{ za barem jedan } i \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Dokaz. *(i)* U prethodnoj primjedbi pokazano je da je poliedar P zatvoren skup. Zato je $\operatorname{Cl} P = P$.
(ii) Neka $\mathbf{a}^i$ označava i-ti redak matrice $\mathbf{A}$. Kako je

$$P = \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i\},$$

slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{Int} P &= \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Int}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i\}\\ &= \bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} < b_i\}\\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{b}\}.\end{aligned}$$

(iii) Tvrdnja slijedi iz jednakosti $\operatorname{Bd} S = \operatorname{Cl} S \backslash \operatorname{Int} S$. ■

1.7. Definicija
Konveksna kombinacija točaka $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ jest svaka točka $\mathbf{x}$ oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Skup svih konveksnih kombinacija točaka iz skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se konveksna ljuska skupa S i označava s $\operatorname{conv} S$.

1.8. Primjedba
Lako je pokazati da je

$$S \subseteq \operatorname{conv} S$$

te da je $\operatorname{conv} S$ konveksan skup.

1.9. Primjer. Matematičko je očekivanje konačne slučajne varijable usko povezano s konveksnošću. Neka konačna slučajna varijabla X ima distribuciju

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix},$$

gdje je $p_i > 0$ vjerojatnost da ta slučajna varijabla primi vrijednost x_i, te $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Njezino matematičko očekivanje $E[X]$, definirano kao

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i,$$

konveksna je kombinacija brojeva $x_1, \ldots, x_m$.

1.10. PROPOZICIJA
Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan je onda i samo onda ako se podudara sa svojom konveksnom ljuskom, tj. ako je $S = \operatorname{conv} S$.

Dokaz. Ako je $S = \operatorname{conv} S$, budući da je $\operatorname{conv} S$ konveksan (primjedba 1.8.), skup S jest konveksan.

Obratno, pretpostavimo da je S konveksan skup i pokažimo da je $S = \operatorname{conv} S$. Kako je $S \subseteq \operatorname{conv} S$ (primjedba 1.8.), preostaje pokazati da je $\operatorname{conv} S \subseteq S$. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po m, gdje m označava broj točaka koje ulaze u konveksnu kombinaciju. Za $m = 1$ i $m = 2$ tvrdnja proizlazi iz definicije konveksnosti. Pretpostavimo da je tvrdnja dokazana za prirodni broj m i pretpostavimo da je $\mathbf{x}$ konveksna kombinacija od $m+1$ točaka iz S. Tada postoje točke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m+1} \in S$ i realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \geq 0$ takvi da je $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \mathbf{x}_i$ i $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. Ako je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{m+1} \in S$. Ako je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \neq 0$, zapišimo točku $\mathbf{x}$ kao

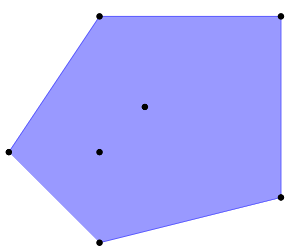
$$\mathbf{x} = \mu \mathbf{y} + \lambda_{m+1} \mathbf{x}_{m+1}, \quad \text{gdje su } \mu = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\mu} \mathbf{x}_i.$$

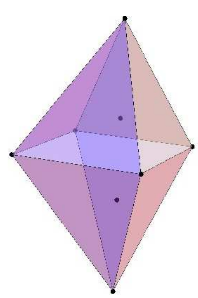
Budući da je točka $\mathbf{y}$ konveksna kombinacija od m točaka iz S, po induktivnoj pretpostavci ona leži u skupu S. No tada i točka $\mathbf{x}$ kao konveksna kombinacija točaka $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}_{m+1}$ iz S, također pripada skupu S. ■

1.11. TEOREM
Konveksna ljuska skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jest najmanji konveksan skup koji sadrži S, tj. presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S.

Dokaz. Neka je W presjek svih konveksnih skupova iz $\mathbb{R}^n$ koji sadrže skup S. Treba pokazati da je $\operatorname{conv} S = W$. Iz $S \subseteq W$ slijedi $\operatorname{conv} S \subseteq \operatorname{conv} W$, a zbog konveksnoti skupa W i propozicije 1.10. jest $\operatorname{conv} W = W$. Dakle, $\operatorname{conv} S \subseteq W$. Nadalje, kako je $S \subseteq \operatorname{conv} S$ te kako je W najmanji konveksan skup koji sadrži S, slijedi $W \subseteq \operatorname{conv} S$. ■

1.12. PRIMJER. Politop u $\mathbb{R}^n$ konveksna je ljuska konačno mnogo točaka iz $\mathbb{R}^n$, koje zovemo generatorima politopa.





Slika 5. *Politop u $\mathbb{R}^2$ i politop u $\mathbb{R}^3$.*

1.13. Definicija
Kažemo da su točke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ konveksno nezavisne ako se ni jedna od njih ne može prikazati kao konveksna kombinacija preostalih točaka. U suprotnom, tj. ako se barem jedna od njih može prikazati kao konveksna kombinacija preostalih, za te točke kažemo da su konveksno zavisne.

Osim konveksnih skupova, u teoriji optimizacije važnu ulogu imaju konusi.

1.14. Definicija
Skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konus s vrhom u nuli ako za svaki $\mathbf{x} \in C$ i za svako $\lambda \geq 0$ vrijedi $\lambda\mathbf{x} \in C$.
Ako je $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konus s vrhom u nuli, onda skup

$$C_{\mathbf{x}_0} := \mathbf{x}_0 + C = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in C\}$$

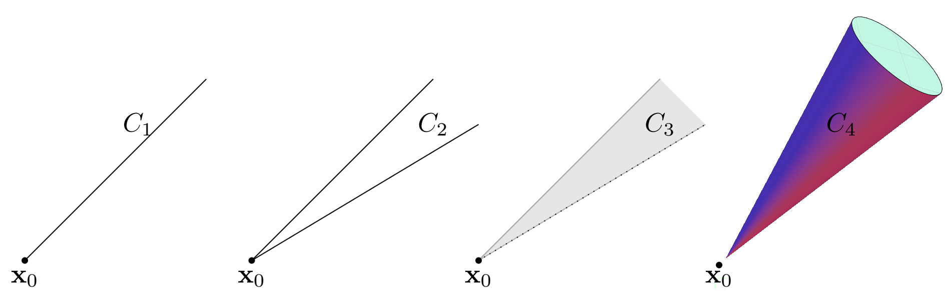
zovemo konus s vrhom u $\mathbf{x}_0$.
Ako je konus ujedno i konveksan skup, onda se on naziva konveksni konus.

Prazan skup također smatramo konusom. Konus ne mora biti konveksan, kao ni zatvoren ni otvoren.

1.15. Primjer. Za zadane $\mathbf{x}_0, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, skup $\{\lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$ konveksan je konus s vrhom u nuli, a skup

$$\mathbf{x}_0 + \{\lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} = \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$$

konveksan je konus s vrhom u $\mathbf{x_0}$. Zovemo ga još i zraka ili polupravac u $\mathbb{R}^n$ te kažemo da je točka $\mathbf{x}_0$ ishodište zrake, a $\mathbf{q}$ vektor smjera te zrake.



Slika 6. *Konus C_1 jest zraka, konus C_2 kao unija dviju zraka nije konveksan, konus C_3 nije zatvoren (niti je otvoren), konus C_4 konveksan je i zatvoren.*

1.16. Primjer. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Lako je provjeriti da je poliedar

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$$

ujedno i konveksni konus (s vrhom u nuli). Zovemo ga poliedarski konus.

1.17. Propozicija
Poliedar $P \subseteq \mathbb{R}^n$ jest konus (s vrhom u nuli) onda i samo onda ako je poliedarski konus, tj. ako postoji matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takva da je

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je poliedar

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

ujedno i konus s vrhom u nuli. Kako je $\mathbf{0} \in P$, mora biti $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Nadalje, za sve $\mathbf{x} \in P$ i sve $\lambda > 0$ jest $\lambda\mathbf{x} \in P$, pa vrijedi $\lambda\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, odnosno $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \frac{1}{\lambda}\mathbf{b}$, odakle graničnim prijelazom $\lambda \to \infty$ dobivamo $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Zato je, što je lako pokazati, $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$. ■

Konusi imaju sljedeća važna svojstva:

(i) Presjek proizvoljne familije konusa s istim vrhom jest konus s tim vrhom.

(ii) Ako su C_1 i C_2 konusi [konveksni konusi] s vrhom u $\mathbf{x}_0$, onda je $\alpha C_1 + \beta C_2$ konus [konveksni konus] s vrhom u $(\alpha + \beta)\mathbf{x}_0$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Unija konusa s istim vrhom jest konus, ali unija konveksnih konusa s istim vrhom ne mora biti konveksan konus.

Nadalje, uočite da se svaki konus s vrhom različitim od nule dobiva kao translacija konusa s vrhom u nuli. Zbog toga, s teorijskog je stajališta dovoljno opisati samo konuse s vrhom u nuli. Zato ćemo od sada pa nadalje pod konusom uvijek podrazumijevati konus s vrhom u nuli, osim ako se posebno naglasi da mu je vrh različit od nule.

1.18. Propozicija
Skup S konveksni je konus (s vrhom u nuli) onda i samo onda ako za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ i sve $\alpha, \beta \geq 0$ vrijedi $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in S$.

Dokaz. Neka je S konveksni konus s vrhom u nuli. Uzmimo bilo koje dvije točke $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ i bilo koja dva realna broja $\alpha, \beta \geq 0$. Ako je $\alpha + \beta = 0$, onda je $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \mathbf{0} \in S$. Zato nadalje pretpostavimo da je $\alpha + \beta > 0$. Tada, zbog konveksnosti, vrijedi

$$\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathbf{x} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\mathbf{y} \in S.$$

Zato je, po definiciji konusa,

$$(\alpha + \beta)\big(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathbf{x} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\mathbf{y}\big) \in S,$$

odnosno $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in S$.

Obratno, pretpostavimo da je $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in S$ za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ i sve $\alpha, \beta \geq 0$. Tada je $\alpha\mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y} \in S$ za svaki $\alpha \in [0, 1]$, što nam govori da je S konveksan skup. Nadalje, ako za unaprijed zadani $\lambda \geq 0$ odaberemo $\alpha = \beta = \lambda/2$ i $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, dobivamo da je $\lambda\mathbf{x} \in S$, tj. S je konus s vrhom u nuli. ■

1.19. Definicija
Konusna kombinacija točaka $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ jest svaka točka $\mathbf{x}$ oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

gdje su $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, realni brojevi.

Skup svih konusnih kombinacija točaka iz skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se konusna ljuska skupa S i označava s $\operatorname{cone} S$.

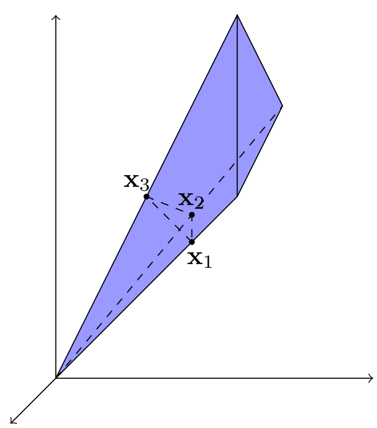
Lako je pokazati da je $\operatorname{cone} S$ konveksan konus (s vrhom u nuli). Nadalje, očigledno je

$$S \subseteq \operatorname{cone} S.$$

1.20. Primjer. Konusna ljuska

$$\operatorname{cone}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$$

točaka $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ jest konveksni konus (s vrhom u nuli). Za taj konus kažemo da je konačno generiran skupom vektora $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ te ga još označavamo kao $C(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$.



Slika 7. *Konveksni konus* $\operatorname{cone}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

1.21. Propozicija
Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan je konus (s vrhom u nuli) onda i samo onda ako je $S = \operatorname{cone} S$.

Dokaz. Dovoljno je iskoristiti propoziciju 1.18. i oponašati dokaz propozicije 1.10. ∎

1.22. Teorem

Konusna ljuska skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ najmanji je konveksan konus (s vrhom u nuli) koji sadrži S, tj. presjek svih konveksnih konusa (s vrhom u nuli) koji sadrže S.

Dokaz. Neka je W presjek svih konveksnih konusa iz $\mathbb{R}^n$ koji sadrže skup S. Treba pokazati da je $\operatorname{cone} S = W$. Iz $S \subseteq W$ slijedi $\operatorname{cone} S \subseteq \operatorname{cone} W$, a zbog propozicije 1.21. jest $\operatorname{cone} W = W$. Dakle, $\operatorname{cone} S \subseteq W$. Nadalje, kako je $S \subseteq \operatorname{cone} S$ te kako je W najmanji konveksan konus koji sadrži S, slijedi $W \subseteq \operatorname{cone} S$. ■

1.2. Zašto konveksnost?

Prije nego što dublje „zaronimo” u teoriju konveksnosti, za motivaciju ćemo u kratkim crtama navesti nekoliko problema/situacija u kojima konveksnost ima ključnu ulogu.

1.2.1. Problem matematičkog programiranja

Ovaj problem sastoji se od određivanja ekstremnih vrijednosti (minimuma ili maksimuma) realne funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$ definirane na nepraznom skupu D iz euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$. Zbog jednakosti

$$\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x}))$$

dovoljno je ograničiti se na problem minimizacije, koji se kratko matematički zapisuje kao:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad \text{ili} \quad f(\mathbf{x}) \to \min \tag{1.1}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{x} \in D. \tag{1.2}$$

Napomenimo da se minimizirajuća funkcija f još naziva funkcija cilja (ili kriterija), a za skup D kaže se da je skup dopustivih (ili mogućih) rješenja. Za točku $\mathbf{x}^\star \in D$ (ako takva točka postoji!) sa svojstvom da je

$$f(\mathbf{x}^\star) \le f(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D \tag{1.3}$$

kažemo da je točka globalnog (ili apsolutnog) minimuma funkcije f na skupu D, dok je $f(\mathbf{x}^\star)$ vrijednost globalnog (ili apsolutnog) minimuma funkcije f na skupu D. Točka globalnog minimuma $\mathbf{x}^\star$ još se zove i optimalno rješenje problema (1.1)-(1.2). Ako u (1.3) vrijedi stroga nejednakost za svaki $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^\star$, kažemo da je $\mathbf{x}^\star$ točka strogog globalnog minimuma. Ako postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je

$$f(\mathbf{x}^\star) \le f(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D \cap B(\mathbf{x}^\star, \varepsilon), \tag{1.4}$$

gdje je $B(\mathbf{x}^\star, \varepsilon) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^\star) < \varepsilon\}$ otvorena kugla radijusa ε s centrom u točki $\mathbf{x}^\star$, radi se o točki lokalnog (ili relativnog) minimuma $\mathbf{x}^\star$ i o odgovarajućoj vrijednosti lokalnog (ili relativog) minimuma $f(\mathbf{x}^\star)$.

Dakle, problem matematičkog programiranja sastoji se u pronalaženju svih točaka globalnog minimuma, zajedno s odgovarajućom minimalnom vrijednosti funkcije f. Nažalost, problem je što većina numeričkih metoda za minimizaciju funkcije cilja daje samo lokalno optimalno rješenje.

U primjenama je vrlo važan tzv. slučaj konveksnog programiranja u kojem se minimizira konveksna funkcija na nekom konveksnom skupu. Prisjetimo se definicije konveksne funkcije:

1.23. Definicija

Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$ definiranu na konveksnom skupu $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksna ako za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ i za svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$f((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}). \tag{1.5}$$

Ako u (1.5) vrijedi stroga nejednakost za sve $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ i za svaki $\lambda \in (0, 1)$, onda kažemo da je f strogo konveksna funkcija na skupu D.

Fukcija f jest konkavna ako je funkcija $-f$ konveksna. Analogno, fukcija f jest strogo konkavna ako je funkcija $-f$ strogo konveksna.

Problem konveksnog programiranja općenito ne mora imati optimalno rješenje. Međutim, ako postoji lokalno optimalno rješenje, onda postoji i globalno optimalno rješenje. O tome nam govori sljedeći teorem (vidi i npr. Neralić [14, str. 27]).

1.24. Teorem

Ako je f konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu D, onda je konveksan skup $D^\star$ točaka u kojima f dostiže globalni minimum i svaki je lokalni minimum ujedno i globalni minimum.

Dokaz. Pokažimo prvo da je $D^\star$ konveksan skup. Ako je $D^\star$ prazan ili jednočlan skup, po definiciji on jest konveksan. Neka su $\mathbf{x}^\star, \mathbf{y}^\star \in D^\star$. To znači da vrijedi

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^\star) = f(\mathbf{y}^\star), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D.$$

Pomoću toga i konveksnosti funkcije f, za svaki $\lambda \in [0, 1]$ dobivamo

$$f(\mathbf{x}^\star) \leq f((1-\lambda)\mathbf{x}^\star + \lambda\mathbf{y}^\star) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{x}^\star) + \lambda f(\mathbf{y}^\star) = f(\mathbf{x}^\star),$$

odakle slijedi $f((1-\lambda)\mathbf{x}^\star + \lambda\mathbf{y}^\star) = f(\mathbf{x}^\star)$. Zato je $f(\mathbf{x}) \geq f((1-\lambda)\mathbf{x}^\star + \lambda\mathbf{y}^\star)$ za svaki $\mathbf{x} \in D$, tj. $(1-\lambda)\mathbf{x}^\star + \lambda\mathbf{y}^\star \in D^\star$.

Sada ćemo pokazati da je svaka točka lokalnog minimuma, označimo ju s $\mathbf{x}^\star$, ujedno i točka globalnog minimuma. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, tj. da postoji točka $\mathbf{z} \in D$ takva da je $f(\mathbf{z}) < f(\mathbf{x}^\star)$. Neka je $\varepsilon > 0$ bilo koji realan broj, a $B(\mathbf{x}^\star, \varepsilon)$ otvorena kugla radijusa ε s centrom u točki $\mathbf{x}^\star$. Lako je pokazati da je

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^\star + \lambda\mathbf{z} \in B(\mathbf{x}^\star, \varepsilon), \quad \forall\lambda \in (0, \varepsilon/\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^\star\|).$$

Nadalje, zbog $f(\mathbf{z}) < f(\mathbf{x}^\star)$ i konveksnosti funkcije f, za svaki realan broj $\lambda \in (0, \varepsilon/\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^\star\|)$ vrijedilo bi

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)\mathbf{x}^\star + \lambda\mathbf{z}) &\leq (1-\lambda)f(\mathbf{x}^\star) + \lambda f(\mathbf{z}) \\ &< (1-\lambda)f(\mathbf{x}^\star) + \lambda f(\mathbf{x}^\star) \\ &= f(\mathbf{x}^\star), \end{aligned}$$

što bi bila kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathbf{x}^\star$ točka lokalnog minimuma. ■

1.2.2. Problem projekcije točke na skup

Neka je D neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, broj

$$d(\mathbf{x}, D) := \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in D\}$$

nazivamo udaljenost točke $\mathbf{x}$ do skupa D. Nadalje, za svaku točku $\mathbf{y}_0 \in D$ za koju je $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| = d(\mathbf{x}, D)$ kažemo da je projekcija točke $\mathbf{x}$ na skup D. Za točku $\mathbf{y}_0$ još kažemo da je najbolja aproksimacija točke $\mathbf{x}$ pomoću skupa D. Jasno je da projekcija ne mora postojati za svaki skup D (npr. kad je D otvorena kugla, a $\mathbf{x}$ točka izvan te kugle), a ako postoji, ona općenito nije jedinstvena (npr. kada je D kružnica, a $\mathbf{x}$ njezino središte). Prema tome, da bi se osigurala egzistencija projekcije, od skupa D potrebno je zahtijevati neka (i to što jednostavnija!) svojstva. Zanimljivo je da u slučaju kada projekcija postoji, konveksnost skupa D osigurava njezinu jedinstvenost. Ta će tvrdnja biti dokazana u 4. poglavlju.

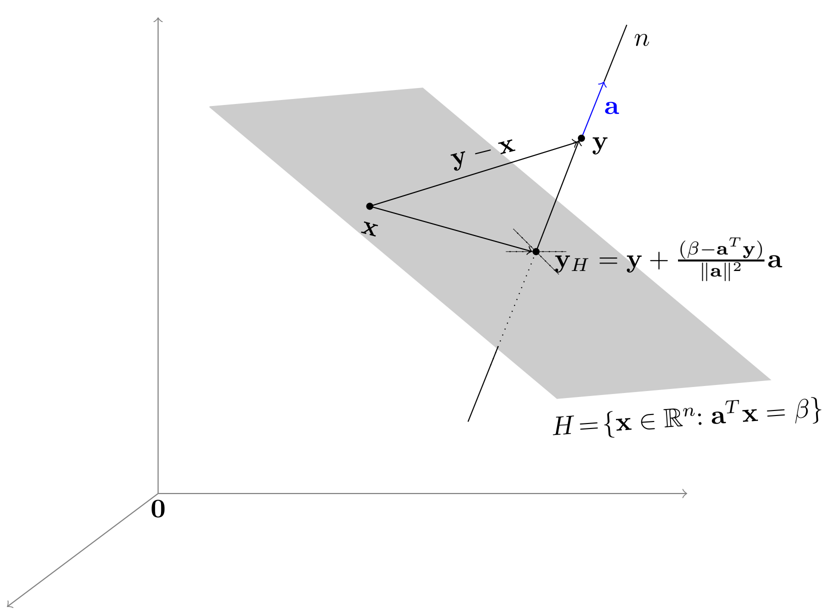
1.25. Primjer (Udaljenot točke od hiperravnine). Neka su zadane hiperravnina

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \beta\}, \qquad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

i točka $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Označimo s $\mathbf{y}_H$ probodište pravca $n := \{\mathbf{y} + \lambda\mathbf{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ i hiperravnine H (slika 8). Lako je provjeriti da je

$$\mathbf{y}_H = \mathbf{y} + \tfrac{(\beta - \mathbf{a}^T\mathbf{y})}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}.$$



Slika 8.

Neka je $\mathbf{x}$ proizvoljna točka hiperravnine H. Točke $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}_H$ leže u ravnini H, pa je

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{y}_H - \mathbf{x}) = 0.$$

Zato je

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}_H)^T(\mathbf{y}_H - \mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{y} - \beta)}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}^T(\mathbf{y}_H - \mathbf{x}) = 0,$$

tj. vektori $\mathbf{y} - \mathbf{y}_H$ i $\mathbf{y}_H - \mathbf{x}$ jesu međusobno okomiti. Zbog međusobne okomitosti tih vektora imamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 &= \|(\mathbf{y} - \mathbf{y}_H) + (\mathbf{y}_H - \mathbf{x})\|^2 \\
&= ((\mathbf{y} - \mathbf{y}_H) + (\mathbf{y}_H - \mathbf{x}))^T((\mathbf{y} - \mathbf{y}_H) + (\mathbf{y}_H - \mathbf{x})) \\
&= \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_H\|^2 + \|\mathbf{y}_H - \mathbf{x}\|^2 \\
&\geq \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_H\|^2 \\
&= \left\|\frac{(\mathbf{a}^T\mathbf{y} - \beta)}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}\right\|^2 \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}(\mathbf{a}^T\mathbf{y} - \beta)^2,
\end{aligned}$$

odakle vađenjem kvadratnog korijena dobivamo

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_H\| = \frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{y} - \beta|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Kako je $\mathbf{y}_H \in H$ i kako gornja nejednakost vrijedi za svaku točku $\mathbf{x} \in H$, dobivamo sljedeću formulu za udaljenost $d(\mathbf{y}, H)$ točke $\mathbf{y}$ od hiperravnine H:

$$d(\mathbf{y}, H) = \inf\{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in H\} = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_H\| = \frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{y} - \beta|}{\|\mathbf{a}\|}. \tag{1.6}$$

Osim toga, pokazali smo da je $\mathbf{y}_H$ projekcija točke $\mathbf{y}$ na H.

1.26. Primjer (Udaljenost paralelnih hiperravnina). Za dvije hiperravnine kažemo da su paralelne ako su im vektori normala kolinearni. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da paralelne hiperravnine imaju isti vektor normale. Neka su

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \beta_1\}$$

i

$$H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \beta_2\}$$

međusobno paralelne hiperravnine. Udaljenost $d(H_1, H_1)$ hiperravnina H_1 i H_2 definira se formulom

$$d(H_1, H_2) = \inf\{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in H_1, \mathbf{y} \in H_2\}.$$

Neka su $\mathbf{x} \in H_1$ i $\mathbf{y} \in H_2$. Prema (1.6) jest

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq d(\mathbf{y}, H_1) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{H_1}\| = \frac{|\mathbf{a}^T\mathbf{y} - \beta_1|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Kako su $\mathbf{y} \in H_2$ i $\mathbf{y}_{H_1} \in H_1$, iz gornje nejednakosti dobivamo

$$d(H_1, H_2) = \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{\|\mathbf{a}\|}. \tag{1.7}$$

Uočite da je udaljenost paralelnih ravnina jednaka udaljenosti bilo koje točke prve ravnine od njezine ortogonalne projekcije na drugu ravninu.

1.2.3. Problem linearnog programiranja

Problem linearnog programiranja (LP) specijalan je slučaj matematičkog programiranja, u kojem se maksimizira linearna funkcija na skupu zadanom pomoću linearnih jednadžbi i/ili nejednadžbi. Neka su zadani $m \times n$ realna matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ i vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Standardni oblik LP problema zapisan u matričnom obliku glasi:

$$\max\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1.8}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \tag{1.10}$$

gdje je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor varijabli.

Uočimo da je skup $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ mogućih rješenja LP problema jedan konveksni poliedar.

Standardni LP problem (1.8)-(1.10) možemo svesti na tzv. kanonski oblik s ograničenjima u obliku jednadžbi, uz nenegativnost varijabli:

$$\max\ \hat{\mathbf{c}}^T\hat{\mathbf{x}}$$

uz ograničenja

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \tag{1.11}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \ge \mathbf{0}. \tag{1.12}$$

U tu svrhu dovoljno je uvesti tzv. dopunske varijable x_{n+i}, $i = 1, \ldots, m$, tako da vrijedi

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ &x_{n+i} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

i definirati

$$\hat{\mathbf{A}} := [\mathbf{A}, \mathbf{I}_m],\ \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix},\ \hat{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdje $\mathbf{I}_m$ u blok matrici $[\mathbf{A}, \mathbf{I}_m]$ označava jediničnu matricu reda m.

Uočimo da je skup $\hat{D}$ mogućih rješenja definiran s (1.11)-(1.12) neprazan onda i samo onda ako se vektor $\mathbf{b}$ može prikazati kao linearna kombinacija stupaca matrice $\hat{A}$ s nenegativnim koeficijentima. Drugim riječima, skup $\hat{D}$ neprazan je onda i samo onda ako je $\mathbf{b} \in \text{cone}\,\{\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n+m})\}$, gdje $\hat{\mathbf{a}}_j$ predstavlja j-ti stupac matrice $\hat{\mathbf{A}}$.

1.3. Fourier-Motzkinova metoda eliminacije

Fourier[1]-Motzkinova[2] metoda eliminacije jedna je od metoda za rješavanje sustava linearnih algebarskih nejednadžbi. Važnost joj je više teorijska nego praktična, a osnovna je ideja sljedeća:

1. Ako polazni sustav linearnih nejednadžbi ima više od jedne nepoznanice, da se dobije novi sustav nejednadžbi s jednom nepoznanicom manje, koji će biti rješiv (konzistentan) onda i samo onda ako je rješiv polazni sustav.

2. Ako polazni sustav nejednadžbi ima samo jednu nepoznanicu, da se iz njega dobije neki skup nejednakosti koje će vrijediti onda i samo onda ako polazni sustav ima rješenje.

Pri tome, iz novog sustava moguće je (ali ne jednostavno!) rekonstruirati sva rješenja polaznog sustava.

Neka je zadan sustav linearnih nejednadžbi u matričnom obliku $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $n > 1$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ vektor nepoznanica. Pokazat ćemo kako Fourier-Motzkinovom metodom iz polaznog sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ eliminirati nepoznanicu x_k i na taj način dobiti novi sustav $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ s vektorom nepoznanica $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$. Pri tome taj novi sustav s jednom nepoznanicom manje (bez nepoznanice x_k!) bit će rješiv onda i samo onda ako je rješiv polazni sustav. Osim toga, iz novog sustava bit će moguće rekonstruirati sva rješenja polaznog sustava.
U specijalnom slučaju kada je $n = 1$, tj. kada polazni sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ima samo jednu nepoznanicu (x_1), Fourier-Motzkinovom metodom dobit će se neki vektor $\mathbf{b}' \in \mathbb{R}^s$, a polazni će sustav biti rješiv onda i samo onda ako je $\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$. Budući da je $\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$ onda i samo onda ako sustav $\mathbf{0}\, x_1 \leq \mathbf{b}'$ ima rješenje, i u tom specijalnom slučaju možemo smatrati da se Fourier-Motzkinovom metodom dobiva novi sustav koji je rješiv onda i samo onda ako je rješiv polazni sustav.

Eliminirat ćemo nepoznanicu x_k. Zato raspišimo polazni sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ kao

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m
\end{aligned} \tag{1.13}$$

i definirajmo skupove

$$I^+ = \{i : a_{ik} > 0\}, \quad I^- = \{i : a_{ik} < 0\}, \quad I^0 = \{i : a_{ik} = 0\}.$$

[1]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768. - 1830.), francuski matematičar.
[2]Theodore Samuel Motzkin (1908. - 1970.), američki matematičar.

Slučaj $n = 1$. Kako je $n = 1$, i $k = 1$. Za svaki $i \in I^+ \cup I^-$ podijelimo i-tu nejednadžbu sustava (1.13) s $|a_{i1}|$. Dobivamo sljedeći ekvivalentan zapis polaznog sustava $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} x_1 &\le \tilde{b}_i, \quad (i \in I^+) \\ -x_1 &\le \tilde{b}_i, \quad (i \in I^-) \\ 0 \cdot x_1 &\le b_i, \quad (i \in I^0), \end{aligned} \tag{1.14}$$

gdje je $\tilde{b}_i = \frac{b_i}{|a_{i1}|}, \quad i \in I^+ \cup I^-$.

Lako je pokazati da će x_1 biti rješenje sustava (1.14) onda i samo onda ako je

$$\begin{aligned} &0 \le \tilde{b}_r + \tilde{b}_i, &&\forall\, (r, i) \in I^- \times I^+ \\ &0 \le b_i, &&\forall\, i \in I^0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

i ako za x_1 vrijedi

$$\max_{r \in I^-} (-\tilde{b}_r) \le x_1 \le \min_{i \in I^+} \tilde{b}_i, \tag{1.16}$$

pri čemu koristimo dogovor da maximum po praznom skupu iznosi $-\infty$, a minimum po praznom skupu da je ∞. Nejednakosti (1.15) možemo sažetije zapisati u vektorskom obliku kao $\mathbf{0} \le \mathbf{b}'$, pri čemu je jasno što su koordinate vektora $\mathbf{b}'$.

Sada pretpostavimo da vrijedi (1.15). Tada iz prvog skupa nejednakosti od (1.15) dobivamo

$$-\tilde{b}_r \le \tilde{b}_i, \quad \forall\, (r, i) \in I^- \times I^+,$$

odakle slijedi

$$\max_{r \in I^-} (-\tilde{b}_r) \le \min_{i \in I^+} \tilde{b}_i.$$

Tada za svaki realan broj $x_1 \in [\max_{r \in I^-} (-\tilde{b}_r), \min_{i \in I^+} \tilde{b}_i]$ vrijedi (1.15) i (1.16). Zato, prema gore navedenom, tako odabrani x_1 bit će rješenje sustava (1.14).

Tim razmatranjima dokazali smo sljedeću propoziciju.

1.27. PROPOZICIJA

Sustav linearnih algebarskih nejednadžbi (1.13) s jednom nepoznanicom x_1 ima rješenje onda i samo onda ako je

$$\begin{aligned} &0 \le \frac{b_r}{|a_{r1}|} + \frac{b_i}{|a_{i1}|}, &&\forall\, (r, i) \in I^- \times I^+ \\ &0 \le b_i, &&\forall\, i \in I^0, \end{aligned}$$

odnosno, ekvivalentno, ako je

$$\begin{aligned} &\max_{r \in I^-} \left(-\tfrac{b_r}{|a_{r1}|} \right) \le \min_{i \in I^+} \tfrac{b_i}{|a_{i1}|} \\ &0 \le b_i, \quad \forall\, i \in I^0. \end{aligned}$$

Pri tome skup svih njegovih rješenja glasi:

$$\left\{ x_1 \in \mathbb{R} : \max_{r \in I^-} \left(-\tfrac{b_r}{|a_{r1}|} \right) \le x_1 \le \min_{i \in I^+} \tfrac{b_i}{|a_{i1}|} \right\}.$$

Slučaj $n > 1$. Pokazat ćemo kako se Fourier-Motzkinovom metodom eliminacije nepoznanice x_k iz sustava $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ dobiva novi sustav $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ s vektorom nepoznanica $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$, koji će biti rješiv onda i samo onda ako je rješiv polazni sustav $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$. U tu svrhu, za svaki $i \in I^+ \cup I^-$ podijelimo i-tu nejednadžbu sustava (1.13) s $|a_{ik}|$. Dobivamo sljedeći ekvivalentan zapis polaznog sustava $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$:

$$\left.\begin{aligned} x_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j &\leq \tilde{b}_i, \quad (i \in I^+) \\ -x_k + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j &\leq \tilde{b}_i, \quad (i \in I^-) \\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j &\leq b_i, \quad (i \in I^0), \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

gdje su

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{|a_{ik}|}, \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{|a_{ik}|}, \quad i \in I^+ \cup I^-,\ j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{k\}.$$

Lako je provjeriti da je $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$ rješenje sustava (1.17) onda i samo onda ako je $\mathbf{x}' := [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$ rješenje sustava[3]

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (\tilde{a}_{rj} + \tilde{a}_{ij})x_j &\leq \tilde{b}_r + \tilde{b}_i, \qquad (\,(r,i) \in I^- \times I^+) \\ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{ij}x_j &\leq b_i, \qquad (\,i \in I^0) \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

i ako za x_k vrijedi

$$\max_{r\in I^-}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \tilde{a}_{rj}x_j - \tilde{b}_r\right) \leq x_k \leq \min_{i\in I^+}\left(\tilde{b}_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j\right). \tag{1.19}$$

I ovdje koristimo dogovor da maksimum po praznom skupu iznosi $-\infty$, a minimum po praznom skupu da je ∞.

Neka je $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ sažetiji matrični oblik zapisa sustava (1.18) s vektorom nepoznanica $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$, dobivenog Fourier-Motzkinovom metodom eliminacije nepoznanice x_k iz sustava (1.13).

Pretpostavimo sada da je $\mathbf{x}' = [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$ rješenje sustava (1.18), tj. da je $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$. Pokažimo da postoji $x_k \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbf{x} := [x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n]^T$ rješenje sustava (1.17). Iz prvog skupa nejednakosti od (1.18) dobivamo

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \tilde{a}_{rj}x_j - \bar{b}_r \leq \tilde{b}_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j, \quad \forall\,(r,i) \in I^- \times I^+,$$

[3]Pri tome, ako je $I^- \times I^+ = \emptyset$ i $I^0 = \emptyset$ (tj., ekvivalentno, ako je $|I^+| = m$ ili $|I^-| = m$), sustav (1.18) treba shvatiti kao nejednadžbu $0x_1 + \cdots + 0x_{k-1} + 0x_{k+1} + \cdots + 0x_n \leq 0$, čiji je skup rješenja cijeli skup $\mathbb{R}^{n-1}$.

odakle slijedi

$$\max_{r\in I^-}\Bigg(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\tilde{a}_{rj}x_j-\tilde{b}_r\Bigg)\leq\min_{i\in I^+}\Bigg(\tilde{b}_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\Bigg).$$

Tada za svaki realan broj

$$x_k\in\Bigg[\max_{r\in I^-}\Bigg(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\tilde{a}_{rj}x_j-\tilde{b}_r\Bigg),\min_{i\in I^+}\Bigg(\tilde{b}_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\tilde{a}_{ij}x_j\Bigg)\Bigg]$$

vrijedi (1.18) i (1.19). Zato, prema gore navedenom, za tako odabran x_k, točka $\mathbf{x}:=[x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n]^T$ bit će rješenje sustava (1.17), tj., ekvivalentno, $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$.

Iz gornjih razmatranja i propozicije 1.27. slijedi sljedeći teorem.

1.28. Teorem (Fourier-Motzkin)

Neka je $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$ matrični zapis sustava (1.13) s $n\geq 1$ nepoznanica i m jednadžbi. Tada vrijedi:

I. *(slučaj $n>1$). Označimo s $\mathbf{A}'\mathbf{x}'\leq\mathbf{b}'$ sustav (1.18) s $n-1$ nepoznanica koji se dobiva Fourier-Motzkinovom eliminacijom nepoznanice x_k iz sustava $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$. Tada vrijedi:*

   (i) *Sustav $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda ako sustav $\mathbf{A}'\mathbf{x}'\leq\mathbf{b}'$ ima rješenje.*

   (ii) *$\boldsymbol{\xi}'=[\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\ldots,\xi_n]^T$ jest rješenje sustava $\mathbf{A}'\mathbf{x}'\leq\mathbf{b}'$ onda i samo onda ako postoji $\xi_k\in\mathbb{R}$ takav da je $\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\ldots,\xi_{k-1},\xi_k,\xi_{k+1},\ldots,\xi_n]^T$ rješenje sustava $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$.*

II. *(slučaj $n=1$). Neka je $\mathbf{0}x_1\leq\mathbf{b}'$ sustav koji se dobiva Fourier-Motzkinovom eliminacijom nepoznanice x_1 iz sustava $\mathbf{A}x_1\leq\mathbf{b}$. Sustav $\mathbf{A}x_1\leq\mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda ako je $\mathbf{b}'\geq\mathbf{0}$.*

1.29. Primjedba

Uz oznake iz teorema 1.28., vrijedi:

a) Svaka nejednadžba sustava $\mathbf{A}'\mathbf{x}'\leq\mathbf{b}'$ nenegativna je linearna kombinacija nejednadžbi iz sustava $\mathbf{Ax}\leq\mathbf{b}$. To je zato jer nejednadžbe sustava $\mathbf{A}'\mathbf{x}'\leq\mathbf{b}'$ dobivaju se iz sustava (1.17) na sljedeća dva načina:

   1. Uzimanjem svih nejednadžbi indeksiranih skupom I^0, tj. uzimanjem skupa nejednadžbi

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i,\quad (i\in I^0).$$

2. Za sve $r \in I^-$ i za sve $i \in I^+$ uzima se zbroj r-te i i-te nejednadžbe iz sustava (1.17), a taj je zbroj nenegativna linearna kombinacija r-te i i-te nejednadžbe sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

Drugim riječima, postoji nenegativna matrica $\mathbf{M}$ (opisuje pravljenje nenegativnih linearnih kombinacija) takva da je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}[\mathbf{A}, \mathbf{b}] &= [\mathbf{M}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{M}\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{M}\mathbf{a}_n, \mathbf{M}\mathbf{b}], \\
\mathbf{A}' &= [\mathbf{M}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{M}\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{M}\mathbf{a}_n] \\
\mathbf{b}' &= \mathbf{M}\mathbf{b}.
\end{aligned}
$$

b) Sustav $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ ima najviše $\max\{m, \frac{m^2}{4}\}$ nejednadžbi. Zaista, označimo li traženi broj nejednadžbi s N, pomoću nejednakosti $x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}$ dobiva se

$$
\begin{aligned}
N &= |I^0| + |I^-| \cdot |I^+| \\
&\leq |I^0| + |I^-|(m - |I^0| - |I^-|) \\
&\leq |I^0| + \tfrac{(m-|I^0|)^2}{4} \\
&\leq \max\{m, \tfrac{m^2}{4}\}.
\end{aligned}
$$

c) Ako je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, onda je $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$.

1.30. Primjedba

Za rekonstrukciju skupa svih rješenja polaznog sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ iz skupa svih rješenja sustava $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ dobivenog Fourier-Motzkinovom metodom eliminacije nepoznanice x_k potrebno je koristiti ograničenja (1.19).

Sada ćemo dokazati jedan interesantan i vrlo važan rezultat koji kaže da je vanjska projekcija poliedra također poliedar. Prvo uvedimo definiciju (vidi i sliku 9).

1.31. Definicija

Preslikavanje $\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ zadano formulom

$$\pi_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

zovemo vanjska projekcija u smjeru x_k-osi.

1.32. Teorem

Neka je $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ poliedar u $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi:

(i) Skup

$$
\begin{aligned}
\pi_k(P) = \{&[x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n]^T : \\
&\exists x_k \in \mathbb{R} \text{ takav da je } [x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T \in P\}
\end{aligned}
$$

jest poliedar u $\mathbb{R}^{n-1}$. *Preciznije,*

$$\pi_k(P) = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1} : \mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'\},$$

gdje su matrica $\mathbf{A}'$ *i vektor* $\mathbf{b}'$ *dobiveni Fourier-Motzkinovom metodom eliminacije nepoznanice* x_k *iz sustava* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$,

(ii) $\pi_k(P) = \emptyset$ *onda i samo onda ako je* $P = \emptyset$,

(iii) Ako je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, *onda je* $\mathbf{b}' = \mathbf{0}$, *tj.* $\pi_k(P)$ *jest poliedarski konus.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, a u svrhu jednostavnijeg zapisa, pretpostavimo da je $k = 1$, tj. da se radi o vanjskoj projekciji u smjeru x_1-osi. Definirajmo poliedar

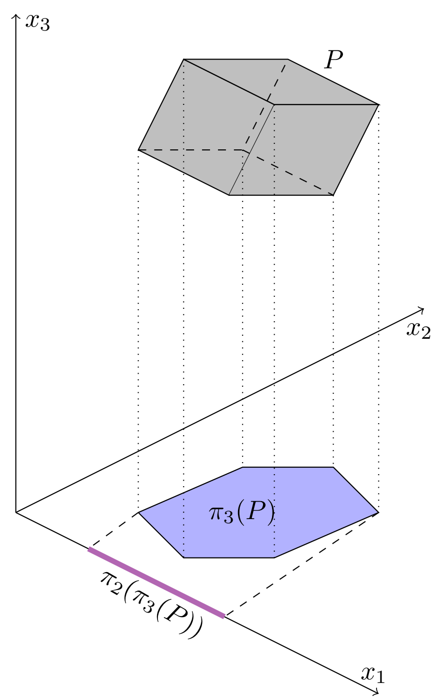
$$P' := \{\mathbf{x}' : \mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'\}.$$

Neka je $\mathbf{x}' = [x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$. Po definicijama vanjske projekcije i poliedra te pomoću tvrdnje I.(ii) teorema 1.28. dobivamo:

$$\mathbf{x}' \in \pi_1(P) \iff \exists x_1 \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} \in P \iff \mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}' \iff \mathbf{x}' \in P'.$$

Iz tvrdnje *I.(i)* teorema 1.28. slijedi da je $\pi_1(P) = \emptyset$ onda i samo onda ako je $P = \emptyset$.

Konačno, *(iii)* slijedi iz tvrdnje c) primjedbe 1.29. ■



Slika 9. *Vanjska projekcija* $\pi_3(P)$ *poliedra* P *u smjeru* x_3*-osi.*

Sljedeći korolar govori nam da linearno preslikavanje iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ čuva poliedre, tj. poliedar preslikava u poliedar.

1.33. Korolar
Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedar i $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica. Tada je skup

$$Q = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in P\}$$

također poliedar.

Dokaz. Neka je

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Bx} \leq \mathbf{b}\},$$

gdje su $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ i $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^r$. Skup

$$S := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \in P\}$$

možemo zapisati kao

$$S = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\},$$

odakle vidimo da je on poliedar.

Neka je preslikavanje $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definirano formulom $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Uočite da je $\pi(S) = Q$. Također uočite da je π kompozicija vanjskih projekcija. Zato, višestrukom primjenom (n puta!) teorema 1.32. dobivamo da je $\pi(S)$ poliedar. ■

Da je politop poliedar, govori nam sljedeći korolar.

1.34. Korolar
Konveksna ljuska konačno mnogo točaka jest poliedar.

Dokaz. Neka su zadane točake $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Neka je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$ linearno preslikvanje iz $\mathbb{R}^k$ u $\mathbb{R}^n$. Slika poliedra

$$\Big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\Big\}$$

u odnosu na to linearno preslikavanje jest konveksna ljuska

$$\Big\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\Big\}.$$

■

1.4. Motzkinova dekompozicija poliedarskog skupa

Intuitivno je jasno da su pojmovi *politop* i *poliedar* povezani. Preciznije o tome govore nam teorem o dekompoziciji poliedra (teorem 1.38.) i njegov korolar 1.39., koje dajemo na kraju ove točke.

Sljedeći dobro poznat Weylov[4] teorem govori nam da je svaki konačno generirani konus poliedarski.

1.35. TEOREM (WEYLOV TEOREM)
Konačno generirani konus

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

poliedarski je konus, tj. postoji matrica $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *takva da je*

$$C = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{0}\}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ matrica sa stupicima $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Tada je

$$C = \{\mathbf{A}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Definirajmo poliedar

$$\begin{aligned} P &= \big\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ :\ \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\big\} \\ &= \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ :\ \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Neka je projekcija $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirana formulom $\pi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Tada je

$$\begin{aligned} \pi(P) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \text{ takav da je } (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in P\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\ &= C. \end{aligned}$$

Uočite da je

$$\pi = \pi_m \cdots \circ \pi_2 \circ \pi_1,$$

gdje su $\pi_1, \ldots, \pi_m$ vanjske projekcije. Višestrukom primjenom teorema 1.32. dobivamo da je $\pi(P)$ poliedarski konus. ■

Sljedeći teorem Minkowskog[5] daje nam obrat Weylova teorema.

1.36. TEOREM (MINKOWSKI)
Poliedarski je konus konačno generiran.

---

[4] Hermann Weyl (1885. - 1955.), njemački matematičar.
[5] Hermann Minkowski (1864. - 1909.), njemački matematičar.

Dokaz. Pođimo od poliedarskog konusa

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq 0,\, i = 1, \dots, m\},$$

gdje je $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Prema Weylovom teoremu 1.35.

$$\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

poliedarski je konus, tj. postoji matrica $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r] \in \mathbb{R}^{n\times r}$ takva da je

$$\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{b}_j^T\mathbf{x} \leq 0,\ j = 1, \dots, r\}. \tag{1.20}$$

Prema Weylovom teoremu 1.35. postoji matrica $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s] \in \mathbb{R}^{n\times s}$ takva da je

$$\operatorname{cone}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}_i^T\mathbf{x} \leq 0,\, i = 1, \dots, s\}. \tag{1.21}$$

Pokažimo da je $C = \operatorname{cone}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$, što će značiti da je C konačno generiran. Zbog (1.20) je $\mathbf{b}_j^T\mathbf{a}_i \leq 0$ za sve $j = 1, \dots, r$ i za sve $i = 1, \dots, m$, što nam govori da je $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\} \subseteq C$. Zato je $\operatorname{cone}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\} \subseteq C$. Preostaje dokazati obratnu inkluziju $C \subseteq \operatorname{cone}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$. U tu svrhu, neka je $\mathbf{y} \in C$. Treba pokazati da je $\mathbf{y} \in \operatorname{cone}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbf{y} \notin \operatorname{cone}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r\}$. Zbog (1.21) tada jest $\mathbf{v}_i^T\mathbf{y} > 0$ za barem jedan indeks $i \in \{1, \dots, s\}$. Bez smanjenja općenitosti, neka je

$$\mathbf{v}_1^T\mathbf{y} > 0.$$

Nadalje, zbog (1.21) jest

$$\mathbf{v}_1^T\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{v}_1^T\mathbf{b}_r \leq 0,$$

odakle iz (1.20) slijedi $\mathbf{v}_1 \in \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Neka je $\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i\mathbf{a}_i$, $\lambda_i \geq 0$. Kako tada za svaki $\mathbf{x} \in C$ dobivamo

$$\mathbf{v}_1^T\mathbf{x} = (\sum_{i=1}^m \lambda_i\mathbf{a}_i)^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i 0 \leq 0$$

i kako je $\mathbf{v}_1^T\mathbf{y} > 0$, slijedi $\mathbf{y} \notin C$. To je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathbf{y} \in C$. ■

Kombinirajući Weylov teorem s teoremom Minkowskog dobivamo sljedeći teorem, u literaturi poznat kao Minkowski-Weylov teorem.

1.37. Teorem (Minkowki-Weyle)
Konus je poliedarski ako i samo ako je konačno generiran.

1.38. Teorem (Motzkinov teorem o dekompoziciji poliedra, 1936.)
Neprazan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedar je ako i samo ako postoje politop P i poliedarski konus C takvi da je $K = P + C$.

Dokaz. Neka je $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ poliedar u $\mathbb{R}^n$. Tada je skup

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{b} \le \mathbf{0},\, \lambda \ge 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}$$

poliedarski konus. Prema teoremu 1.36. taj konus generiran je s konačno mnogo točaka koje ćemo označiti s

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Dakle,

$$\hat{C} = \operatorname{cone} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \lambda_m \end{bmatrix} \right\}.$$

Sada ćemo pokazati da je barem jedan λ_i veći od nule. Po pretpostavci K jest neprazan. Neka je $\mathbf{x}_0 \in K$. Uočimo da je

$$\mathbf{x}_0 \in K \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \hat{C}.$$

Zato postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \ge 0$ takvi da je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Kako je $1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i$, barem jedan λ_i mora biti veći od nule.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je svaki λ_i jednak 0 ili 1. Neka je

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1, \qquad \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0,$$

tako da je

$$\hat{C} = \operatorname{cone} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Definirajmo:

$$P := \operatorname{conv} \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}, \quad C := \begin{cases} \operatorname{cone} \{\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m\}, & \text{ako je } k < m \\ \mathbf{0}, & \text{ako je } k = m. \end{cases}$$

Uočimo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in K &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \hat{C} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{cone} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ 1 \end{bmatrix} + \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_i \ge 0 \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=k+1}^{m} \alpha \mathbf{x}_i, \quad \alpha_i \ge 0,\, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \\ &\Longleftrightarrow \mathbf{x} \in P + C.\end{aligned}$$

Obratno, neka je $P = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ politop, a C poliedarski konus u $\mathbb{R}^n$. Treba pokazati da je $K := P + C$ poliedar. Prema teoremu 1.36. konus C konačno je generiran, tj. postoje vektori $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ takvi da je

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m\}.$$

Uočimo da je $\mathbf{x} \in K = P + C$ ako i samo ako je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{cone}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =: \tilde{C}.$$

Prema teoremu 1.35. konus $\tilde{C}$ poliedarski je pa postoje matrica $\tilde{\mathbf{A}}$ i vektor-stupac $\tilde{\mathbf{b}}$ takvi da je

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \ \tilde{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \lambda\tilde{\mathbf{b}} \leq \mathbf{0} \right\}. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{x} \in K$ ako i samo ako je $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq -\tilde{\mathbf{b}}$, što dokazuje da je K poliedar. ■

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi sljedeći teorem, čije se otkriće pripisuje Minkowskom (1896. g.), Steinitzu[6] (1916. g.) i Weylu (1935. g.).

1.39. TEOREM (MINKOWSKI-STEINITZ-WEYL)
Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ politop je ako i samo ako je K omeđen poliedar.

---

[6] Ernst Steinitz (1871. - 1928.), njemački matematičar.

1.5. Farkaseva lema

U matematici je Farkaseva[7] lema vrlo važan alat koji se koristi u teoriji optimizacije, primjerice u izvođenju Karush-Khun-Tuckerovih uvjeta optimalnosti u slučaju ograničenja u obliku nejednakosti kod nelinearnog programiranja te u dokazivanju dualnih teorema za linearno programiranje.

Prisjetimo se standardnog i kanonskog oblika problema linearnog programiranja. Kod kanonskog oblika svako dopustivo rješenje nenegativno je rješenje $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ sustava linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, a kod standardnog oblika svako dopustivo rješenje nenegativno je rješenje $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ sustava linearnih nejednadžbi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$. Nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju takvih dopustivih rješenja daje nam upravo Farkaseva lema.

Farkaseva lema može se iskazati na više međusobno ekvivalentnih načina. Prvo ćemo pomoću Weylova teorema dokazati sljedeću varijantu Farkaseve leme.

1.40. Teorem (Farkaseva lema)
Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima nenegativno rješenje $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ onda i samo onda ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ za svaki vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ nenegativno rješenje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$. Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ takav da je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Uočimo da je tada $\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq 0$. Kako je $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{0}$, to je $\mathbf{v}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) = 0$, odakle slijedi

$$\mathbf{v}^T\mathbf{b} = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq 0.$$

Sad pretpostavimo da sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nema nenegativno rješenje. Treba pokazati da postoji $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ takav da je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}^T\mathbf{b} < 0$. U tu svrhu, neka je $C := \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ konus generiran stupcima matrice $\mathbf{A}$. Tada po pretpostavci $\mathbf{b} \notin C$. Nadalje, prema Weylovom teoremu 1.35. C poliedarski je konus, tj. postoji matrica $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r\times m}$ C takva da je

$$C = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{By} \leq \mathbf{0}\}.$$

Kako po pretpostavci $\mathbf{b} \notin C$, to je $\mathbf{Bb} \not\leq \mathbf{0}$ i zato postoji redak matrice $\mathbf{B}$, označimo ga s $\mathbf{r}^T$, takav da je $\mathbf{r}^T\mathbf{b} > 0$. Kako svaki stupac $\mathbf{a}_i$ matrice $\mathbf{A}$ pripada konusu C (jer $\mathbf{a}_i = \mathbf{Ae}_i$, $\mathbf{e}_i \geq \mathbf{0}$), to je $\mathbf{Ba}_i \leq \mathbf{0}$, pa je specijalno i $\mathbf{r}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$. Za traženi je vektor $\mathbf{v}$ dovoljno staviti $\mathbf{v} = -\mathbf{r}^T$. ■

1.41. Primjedba
Geometrijska interpretacija Farkaseve leme: Neka je $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica,

$$C := \text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

konus generiran stupcima matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Tada je ili

[7] Gyula Farkas (1847. - 1930.), madžarski matematičar i fizičar.

(i) $\mathbf{b} \in \text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, tj. vektor $\mathbf{b}$ može se prikazati kao linearna kombinacija stupaca matrice $\mathbf{A}$ s nenegativnim koeficijentima

ili

(ii) $\mathbf{b} \notin \text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, tj., ekvivalentno, postoji hiperravnina koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava i razdvaja konus $\text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ od točke $\mathbf{b}$.

Zaista, dovoljno je uočiti:
$\mathbf{b} \notin \text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \iff$ sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nema nenegativno rješenje $\iff$ postoji $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ takav da je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}^T\mathbf{b} < 0$ (dobiva se negacijom tvrdnje teorema 1.40.) $\iff$ postoji hiperravnina $H = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{v}^T\mathbf{y} = 0\}$ koja razdvaja konus $\text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ i točku $\mathbf{b}$, tj. konus i točka $\mathbf{b}$ nalaze se u različitim međusobno disjunktnim poluprostorima koje određuje hiperravnina H. Preciznije, $\mathbf{v}^T\mathbf{b} < 0$ znači da je $\mathbf{b} \in H_- \backslash H$, dok $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ znači da je $\text{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \subseteq H_+$.

1.42. Primjedba
Korolar 4.27. na str. 110 predstavlja ekvivalentan iskaz Farkaseve leme. Dokaz je napravljen pomoću teorema 4.26. o separaciji točke i konveksnog skupa. Taj se dokaz Farkaseve leme najčešće može naći u literaturi.

Zbog izuzetne važnosti Farkaseve leme navodimo i sljedeću njezinu verziju. Dokaz je napravljen pomoću Fourier-Motzkinove metode eliminacije. Budući da će ta verzija biti dokazana i na drugi način u teoremu 1.44., prilikom prvog se čitanja dokaz može preskočiti.

1.43. Teorem (Farkaseva lema)
Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *matrica i* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *vektor. Sustav linearnih nejednadžbi* $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ *ima rješenje onda i samo onda ako je* $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ *za svaki vektor* $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ *za koji je* $\mathbf{v}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ neko rješenje sustava $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{Ax}_0 \leq \mathbf{b}$. Neka je $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Kako je $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0 \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, to je $\mathbf{v}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0) \geq 0$, odakle slijedi

$$\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq \mathbf{v}^T\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{0}\,\mathbf{x}_0 = 0.$$

Za dokaz obratne tvrdnje iskoristit ćemo teorem 1.28. i primjedbu 1.29. Označimo s $\mathbf{M}_1$ nenegativnu matricu koja iz sustava $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ eliminira nepoznanicu x_1. Takva matrica postoji (tvrdnja a) iz primjedbe 1.29.). Tada je

$$\mathbf{M}_1[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = [\mathbf{0}, \mathbf{A}_1', \mathbf{b}_1'],$$

a prema teoremu 1.28. sustav $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda ako sustav $\mathbf{A}_1'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}_1'$ ima rješenje. Nadalje, neka je $\mathbf{M}_2$ nenegativna matrica koja iz sustava $\mathbf{A}_1'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}_1'$ eliminira nepoznanica x_2. Tada je

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \mathbf{M}_2[\mathbf{0}, \mathbf{A}_1', \mathbf{b}_1'] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{A}_2', \mathbf{b}_2']$$

i pri tome, prema teoremu 1.28., sustav $\mathbf{A}_1'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}_1'$ ima rješenje onda i samo onda ako sustav $\mathbf{A}_2'\mathbf{x}'' \leq \mathbf{b}_2'$ ima rješenje. Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do nenegativnih matrica $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ takvih da je

$$\mathbf{M}_n\mathbf{M}_{n-1}\cdots\mathbf{M}_1[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = [\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{b}_n'], \tag{1.22}$$

gdje je $\mathbf{b}_n' = [\beta_1, \ldots, \beta_s]^T$ neki vektor. Pri tome sustav $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda ako je $\mathbf{b}_n' \geq \mathbf{0}$.

Ako pretpostavimo da sustav $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ nema rješenje, onda je barem jedna komponenta vektora $\mathbf{b}_n'$ strogo manja od nule. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\beta_1 < 0$. Neka je $\mathbf{v}^T$ prvi redak matrice $\mathbf{M}_n\mathbf{M}_{n-1}\cdots\mathbf{M}_1$. Iz (1.22) dobivamo $\mathbf{v}^T\mathbf{b} = \beta_1 < 0$ i $\mathbf{v}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$. ■

1.44. Teorem (Tri varijante Farkasove leme)

Neka su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Tada vrijede sljedeće međusobno ekvivalentne tvrdnje:

a) Sustav nejednadžbi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ima rješenje onda i samo onda ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ za svaki $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

b) Sustav nejednadžbi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ima nenegativno rješenje $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ onda i samo onda ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ za svaki $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

c) Sustav jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima nenegativno rješenje $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ onda i samo onda ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ za svaki $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

Dokaz. Budući da tvrdnja c) predstavlja teorem 1.40., dovoljno je dokazati ekvivalentnost navedenih tvrdnji.

a) $\Longrightarrow$ b). Sustav nejednadžbi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ima nenegativno rješenje $\Longleftrightarrow$ sustav nejednadžbi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ima rješenje $\overset{a)}{\Longleftrightarrow}$ ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ za svaki $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$) za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} = \mathbf{u}^T \geq \mathbf{0} \Longleftrightarrow$ ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ za svaki $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

b) $\Longrightarrow$ c). Sustav jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima nenegativno rješenje $\Longleftrightarrow$ sustav nejednadžbi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

ima nenegativno rješenje $\overset{b)}{\Longleftrightarrow}$ ako je $(\mathbf{v}^T - \mathbf{u}^T)\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ za svaki $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$ ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$) za koji je $(\mathbf{v}^T - \mathbf{u}^T)\mathbf{A} \geq \mathbf{0} \Longleftrightarrow$ ako je $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ za svaki $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$.

c) $\Longrightarrow$ a). Sustav nejednadžbi $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ima rješenje $\Longleftrightarrow$ sustav jednadžbi

$$[\mathbf{A}, -\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

ima nenegativno rješenje $\overset{c)}{\iff}$ $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ za svaki $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ za koji je $\mathbf{v}^T[\mathbf{A}, -\mathbf{A}, \mathbf{I}] \geq \mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{v}^T\mathbf{b} \geq 0$ za svaki $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ za koji je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$. ■

Prema Weylovom teoremu (teorem 1.35.) svaki konačno generirani konus jest poliedarski, pa je zato i zatvoren. Sada ćemo tu tvrdnju dokazati i na drugi način, pomoću Farkaseve leme.

1.45. TEOREM
Konačno generirani konus jest zatvoren.

Dokaz. Neka je $C = \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ konus generiran stupcima matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Treba pokazati da je $\mathbb{R}^n \backslash C$ otvoren skup. U tu svrhu, neka je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \backslash C$. Pokažimo da postoji otvoren skup U takav da je $\mathbf{b} \in U \subseteq \mathbb{R}^n \backslash C$, što će značiti da je $\mathbb{R}^n \backslash C$ otvoren. Kako $\mathbf{b} \notin C$, sustav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nema nenegativno rješenje i zato prema Farkasevoj lemi postoji $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}^T\mathbf{b} < 0$. Neka je $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T\mathbf{x} = 0\}$. Zbog $\mathbf{v}^T\mathbf{b} < 0$ jest $\mathbf{b} \in H_- \backslash H$, a zbog $\mathbf{v}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ jest $C \subseteq H_+$. Iz $C \subseteq H_+$ slijedi $H_- \backslash H \subseteq \mathbb{R}^n \backslash C$. Skup $U := H_- \backslash H$ otvoren je, $\mathbf{b} \in U$ i $U \subseteq \mathbb{R}^n \backslash C$. ■

Zadaci za vježbu

---

1. Dokažite da je zatvorena kugla $B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\}$ konveksan skup.

   Uputa: $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} - \mathbf{x}_0 = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (1-\lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)$.

2. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni skupovi. Provjerite: (a) Skup $A + B := \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$ jest konveksan. (b) Skup $A - B := \{\mathbf{a} - \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$ jest konveksan. (c) Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, skup $\lambda A := \{\lambda\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\}$ jest konveksan.

3. Dokažite da je skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan ako i samo ako je $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$ za sve $\alpha, \beta \geq 0$.

4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite da je skup $A \times B$ konveksan ako i samo ako su konveksni skupovi A i B.

5. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen skup. Dokažite da je tada omeđena i njegova konveksna ljuska $\operatorname{conv} S$.

6. Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite: (a) $\operatorname{conv}(\operatorname{conv} S) = \operatorname{conv} S$. (b) Ako je $S \subseteq T$, onda je $\operatorname{conv} S \subseteq \operatorname{conv} T$. (c) $\operatorname{conv} S \cup \operatorname{conv} T \subseteq \operatorname{conv}(S \cup T)$.

7. Neka je K konveksan skup. Dokažite da je tada konveksan i njegov zatvarač $\operatorname{Cl} K$.

   Uputa: Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{Cl} K$ i $\lambda \in (0,1)$. Tada postoje nizovi $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ u skupu K takvi da $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ i $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}$. Zbog konveksnosti skupa K jest $\lambda\mathbf{x}_k + (1-\lambda)\mathbf{y}_k \in K$, a zbog zatvorenosti skupa $\operatorname{Cl} K$ imamo $\lambda\mathbf{x}_k + (1-\lambda)\mathbf{y}_k \to \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \operatorname{Cl} K$.

8. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje zadano s $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$, gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. Dokažite: (a) Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, onda je njegova slika $A(K)$ konveksan skup u $\mathbb{R}^m$. (b) Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^m$ konveksan skup, onda je praslika $A^{-1}(K) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A(\mathbf{x}) \in K\}$ konveksan skup u $\mathbb{R}^n$.

9. Neka su C_1 i C_2 konusi. Dokažite: (a) $C_1 \times C_2$ jest konus. (b) Ako su konusi C_1 i C_2 konveksni, onda je konveksan i konus $C_1 \times C_2$.

   Uputa: (b) Iskoristite 4. zadatak.

10. Presjek konveksnih konusa jest konveksan konus. Dokažite! Je li presjek konusa također konus?

11. Dokažite da je konus C konveksan onda ako i samo ako je $C = C + C$.

12. Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni konus. Dokažite da je C vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $C = -C$.

13. Neka su C_1 i C_2 konveksni konus. Dokažite da je $C_1 + C_2$ konveksan konus i da vrijedi $C_1 + C_2 = \operatorname{conv}(C_1 \cup C_2)$.

14. Neka je $L = \operatorname{span}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$. Definirajmo vektor $\mathbf{b}_0 := -\sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i$. Pokažite da je $L = \operatorname{cone}\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$. Dakle, svaki je vektorski potprostor konačno generiran konus i znamo kako mu izgledaju generatori.

    Uputa: Lako je provjeriti inkluziju $\operatorname{cone}\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\} \subseteq L$. Neka je $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{b}_i \in L$. Ako je $\alpha_i \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, k$, onda je očito $\mathbf{x} \in \operatorname{cone}\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$. Ako je $\alpha_i < 0$ za barem jedan indeks i, neka je $\alpha_0 := \min\limits_{i=1,\ldots,k} \alpha_i$ i zatim uočite da je

    $$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_0)\mathbf{b}_i + \alpha_0 \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \alpha_0)\mathbf{b}_i + |\alpha_0|\mathbf{b}_0.$$

15. Neka su f i g konveksne funkcije definirane na konveksnom skupu $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Dokažite: (a) Funkcija $f + g$ jest konveksna. (b) Funkcija αf jest konveksna za svaki $\alpha \geq 0$. (c) Skup $L_\alpha := \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in K,\ f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ jest konveksan za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Skup L_α zovemo nivo skup preslikavanja f. Uočite da je $L_\alpha = f^{-1}(\alpha)$.

2. Konveksna ljuska i Carathéodoryjev teorem

2.1. Afina geometrija

Neprazan je skup $M \subseteq \mathbb{R}^n$ afina mnogostrukost ili afin skup ako sadrži pravac kroz svake svoje dvije međusobno različite točke. Formalno, skup $M \subseteq \mathbb{R}^n$ afin je ako za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ vrijedi

$$\{(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq M.$$

Najjednostavniji su primjeri afinog skupa pravac i hiperravnina. Svaki vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$ afin je skup. Sljedeća propozicija u potpunosti demistificira afine skupove; govori nam da je afin skup sinonim za linearnu mnogostrukost (translacija vektorskog potprostora za neki vektor) te da se na afin skup može gledati kao na presjek konačno mnogo hiperravnina.

Lako je pokazati da je presjek proizvoljne familije afinih skupova također afin skup.

2.1. Propozicija

Neka je $M \subsetneq \mathbb{R}^n$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) M jest afin skup.

(ii) Za svaki $\mathbf{x}_0 \in M$, skup $M - \mathbf{x}_0$ vektorski je potprostor od $\mathbb{R}^n$. Osim toga, za svaki drugi $\mathbf{y}_0 \in M$ jest

$$M - \mathbf{y}_0 = M - \mathbf{x}_0.$$

(iii) Postoje $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ ranga r i vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$ takvi da je sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konzistentan i

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Dokaz *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*. Definirajmo:

$$L_{\mathbf{x}_0} := M - \mathbf{x}_0,$$
$$L_{\mathbf{y}_0} := M - \mathbf{y}_0.$$

Po definiciji afinog skupa, za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ i za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je (vidi sliku 10)

$$\mathbf{u} := \mathbf{x}_0 + 2\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in M \quad \& \quad \mathbf{v} := \mathbf{x}_0 + 2\beta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in M,$$

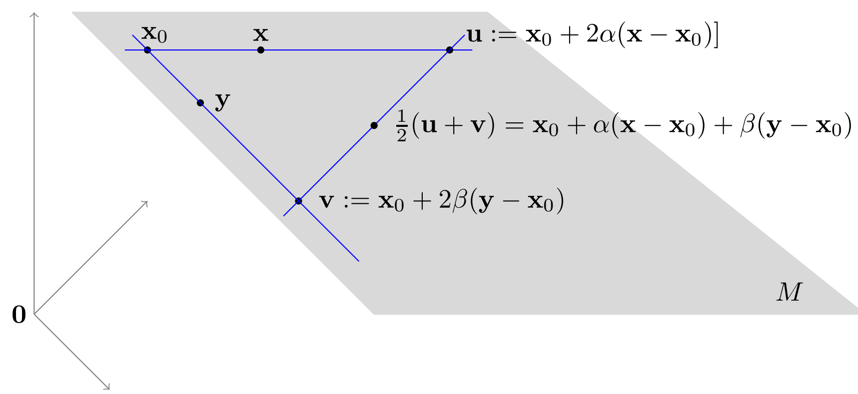
odakle slijedi $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in M$, tj., ekvivalentno,

$$\mathbf{x}_0 + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \beta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in M. \tag{2.1}$$

Zato je

$$\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \beta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in M - \mathbf{x}_0,$$

što nam govori da je $L_{\mathbf{x}_0}$ vektorski potprostor.



Slika 10. $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \Longrightarrow \mathbf{x}_0 + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \beta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \in M$

Nadalje, za dokaz jednakosti $L_{\mathbf{y}_0} = L_{\mathbf{x}_0}$ dovoljno je uočiti da za svaki $\mathbf{x} \in M$ vrijedi:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \overbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0)}^{\in M} - \mathbf{y}_0 \Longrightarrow L_{\mathbf{x}_0} \subseteq L_{\mathbf{y}_0},$$
$$\mathbf{x} - \mathbf{y}_0 = \overbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0 + \mathbf{x}_0)}^{\in M} - \mathbf{x}_0 \Longrightarrow L_{\mathbf{y}_0} \subseteq L_{\mathbf{x}_0}.$$

Zaista, za $\alpha = \beta = 1$ i $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ iz (2.1) dobiva se $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0 \in M$, odakle zamjenom uloga točaka $\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{y}_0$ slijedi i $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0 + \mathbf{x}_0 \in M$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)*. Neka je $L := M - \mathbf{x}_0$, a $L^\perp$ njegov ortogonalni komplement, tj.

$$L^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{l} \rangle = 0, \forall \mathbf{l} \in L\}.$$

Tada je $\mathbb{R}^n$ ortogonalna suma potprostora L i $L^\perp$ (pa je $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$, gdje $\oplus$ označava ortogonalnu sumu), $\dim L + \dim L^\perp = n$ i svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_L + \mathbf{x}_{L^\perp}, \qquad \mathbf{x}_L \in L,\ \mathbf{x}_{L^\perp} \in L^\perp.$$

Neka je r dimenzija potprostora $L^\perp$, tj. $r = \dim L^\perp$. Nadalje, neka vektor-stupci $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ čine bazu za $L^\perp$. Kako je $L^\perp$ okomit na L, to je

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0, \quad \text{za svaki } \mathbf{x} \in M \text{ i sve } i = 1, \ldots, r.$$

To matrično možemo zapisati kao

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

gdje je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ matrica kod koje se u i-tom retku nalazi $\mathbf{a}_i^T$. Time smo pokazali da je $M \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, gdje je $\mathbf{b} := \mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Za dokaz obratne inkluzije pretpostavimo da je $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tj. $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. To znači da je vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ okomit na sve vektore $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ koji tvore bazu za $L^\perp$, što implicira da je $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in L$, odnosno $\mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + L = M$.

(iii) $\Longrightarrow$ *(i)*. Ovaj je smjer lako provjeriti. ■

2.2. Definicija

Pod dimenzijom afinog skupa M podrazumijevamo dimenziju vektorskog potprostora $L := M - \mathbf{x}_0$, gdje je $\mathbf{x}_0 \in M$ proizvoljna točka. Dakle,

$$\dim M := \dim L.$$

Osim toga, kažemo da je afin skup paralelan s potprostorom L.

2.3. Primjedba

Iz dokaza propozicije 2.1. vidimo da na afin skup $M \subsetneq \mathbb{R}^n$ dimenzije $n - r$, $r \leq n$, možemo gledati kao na presjek od r linearno nezavisnih hiperravnina (u smislu da su im vektori normala linearno nezavisni). Pri tome vektori normala tih hiperravnina čine bazu u ortogonalnom komplementu $L^\perp$ linearnog potprostora L paralelnog s M.

U nekim daljnjim razmatranjima (vidi npr. propoziciju 4.21.) koristit ćemo sljedeću propoziciju:

2.4. Propozicija

Neka su zadani afin skup $M \subsetneq \mathbb{R}^n$ paralelan s linearnim potprostorom L i hiperravnina

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}.$$

Označimo s $L^\perp$ ortogonalni komplement od L te rastavimo vektor normale $\mathbf{a}$ u obliku

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_{L^\perp}, \qquad \textit{gdje su } \mathbf{a}_L \in L,\ \mathbf{a}_{L^\perp} \in L^\perp.$$

Pretpostavimo da je $M \cap H_{\mathbf{a},\beta} \neq \emptyset$. Tada:

(a) Ako je $\mathbf{a}_L = \mathbf{0}$, onda je $M \subseteq H_{\mathbf{a},\beta}$.

(b) Ako je $\mathbf{a}_L \neq \mathbf{0}$, onda je $M \cap H_{\mathbf{a},\beta}$ afin skup dimenzije

$$\dim(M \cap H_{\mathbf{a},\beta}) = \dim M - 1.$$

Dokaz. Shvatimo M kao presjek od r linearno nezavisnih hiperravnina. Tada je $\dim M = n - r$, a normale $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ tih hiperravnina čine bazu u $L^\perp$. Dakle, $M \cap H_{\mathbf{a},\beta}$ jest presjek od $r + 1$ hiperravnina.

(a) $\mathbf{a}_L = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{a} \in L^\perp$, pa je zato $\mathbf{a}$ linearna kombinacija vektora $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. Zbog toga hiperravninu $H_{\mathbf{a},\beta}$ možemo izbaciti iz presjeka $M \cap H_{\mathbf{a},\beta}$, tj. $M \cap H_{\mathbf{a},\beta} = M$, odakle slijedi $M \subseteq H_{\mathbf{a},\beta}$.

(b) Budući da normale $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ leže u $L^\perp$, a $\mathbf{a} \notin L^\perp$, lako je pokazati da su vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}$ linearno nezavisni. Dakle, $M \cap H_{\mathbf{a},\beta}$ jest presjek od $r + 1$ linearno nezavisnih hiperravnina. Prema tome, $M \cap H_{\mathbf{a},\beta}$ jest afin skup dimenzije $n - r - 1$. ■

2.5. Definicija

Afina kombinacija točaka $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ svaka je točka $\mathbf{x}$ oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

gdje su λ_i realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Skup svih afinih kombinacija točaka iz skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se afina ljuska skupa S i označava s $\operatorname{aff} S$.

2.6. Primjedba

Lako je pokazati da je

$$S \subseteq \operatorname{aff} S$$

te da je $\operatorname{aff} S$ afin skup. Osim toga, afino je zatvaranje monotono, tj.

$$A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{aff} A \subseteq \operatorname{aff} B.$$

2.7. Propozicija

Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ afin je onda i samo onda ako je $S = \operatorname{aff} S$.

Dokaz. Dovoljno je oponašati dokaz propozicije 1.10. ∎

2.8. Teorem

Afina ljuska skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ najmanji je afin skup koji sadrži S, tj. presjek svih afinih skupova koji sadrže S.

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teorema 1.11. ∎

2.9. Definicija

Za točke $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ kažemo da su afino nezavisne ili u općem položaju ako su jednakosti

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$$

moguće jedino za $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. U suprotnom kažemo da su afino zavisne.

Lako je dokazati sljedeću propoziciju:

2.10. Propozicija

Točke $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ afino su nezavisne onda i samo onda ako su vektori $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_1$ linearno nezavisni.

2.11. Definicija
Afina dimenzija skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$, u oznaci $\operatorname{affdim} S$, dimenzija je njegove afine ljuske, tj.

$$\operatorname{affdim} S = \dim (\operatorname{aff} S).$$

Drugim riječima, $\operatorname{affdim} S = m$ ako i samo ako maksimalan broj afino nezavisnih točaka iz S iznosi točno $m + 1$.

2.12. Primjedba
Afina je dimenzija korisna u kontekstu konveksne analize i optimizacije, ali nije uvijek u skladu s ostalim definicijama dimenzije. Navedimo dva jednostavna primjera:

a) Neka je S jedinična kružnica u ravnini, tj. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Njezina je afina ljuska cijeli $\mathbb{R}^2$, pa joj afina dimenzija iznosi 2.

b) Neka je $S = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\}$ dvočlan skup iz $\mathbb{R}^n$. Njegova je afina ljuska pravac $\{\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ i zato je $\operatorname{affdim} S = 1$.

2.13. Primjer. Neka je $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ afino nezavisan skup točaka iz $\mathbb{R}^n$. Politop

$$S := \left\{\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\right\} = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$$

zovemo m-dimenzionalni simpleks razapet (generiran) točkama $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, koje zovemo još i vrhovima. Dakle, simpleks je politop generiran pomoću afino nezavisnih točaka. Koje je afine dimenzije taj simpleks? Nije teško pokazati da su brojevi λ_i jednoznačno određeni točkom $\mathbf{x}$, i zovu se baricentričke koordinate točke $\mathbf{x}$.

Standardni $(n-1)$-dimenzionalni simpleks

$$\Delta_{n-1} := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0\right\}$$

konveksna je ljuska vektora kanonske baze $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, koji su, osim linearno, i afino nezavisni.

2.2. Topologija konveksnih skupova

Iako je konveksnost čisto algebarsko svojstvo, za njegovo potpunije razumijevanje potrebna je i topologija inducirana euklidskom metrikom. Koristit ćemo sljedeće oznake: $\operatorname{Int} S$ za nutrinu (interior), $\operatorname{Cl} S$ za zatvorenje (zatvarač) i $\operatorname{Bd} S$ za rub (granicu, frontu) skupa S. Prisjetimo se da je $\operatorname{Bd} S = \operatorname{Cl} S \backslash \operatorname{Int} S$. Nadalje, s $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ označavat ćemo otvorenu kuglu u $\mathbb{R}^n$, s centrom u $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i radijusem ε.

Kao što znamo, topološko svojstvo „biti otvoren" ne ovisi isključivo o skupu već i o topologiji u kojoj ga gledamo. Tako npr. skup $\{(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0\}$ nije otvoren u topologiji na $\mathbb{R}^3$, ali je otvoren u relativnoj topologiji na $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Standardni 2-simpleks

$$\Delta_2 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1, x_i \geq 0\Big\}$$

ima prazan interior u $\mathbb{R}^3$ jer ni jedna otvorena kugla iz $\mathbb{R}^3$ nije sadržana u njemu. Međutim, ako na taj simpleks gledamo kao podskup ravnine H koja ga sadrži,

$$H = \operatorname{aff} \Delta_2 = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\Big\},$$

a za topologiju uzmemo relativnu topologiju na H, onda će njegov interior biti neprazan, a samim time simpleks bit će topološki bogatiji.

Gornji primjeri sugeriraju nam da bi za izučavanje topoloških svojstava konveksnog skupa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ koji nije pune afine dimenzije ($\operatorname{affdim} K < n$), umjesto topologije od $\mathbb{R}^n$, puno korisnija bila relativna topologija na $\operatorname{aff} K$.

Prisjetimo se osnovnih stvari vezanih uz relativnu topologiju na $\operatorname{aff} K$. Suženjem euklidske metrike $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na $\operatorname{aff} K \times \operatorname{aff} K$, tj. s funkcijom

$$d' \colon \operatorname{aff} K \times \operatorname{aff} K \to \mathbb{R}, \quad d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{aff} K,$$

dobivamo novi metrički prostor $(\operatorname{aff} K, d')$ za koji se kaže da je potprostor od metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$. Radi jednostavnosti zapisivanja za metriku d' na potprostoru $\operatorname{aff} K$ koristi se ista oznaka, d, kao i za metriku na prostoru $\mathbb{R}^n$. U skladu s tim dogovorom, umjesto $(\operatorname{aff} K, d')$ pišemo $(\operatorname{aff} K, d)$. Dobro je poznato da su u metričkom prostoru $(\operatorname{aff} K, d)$ otvoreni skupovi oblika

$$U \cap \operatorname{aff} K, \qquad \text{gdje je } U \text{ otvoren u } \mathbb{R}^n,$$

a zatvoreni su skupovi oblika

$$F \cap \operatorname{aff} K, \qquad \text{gdje je } F \text{ zatvoren u } \mathbb{R}^n.$$

Specijalo, skup

$$B(\mathbf{x}_0, r) \cap \operatorname{aff} K = \{\mathbf{x} \in \operatorname{aff} K : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

otvorena je kugla (s centrom u $\mathbf{x}_0$ i radijusa $r > 0$) u metričkom prostoru $(\operatorname{aff} K, d)$. Familija svih otvorenih skupova prostora $(\operatorname{aff} K, d)$ zove se relativna topologija na $\operatorname{aff} K$.

2.14. Definicija
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Definira se:

a) Relativni interior skupa K, u oznaci $\operatorname{RelInt} K$, interior je skupa K u relativnoj topologiji na $\operatorname{aff} K$.

b) Relativni zatvarač skupa K, u oznaci $\operatorname{RelCl} K$, zatvarač je skupa K u relativnoj topologiji na $\operatorname{aff} K$.

c) Relativna granica skupa K, u oznaci $\operatorname{RelBd} K$, granica je skupa K u relativnoj topologiji na $\operatorname{aff} K$.

Sve točke gomilanja skupa K nalaze se u $\operatorname{aff} K$, i zato je

$$\operatorname{RelCl} K = \operatorname{Cl} K, \quad \operatorname{RelBd} K = \operatorname{Cl} K \backslash \operatorname{RelInt} K.$$

Nije teško pokazati da je $\operatorname{RelInt} K = \operatorname{Int} K$ onda i samo onda ako je $\operatorname{affdim} K = n$.

2.15. Primjedba
Za skupove

$$\begin{aligned} A &= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\} \end{aligned}$$

iz $\mathbb{R}^2$ imamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{RelInt} A &= \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}, \\ \operatorname{RelInt} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ &= \operatorname{Int} B. \end{aligned}$$

Uočimo: $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\operatorname{RelInt} A \neq \emptyset$ i $\operatorname{RelInt} A \not\subseteq \operatorname{RelInt} B$, bez obzira što je $A \subset B$ i stoga $\operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$.

Na prvi pogled izgleda zapanjujuće što $\operatorname{RelInt} A$ nije sadržan u $\operatorname{RelInt} B$. Razlog je u tome što se relativni interior skupa A traži u relativnoj topologiji na $\operatorname{aff} A$, a ta topologija razlikuje se od relativne topologije na $\operatorname{aff} B$ u kojoj se određuje relativni interior skupa B.

Taj jednostavan primjer ilustrira nam da kod traženja relativnog interiora treba biti oprezan. Tako, primjerice, dobro poznate relacije za interior kao što su

$$\begin{aligned} &\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \\ &A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B \end{aligned}$$

ne smijemo automatski generalizirati i na relativni interior, osim u slučaju kada je $\operatorname{aff} A = \operatorname{aff} B$ (tada u istom topološkom prostoru promatramo skupove A i B).

Prije nego nastavimo s izlaganjem, prisjetimo se nekih definicija i tvrdnji iz realne analize koje ćemo nadalje često trebati.

2.16. Teorem (vidi npr. Jukić [11])
Neka su X, Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ preslikavanje. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) f *je neprekidno preslikavanje.*

(ii) *Za svaki otvoreni skup* V *iz* Y, *skup* $f^{-1}(V)$ *jest otvoren u* X.

(iii) *Za svaki zatvoreni skup* F *iz* Y, *skup* $f^{-1}(F)$ *jest zatvoren u* X.

(iv) *Za svaki skup* $A \subseteq X$ *jest* $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.

2.17. Definicija (vidi npr. Jukić [11])
Neka su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori. Neprekidna je bijekcija $f : X \to Y$ homeomorfizam ako je neprekidno i inverzno preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$.

2.18. Propozicija
Neka je $f : X \to Y$ homomorfizam topoloških prostora X i Y. Tada vrijedi:

(i) f *jest* otvoreno preslikavanje, *tj. za svaki otvoren skup* U *iz* X, *skup* $f(U)$ *jest otvoren u* Y,

(ii) f *jest* zatvoreno *preslikavanje, tj. za svaki zatvoren skup* F *iz* X, *skup* $f(F)$ *jest zatvoren u* Y,

(iii) $\operatorname{Int} f(A) = f(\operatorname{Int} A)$, *za svaki* $A \subseteq X$,

(iv) $\operatorname{Cl} f(A) = f(\operatorname{Cl} A)$, *za svaki* $A \subseteq X$.

Dokaz. *(i)-(ii).* Neka je $g = f^{-1}$, U otvoren skup iz X, a F zatvoren skup u X. Kako je g neprekidno preslikavanje, prema prethodnom je teoremu skup $g^{-1}(U)$ otvoren u Y, a skup $g^{-1}(F)$ zatvoren je u Y. Sada je dovoljno uočiti da je $f(U) = g^{-1}(U)$ i $f(F) = g^{-1}(F)$.

(iii) Kako je $\operatorname{Int} A \subseteq A$, to je $f(\operatorname{Int} A) \subseteq f(A)$. Prema tvrdnji *(i)* skup $f(\operatorname{Int} A)$ otvoren je u Y i zato je $f(\operatorname{Int} A) \subseteq \operatorname{Int} f(A)$. Zamijenimo li u posljednjoj inkluziji f s f^{-1} i A s $f(A)$, dobivamo $f^{-1}(\operatorname{Int} f(A)) \subseteq \operatorname{Int} A$, odakle slijedi tražena obratna inkluzija $\operatorname{Int} f(A) \subseteq f(\operatorname{Int} A)$.

(iv) Zbog tvrdnje *(iv)* prethodnog teorema dovoljno je pokazati da je $\operatorname{Cl} f(A) \subseteq f(\operatorname{Cl} A)$. Zaista, primjenom iste tvrdnje na funkciju g i na skup $f(A)$ dobivamo $g(\operatorname{Cl} f(A) \subseteq \operatorname{Cl}(g(f(A))) = \operatorname{Cl} A$, odakle slijedi $\operatorname{Cl} f(A) \subseteq f(\operatorname{Cl} A)$. ■

2.19. Lema
Neka je $S = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ m-dimenzionalni simpleks iz $\mathbb{R}^n$ generiran s afino nezavisnim točkama $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$. Tada je S zatvoren skup,

$$\operatorname{RelInt} S = \Big\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \Big\}, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{RelBd} S = \Big\{ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i = 0 \text{ za barem jedan } i \Big\}.$$

Dokaz. Uočimo da je

$$S = \Big\{\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \le 1, \lambda_i \in [0,1]\Big\}.$$

Neka je

$$\Lambda := \Big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \le 1, \lambda_i \in [0,1]\Big\}.$$

Poliedar Λ zatvoren je u $\mathbb{R}^m$ i (propozicija 1.6.)

$$\operatorname{Int} \Lambda = \Big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < 1, \lambda_i \in (0,1)\Big\}.$$

Definirajmo neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \to \operatorname{aff} S$ formulom

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0).$$

Tada je

$$f(\Lambda) = S.$$

Nadalje, koristeći afinu nezavisnost točaka $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$, $i = 1, \ldots, m$, lako je pokazati da je f homeomorfizam. Zato f „komutira” s interiorom i zatvaračem (propozicija 2.18.), tj. za svaki $A \subseteq \mathbb{R}^m$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{RelInt} f(A) &= f(\operatorname{Int} A), \\ \operatorname{Cl} f(A) &= f(\operatorname{Cl} A). \end{aligned}$$

Specijalno, za $A = \Lambda$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{RelInt} S &= \operatorname{RelInt} f(\Lambda) = f(\operatorname{Int} \Lambda) \\ &= \Big\{\mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < 1, \lambda_i \in (0,1)\Big\} \\ &= \Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\Big\}, \\ \operatorname{Cl} S &= \operatorname{Cl} f(\Lambda) = f(\operatorname{Cl} \Lambda) = f(\Lambda) = S, \end{aligned}$$

čime smo pokazali da je S zatvoren skup i da vrijedi (2.2). Osim toga, dobiva se:

$$\begin{aligned} \operatorname{RelBd} S &= \operatorname{Cl} K \backslash \operatorname{RelInt} S \\ &= \Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0\Big\} \backslash \Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\Big\} \\ &= \Big\{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i = 0 \text{ za barem jedan } i\Big\}. \end{aligned}$$

■

2.20. PRIMJEDBA
Zatvorenost sipmleksa slijedi i iz korolara 1.34. Naime, po tom korolaru svaki simpleks jest poliedar, a poliedar je zatvoren skup.

2.21. KOROLAR
Neka je $S = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ *simpleks iz* $\mathbb{R}^n$ *generiran pomoću afino nezavisnih točaka* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$. *Neka je zadan* $\varepsilon \in (0,1)$. *Definirajmo nove točke*

$$\bar{\mathbf{x}} := \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i(\varepsilon) := \mathbf{x}_i + \varepsilon(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i), \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Tada vrijedi:

(i) Točke $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *jesu afino nezavisne.*

(ii) Simpleks

$$S(\varepsilon) := \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0(\varepsilon), \mathbf{x}_1(\varepsilon), \ldots, \mathbf{x}_m(\varepsilon)\}$$

pripada relativnoj nutrini simpleksa S, *tj.* $S(\varepsilon) \subset \operatorname{RelInt} S$. *Osim toga,*

$$\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} S(\varepsilon).$$

Dokaz. *(i)* Lako je provjeriti da sve točke $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$ leže u simpleksu S te da su one afino nezavisne.

(ii) Neka je $\mathbf{x} \in S(\varepsilon)$ oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i(\varepsilon), \qquad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i [\mathbf{x}_i + \varepsilon(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i)] = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (1-\varepsilon)\mathbf{x}_i + \varepsilon \bar{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i=0}^{m} \left[\lambda_i(1-\varepsilon) + \tfrac{\varepsilon}{m+1}\right] \mathbf{x}_i, \end{aligned}$$

pa uz oznake

$$\lambda_i' := \lambda_i(1-\varepsilon) + \tfrac{\varepsilon}{m+1}, \qquad i = 0, 1, \ldots, m$$

imamo

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' \mathbf{x}_i, \qquad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i' = 1, \ \lambda_i' > 0.$$

Prema lemi 2.19. jest $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} S$.

Dokaz jednakosti $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} S(\varepsilon)$ prepuštamo čitateljima za vježbu. ■

Lema 2.19. govori nam da simpleks ima neprazan relativni interior. Općenito je moguće da neprazan skup ima prazan relativni interior. No, ako je konveksan skup neprazan, neprazan je i njegov relativni interior. O tome nam govori sljedeća propozicija.

2.22. Propozicija
Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan i konveksan skup, onda je

$$\operatorname{RelInt} K \neq \emptyset \quad i \quad \operatorname{affdim}(\operatorname{RelInt} K) = \operatorname{affdim} K.$$

Dokaz. Neka je $m := \operatorname{affdim} K$. Tada K sadrži $m+1$ afino nezavisnih točaka $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ takvih da je

$$\operatorname{aff} K = \operatorname{aff}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}.$$

Skup K konveksan je pa sadrži simpleks

$$S := \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}.$$

Budući da je $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} K$ i $S \subseteq K$, dobivamo[8]

$$\operatorname{RelInt} S \subseteq \operatorname{RelInt} K.$$

Prema lemi 2.19. jest $\operatorname{RelInt} S \neq \emptyset$, pa je zato $\operatorname{RelInt} K \neq \emptyset$.

Prije dokaza jednakosti $\operatorname{affdim}(\operatorname{RelInt} K) = \operatorname{affdim} K$ prisjetimo se da se afina dimenzija $\operatorname{affdim} A$ skupa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definira kao dimenzija njegove afine ljuske $\operatorname{aff} A$; $\operatorname{affdim} A$ jest za jedan manja od maksimalnog broja afino nezavisnih vektora iz skupa A. Afina dimenzija ima svojstvo „monotonosti", tj. $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{affdim} A \leq \operatorname{affdim} B$.

Kako je $\operatorname{RelInt} K \subseteq K$, monotonost afine dimenzije daje $\operatorname{affdim}(\operatorname{RelInt} K) \leq \operatorname{affdim} K = m$. Preostaje dokazati obratnu nejednakost $\operatorname{affdim}(\operatorname{RelInt} K) \geq m$. U tu svrhu neka je $S(\varepsilon)$ m-dimenzionalni simpleks konstruiran u dokazu korolara 2.21. Budući da je

$$S(\varepsilon) \subset \operatorname{RelInt} S \subseteq \operatorname{RelInt} K,$$

zbog monotonosti afine dimenzije je $m = \operatorname{affdim} S(\varepsilon) \leq \operatorname{affdim}(\operatorname{RelInt} K)$. ■

Sljedeća vrlo korisna tehnička lema kaže nam da kretanjem duž segmenta s početkom u relativnoj unutrašnjosti i krajem na zatvaraču, stalno ostajemo u relativnom interioru.

2.23. Lema (Princip linijskog segmenta)
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$ i $\mathbf{x}' \in \operatorname{Cl} K$. Tada je poluotvoreni segment

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \{\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}' : 0 < \alpha \leq 1\}$$

sadržan u $\operatorname{RelInt} K$.

Dokaz. Neka je (slika 11)

$$\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{x}', \quad 0 < \alpha < 1.$$

[8] Implikacija $S \subseteq K \Longrightarrow \operatorname{RelInt} S \subseteq \operatorname{RelInt} K$ vrijedi jer je $\operatorname{aff} S = \operatorname{aff} K$.

Treba pokazati da je $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$, tj. da postoji realan broj $r > 0$ takav da je

$$B(\mathbf{y}, r) \cap \mathrm{affK} \subseteq K.$$

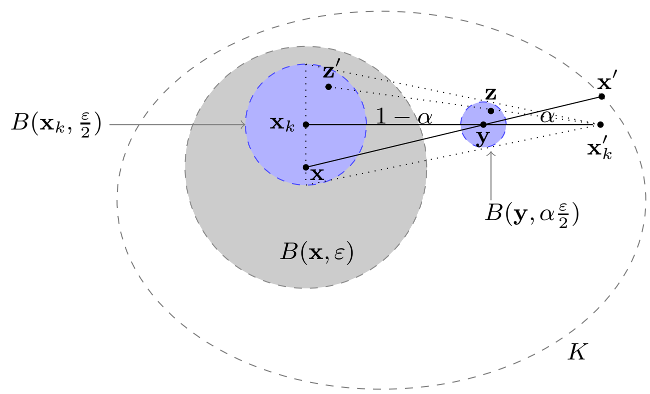
Kako je $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathrm{affK} \subseteq K. \tag{2.3}$$

Nadalje, kako je $\mathbf{x}' \in \operatorname{Cl} K$, postoji niz $(\mathbf{x}'_k)$ točaka iz K koji konvergira prema $\mathbf{x}'$. Neka je

$$\mathbf{x}_k := \frac{1}{\alpha}\big(\mathbf{y} - (1-\alpha)\mathbf{x}'_k\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Zato nadalje možemo pretpostaviti da je k dovoljno velik tako da bude $B(\mathbf{x}_k, \varepsilon/2) \subset B(\mathbf{x}, \varepsilon)$.



Slika 11. $\alpha = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}'_k\| / \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k\|$.

Pokažimo da je $B(\mathbf{y}, \alpha\varepsilon/2) \cap \operatorname{aff} K \subseteq K$. U tu svrhu neka je $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, \alpha\varepsilon/2) \cap \operatorname{aff} K \subseteq K$. Definirajmo novu točku

$$\mathbf{z}' := \frac{1}{\alpha}\big(\mathbf{z} - (1-\alpha)\mathbf{x}'_k\big).$$

Lako je provjeriti da je $\mathbf{z}' \in B(\mathbf{x}_k, \varepsilon/2)$. Osim toga, kako je $\mathbf{z}' = \mathbf{x}'_k + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{z} - \mathbf{x}'_k)$, zaključujemo da je $\mathbf{z}' \in \operatorname{aff} K$. Dakle,

$$\mathbf{z}' \in B(\mathbf{x}_k, \varepsilon/2) \cap \operatorname{aff} K \subseteq B(\mathbf{x}_k, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} K$$

pa iz (2.3) slijedi $\mathbf{z}' \in K$. Konačno, kako su $\mathbf{z}', \mathbf{x}_k \in K$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}'_k + \alpha(\mathbf{z}' - \mathbf{x}'_k)$ i $0 < \alpha < 1$, slijedi $\mathbf{z} \in K$. Time smo pokazali da je $B(\mathbf{y}, \alpha\varepsilon/2) \cap \operatorname{aff} K \subseteq K$. ■

2.24. Korolar

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Zraka s početkom u točki $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$ može sjeći relativnu granicu $\operatorname{RelBd} K = \operatorname{Cl} K \backslash \operatorname{RelInt} K$ u najviše jednoj točki.

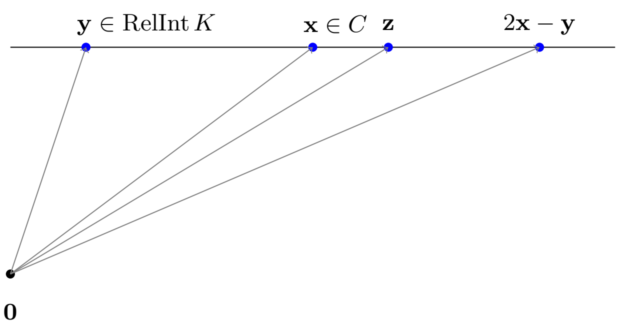
Koristeći lemu 2.23. lako je pokazati da se kod konveksnih skupova topološki pojmovi poput zatvorenja i nutrine mogu jednostavno i lijepo opisati na čisto geometrijski način.

2.25. PROPOZICIJA
Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, onda je

$$\operatorname{Cl} K = \{\mathbf{x} \in \operatorname{aff} K : \exists\, \mathbf{y} \in K,\ [\mathbf{y}, \mathbf{x}) \subseteq K\},$$
$$\operatorname{RelInt} K = \{\mathbf{x} \in \operatorname{aff} K : \forall\, \mathbf{y} \in \operatorname{aff} K \backslash \{\mathbf{x}\}, \exists\, \mathbf{z} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y}), [\mathbf{x}, \mathbf{z}] \subseteq K\}.$$

Dokaz. Radi jednostavnosti, označimo s B desnu stranu prve jednakosti. Neka je $\mathbf{x} \in B$. Tada postoji $\mathbf{y} \in K$ takav da je $[\mathbf{y}, \mathbf{x}) \subseteq K$. Ako je $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, onda je $\mathbf{x} = \mathbf{y} \in K \subseteq \operatorname{Cl} K$. Ako je $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, onda je $\mathcal{O} \cap K \neq \emptyset$ za svaku okolinu točke $\mathbf{x}$, pa je zato $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$. Time smo pokazali da je $B \subseteq \operatorname{Cl} K$. Za dokaz obratne inkluzije uzmimo bilo koji $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$. Prema propoziciji 2.22. postoji $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$, a prema lemi 2.23. jest $[\mathbf{y}, \mathbf{x}) \subseteq \operatorname{RelInt} K \subseteq K$. Time smo dokazali prvu jednakost.

Za dokaz druge jednakosti, neka je C desna strana te jednakosti. Očigledno je $\operatorname{RelInt} K \subseteq C$. Za dokaz obratne inkluzije uzmimo bilo koji $\mathbf{x} \in C$. Odaberimo bilo koju točku $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ (slika 12). Po definiciji skupa C, za točku $2\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{aff} K$ postoji točka $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}, 2\mathbf{x} - \mathbf{y})$ takva da je $[\mathbf{x}, \mathbf{z}] \subseteq K$. Uočimo da je $\mathbf{x} \in (\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Zaista, kako je $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}, 2\mathbf{x} - \mathbf{y})$, postoji $\lambda \in (0, 1)$ takav da je $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, odakle se dobiva $\mathbf{x} = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{z} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{y}$. Konačno, kako je $\mathbf{z} \in K \subseteq \operatorname{Cl} K$ i $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$, prema lemi 2.23. jest $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$. ■



Slika 12.

2.26. KOROLAR
Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, onda su konveksni njegova relativna nutrina $\operatorname{RelInt} K$ *i zatvorenje* $\operatorname{Cl} K$.

Dokaz. Konveksnost skupa $\operatorname{RelInt} K$ slijedi direktno iz leme 2.23., a konveksnost zatvarača $\operatorname{Cl} K$ dokazana je u 7. zadatku na str. 31

Pokažimo i na drugi način konveksnost zatvarača $\operatorname{Cl} K$. Neka su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Cl} K$. Prema propoziciji 2.25. postoje $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in K$ takvi da je $[\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1) \subseteq K$ i $[\mathbf{y}_2, \mathbf{x}_2) \subseteq K$. Zbog konveksnosti skupa K tada je

$$\big[\lambda\mathbf{y}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{y}_2, \lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2\big) \subseteq K, \quad \forall\lambda \in [0, 1],$$

odakle, opet po propoziciji 2.25., slijedi da je $\lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2 \in \operatorname{Cl} K$. ■

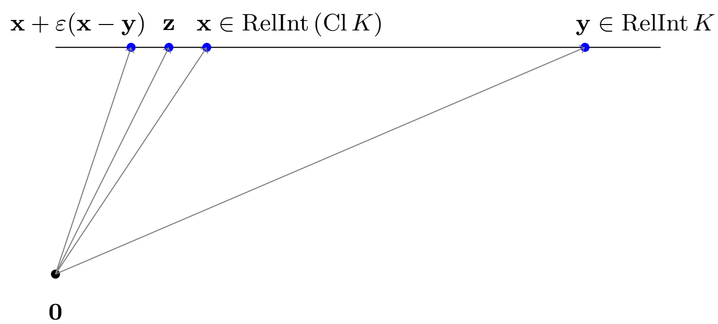
2.27. Korolar

Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, onda je

$$\operatorname{Cl} K = \operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} K), \quad \operatorname{RelInt} K = \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} K).$$

Dokaz. Očito je $\operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} K) \subseteq \operatorname{Cl} K$. Neka je $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$. Prema propoziciji 2.22. postoji $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$, a prema lemi 2.23. jest $[\mathbf{y}, \mathbf{x}) \subseteq \operatorname{RelInt} K$. Kako je $\operatorname{RelInt} K$ konveksan skup, prema propoziciji 2.25. jest $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} K)$.

Očigledno vrijedi $\operatorname{RelInt} K \subseteq \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} K)$. Neka je $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} K)$. Odaberimo $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Neka je $\varepsilon > 0$ dovoljno malen, tako da bude $\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} K) \subseteq \operatorname{Cl} K$ (slika 13). Ako primijenimo propoziciju 2.25. na konveksan skup $\operatorname{Cl} K$, dobivamo točku $\mathbf{z} \in \operatorname{Cl} K$ takvu da je $\mathbf{z} \in (\mathbf{x} + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \mathbf{x})$ i $[\mathbf{z}, \mathbf{x}] \subseteq \operatorname{Cl} K$. Tada je $\mathbf{x} \in (\mathbf{z}, \mathbf{y})$, pa je po lemi 2.23. $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$. ■



Slika 13.

2.3. Carathéodoryjev teorem

Sljedeći Carathéodoryjev[9] teorem ključan je za razumijevanje konveksnih skupova, on nam govori da su simpleksi „cigle” za konveksne skupove. Preciznije, koveksna ljuska $\operatorname{conv} S$ skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jednaka je uniji svih simpleksa s vrhovima iz skupa S.

2.28. Teorem (Carathéodoryjev teorem za konveksne skupove)
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Svaka točka $\mathbf{x} \in \operatorname{conv} S$ može se prikazati kao konveksna kombinacija od najviše $\operatorname{affdim} S + 1$ afino nezavisnih točaka iz skupa S.

Dokaz. Neka je $\mathbf{x} \in \operatorname{conv} S$ oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i, \qquad \mathbf{x}_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Ako su točke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ afino nezavisne, onda je $m \leq \operatorname{affdim} S + 1$ i dokaz je gotov. Zato nadalje pretpostavimo da su $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ afino zavisne točke. Tada postoje skalari $\mu_1, \ldots, \mu_m$, koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 0.$$

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\mu_1 > 0$. Neka je

$$\tau := \min\left\{\tfrac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0\right\} = \tfrac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} > 0,$$

a zatim definirajmo nenegativne brojeve

$$\tilde{\lambda}_i := \lambda_i - \tau\mu_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Uočite da je $\tilde{\lambda}_{i_0} = 0$ i zato je

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i - \tau \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \tilde{\lambda}_i \mathbf{x}_i,$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \tilde{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \tau\mu_i) = 1.$$

Dakle, dobili smo novi prikaz od $\mathbf{x}$ kao konveksne kombinacije od $m-1$ točaka iz S. Gornji postupak iteriramo sve dok $\mathbf{x}$ ne prikažemo kao konveksnu kombinaciju od najviše $m \leq \operatorname{affdim} S + 1$ afino nezavisnih točaka iz S. ■

2.29. Korolar
Koveksna ljuska $\operatorname{conv} S$ skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jednaka je uniji svih simpleksa s vrhovima iz skupa S.

---

[9] Constantin Carathéodory (1873. - 1950.), njemački matematičar grčkog porijekla.

Ako je skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren, njegova konveksna ljuska ne mora biti zatvorena. Primjerice, skup

$$S = \{(0,0)\} \cup \{(x,1) : x \geq 0\}$$

jest zatvoren, a njegova konveksna ljuska

$$\operatorname{conv} S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}$$

nije zatvorena (slika 14). Međutim, kao što nam govori sljedeći korolar, konveksno se zatvaranje dobro ponaša prema otvorenim skupovima i kompaktima.

a) Skup S *b)* conv S

Slika 14.

2.30. Korolar

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Vrijedi:

(i) Ako je S otvoren, onda je i $\operatorname{conv} S$ *otvoren skup.*

(ii) Ako je S kompaktan, onda je i $\operatorname{conv} S$ *kompaktan skup.*

Dokaz. *(i)* Neka je $\mathbf{x} \in \operatorname{conv} S$ oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{x}_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Zbog otvorenosti skupa S postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\mathbf{x}_i + B(\mathbf{0}, \varepsilon) \subseteq S, \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Tada je

$$B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + B(\mathbf{0}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\mathbf{x}_i + B(\mathbf{0}, \varepsilon)) \subseteq \operatorname{conv} S.$$

(ii) Standardni n dimenzionalni simpleks

$$\Delta = \Big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\Big\}$$

kompaktan je skup jer je omeđen i zatvoren. Zato je, kao Kartezijev produkt kompaktnih skupova, kompaktan i skup

$$S^{n+1} \times \Delta = \{(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) : (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}) \in S^{n+1}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \Delta\}.$$

Funkcija $f : S^{n+1} \times \Delta \to \mathbb{R}^n$, definirana formulom

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n+1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{x}_i$$

neprekidna je, pa je njezina slika $f(S^{n+1} \times \Delta)$ kompaktan skup. Očito je

$$f(S^{n+1} \times \Delta) \subseteq \operatorname{conv} S.$$

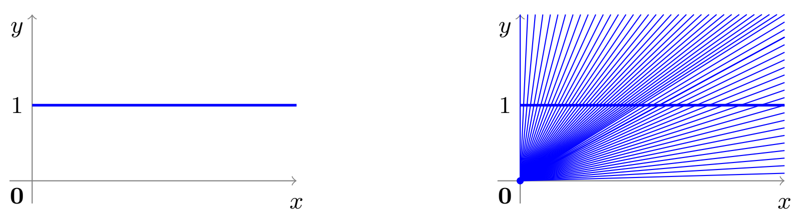
Obratna inkluzija slijedi iz Carathéodoryjeva teorema. ■

Postupajući slično kao u dokazu Carathéodoryjeva teorema nije teško dokazati sljedeći teorem.

2.31. Teorem (Carathéodoryjev teorem za konus)
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Svaka točka $\mathbf{x} \in \operatorname{cone} S$ može se prikazati kao konusna kombinacija od najviše $\operatorname{affdim} S$ *linearno nezavisnih točaka iz skupa S.*

Svaki konus (ne nužno konveksan) ima vrh. Zahvaljujući tome, lako je pokazati da je konus otvoren ako i samo ako se podudara s cijelim prostorom $\mathbb{R}^n$.

Ako je skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren, njegova konusna ljuska $\operatorname{cone} S$ ne mora biti zatvorena. Primjerice, skup $S = \{(x, 1) : x \geq 0\}$ jest zatvoren, a $\operatorname{cone} S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ nije zatvoren (slika 15). Međutim, ako je S konačan skup, onda će i $\operatorname{cone} S$ biti zatvoren skup. O tome nam govori korolar 2.33. Prvo ćemo dokazati jednu propoziciju.



a) Skup S *b)* $\operatorname{cone} S$

Slika 15.

2.32. Propozicija
Neka je

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \lambda_i \geq 0 \Big\}$$

konačno generirani konus s linearno nezavisnim generatorima $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$. Tada je C zatvoren skup, a njegova relativna nutrina $\operatorname{RelInt} C$ *glasi*

$$\operatorname{RelInt} C = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \lambda_i > 0 \Big\}.$$

Dokaz. Označimo sa $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ linearni potprostor od $\mathbb{R}^n$ razapet vektorima $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, a za topologiju na $\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ uzmimo relativnu topologiju. Definirajmo neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{R}^m \to \operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ formulom

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

Koristeći linearnu nezavisnost vektora $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ lako je pokazati da je f homeomorfizam (neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidna funkcija).

Sad je dovoljno prisjetiti se da homeomorfizam čuva otvorenost i zatvorenost skupova (propozicija 2.18.), tj. slika otvorenog skupa otvoren je skup, a slika zatvorenog skupa zatvoren je skup. To za posljedicu ima da homeomorfizam f „komutira" s interiorom i zatvaračem, tj.

$$\begin{aligned} &\operatorname{RelInt} f(A) = f(\operatorname{Int} A) \\ &\operatorname{Cl} f(A) = f(\operatorname{Cl} A) \end{aligned}$$

za svaki $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

Skup $A := \mathbb{R}^m_+ = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}$ jest zatvoren, a $\operatorname{Int} A = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}\}$. Kako je $f(A) = C$, skup C jest zatvoren. Nadalje,

$$\operatorname{RelInt} C = \operatorname{RelInt} f(A) = f(\operatorname{Int} A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \lambda_i > 0 \Big\}.$$

■

Zatvorenost konačno generiranog konusa slijedi iz Weylova teorema 1.35. U teoremu 1.45. tu smo tvrdnju dokazali na drugi način. U sljedećem korolaru dajemo još jedan dokaz zatvorenosti konačno generiranog konusa.

2.33. KOROLAR
Svaki konačno generirani konus $K \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren je skup.

Dokaz. Neka je $K = \operatorname{cone} S$, gdje je $S \subset \mathbb{R}^n$ konačan skup. Budući da je S konačan skup, pomoću Carathéodoryjeva teorema za konus lako je zaključiti da se $\operatorname{cone} S$ može prikazati kao unija konačno mnogo konusa od kojih je svaki generiran s linearno nezavisnim podskupom skupa S. Prema propoziciji 2.32. takvi konusi zatvoreni su, a unija konačno mnogo zatvorenih skupova zatvoren je skup. ■

Zadaci za vježbu

1. Dokažite: (a) Presjek afinih skupova jest afin skup. (b) Afin je skup vektorski potprostor ako i samo ako sadrži $\mathbf{0}$.

2. Neka je afin skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ paralelan s vektorskim potprostorom L, tj. $A = \mathbf{x}_0 + L$, gdje je $\mathbf{x}_0 \in A$. Pokažite da je $A - A = L$.

3. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{aff} A$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokažite da je $(1-\alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha \operatorname{aff} A = \operatorname{aff} A$.

   Uputa: Lako je provjeriti da je $(1-\alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha \operatorname{aff} A \subseteq \operatorname{aff} A$ jer, po definiciji, afin skup sadrži pravac kroz svake dvije svoje točke. Za provjeru obratne inkluzije iskoristite jednakost $\mathbf{x} = (1-\alpha)\mathbf{x}_0 + \alpha\big(\mathbf{x} + \frac{1-\alpha}{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\big)$.

4. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^k$, a $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Pokažite da je $\operatorname{aff}(A \times B) = \operatorname{aff} A \times \operatorname{aff} B$.

   Uputa: Za dokaz inkluzije $\operatorname{aff}(A \times B) \subseteq \operatorname{aff} A \times \operatorname{aff} B$ pretpostavimo da je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \operatorname{aff}(A \times B)$ oblika $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$. Tada je $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i \in \operatorname{aff} A$ i $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{b}_i \in \operatorname{aff} B$, pa je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \operatorname{aff} A \times \operatorname{aff} B$. Za dokaz obratne inkluzije pretpostavimo da je

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{a}_i \in A, \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i = 1,$$
$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_j \mathbf{b}_j, \quad \mathbf{b}_j \in B, \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_j = 1.$$

   Očito je $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \in A \times B$ za sve $i = 1, \ldots, k_1$ i sve $j = 1, \ldots, k_2$, a kako je

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1) + \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_j(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_j)$$

   i $-1 + \sum_{i=1}^{k_1} \lambda_i + \sum_{j=1}^{k_2} \alpha_j = 1$, slijedi da je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \operatorname{aff}(A \times B)$.

5. Neka je $S = \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ simpleks u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{Int} S$. Pokažite da su politopi

$$S_i := \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

   također simpleksi s međusobno disjunktnim interirorima te da je $S = \cup_{i=0}^{n} S_i$.

   Uputa: Upotrijebite lemu 2.19.

6. Ilustrirajte primjerom da relativni interior nema svojstvo monotonosti, tj. da inkluzija $A \subseteq B$ ne povlači da je $\operatorname{RelInt} A \subseteq \operatorname{RelInt} B$.

   Uputa: Za B uzmite kocku, a za A neku njezinu stranicu.

7. Neka su A, B konveksni skupovi. (a) Dokažite da je $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl} B$ ako i samo ako je $\operatorname{RelInt} A = \operatorname{RelInt} B$. (b) Ilustrirajte primjerom da se općenito ne smije izostaviti zahtjev konveksnosti.

   Uputa: (a) Prema korolaru 2.27. za svaki konveksan skup K jest $\operatorname{Cl} K = \operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} K)$ i $\operatorname{RelInt} K = \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} K)$. Pretpostavimo li da je $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl} B$, dobivamo

$$\operatorname{RelInt} A = \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{RelInt}(\operatorname{Cl} B) = \operatorname{RelInt} B.$$

   Dokaz obrata preskačemo.

8. Neka su A, B konveksni skupovi takvi da je $\operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B \neq \emptyset$. Dokažite:

   (a) $\operatorname{Cl}(A \cap B) = \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$ (b) $\operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B) = \operatorname{Cl}(A \cap B)$
   (c) $\operatorname{RelInt}(A \cap B) = \operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B$.

   Uputa: Neka je $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B$.

   (a) Dokaz inkluzije $\operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B \subseteq \operatorname{Cl}(A \cap B)$: Za svaki $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} \cap \operatorname{Cl} B$ vrijedi $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \subseteq \operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B$ (lema 2.23.). Iskoristimo li sada monotonost zatvarača, dobivamo $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subseteq \operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B) \subseteq \operatorname{Cl}(A \cap B)$ pa je $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl}(A \cap B)$.

   (b) Iskoristite (a) i korolar 2.27.

   (c) Skupovi $\operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B$ i $A \cap B$ konveksni su i imaju isti zatvarač. Zato prema korolaru 2.27. imaju isti relativni interior, pa vrijedi

   $$\operatorname{RelInt}(A \cap B) = \operatorname{RelInt}(\operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B) \subseteq \operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B.$$

   Za dokaz obratne inkluzije $\operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B \subseteq \operatorname{RelInt}(A \cap B)$ postupite ovako: Neka je $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} A \cap \operatorname{RelInt} B$. Pomoću propozicije 2.25. lako je pokazati da za svaki $\mathbf{y} \in \operatorname{aff}(A \cap B) \backslash \{\mathbf{x}\}$ postoji $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ takav da je $[\mathbf{x}, \mathbf{z}] \subseteq A \cap B$. Ponovnom primjenom propozicije 2.25. dobivamo obratnu inkluziju.

9. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokažite da je

   $$\operatorname{Cl}(\operatorname{conv} S) = \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R}^n : S \subseteq B, B \text{ zatvoren i konveksan}\}$$

   Uputa: Ako je $S \subseteq B$, gdje je B zatvoren i konveksan, onda je $\operatorname{conv} S \subseteq \operatorname{conv} B = B$.

10. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afino preslikavanje zadano s $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}$, gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$. Dokazati da za svaki konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ vrijedi

    $$\operatorname{RelInt} A(K) = A(\operatorname{RelInt} K).$$

    Uputa: Lako je pokazati da je afina slika konveksnog skupa opet konveksan skup. Dakle, $A(K)$ i $A(\operatorname{RelInt} K)$ jesu konveksni. Tada je i $\operatorname{RelInt} A(K)$ (korolar 2.26.) konveksan. Zbog neprekidnosti od A jest $A(\operatorname{Cl}(\operatorname{RelIntK})) \subseteq \operatorname{Cl}(A(\operatorname{RelInt} K))$. Kako je $\operatorname{Cl} K = \operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} K)$ (korolar 2.27.), iskoristimo li monotonost zatvarača, dobivamo

    $$A(K) \subseteq A(\operatorname{Cl} K) = A(\operatorname{Cl}(\operatorname{RelInt} K)) \subseteq \operatorname{Cl}(A(\operatorname{RelInt} K)) \subseteq \operatorname{Cl} A(K),$$

    odakle je $A(K) \subseteq \operatorname{Cl}(A(\operatorname{RelInt} K)) \subseteq \operatorname{Cl}(A(K))$. Iskoristimo li monotonost zatvarača, dobivamo $\operatorname{Cl} A(K) \subseteq \operatorname{Cl}(A(\operatorname{RelInt} K)) \subseteq \operatorname{Cl}(A(K))$, tj. ekvivalentno, $\operatorname{Cl}(A(\operatorname{RelInt} K)) = \operatorname{Cl}(A(K))$. Kako $A(K)$ i $A(\operatorname{RelInt} K)$ imaju isti zatvarač, i interiori su im isti (zadatak 7), tj. $\operatorname{RelInt} A(K) = \operatorname{RelInt}(A(\operatorname{RelInt} K))$. Zato je

    $$\operatorname{RelInt} A(K) = \operatorname{RelInt}(A(\operatorname{RelInt} K)) \subseteq A(\operatorname{RelInt} K).$$

Za dokaz inkluzije $A(\operatorname{RelInt} K) \subseteq \operatorname{RelInt} A(K)$ iskoristit ćemo lemu 2.23. Neka je $A(\mathbf{y}) \in A(\operatorname{RelInt} K)$. Odaberimo $A(\mathbf{x}') \in \operatorname{RelInt} A(K)$ takvu da je $\mathbf{x}' \in K$. Kako je $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} K$ i $\mathbf{x}' \in K$, postoji $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K \subseteq K$ takva da je $\mathbf{y} \in (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Zato je $A(\mathbf{y}) \in (A(\mathbf{x}), A(\mathbf{x}'))$. Primjenom leme 2.23. na konveksan skup $A(K)$ dobivamo $A(\mathbf{y}) \in \operatorname{RelInt} A(K)$.

11. Dokažite: Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni skupovi. Tada je $\operatorname{RelInt}(A+B) = \operatorname{RelInt} A + \operatorname{RelInt} B$.

    Uputa: Kako je $\operatorname{RelInt}(A \times B) = \operatorname{RelInt} A \times \operatorname{RelInt} B$, a preslikavanje $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definirano formulom $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ jest afino, dobivamo (vidi 10. zadatak)

$$\begin{aligned}\operatorname{RelInt} A + \operatorname{RelInt} B &= \mathcal{A}(\operatorname{RelInt} A \times \operatorname{RelInt} A) = \mathcal{A}(\operatorname{RelInt}(A \times B)) \\ &= \operatorname{RelInt} \mathcal{A}(A \times B) = \operatorname{RelInt}(A + B).\end{aligned}$$

3. Osnove teorije linearnog programiranja

Simpleks metodu za rješavanje LP problema razvio je 1947. godine američki matematičar G. Dantzig[10]. Bez obzira što je metoda primjenjiva samo na kanonski oblik LP problema, ona predstavlja opći algoritam za rješavanje svih oblika LP problema. Prisjetimo se kanonskog oblika s ograničenjima u obliku jednadžbi, uz ograničenja nenegativnosti na varijable. Neka su zadani matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ te vektor-stupci $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Kanonski oblik LP problema glasi:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min \tag{3.1}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

Dakle, minimizaciju funkcije cilja $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ treba obaviti na poliedru

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \tag{3.4}$$

zovemo ga poliedar u standardnom obliku. Zato ćemo u ovom poglavlju posebnu pažnju posvetiti poliedru u standardnom obliku.

Označimo li s $\mathbf{a}_i$ i-ti stupac matrice $\mathbf{A}$, onda sustav (3.2)-(3.3) možemo zapisati u vektorskom obliku kao

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n, \qquad x_i \geq 0,$$

odakle vidimo da se problem nalaženja dopustivih (mogućih) rješenja LP problema svodi na nalaženje svih mogućih prikaza vektora $\mathbf{b}$ kao linearne kombinacije stupaca matrice $\mathbf{A}$ s nenegativnim koeficijentima.

Svako je rješenje sustava (3.2)-(3.3) u prvom redu rješenje matrične jednadžbe $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3.1. Definicija

Neka je $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ rješenje sustava linearnih jednadžbi (3.2), tj.

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Ako su linearno nezavisni vektori $\mathbf{a}_i$ za koje je $x_i \neq 0$, onda kažemo da je $\mathbf{x}$ bazično rješenje sustava jednadžbi (3.2).

Za bazično rješenje koje zadovoljava i ograničenja nenegativnosti (3.3) kažemo da je bazično dopustivo (moguće) rješenje LP problema (3.1)-(3.3), odnosno sustava (3.2)-(3.3). Drugim riječima, dopustivo rješenje $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ jest bazično dopustivo rješenje ako su linearno nezavisni vektori $\mathbf{a}_i$ za koje je $x_i > 0$.

---

[10] George Bernard Dantzig (1914. - 2005.), američki matematičar.

3.2. Primjedba
Bazično dopustivih rješenja ima najviše

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

jer najviše toliko ima baza.

Sada ćemo pokazati kako izgledaju bazično dopustiva rješenja. Pretpostavimo da je skup dopustivih rješenja neprazan, tj. da je sustav (3.2)-(3.3) konzistentan. Tada matrica $\mathbf{A}$ i proširena matrica $[\mathbf{A}, \mathbf{b}]$ imaju isti rang r. Ako je $r < m$, onda je $m - r$ jednadžbi u sustavu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ suvišno i one se mogu izostaviti. Zato, bez smanjenja općenitosti, nadalje možemo pretpostaviti da je $r = m$. Nadalje, ako je $r = m = n$, onda sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, pa u tom slučaju preostaje samo provjeriti je li $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ili nije.

Dakle, od interesa je samo slučaj $r = m < n$. Radi lakšeg zapisivanja korisno je uvesti neke oznake. Neka je $B\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bilo koja permutacija takva da su stupci $\mathbf{a}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}$ matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni, tj., ekvivalentno, da je regularna podmatrica

$$\mathbf{A}_B := [\mathbf{a}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}].$$

Definirajmo permutacijsku matricu $\mathbf{\Sigma}_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kao

$$\mathbf{\Sigma}_B = [\mathbf{e}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{B(n)}] \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

gdje su $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ stupci jedinične matrice n-tog reda. U teoriji linearnog programiranja matricu $\mathbf{A}_B$ zovemo matrica baze ili, kraće, samo baza, a za skup

$$I_B := \{B(1), \ldots, B(m)\}$$

kažemo da je skup bazičnih indeksa. Za preostale indekse $B(m+1), \ldots, B(n)$ kažemo da su nebazični indeksi. Neka je

$$I_N := \{N(1), \ldots, N(n-m))\}, \qquad \text{gdje je } N(i) = B(m+i), \quad i = 1, \ldots, n-m$$

skup nebazičnih indeksa. Nadalje, neka je

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_N &:= [\mathbf{a}_{B(m+1)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(n)}] = [\mathbf{a}_{N(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{N(n-m)}],\\
\mathbf{x}_B &:= [x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}]^T,\\
\mathbf{x}_N &:= [x_{B(m+1)}, \ldots, x_{B(n)}]^T = [x_{N(1)}, \ldots, x_{N(n-m)}]^T,
\end{aligned}$$

a zatim odmah uočimo da je

$$\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}_B = [\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N], \qquad \mathbf{\Sigma}_B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}.$$

Kako je $\mathbf{\Sigma}_B^2 = \mathbf{I}$, to je

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{A\Sigma}_B)(\mathbf{\Sigma}_B\mathbf{x}) = [\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N,$$

i zato matričnu jednadžbu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ možemo zapisati kao

$$\mathbf{A}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \tag{3.5}$$

Za varijable $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ (koje se nalaze uz vektore baze!) kažemo da su bazične varijable, dok za preostale varijable kažemo da su nebazične varijable. Kako je $\mathbf{A}_B$ regularna matrica, množenjem slijeva gornje jednakosti s inverzom $\mathbf{A}_B^{-1}$ i, nakon toga, sređivanjem dobivamo

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N), \tag{3.6}$$

zbog čega je

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N) \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ onda i samo onda ako je

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N) \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Drugim riječima, svako rješenje sustava (3.2) može se zapisati u obliku (3.7) i, obratno, svaki vektor $\mathbf{x}$ oblika (3.7) rješenje je sustava (3.2). Osim toga, veza (3.6) između bazičnih (vektor $\mathbf{x}_B$) i nebazičnih (vektor $\mathbf{x}_N$) varijabli govori nam da su bazične varijable na jedinstven način određene s vrijednostima nebazičnih varijabli. Zbog toga, na bazične varijable možemo gledati kao na zavisne, a na nebazične kao na nezavisne varijable.

Specijalno, ako je $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ (sve nebazične varijable jednake su nuli!), iz (3.7) dobivamo bazično rješenje

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

sustava jednadžbi (3.2). Ako su sve bazične varijable $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ različite od nule, za bazično rješenje (3.8) kažemo da je nedegenerirano; u suprotnom kažemo da je degenerirano. Ako bazične rješenje (3.8) zadovoljava i ograničenja nenegativnosti (3.3), a to je onda i samo onda ako je $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, radi se o bazično dopustivom rješenju LP problema (3.1)-(3.3).

Postavlja se pitanje ima li LP problem (3.1)-(3.3) bazično dopustivo rješenje. Odgovor je potvrdan. Zaista, po pretpostavci je skup dopustivih rješenja neprazan, tj. ekvivalentno $\mathbf{b} \in \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, gdje je $\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ konveksni konus generiran stupcima $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ matrice $\mathbf{A}$. Prema Carathéodoryjevu teoremu za konuse, vektor $\mathbf{b}$ može se prikazati kao linearna kombinacija s nenegativnim koeficijentima od najviše m linearno nezavisnih stupaca matrice $\mathbf{A}$, a to znači da postoji bazično dopustivo rješenje. Time smo dokazali sljedeći teorem, koji ima fundamentalnu važnost u teoriji linearnog programiranja.

3.3. TEOREM
Ako LP problem (3.1)-(3.3) s matricom $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{r}\,(\mathbf{A}) = m \le n$, *ima dopustivo rješenje, onda ima i bazično dopustivo rješenje.*

3.4. PRIMJER. Zadan je sustav jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, gdje su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Kako je $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = 2$, taj sustav ima rješenje, a budući da je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica, sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Lako je provjeriti da je $\mathbf{x} = [3, 9, 2, 2]^T$ jedno rješenje polaznog sustava koje nije bazično (zašto?). Potražimo sva bazična rješenja:

1. $I_B = \{1, 2\}$. Tada je $\mathbf{x}_B = [x_1, x_2]^T$, $\mathbf{x}_N = [x_3, x_4]^T$ i $\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Kako je
$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \ge \mathbf{0},$$
bazično rješenje $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [0, 2, 0, 0]^T$ dopustivo je, ali je degenerirano.

2. $I_B = \{1, 3\}$. Tada je $\mathbf{x}_B = [x_1, x_3]^T$, $\mathbf{x}_N = [x_2, x_4]^T$ i $\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Kako je
$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$
bazično rješenje $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = \frac{1}{7}[-18, 0, -4, 0]^T$ nije dopustivo. To je bazično rješenje nedegenerirano.

3. $I_B = \{2, 3\}$. Tada je $\mathbf{x}_B = [x_2, x_3]^T$, $\mathbf{x}_N = [x_1, x_4]^T$ i $\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Kako je
$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{9} \\ 0 \end{bmatrix} \ge \mathbf{0},$$
bazično rješenje $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = \frac{18}{9}[0, 1, 0, 0]^T$ dopustivo je, ali je degenerirano.

4. $I_B = \{2, 4\}$. Tada je $\mathbf{x}_B = [x_2, x_4]^T$, $\mathbf{x}_N = [x_1, x_3]^T$ i $\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Kako je
$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \ge \mathbf{0},$$
bazično rješenje $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [0, 2, 0, 0]^T$ dopustivo je i degenerirano.

5. $I_B = \{3, 4\}$. Tada je $\mathbf{x}_B = [x_3, x_4]^T$, $\mathbf{x}_N = [x_1, x_2]^T$ i $\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Kako je

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{21} & -\frac{3}{21} \\ -\frac{1}{21} & -\frac{8}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

bazično rješenje $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T = -\frac{2}{7}[0, 0, 2, 3]^T$ nije dopustivo. To je bazično rješenje nedegenerirano.

3.5. Primjedba

Neka je P poliedar zadan u standardnom obliku (3.4). Radi jednostavnosti u nastavku izlaganja koristit ćemo termin „vrh” umjesto termina „bazično dopustivo rješenje”. Formalnu definiciju vrha poliedra dat ćemo kasnije (definicija 6.9.) te ćemo pokazati da je točka $\mathbf{v} \in P$ vrh poliedra P onda i samo onda ako je $\mathbf{v}$ bazično dopustivo rješenje.

Prema teoremu 3.3. neprazan poliedar zadan u standardnom obliku ima vrh.

Trebat će nam sljedeća lema pomoću koje ćemo dokazati neke važne rezultate o reprezentaciji poliedra pomoću vrhova.

3.6. Lema

Neka je $V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ skup svih vrhova poliedra

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

gdje je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica ranga $r(\mathbf{A}) = m$. Tada se svaka točka $\mathbf{x}_0 \in P$ može prikazati u obliku

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}, \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,$$

gdje je $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ neki vektor sa svojstvima $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

Dokaz. Dokaz ćemo napraviti matematičkom indukcijom po broju p strogo pozitivnih koordinata vektora $\mathbf{x}_0$. Ako je $p = 0$, onda je $\mathbf{x}_0 = [0, \ldots, 0]^T$ i očito se radi o bazično dopustivom rješenju. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $p = 0, 1, \ldots, k$. Neka $\mathbf{x}_0 = [x_1^0, \ldots, x_n^0]^T$ ima $k+1$ strogo pozitivnih koordinata. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\mathbf{x}_0 = [x_1^0, \ldots, x_{k+1}^0, 0, \ldots, 0]^T$. Ako je $\mathbf{x}_0$ bazično dopustivo rješenje, dokaz je gotov. Zato nadalje pretpostavimo da $\mathbf{x}_0$ nije bazično dopustivo rješenje. Tada je prvih $k+1$ stupaca matrice $\mathbf{A}$ linearno zavisno i zato postoji $\mathbf{w}^T = [w_1, \ldots, w_{k+1}, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, takav da je $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Moguća su tri slučaja: (i) $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$, (ii) $\mathbf{w} < \mathbf{0}$ ili (iii) $\mathbf{w}$ ima strogo pozitivnih i strogo negativnih koordinata.

(i) Neka je

$$\begin{aligned} \tau &:= \min\left\{\tfrac{x_i^0}{w_i} : w_i > 0\right\} = \tfrac{x_{i_0}^0}{w_{i_0}} > 0, \\ \mathbf{x}(\tau) &:= \mathbf{x}_0 - \tau\,\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Lako je provjeriti da je $\mathbf{x}(\tau) \in P$ te da $\mathbf{x}(\tau)$ ima najviše k strogo pozitivnih koordinata. Po induktivnoj pretpostavci $\mathbf{x}(\tau)$ jest oblika

$$\mathbf{x}(\tau) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_1, \qquad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, \mathbf{d}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{d}_1 = \mathbf{0}.$$

Zato je

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\tau) + \tau\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}, \qquad \mathbf{d} := \mathbf{d}_1 + \tau\mathbf{w}.$$

Očito je $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$.

(ii) U tom je slučaju $-\mathbf{w} > 0$. Dalje se postupa kao pod (i).

(iii) Neka je

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \min\left\{\tfrac{x_i^0}{w_i} : w_i > 0\right\}, \qquad & \mathbf{x}(\tau_1) &:= \mathbf{x}_0 - \tau_1\,\mathbf{w}, \\ \tau_2 &:= \min\left\{\tfrac{x_i^0}{-w_i} : -w_i > 0\right\}, \qquad & \mathbf{x}(\tau_2) &:= \mathbf{x}_0 + \tau_2\,\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Lako se provjeri da $\mathbf{x}(\tau_1)$ i $\mathbf{x}(\tau_2)$ leže u poliedru P te da svaki od njih ima najviše k strogo pozitivnih koordinata. Po induktivnoj pretpostavci $\mathbf{x}(\tau_1)$ i $\mathbf{x}(\tau_2)$ jesu oblika

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau_1) &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_1, \qquad & \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, \mathbf{d}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{d}_1 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}(\tau_2) &= \sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_2, \qquad & \sum_{i=1}^{N} \mu_i = 1,\ \mu_i \geq 0, \mathbf{d}_2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{x}(\tau_1) + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{x}(\tau_2) \\ &= \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\sum_{i=1}^{N} \mu_i \mathbf{v}_i + \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\lambda_i + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mu_i)\mathbf{v}_i + \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_2, \end{aligned}$$

odakle vidimo da tvrdnja teorema vrijedi za $\mathbf{d} = \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_2$. ■

3.7. Definicija

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Za vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je recesivan smjer ili smjer opadanja za K ako je

$$\{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} : \lambda \geq 0\} \subseteq K \text{ za svaki } \mathbf{x} \in K.$$

Skup svih recesivnih smjerova skupa K zovemo recesivni konus ili konus opadanja skupa K i označavamo s $\operatorname{rec} K$.

3.8. Primjer.

(a) Odredimo recesivni konus poliedra $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Po definiciji dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} \in \operatorname{rec} P &\iff \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in P \text{ za sve } \mathbf{x} \in P \text{ i sve } \lambda \geq 0 \\
&\iff \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \geq \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) = \mathbf{b} \text{ za sve } \mathbf{x} \in P \text{ i sve } \lambda \geq 0 \\
&\iff \lambda\mathbf{d} \geq \mathbf{0} \text{ i } \lambda\mathbf{Ad} = \mathbf{0} \text{ za sve } \lambda \geq 0 \\
&\iff \mathbf{d} \geq \mathbf{0} \text{ i } \mathbf{Ad} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\operatorname{rec} P = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d} \geq \mathbf{0}, \mathbf{Ad} = \mathbf{0}\}$.

(b) Za poliedar $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} \in \operatorname{rec} Q &\iff \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in Q \text{ za sve } \mathbf{x} \in Q \text{ i sve } \lambda \geq 0 \\
&\iff \mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) \leq \mathbf{b} \text{ za sve } \mathbf{x} \in Q \text{ i sve } \lambda \geq 0 \\
&\iff \lambda\mathbf{Ad} \leq \mathbf{0} \text{ za sve } \lambda \geq 0 \\
&\iff \mathbf{Ad} \leq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\operatorname{rec} Q = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ad} \leq \mathbf{0}\}$.

3.9. Teorem

Neka je

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

neprazan poliedar. Tada je

$$P = \operatorname{conv} V + \operatorname{rec} P,$$

gdje je V skup svih vrhova poliedra P, a $\operatorname{rec} P$ njegov recesivni konus.

Dokaz. Inkluzija $P \subseteq \operatorname{conv} V + \operatorname{rec} P$ slijedi iz leme 3.6., a obratna inkluzija slijedi po definiciji recesivnog smjera. ■

Dakle, za potpuno opisivanje poliedra P iz prethodnog teorema potrebno je poznavati njegov recesivni konus $\operatorname{rec} P = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{d} \geq \mathbf{0}, \mathbf{Ad} = \mathbf{0}\}$. Svaki je recesivni smjer $\mathbf{d}$ u prvom redu rješenje matrične jednadžbe $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Zato i zbog zahtjeva $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, odaberemo li bilo koju matricu baze $\mathbf{B}$, iz (3.7) vidimo da će $\mathbf{d}$ biti recesivni smjer onda i samo onda ako je on oblika

$$\mathbf{d} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{d}_B \\ \mathbf{d}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{d}_N, \tag{3.9}$$

gdje su $\mathbf{d}_N \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{d}_N \leq \mathbf{0}$. Sada je lako dokazati sljedeću propoziciju.

3.10. PROPOZICIJA
Neka $(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_j$ označava j-ti stupac matrice $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$. Ako je $(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_j \leq \mathbf{0}$, onda je

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix} \in \operatorname{rec} P. \tag{3.10}$$

Pri tome $\mathbf{e}_j$ označava j-ti stupac jedinične matrice $(n-m)$-tog reda.

Dokaz. Dovoljno je u (3.9) staviti $\mathbf{d}_N = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$, gdje 1 stoji na j-toj poziciji. ■

3.11. PRIMJEDBA
U gornjim razmatranjima matricu baze $\mathbf{B}$ možemo odabarati na najviše $\binom{n}{m}$ različitih načina. Zato i kako matrica $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$ ima $(n-m)$ stupaca, broj recesivnih smjerova oblika (3.10) nije veći od

$$(n-m)\binom{n}{m}.$$

Jasno, recesivni smjer oblika (3.10) ne mora postojati.

3.12. TEOREM
Neka je zadan poliedar

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, r(\mathbf{A}) = m, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Nadalje, neka je $C = \{\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r\}$ skup svih njegovih recesivnih smjerova oblika (3.10). Vrijedi:

$$\operatorname{rec} P = \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C),$$

tj. vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ recesivni je smjer poliedra P onda i samo onda ako se $\mathbf{d}$ može prikazati kao nenegativna linearna kombinacija recesivnih smjerova $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r$.

Dokaz. Veći dio dokaza sličan je dokazu leme 3.6.

Lako je provjeriti inkluziju $\operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C) \subseteq \operatorname{rec} P$. Dokaz obratne inkluzije $\operatorname{rec} P \subseteq \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$ provest ćemo matematičkom indukcijom po broju p strogo pozitivnih koordinata vektora $\mathbf{d} \in \operatorname{rec} P$. Ako je $p = 0$, onda je $\mathbf{d} = [0, \ldots, 0]^T \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$. Ako je $p = 1$, budući da je $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, iz (3.9) slijedi da je

$\mathbf{d}$ jednak umnošku jednog (zbog $p = 1!$) vektora oblika (3.10) sa strogo pozitivnim skalarom. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $p = 0, 1, \ldots, k$. Neka $\mathbf{d} \in \operatorname{rec} P$ ima $k+1$ strogo pozitivnih koordinata. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je

$$\mathbf{d} = [d_1, \ldots, d_k, 0, \ldots, 0, d_n]^T.$$

Uz oznaku

$$\bar{\mathbf{d}} := [d_1, \ldots, d_k, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$$

imamo

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ d_n \mathbf{e}_{n-m} \end{bmatrix}, \qquad \text{gdje je } \mathbf{e}_{n-m}^T = [0, \ldots, 0, 1] \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Kako je $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$, tj.

$$d_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + d_k \mathbf{a}_k + d_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_n$ linearno su zavisni.

Ako su vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linearno nezavisni, nadopunimo ih s preostalim stupcima matrice $\mathbf{A}$ do matrice baze $\mathbf{A}_B$. Opet bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je linearno nezavisno upravo prvih m stupaca matrice $\mathbf{A}$, tako da je $\mathbf{A}_B = [\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_m]$, $\mathbf{A}_N = [\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n]$. Tada, kako je $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$, dobivamo

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{d} = [\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ d_n \mathbf{e}_{n-m} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_B \bar{\mathbf{d}} + d_n \mathbf{A}_N \mathbf{e}_{n-m},$$

odakle je $\bar{\mathbf{d}} = -d_n (\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)_{n-m}$ i zato je

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ d_n \mathbf{e}_{n-m} \end{bmatrix} = d_n \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N)_{n-m} \\ \mathbf{e}_{n-m} \end{bmatrix}$$

oblika (3.10) sa strogo pozitivnim skalarom d_n. Dakle, $\mathbf{d} \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$.

Sad pretpostavimo da su vektori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linearno zavisni. Tada postoji vektor $\mathbf{w}^T = [w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, takav da je $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Moguća su tri slučaja: (i) $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$, (ii) $\mathbf{w} < \mathbf{0}$ ili (iii) $\mathbf{w}$ ima strogo pozitivnih i strogo negativnih koordinata.

(i) Kao prvo, kako je $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ te kako $\mathbf{w}$ ima najviše k strogo pozitivnih koordinata, po induktivnoj je pretpostavci $\mathbf{w} \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$. Nadalje, neka je

$$\begin{aligned} \tau &:= \min\left\{ \tfrac{d_i}{w_i} : w_i > 0 \right\} = \tfrac{d_{i_0}}{w_{i_0}} > 0, \\ \mathbf{d}(\tau) &:= \mathbf{d} - \tau\, \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Lako je provjeriti da $\mathbf{d}(\tau)$ ima najviše k strogo pozitivnih koordinata. Kako je $\mathbf{d}(\tau) \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{A}\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{0}$, to je $\mathbf{d}(\tau) \in \operatorname{rec} P$. Zato, po induktivnoj pretpostavci, $\mathbf{d}(\tau)$ jest oblika

$$\mathbf{d}(\tau) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{d}_i, \quad \lambda_i \geq 0,$$

što nam govori da je

$$\mathbf{d}(\tau) \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C).$$

Konačno, iz $\mathbf{w}, \mathbf{d}(\tau) \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$, $\tau > 0$ i jednakosti $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\tau) + \tau\mathbf{w}$ slijedi $\mathbf{d} \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$.

(ii) U ovom je slučaju $-\mathbf{w} > 0$. Dalje se postupa kao pod (i).

(iii) Neka je

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \min\left\{\tfrac{d_i}{w_i} : w_i > 0\right\}, & \mathbf{d}(\tau_1) &:= \mathbf{d} - \tau_1\,\mathbf{w}, \\ \tau_2 &:= \min\left\{\tfrac{d_i}{-w_i} : -w_i > 0\right\}, & \mathbf{x}(\tau_2) &:= \mathbf{d} + \tau_2\,\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Lako se provjeri da su $\mathbf{d}(\tau_1)$ i $\mathbf{d}(\tau_2)$ recesivni smjerovi te da svaki od njih ima najviše k strogo pozitivnih koordinata. Po induktivnoj pretpostavci dobivamo

$$\mathbf{d}(\tau_1), \mathbf{d}(\tau_2) \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C),$$

a kako je

$$\mathbf{x}_0 = \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{x}(\tau_1) + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{x}(\tau_2),$$

slijedi $\mathbf{d} \in \operatorname{cone}(\{\mathbf{0}\} \cup C)$. ■

Sljedeći teorem govori o egzistencije rješenja LP problema (3.1)–(3.3).

3.13. Teorem (O rješivosti LP problema)
Neka je $V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ skup svih vrhova nepraznog poliedra (3.4), a $C = \{\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r\}$ skup svih njegovih recesivnih smjerova oblika (3.10), tako da je

$$P = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{0}, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_r\}.$$

Tada vrijedi:

(i) LP problem (3.1)–(3.3) ima rješenje onda i samo onda ako je funkcija cilja (3.1) omeđena odozdo, tj., ekvivalentno, ako je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{d}_i \geq 0, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, r.$$

(ii) Ako LP problem (3.1)–(3.3) ima rješenje, onda postoji vrh u kojem funkcija cilja dostiže minimalnu vrijednost.

Dokaz. Neka je $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ takav da je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{v}_{i_0} = \min_{i=1,\ldots,N} \mathbf{c}^T\mathbf{v}_i.$$

Svaka točka $\mathbf{x} \in P$ jest oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \mathbf{d}_j, \quad \lambda_i, \mu_j \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1.$$

Zato je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \mathbf{c}^T\mathbf{d}_j,$$

pomoću čega je lako provjeriti prvu tvrdnju. Nadalje, ako LP problem ima rješenje, onda je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{v}_i \geq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{c}^T\mathbf{v}_{i_0} = \mathbf{c}^T\mathbf{v}_{i_0}.$$

■

Prema teoremu 3.13. optimalno rješenje LP problema, ako postoji, nalazi se među vrhovima poliedra $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Iako je broj vrhova konačan (primjedba 3.2.), ipak ne bi bila preporučljiva strategija koja bi se sastojala u traženju svih vrhova i računanju vrijednosti funkcije cilja u njima. Naime, za LP problem velikih dimenzija (za velike m i n) čak i brzim računalima trebalo bi jako mnogo vremena za taj posao. Ideja je simpleks metode da se pretraži samo dio vrhova kako bi se došlo do optimalnog vrha ili ustanovilo da LP problem nema optimalno rješenje (slučaj kada je funkcija cilja neomeđena odozdo). To radi sukcesivno, pomičući se bez vraćanja unazad u novi bolji vrh slično gibanju amebe. Za implementaciju te metode treba:

1. Imati početni vrh, tj. početno bazično dopustivo rješenje, o čemu će više riječi biti u točki 3.5.

2. U svakom iterativnom koraku potrebno je imati kriterij optimalnosti vrha i kriterij nepostojanja optimalnog rješenja. O tome će biti više riječi u teoremu 3.17. iz točke 3.3.1.

3. U svakom iterativnom koraku, ako nismo u optimalnom vrhu i ako nismo ustanovili nepostojanje optimalnog rješenja, potrebno je znati napraviti prijelaz u novi vrh. Pri tome novi vrh ne smije biti gori, već po mogućnosti bolji od polaznog vrha. O mogućnosti poboljšanja neoptimalnog nedegeneriranog vrha govori nam teorem 3.17.

4. Treba imati strategiju izbjegavanja kruženja (ciklusa). Jednu takvu strategiju daje nam Blandovo anticikličko pravilo koje navodimo u točki 3.4.

Pored svega toga, korisno je imati jednostavan tablični prikaz provedbe simpleks metode. Jedan takav prikaz dajemo u točki 3.1.

3.1. Simpleks tablica

Simpleks tablica, koju ćemo pojasniti u ovoj točki, služi za shematsko zapisivanje sustava jednadžbi i funkcije cilja. Krenimo redom, ali tako da se prvo ukratko prisjetimo osnovnih stvari. Pomoću matrice baze $\mathbf{A}_B$, vektora $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m$ baznih varijabli i vektora $\mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ nebaznih varijabli, sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ možemo zapisati kao

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}. \tag{3.11}$$

Pri tome vrijedi sljedeća veza:

$$\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}_B = [\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N], \qquad \mathbf{\Sigma}_B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix},$$

gdje je

$$\mathbf{\Sigma}_B = [\mathbf{e}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{B(n)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

odgovarajuća permutacijska matrica koja se dobiva permutacijom stupaca jedinične matrice n-tog reda. Jednakost $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vrijedi onda i samo onda ako je

$$\mathbf{\Sigma}_B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N) \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ili raspisano

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sum_{i\in I_N} x_i \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_i \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}.$$

Nadalje, za funkciju cilja dobivamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)\mathbf{x}_N. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sustav (3.11) zajedno s funkcijom cilja shematski ćemo zapisivati u obliku sljedeće tzv. simpleks tablice pridružene bazi $\mathbf{A}_B$:

	$\mathbf{x}_N^T$	1
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$	$\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$
$-f$	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$

Tablica 1. *Tuckerova*[11] *simpleks tablica pridružena bazi* $\mathbf{A}_B$. *Lijeva vertikalna crta znači „+", a desna vertikalna crta znači „=".*

Za tablicu 1 kaže se još da je pridružena baznom rješenju $\mathbf{x} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

[11] Albert William Tucker (1905. - 1995.), kanadski matematičar.

3.14. Primjedba
Prisjetimo se dobro poznate stvari iz linearne algebre: Neka je $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m]$ regularna matrica, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ vektor i $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]^T$ vektor koordinata od $\mathbf{a}$ u bazi $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$, tj. $\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}$. Tada je

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{a}.$$

Dakle, u j-tom stupcu $(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_j = \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{A}_N)_j = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{a}_{N(j)}$ tablice 1 stoje koordinate vektora $(\mathbf{A}_N)_j = \mathbf{a}_{N(j)}$ u bazi $\mathbf{A}_B$. U zadnjem stupcu stoje koordinate vektora $\mathbf{b}$ u bazi $\mathbf{A}_B$.

3.15. Definicija
Vektor

$$\bar{\mathbf{c}}^T := \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}$$

zovemo **vektor utjecaja** varijabli. Pri tome

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A})_j, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}$$

utjecaj je varijable x_j.

Preglednosti radi, raspišimo simpleks tablicu kao:

$$T = \begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_{N(1)} & x_{N(2)} & \cdots & x_{N(j)} & \cdots & x_{N(q)} & \cdots & x_{N(n-m)} & 1 \\
\hline
x_{B(1)} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1q} & \cdots & \alpha_{1\,n-m} & \alpha_{10} \\
x_{B(2)} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2q} & \cdots & \alpha_{2\,n-m} & \alpha_{20} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{B(k)} & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kq} & \cdots & \alpha_{k\,n-m} & \alpha_{k0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{B(p)} & \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pj} & \cdots & \alpha_{pq} & \cdots & \alpha_{p\,n-m} & \alpha_{p0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{B(m)} & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & \alpha_{mq} & \cdots & \alpha_{m\,n-m} & \alpha_{m0} \\
\hline
-f & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_j & \cdots & \bar{c}_q & \cdots & \bar{c}_{n-m} & f_0
\end{array}. \tag{3.14}$$

Tablica 2. *Raspisana Tuckerova tablica pridružena bazi* $\mathbf{A}_B$.

gdje je, jasno,

$$\begin{aligned}
[\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj}]^T &= \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{a}_{N(j)}, \\
[\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{m0}]^T &= \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}, \\
[\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{n-m}]^T &= \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N, \\
f_0 &= -\mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

3.16. PRIMJER. Zadan je LP problem

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 \to \min$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned}
3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \quad &= 6 \\
2x_2 + 2x_3 - x_4 \quad &= 10 \\
x_1 - x_6 \quad &= 0 \\
x_3 + x_6 + x_7 &= 6 \\
x_1, \ldots, x_7 \geq 0.&
\end{aligned}$$

Ovdje je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [-1, 1, -1, 3, -1, 1, 3]^T.$$

a) Vektori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ linearno su nezavisni, pa ih možemo uzeti za vektore baze. Tada je

$$\mathbf{A}_B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_N = [\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_B = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T, \quad \mathbf{x}_N = [x_5, x_6, x_7]^T,$$

$$\mathbf{c}_B = [c_1, c_2, c_3, c_4]^T = [-1, 1, -1, 3]^T, \quad \mathbf{c}_N = [c_5, c_6, c_7]^T = [-1, 1, 3]^T.$$

Nadalje, imamo:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = [-1, 1, 3] - [-1, 1, -1, 3] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = [-\tfrac{11}{4}, \tfrac{11}{2}, \tfrac{41}{4}],$$

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = [-1, 1, -1, 3] \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = -28.$$

Odgovarajuća simpleks tablica glasi:

$$T = \begin{array}{c|ccc|c} & x_5 & x_6 & x_7 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_2 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -4 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ x_4 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} & -6 \\ \hline -f & -\frac{11}{4} & \frac{11}{2} & \frac{41}{4} & 28 \end{array}.$$

Točka $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [0, -4, 6, -6, 0, 0, 0]^T$ bazično je rješenje koje nije dopušteno rješenje polaznog LP problema.

b) Uzmemo li linearno nezavisne vektore $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7$ za vektore baze, tada je

$$\mathbf{A}_B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_N = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_6] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_B = [x_1, x_2, x_5, x_7]^T, \quad \mathbf{x}_N = [x_3, x_4, x_6]^T,$$

$$\mathbf{c}_B = [c_1, c_2, c_5, c_7]^T = [-1, 1, -1, 3]^T, \quad \mathbf{c}_N = [c_3, c_4, c_6]^T = [-1, 3, 1]^T.$$

Nadalje, imamo:

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N = [-1, 3, 1] - [-1, 1, -1, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-2, \tfrac{11}{2}, -2],$$

$$\mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} = [-1, 1, -1, 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 17.$$

Odgovarajuća simpleks tablica glasi:

$$T = \begin{array}{c|ccc|c} & x_3 & x_4 & x_6 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 5 \\ x_5 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ x_7 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -f & -2 & \frac{11}{2} & -2 & -17 \end{array}.$$

Točka $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [0, 5, 0, 0, 6, 0, 6]^T$ jest bazično dopustivo rješenje.

3.17. TEOREM
Neka je $\mathbf{v} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{v}_B \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ *bazično dopustivo rješenje sa simpleks tablicom (3.14). Tada vrijedi:*

(i) [KRITERIJ OPTIMALNOSTI]
Ako je $[\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{n-m}]^T \geq \mathbf{0}$*, onda je* $\mathbf{v}$ *optimalno rješenje LP problema (3.1)–(3.3), tj.*

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{c}^T\mathbf{v} = \min_{\mathbf{x}\in P} \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

(ii) [KRITERIJ NEOMEĐENOSTI FUNKCIJE CILJA]
Ako je $\bar{c}_q < 0$ *i* $(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_q = [\alpha_{1q}, \ldots, \alpha_{mq}]^T \leq \mathbf{0}$ *za neki* $q \in \{1, \ldots, n-m\}$*, onda je funkcija cilja odozdo neomeđena na skupu mogućih rješenja i zato LP problem (3.1)–(3.3) nema rješenje.*

Dokaz.
(i) Za svaki $\mathbf{x} \in P$ dobivamo $f(\mathbf{x}) = -f_0 + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{c}_i x_{N(i)} \geq -f_0 = f(\mathbf{v})$.
(ii) Za svaki $t \geq 0$ definirajmo točku $\mathbf{x}(t)$ kao

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B(t) \\ \mathbf{x}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}.$$

Direktno se provjerava da je $\mathbf{x}(t)$ dopustivo rješenje LP problema ($\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}$ i $\mathbf{x}(t) \geq \mathbf{0}$) te da je

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} + t\,(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)_j,$$

odakle se dobiva $\lim_{t\to\infty} f(\mathbf{x}(t)) = -\infty$. ■

3.2. Gauss-Jordanove transformacije

Za dvije baze kažemo da su susjedne ako se razlikuju u samo jednom vektoru. O zamjeni jednog vektora baze govori nam sljedeća lema.

3.18. Lema (O zamjeni vektora baze)
Neka je $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ *baza* m*-dimenzionalnog realnog vektorskog prostora* $(V, +, \cdot)$ *i neka vektor* $\mathbf{a} \in V$ *ima prikaz*

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{f}_i. \tag{3.15}$$

(i) Uređena m*-torka* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{p-1}, \mathbf{a}, \mathbf{f}_{p+1}, \ldots \mathbf{f}_m)$ *baza je od* V *onda i samo onda ako je* $\alpha_p \neq 0$.

(ii) Rastav vektora $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{f}_i$ *po bazi* $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{p-1}, \mathbf{a}, \mathbf{f}_{p+1}, \ldots \mathbf{f}_m)$ *glasi*

$$\mathbf{x} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} \Big(x_i - \frac{x_p}{\alpha_p} \alpha_i \Big) \mathbf{f}_i + \frac{x_p}{\alpha_p} \mathbf{a}. \tag{3.16}$$

Dokaz. *(i)* Pretpostavimo da je $\alpha_p \neq 0$. Treba pokazati linearnu nezavisnost vektora $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{p-1}, \mathbf{a}, \mathbf{f}_{p+1}, \ldots \mathbf{f}_m$. Drugim riječima, treba pokazati da linearna kombinacija $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} \lambda_i \mathbf{f}_i + \lambda_p \mathbf{a}$ može biti jednaka nul-vektoru samo na trivijalan način, tj. samo ako je $\lambda_i = 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Jednakost $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} \lambda_i \mathbf{f}_i + \lambda_p \mathbf{a} = \mathbf{0}$ možemo zapisati kao

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} (\lambda_i + \lambda_p \alpha_i) \mathbf{f}_i + \lambda_p \alpha_p \mathbf{f}_p = \mathbf{0},$$

odakle zbog linearne nezavisnosti vektora $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ slijedi

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_p \alpha_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1} &= 0 \\ \lambda_p \alpha_p &= 0 \\ \lambda_{p+1} + \lambda_p \alpha_{p+1} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_m + \lambda_p \alpha_m &= 0. \end{aligned}$$

Kako je $\alpha_p \neq 0$, to je $\lambda_p = 0$ i zato je $\lambda_i = 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$.

Obratno, pretpostavimo da vektori $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{p-1}, \mathbf{a}, \mathbf{f}_{p+1}, \ldots \mathbf{f}_m$ tvore bazu u V. Tada se vektor $\mathbf{f}_p$ može zapisati kao njihova linearna kombinacija. Neka je

$$\mathbf{f}_p = \beta_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{p-1}\mathbf{f}_{p-1} + \beta_p \mathbf{a} + \beta_{p+1}\mathbf{f}_{p+1} + \cdots + \beta_m \mathbf{f}_m.$$

Skalar β_p različit je od nule jer bi u suprotnom vektori $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ bili linearno zavisni, što je nemoguće jer oni čine bazu. Kako je $\beta_p \neq 0$, imamo

$$\mathbf{a} = -\frac{\beta_1}{\beta_p}\mathbf{f}_1 - \cdots - \frac{\beta_{p-1}}{\beta_p}\mathbf{f}_{p-1} + \frac{1}{\beta_p}\mathbf{f}_p - \frac{\beta_{p+1}}{\beta_p}\mathbf{f}_{p+1} - \ldots - \frac{\beta_m}{\beta_p}\mathbf{f}_m.$$

Zbog jedinstvenosti rastava vektora $\mathbf{a}$ po bazi $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ slijedi $\alpha_p = \frac{1}{\beta_p} \neq 0$.

(ii) Iz (3.15) dobivamo

$$\mathbf{f}_p = \frac{1}{\alpha_p}\mathbf{a} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{m} \frac{\alpha_i}{\alpha_p}\mathbf{f}_i$$

i zato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{f}_i \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{m} x_i \mathbf{f}_i + x_p \overbrace{\left(\frac{1}{\alpha_p}\mathbf{a} - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{m} \frac{\alpha_i}{\alpha_p}\mathbf{f}_i\right)}^{\mathbf{f}_p} \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{m} \left(x_i - \frac{x_p}{\alpha_p}\alpha_i\right)\mathbf{f}_i + \frac{x_p}{\alpha_p}\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

■

Za lako pamćenje rastava (3.16) koristit ćemo sljedeću tablicu:

	$\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{f}_1$	α_1	x_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{f}_i$	α_i	x_i
$\vdots$	$-$ $\vdots$	$+$ $\vdots$
$\leftarrow \mathbf{f}_p$	$\boxed{\alpha_p}$	x_p
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{f}_m$	α_m	x_m

	$\mathbf{f}_p$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{f}_1$	$-\frac{\alpha_1}{\alpha_p}$	$\frac{x_1\alpha_p - \alpha_1 x_p}{\alpha_p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{f}_i$	$-\frac{\alpha_i}{\alpha_p}$	$\frac{x_i\alpha_p - \alpha_i x_p}{a_p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{a}$	$\frac{1}{\alpha_p}$	$\frac{x_k}{\alpha_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{f}_m$	$-\frac{\alpha_m}{\alpha_p}$	$\frac{x_m\alpha_p - \alpha_m x_p}{\alpha_p}$

Tablica 3. *Gauss-Jordanove transformacije.*

U stupcima ispod vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{x}$ u lijevoj tablici stoje koordinate tih vektora u bazi $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$. Istaknuti element $\alpha_p \neq 0$ naziva se pivot element. U stupcima ispod vektora $\mathbf{f}_p$ i $\mathbf{x}$ u desnoj tablici stoje koordinate tih vektora u novoj bazi $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{p-1}, \mathbf{a}, \mathbf{f}_{p+1}, \ldots, \mathbf{f}_m)$. Gore opisane transformacije nazivaju se Gauss[12]-Jordanovim[13] transformacijama. Osim toga, kaže se da smo vektor $\mathbf{f}_p$ „izbacili" iz baze i umjesto njega „ubacili" vektor $\mathbf{a}$.

3.19. PRIMJER. Neka je zadana matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pokažimo pomoću Gauss-Jordanovih transformacija da stupci $\mathbf{a}_1 = [1,2,1]^T$, $\mathbf{a}_2 = [1,-2,1]^T$ i $\mathbf{a}_3 = [0,3,4]^T$ matrice $\mathbf{A}$ tvore bazu u $\mathbb{R}^3$, prikažimo vektor $\mathbf{x} = [1,-1,2]^T$ u toj bazi i odredimo inverz $\mathbf{A}^{-1}$ matrice $\mathbf{A}$.

Vektori $\mathbf{e}_1 = [1,0,0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0,1,0]^T$ i $\mathbf{e}_3 = [0,0,1]^T$ čine bazu u $\mathbb{R}^3$. Primjenom Gauss-Jordanovih transformacija dobivamo:

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{e}_1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{e}_2 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ \mathbf{e}_3 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{a}_1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{e}_2 & -2 & \boxed{-4} & 3 & -3 \\ \mathbf{e}_3 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array} \quad \to$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{a}_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \mathbf{a}_2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \mathbf{e}_3 & -1 & 0 & \boxed{4} & 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{a}_1 & \frac{11}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \mathbf{a}_2 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{15}{16} \\ \mathbf{a}_3 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}.$$

Dakle, uspjeli smo sve vektore $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ubaciti u bazu. Iz posljednje tablice dobivamo prikaz vektora $\mathbf{x}$ u novoj bazi $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$:

$$\mathbf{x} = \tfrac{1}{16}\mathbf{a}_1 + \tfrac{15}{16}\mathbf{a}_2 + \tfrac{1}{4}\mathbf{a}_3.$$

Nadalje, također iz posljednje tablice, imamo da je

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

što nam govori da je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \\ \frac{5}{16} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

---

[12] Johann Carl Friedrich Gauss (1777. - 1855.), njemački matematičar.
[13] Marie Ennemond Camille Jordan (1838. - 1922.), francuski matematičar.

3.3. Prijelaz s jednog baznog rješenja na drugo

Vratimo se na simpleks tablicu

$$T = \begin{array}{c|c|c} & \mathbf{x}_N^T & 1 \\ \hline \mathbf{x}_B & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N & \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -f & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N & -\mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \end{array}$$

pridruženu bazi $\mathbf{A}_B = [\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}]$ i na njezinu raspisanu verziju (3.14). Toj simpleks tablici odgovara bazično rješenje

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{v}_B \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

koje može, ali i ne mora biti dopustivo rješenje LP problema (3.1)–(3.3). U j-tom stupcu matrice $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N$ nalaze se koordinate nebazičnog vektora $\mathbf{a}_{N(j)}$ u bazi $\mathbf{A}_B$. Posljednji stupac $\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$ sadrži koordinate vektora $\mathbf{b}$ u bazi $\mathbf{A}_B$. Zapis funkcije cilja pomoću nebazičnih varijabli $x_{N(1)}, \ldots, x_{N(n-m)}$ nalazi se u zadnjem retku simpleks tablice.

Želimo da nebazični vektor $\mathbf{a}_{N(q)} = \sum_{i=1}^m \alpha_{iq}\mathbf{a}_{B(i)}$ $(q \in \{1, \ldots, n-m\})$ uđe u bazu umjesto bazičnog vektora $\mathbf{a}_{B(p)}$. Prema lemi 3.18. to je moguće onda i samo onda ako je $\alpha_{pq} \neq 0$. Zato nadalje pretpostavimo da je $\alpha_{pq} \neq 0$. Zamjenom bazičnog vektora $\mathbf{a}_{B(p)}$ s nebazičnim vektorom $\mathbf{a}_{N(q)}$ dobivamo novu bazu

$$\mathbf{A}_{B'} = [\mathbf{a}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{B(p-1)}, \mathbf{a}_{N(q)}, \mathbf{a}_{B(p+1)} \ldots, \mathbf{a}_{B(m)}].$$

Zanima nas kako iz simpleks tablice T dobiti simpleks tablicu

$$T' = \begin{array}{c|c|c} & \mathbf{x}_{N'}^T & 1 \\ \hline \mathbf{x}_{B'} & \mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{A}_{N'} & \mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{b} \\ \hline -f & \mathbf{c}_{N'}^T - \mathbf{c}_{B'}^T\mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{A}_{N'} & -\mathbf{c}_{B'}^T\mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{b} \end{array}$$

pridruženu novoj bazi $\mathbf{A}_{B'}$. Da bismo dobili tablicu T' bez zadnjeg retka, potrebno je napraviti rastave vektora $\mathbf{b}$ i novih nebazičnih vektora

$$\mathbf{a}_{N(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{N(q-1)}, \mathbf{a}_{B(p)}, \mathbf{a}_{N(q+1)}, \ldots, \mathbf{a}_{N(n-m)}$$

po novoj bazi $\mathbf{A}_{B'}$. To možemo napraviti koristeći tablicu T, tako da u njoj provedemo Gauss-Jordanove eliminacije s pivotom α_{pq}. Nakon provedenog pivotiranja u prvih m redaka pojavit će se prikazi novih bazičnih varijabli pomoću novih nebazičnih varijabli. Stoga, ako pivotiranjem obuhvatimo i zadnji $(m+1)$-vi redak tablice T u kome se nalazi zapis funkcije cilja pomoću polaznih nebazičnih varijabli, nakon pivotiranja dobit cemo zapis funkcije cilja pomoću novih nebazičnih varijabli.

Dakle, provedemo li u tablici T Gauss-Jordanove eliminacije s pivotom α_{pq}, dobit ćemo tablicu T' kojoj odgovara novo bazično rješenje

$$\mathbf{v}' = \mathbf{\Sigma}_{B'} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{B'} \\ \mathbf{v}_{N'} \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_{B'} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{B'}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Za bazična rješenja $\mathbf{v}$ i $\mathbf{v}'$ kažemo da su susjedna jer im se baze razlikuju samo za jedan vektor.

Radi lakšeg pamćenja kako se u polaznoj simpleks tablici T provode Gauss-Jordanove eliminacija s pivotom α_{pq}, u tablici

$$T = \begin{array}{c|ccc|c|ccc|c}
 & & & & x_{N(q)} & & & & 1 \\ \hline
 & & & & \alpha_{1q} & & & & \\
 & & \alpha_{ij} & & \vdots & & & & \\
 & & & & \alpha_{p-1\,q} & & & & \\ \hline
x_{B(p)} & \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{p\,q-1} & \boxed{\alpha_{pq}} & \alpha_{p\,q+1} & \ldots & \alpha_{p\,n-m} & \alpha_{p0} \\ \hline
 & & & & \alpha_{p+1\,q} & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \alpha_{mq} & & & & \\ \hline
-f & & & & \bar{c}_q & & & & f_0
\end{array}$$

ističemo pivot-redak (p-ti redak) i pivot-stupac (q-ti stupac). Nakon provedenih eliminacija dobiva se simpleks tablica

$$T' = \begin{array}{c|ccc|c|ccc|c}
 & & & & x_{B(p)} & & & & 1 \\ \hline
 & & & & -\frac{\alpha_{1q}}{\alpha_{pq}} & & & & \\
 & & \alpha'_{ij} & & \vdots & & & & \\
 & & & & -\frac{\alpha_{p-1q}}{\alpha_{pq}} & & & & \\ \hline
x_{N(q)} & \frac{\alpha_{p1}}{\alpha_{pq}} & \ldots & \frac{\alpha_{pq-1}}{\alpha_{pq}} & \frac{1}{\alpha_{pq}} & \frac{\alpha_{pq+1}}{\alpha_{pq}} & \ldots & \frac{\alpha_{pn-m}}{\alpha_{pq}} & \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pq}} \\ \hline
 & & & & -\frac{\alpha_{p+1,q}}{\alpha_{pq}} & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & -\frac{\alpha_{mq}}{\alpha_{pq}} & & & & \\ \hline
-f & & & & -\frac{\bar{c}_q}{\alpha_{pq}} & & & & f'_0
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}
\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pq}}\alpha_{iq}, \quad i \neq p, j \neq q, \\
f'_0 = f_0 - \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}\bar{c}_q, \\
\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pg}}\bar{c}_q, \quad j = \{1, \ldots, n-m\}\backslash\{q\}.
\end{array}}$$

3.20. Primjer. Ilustrirajmo navedeno na ranije razmatranom primjeru 3.16.b), polazeći od dobivenog baričnog dopuštenog rješenja

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [0, 5, 0, 0, 6, 0, 6]^T$$

kome odgovara simpleks tablica

$$T = \begin{array}{c|rrr|r} & x_3 & x_4 & x_6 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 5 \\ x_5 & \boxed{3} & 2 & 1 & 6 \\ x_7 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline -f & -2 & \frac{11}{2} & -2 & -17 \end{array} .$$

Ako u bazu $\mathbf{A}_B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7]$ želimo ubaciti nebazični vektor $\mathbf{a}_3$ umjesto baznog vektora $\mathbf{a}_5$, treba pivotirati oko $\alpha_{31} = 3$. Dobiva se nova simpleks tablica:

$$T' = \begin{array}{c|rrr|r} & x_5 & x_4 & x_6 & 1 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{3} & 3 \\ x_3 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \boxed{\frac{1}{3}} & 2 \\ x_7 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 4 \\ \hline -f & \frac{2}{3} & \frac{41}{6} & -\frac{4}{3} & -13 \end{array}$$

koju ćemo pivotirati oko $\alpha_{33} = \frac{1}{3}$. Dobiva se:

$$\begin{array}{c|rrr|r} & x_5 & x_4 & x_3 & 1 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ x_2 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5 \\ x_6 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ x_7 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ \hline -f & 2 & \frac{19}{2} & 4 & -5 \end{array} .$$

U bazično dopustivom rješenju

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7]^T = [6, 5, 0, 0, 0, 6, 0]^T$$

funkcija cilja dostiže vrijednost 5. Prema tvrdnji *(i)* teorema 3.17. vrh $\mathbf{v}$ optimalno je rješenje polaznog LP problema minimizacije.

3.3.1. Poboljšanje nedegeneriranog baznog dopustivog rješenja

U ovoj ćemo točki pokazati kako od promatranog nedegeneriranog baznog dopustivog rješenja doći do susjednog baznog dopustivog rješenja u kojem će funkcija cilja biti strogo manja (teorem 3.21.). Kao što ćemo poslije vidjeti, taj je korak ključan dio simpleks-algoritma.

Pretpostavimo da je $\mathbf{v}$ nedegenerirano bazno dopustivo rješenje sa simpleks tablicom T, tj., ekvivalentno, da je

$$(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b})_i = \alpha_{i0} > 0 \quad \text{za sve } i = 1, \ldots, m.$$

U tablici T' zadnji stupac (odgovara prikazu vektora $\mathbf{b}$ u novoj bazi) i zadnji redak (odgovara prikazu funkcije cilja pomoću novih nebaznih varijabli) glase:

- zadnji stupac:

$$\alpha'_{p0} = \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}, \tag{3.17}$$

$$\alpha'_{i0} = \alpha_{i0} - \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}\alpha_{iq}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}\backslash\{p\}, \tag{3.18}$$

- zadnji redak:

$$f'_0 = f_0 - \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}\bar{c}_q, \tag{3.19}$$

$$\bar{c}'_q = -\frac{\bar{c}_q}{\alpha_{pq}},$$

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{\alpha_{pj}}{\alpha_{pg}}\bar{c}_q, \quad j = \{1, \ldots, n-m\}\backslash\{q\}.$$

Točka $\mathbf{v}'$ bit će bazno dopustivo rješenje onda i samo onda ako je $\alpha'_{i0} \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Pomoću (3.17) i (3.18) lako je pokazati da će to biti onda i samo onda ako je izlazni bazni vektor $\mathbf{a}_{B(p)}$ (odnosno, izlazna bazna varijabla $x_{B(p)}$) odabran tzv. metodom najmanjeg simpleksnog kvocijenta, tj. tako da je $\alpha_{pq} > 0$ i

$$\min_{\substack{i=1,\ldots m \\ \alpha_{iq}>0}} \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{iq}} = \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}. \tag{3.20}$$

Zaista, prvo pretpostavimo da je $\mathbf{v}'$ bazno dopustivo rješenje. Tada je $\alpha'_{i0} \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Specijalno je $\alpha'_{p0} = \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pq}} \geq 0$, odakle zbog $\alpha_{p0} > 0$ i $\alpha_{pq} \neq 0$ slijedi $\alpha_{pq} > 0$. Sada se iz (3.18) lako dobiva (3.20). Obratno, ako je $\alpha_{pq} > 0$ i ako vrijedi (3.20), lako je zaključiti da je $\alpha'_{i0} \geq 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$.
Nadalje, ako je $\bar{c}_q < 0$ za neki $q \in \{1, \ldots, n-m\}$, onda je

$$-f(\mathbf{v}') = f'_0 = f_0 - \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}\bar{c}_q > f_0 = -f(\mathbf{v}),$$

tj. $f(\mathbf{v}') < f(\mathbf{v})$. Tim razmatranjima dokazan je sljedeći teorem:

3.21. Teorem (Poboljšanje nedegeneriranog baziĉnog dopustivog rješenja) *Neka je*

$$\mathbf{v} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{v}_B \\ \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}_B \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

nedegenerirano bazično dopustivo rješenje sa simpleks tablicom (3.14). Nadalje, pretpostavimo da je $\bar{c}_q < 0$ za neki $q \in \{1, \ldots, n-m\}$ i da je $\alpha_{iq} > 0$ za barem jedan $i \in \{1, \ldots, m\}$. Neka je $p \in \{1, \ldots, m\}$ bilo koji indeks takav da je $\alpha_{pq} > 0$ i

$$\min_{\substack{i=1,\ldots m \\ \alpha_{iq}>0}} \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{iq}} = \frac{\alpha_{p0}}{\alpha_{pg}}. \tag{3.21}$$

Pivotiranjem tablice (3.14) oko α_{pq} dobiva se novo bazično dopustivo rješenje u kome funkcija cilja prima strogo manju vrijednost nego u $\mathbf{v}$.

3.4. Algoritam simpleks metode

Algoritam simpleks metode

0. korak. **Inicijalizacija**. Postaviti brojač na nulu: $k = 0$. Odabrati početno bazično dopustivo rješenje $\mathbf{v}_0$ sa simpleks tablicom T_0 i ići na 1. korak.

1. korak. **Provjera optimalnosti**.

Neka je

$$T_k = \begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_{N_k(1)} & \cdots & x_{N_k(j)} & \cdots & x_{N_k(q)} & \cdots & x_{N_k(n-m)} & 1 \\ \hline
x_{B_k(1)} & \alpha^k_{11} & \cdots & \alpha^k_{1j} & \cdots & \alpha^k_{1q} & \cdots & \alpha^k_{1\,n-m} & \alpha^k_{10} \\
x_{B_k(2)} & \alpha^k_{21} & \cdots & \alpha^k_{2j} & \cdots & \alpha^k_{2q} & \cdots & \alpha^k_{2\,n-m} & \alpha^k_{20} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
x_{B_k(i)} & \alpha^k_{i1} & \cdots & \alpha^k_{ij} & \cdots & \alpha^k_{iq} & \cdots & \alpha^k_{i\,n-m} & \alpha^k_{i0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
x_{B_k(p)} & \alpha^k_{p1} & \cdots & \alpha^k_{pj} & \cdots & \alpha^k_{pq} & \cdots & \alpha^k_{p\,n-m} & \alpha^k_{p0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
x_{B_k(m)} & \alpha^k_{m1} & \cdots & \alpha^k_{mj} & \cdots & \alpha^k_{mq} & \cdots & \alpha^k_{m\,n-m} & \alpha^k_{m0} \\ \hline
-f & \bar{c}^k_1 & \cdots & \bar{c}^k_j & \cdots & \bar{c}^k_q & \cdots & \bar{c}^k_{n-m} & f^k_0
\end{array}$$

simpleks tablica tekućeg bazičnog dopustivog rješenja $\mathbf{v}_k$.

Ako je $\bar{c}^k_j \geq 0$ za sve $j = 1, \ldots, n-m$, bazično dopustivo rješenje $\mathbf{v}_k$ je optimalno. Minimalna je vrijednost funkcije cilja $-f^k_0$. STOP. U protivnom, ići na 2. korak.

2. korak. **Provjera neomeđenosti funkcije cilja**. Za svaki indeks j za koji je $\bar{c}^k_j < 0$ ispitati je li $\alpha^k_{ij} \leq 0$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Ako takav $\bar{c}^k_j$ postoji, funkcija cilja neomeđena je odozdo. STOP. U suprotnom, ići na 3. korak.

3. korak. **Poboljšanje nedegeneriranog bazičnog dopustivog rješenja**.

(a) **Odabir nebazičnog vektora koji ulazi u bazu**. Izabrati $q \in \{1, \ldots, n-m\}$ za koji je $\bar{c}^k_q < 0$.

(nebazični vektor $\mathbf{a}_{N_k(q)}$ ući će u novu bazu, a nebazična varijabla $x_{N_k(q)}$ postat će bazična[a])

(b) **Odabir (metodom najmanjeg simpleksnog koeficijenta) bazičnog vektora koji izlazi iz baze**. Za tako odabrani q, naći $p \in \{1, \dots, m\}$ takav da je

$$\frac{\alpha_{p0}^k}{\alpha_{pq}^k} = \min_{\substack{i=1,\dots m \\ \alpha_{iq}>0}} \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{iq}}.$$

(bazični vektor $\mathbf{a}_{B_k(p)}$ napustit će bazu, a bazična varijabla $x_{B_k(p)}$ postat će nebazična)

(c) **Promjena baze**. Izbaciti vektor $\mathbf{a}_{B_k(p)}$ iz baze i umjesto njega ubaciti vektor $\mathbf{a}_{N_k(q)}$. Za novodobiveno bazično dopustivo rješenje $\mathbf{v}_{k+1}$ napraviti $(k+1)$-vu simpleks tablicu T_{k+1} pivotiranjem tablice T_k oko α_{pq}^k:

$$\begin{aligned}
\alpha_{pq}^{k+1} &= \frac{1}{\alpha_{pq}^k}, \qquad \alpha_{pj}^{k+1} = \frac{\alpha_{pj}^k}{\alpha_{pg}^k}, \quad j \neq q \quad (p\text{-ti redak}) \\
\alpha_{iq}^{k+1} &= -\frac{\alpha_{iq}^k}{\alpha_{pg}^k}, \quad i \neq p, \quad (q\text{-ti stupac}) \\
\alpha_{ij}^{k+1} &= \alpha_{ij}^k - \frac{\alpha_{pj}^k}{\alpha_{pq}^k}\alpha_{iq}^k, \qquad i \neq p, j \neq q \\
\bar{c}_q^{k+1} &= -\frac{\bar{c}_q^k}{\alpha_{pq}^k}, \qquad \bar{c}_j^{k+1} = \bar{c}_j^k - \frac{\alpha_{pj}^k}{\alpha_{pq}^k}\bar{c}_q^k, \quad j \neq q \\
f_0^{k+1} &= f_0^k - \frac{\alpha_{p0}^k}{\alpha_{pq}^k}\bar{c}_q^k.
\end{aligned}$$

Staviti $k = k+1$ i ići na 1. korak.

[a] Iako je to matematički neprecizno, u teoriji linearnog programiranja kaže se da je nebazična varijabla $x_{N_k(q)}$ *ušla u bazu.*

3.22. TEOREM (O KONAČNOSTI SIMPLEKS METODE)
Ako nijedno bazično dopustivo rješenje LP problema nije degenerirano, simpleks metodom dolazi se u konačno mnogo koraka do optimalnog rješenja ili se zaključuje da je funkcija cilja neomeđena odozdo.

Dokaz. Simpleks metodom dobiva se niz $(\mathbf{v}_k)$ vrhova (bazično dopustivih rješenja) kome odgovara niz funkcijskih vrijednosti (f_0^k), $f_0^k = -f(\mathbf{v}_k)$. Zbog pretpostavke o nedegeneriranosti, prema teoremu 3.21. jest

$$f_0^{k+1} > f_0^k, \qquad k = 0, 1, \dots.$$

Kako postoji konačno mnogo vrhova, a nijedan se u nizu $(\mathbf{v}_k)$ ne može pojaviti dva ili više puta (zbog stroge monotonosti niza (f_0^k)), iterativni simpleks postupak mora završiti u konačnom broju koraka. ∎

Uočimo da u 3. koraku pod (a) kod izbora ulazne nebazične varijable i pod (b) kod izbora izlazne bazične varijable imamo izvjesnu slobodu:

- Ako je $\bar{c}_j < 0$, nebazična varijabla $x_{N_k(j)}$ pogodna je za ulazak u bazu.
- Ako je za ulazak u bazu odabrana nebazična varijabla $x_{N_k(q)}$, za izlaz iz baze pogodna je svaka bazična varijabla $x_{B_k(i)}$ za koju je

$$\frac{\alpha_{i0}^k}{\alpha_{iq}^k} = \min_{\substack{i=1,\ldots m \\ \alpha_{iq}>0}} \frac{\alpha_{i0}}{\alpha_{iq}}.$$

U literaturi se često sugerira da se q u 3. koraku pod (a) bira tako da vrijedi

$$\bar{c}_q = \min\{\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{n-m}\}.$$

Međutim, taj tzv. Dantzigov izbor pivot-stupca (princip izbora pivot-stupca s najnegativnijim utjecajem) ne mora uvijek ubrzati dobivanje optimalnog rješenja. U slučaju da se u nekom iterativnom koraku pojavi degenerirano bazično dopustivo rješenje, navedeni iterativni simpleks postupak može upasti u petlju bez izlaza, tj. preciznije, može se pojaviti kruženje ili ciklus, odnosno pojava da se nakon nekoliko iteracija ponovno vratimo na već promatrano bazično dopustivo rješenje. Pojavu ciklusa ilustriramo na sljedećem primjeru:

3.23. Primjer. Zadan je LP problem

$$-10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \to \min$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{lllllll}
0.5x_1 & -5.5x_2 & -2.5x_3 & +9x_4 & +1x_5 & & & = 0 \\
0.5x_1 & -1.5x_2 & -0.5x_3 & +1x_4 & & +x_6 & & = 0 \\
x_1 & & & & & & +x_7 & = 1 \\
\multicolumn{8}{l}{x_1, \ldots, x_7 \geq 0.}
\end{array}$$

Pivotirat ćemo tako da među svim nebazičnim varijablama koje budu pogodne za ulazak u novu bazu ($\bar{c}_j < 0$) odaberemo onu s najnegativnijim utjecajem (Dantzigov prijedlog). Nakon tako odabrane ulazne varijable, među svim bazičnim varijablama koje budu bile pogodne za izlazak iz baze odabrat ćemo onu s najmanjim indeksom. Dobivamo sljedeći niz simpleks tablica (pivot elementi uokvireni su zbog preglednosti):

Početna tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 1$, $q = 1$; pivot: $\alpha_{pq} = 0.5$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
x_5	$\boxed{0.5}$	-5.5	-2.5	9	0
x_6	0.5	-1.5	-0.5	1	0
x_7	1	0	0	0	1
$-f$	-10	57	9	24	0

1. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 2$, $q = 2$; pivot: $\alpha_{pq} = 4$.

	x_5	x_2	x_3	x_4	1
x_1	2	-11	-5	18	0
x_6	-1	$\boxed{4}$	2	-8	0
x_7	-2	11	5	-18	1
$-f$	20	-53	-41	204	0

2. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 1$, $q = 3$; pivot: $\alpha_{pq} = 0.5$.

	x_5	x_6	x_3	x_4	1
x_1	$-.75$	2.75	$\boxed{0.5}$	-4	0
x_2	-0.25	0.25	0.5	-2	0
x_7	0.75	-2.75	-0.5	4	1
$-f$	6.75	13.25	-14.5	98	0

3. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 2$, $q = 4$; pivot: $\alpha_{pq} = 2$.

	x_5	x_6	x_1	x_4	1
x_3	-1.5	5.5	2	-8	0
x_2	0.5	-2.5	-1	$\boxed{2}$	0
x_7	0	0	1	0	1
$-f$	-15	93	29	-18	0

4. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 1$, $q = 1$; pivot: $\alpha_{pq} = 0.5$.

	x_5	x_6	x_1	x_2	1
x_3	$\boxed{0.5}$	-4.5	-2	4	0
x_4	0.25	-1.25	-0.5	0.5	0
x_7	0	0	1	0	1
$-f$	-10.5	70.5	20	9	0

5. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 2$, $q = 2$; pivot: $\alpha_{pq} = 1$.

	x_3	x_6	x_1	x_2	1
x_5	2	-9	-4	8	0
x_4	-0.5	$\boxed{1}$	0.5	-1.5	0
x_7	0	0	1	0	1
$-f$	21	-24	-22	93	0

6. tablica. Ova tablica podudara se s početnom tablicom.

	x_3	x_4	x_1	x_2	1
x_5	-2.5	9	0.5	-5.5	0
x_6	-0.5	1	0.5	-1.5	0
x_7	0	0	1	0	1
$-f$	9	24	-10	57	0

Iako su sve simpleks tablice različite (osim prve i zadnje), odgovara im isto bazično dopustivo rješenje: $\mathbf{x} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$.

Ukoliko bismo nastavili s primjenom simpleks algoritma, navedenih bi se 6 simpleks tablica stalno ponavljalo i nikad ne bismo došli do optimalnog rješenja.

Kako bi se osiguralo da simpleks algoritam završi u konačno mnogo koraka, potrebno je imati neko anticikličko pravilo, tj. pravilo izbora pivot elementa koje će spriječiti pojavu ciklusa. Prvo anticikličko pravilo dao je A. Charnes[14] 1952.

[14] Abraham Charnes (1917. - 1992.), američki matematičar.

godine, na temelju metode perturbacije. Godine je 1955. Dantzig sa svojim suradnicima razvio metodu leksikografskog uređaja za izbjegavanje ciklusa. Noviju, vrlo jednostavnu metodu za izbjegavanje ciklusa dao je Bland[15] 1977. godine.

Blandovo pravilo pivotiranja ili pravilo najmanjih indeksa

a) Među svim nebazičnim varijablama koje su pogodne za ulazak u novu bazu, odabrati onu s najmanjim indeksom.

b) Među svim bazičnim varijablama koje su pogodne za izlazak iz baze, odabrati onu s najmanjim indeksom.

3.24. TEOREM
Primjenom Blandova pravila neće se pojaviti ciklus i zato će simpleks algoritam završiti u konačno mnogo koraka.

Dokaz. Prvo se prisjetimo (definicija 3.15.) da se za odabranu matricu baze $\mathbf{A}_B$ vektor $\bar{\mathbf{c}}$ utjecaja varijabli definira kao

$$\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{y}_B^T\mathbf{A}, \qquad \text{gdje je } \mathbf{y}_B^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{A}_B^{-1},$$

odakle imamo prvo zapažanje:

(i) Utjecaj bazičnih varijabli jednak je nuli, tj. ako je $\mathbf{A}_B$ matrica baze, onda je

$$\bar{c}_j = c_j - \mathbf{y}_B^T\mathbf{a}_j = 0, \qquad \text{za svaki } j \in I_B.$$

Dokaz teorema napravit ćemo kontradikcijom. Pretpostavimo da se primjenom Blandovog pravila pojavio ciklus. Tijekom cikliranja ne mijenjaju se koordinate degeneriranog bazičnog dopustivog rješenja ni vrijednost funkcije cilja. Za indeks j kazat ćemo da je nestalan ako tijekom cikliranja vektor-stupac $\mathbf{a}_j$ ulazi u neku bazu, a zatim napušta neku drugu bazu. Neka je p najveći nestalni indeks. Pretpostavimo da tijekom cikliranja $\mathbf{a}_p$ napušta bazu $\mathbf{A}_B$, a zatim poslije ulazi u bazu $\mathbf{A}_{B'}$. Neka $\mathbf{a}_q$ ulazi u bazu $\mathbf{A}_B$ umjesto $\mathbf{a}_p$. Kako je i q nestalan indeks, to je $q < p$. Zbog primjene Blandovog pravila tada vrijedi:

(ii) Budući da $\mathbf{a}_q$ ulazi u bazu $\mathbf{A}_B$, q je najmanji indeks za koji je

$$c_q - \mathbf{y}_B^T\mathbf{a}_q < 0.$$

(iii) Budući da $\mathbf{a}_p$ napušta bazu $\mathbf{A}_B$, p je najmanji indeks za koji vrijedi

$$(\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{a}_q)_p > 0 \quad \& \quad (\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b})_p = 0.$$

[15] Robert Gary Bland (1948. -), američki matematičar.

(iv) Budući da $\mathbf{a}_p$ ulazi u bazu $\mathbf{A}_{B'}$, p je najmanji indeks za koji je

$$c_p - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_p < 0.$$

(v) Kako je $q < p$, to je

$$c_q - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_q \geq 0.$$

Iz (ii) i (iv) dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &< (c_q - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_q) - (c_q - \mathbf{y}_B^T \mathbf{a}_q) \\ &= \mathbf{y}_B^T \mathbf{a}_q - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_q \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{A}_B \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q \\ &= (\mathbf{c}_B^T - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{A}_B)(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q) \\ &= \sum_{r \in I_B} (c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r)(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q)_r. \end{aligned}$$

Zato, ako se javlja ciklus, onda postoji barem jedan indeks $r \in I_B$ takav da je

$$(c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r)(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q)_r > 0. \tag{3.22}$$

Pokažimo da takav indeks r ne postoji, što će značiti da se primjenom Blandovog pravila ne može pojaviti ciklus. Zaista, ako je $r > p$, onda r nije nestalan indeks, tj. $\mathbf{a}_r$ javlja se tijekom cikliranja u svim bazama. Prema (i) zato je $c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r = 0$, pa je $(c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r)(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q)_r = 0$. Ako je $r = p$, zbog (iv) jest $(c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r) < 0$, a zbog (iii) jest $(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q)_r > 0$, pa stoga ne vrijedi (3.22). Ako je $r < p$, zbog (iv) jest $(c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r) \geq 0$. Ako je $c_r - \mathbf{y}_{B'}^T \mathbf{a}_r > 0$, zbog (i) slijedi $r \notin I_{B'}$. To znači da je r nestalan indeks. Zato je $(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})_r = 0$ jer tijekom cikliranja ne mijenjaju se koordinate baznog dopustivog rješenja. Zbog (iii) tada je $(\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q)_r \leq 0$. ■

3.25. Primjer. U primjeru 3.23. pojavio se ciklus. Riješimo taj LP problem primjenom Blandovog pravila. Početna i prvih pet simpleks tablica napravljene su po Blandovu pravilu. Zato nastavljamo s petom tablicom.

5. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 2$, $q = 3$; pivot: $\alpha_{pq} = 0.5$.

	x_3	x_6	x_1	x_2	1
x_5	2	−9	−4	8	0
x_4	−0.5	1	$\boxed{0.5}$	−1.5	0
x_7	0	0	1	0	1
$-f$	21	−24	−22	93	0

6. tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 3$, $q = 1$; pivot: $\alpha_{pq} = 1$.

	x_3	x_6	x_4	x_2	1
x_5	−2	−1	8	−4	0
x_1	−1	2	2	−3	0
x_7	$\boxed{1}$	−2	−2	3	1
$-f$	−1	20	44	47	0

7. tablica. Ova je tablica optimalna. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi -1 i postiže se u točki $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [1, 0, 1, 0, 2, 0, 0]^T$.

$$
\begin{array}{c|rrrr|l}
 & x_7 & x_6 & x_4 & x_2 & 1 \\
\hline
x_5 & 2 & -5 & 4 & 2 & 2 \\
x_1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\
\hline
-f & 1 & 18 & 42 & 50 & 1
\end{array}\,.
$$

Spomenimo na kraju dva nedostatka Blandova pravila. Primjena tog pravila može rezultirati takvim izborom pivot elemenata da su promjene vrijednosti funkcije cilja male, što često uzrokuje veći broj iteracija simpleks metode. Također postoji opasnost od izbora pivot elemenata koji su vrlo bliski nuli i koji stoga prouzrokuju velike numeričke pogreške.

3.5. Traženje početnog bazičnog dopustivog rješenja

U polaznom LP problemu (3.1)–(3.3) pretpostavljamo da je $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, što se, ako je potrebno, dobiva množenjem s -1.

Početno bazično dopustivo rješenje polaznog LP problema (3.1)-(3.3) moguće je odrediti pomoću sljedećeg pomoćnog LP problema:

$$z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_1 + y_2 + \cdots + y_m \to \min \tag{3.23}$$

uz ograničenja

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{3.25}$$

Lako je uočiti da vrijede sljedeće tri tvrdnje:

1) Zbog pretpostavke $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, vektor $\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ jest bazično dopustivo rješenje pomoćnog LP problema.

2) Ako je $\mathbf{x}_0$ dopustivo rješenje polaznog LP problema, onda je $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ optimalno bazično dopustivo rješenje pomoćnog LP problema i optimalna vrijednost funkcije cilja z jednaka je 0, $z(\mathbf{x}_0, \mathbf{0}) = 0$.

   Zato, ako je optimalna vrijednost funkcije cilja z različita od 0, polazni LP problem nema dopustivo rješenje.

3) Ako je optimalna vrijednost funkcije cilja z jednaka nuli i dostiže se u točki $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}$, onda je $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$, a $\mathbf{x}_0$ jest bazično dopustivo rješenje polaznog problema.

Lako je vidjeti da polazni LP problem ima rješenje onda i samo onda ako pomoćni LP problem ima rješenje s optimalnom vrijednosti 0.

3.26. Primjer. Odredimo vrh poliedra zadanog s

$$\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 1 \\ -x_1 & +x_2 & & = 0 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} \end{array}$$

Nakon uvođenja artificijelnih varijabli $y_1, y_2 \geq 0$ u ograničenja i u pomoćnu funkciju cilja dobivamo sljedeći pomoćni LP problem:

$$z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_1 + y_2 \to \min$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +y_1 & & = 1 \\ -x_1 & +x_2 & & & +y_2 & = 0 \\ \multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0.} \end{array}$$

Uz oznake $x_4 := y_1$ i $x_5 := y_2$, simpleks algoritmom nalazimo:

Početna tablica. Pivot redak (p) i pivot stupac (q): $p = 1$, $q = 2$; pivot: $\alpha_{pq} = 1$.

	x_1	x_2	x_3	1
x_4	1	$\boxed{1}$	2	1
x_5	-1	1	0	1
$-z$	0	-2	-2	-2

1. tablica. Ova je tablica optimalna.

	x_1	x_4	x_3	1
x_2	1	1	2	1
x_5	-2	-1	-2	0
$-z$	2	2	2	0

.

Optimalna vrijednost funkcije cilja z jednaka je nuli i postiže se u točki

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [0, 1, 0, 0, 0]^T,$$

koja je bazično dopustivo rješenje pomoćnog LP problema. Zato je

$$[x_1, x_2, x_3]^T = [0, 1, 0]^T$$

bazično dopustivo rješenje polaznog LP problema.

Zadaci za vježbu

1. (Problem Chebyshevljeva centra poliedra). Zadan je poliedar $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \le b_i,\, i = 1, \ldots, m\}$. Treba odrediti zatvorenu euklidsku kuglu $\bar{B}(\mathbf{x}_0, r)$ najvećeg radijusa r koja se može upisati u poliedar P. Tu zatvorenu kuglu, ako postoji zovemo Chebyshevljeva kugla, a njezino središte zovemo Chebyshevljev centar poliedra P. Taj problem ekvivalentan je sljedećem LP problemu:

$$\begin{array}{ll} \text{maksimizirati} & r \\ \text{uz ograničenja} & \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_0 + r\|\mathbf{a}_i\|^2 \le b_i,\ i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

gdje su $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i $r \ge 0$ varijable.

Uputa: Zatvorenu kuglu možemo zapisati kao $\bar{B}(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \le r\}$, gdje su $\mathbf{x}_0$ i r nepoznanice. Treba maksimizirati r uz ograničenje $\bar{B}(\mathbf{x}_0, r) \subseteq P$. Zatvorena kugla $\bar{B}(\mathbf{x}_0, r)$ leži u poluravnini $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \le b_i$ onda i samo onda ako je $\mathbf{a}_i^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) \le b_i$ za svaki $\mathbf{u}$ takav da je $\|\mathbf{u}\| \le r$. Pomoću Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti lako je zaključiti da je

$$\sup\{\mathbf{a}_i^T \mathbf{u} : \|\mathbf{u}\| \le r\} = r\|\mathbf{a}_i\|, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Zato je $\bar{B}(\mathbf{x}_0, r) \subseteq P$ onda i samo onda ako je

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_0 + r\|\mathbf{a}_i\|^2 \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

2. (Chebyshevljeva minimax aproksimacija) Zadani su matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Pokažite da je sljedeći Chebyshevljev problem

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |(\mathbf{Ax})_i - b_i| \to \min$$

ekvivalentan LP problemu

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & t \\ \text{uz ograničenja} & -t\mathbf{1} \le \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \le t\mathbf{1}, \end{array}$$

gdje su $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $t \ge 0$ nepoznanice, a $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^m$.

Uputa: $\max\limits_{i=1,\dots,m} \alpha_i \le t$ onda i samo onda ako je $\alpha_i \le t$ za sve $i = 1, \dots, m$.

3. (Problem najmanje sume apsolutnih odstupanja) Zadani su matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Ako umjesto Chebyshevljeve l_∞ norme koristimo l_1 normu, imamo sljedeći aproksimacijski problem

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_1 = \sum_{i=1}^m |(\mathbf{Ax})_i - b_i| \to \min$$

koji je ekvivalentan LP problemu

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{1}^T\mathbf{t} \\ \text{uz ograničenja} & -\mathbf{t} \le \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \le \mathbf{t}, \end{array}$$

gdje su $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ nepoznanice, a $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^m$.

Uputa: Dovoljno je staviti $t_i := (\mathbf{Ax})_i - b_i$, $i = 1, \dots, m$.

4. Neka je X konačna slučajna varijabla s distribucijom

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix},$$

gdje je $p_i > 0$ vjerojatnost da ta slučajna varijabla primi vrijednost x_i, te $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Pretpostavimo da su nam poznate samo vrijednosti x_i, ali ne i vjerojatnosti p_i. Zato nam nije poznato ni njezino matematičko očekivanje $E[X]$, $E[X] = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.

Pretpostavimo da znamo gornju i donju granicu matematičkog očekivanja nekih drugih m slučajnih varijabli, tj. da imamo m ograničenja:

$$\alpha_i \le \mathbf{a}_i^T \mathbf{p} \le \beta_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Odredite gornju i donju granicu matematičkog očekivanja slučajne varijable X.

Uputa: Za donju granicu treba riješiti LP problem

$$\begin{array}{ll} \text{minimizirati} & \mathbf{x}^T\mathbf{p} \\ \text{uz ograničenja} & \mathbf{p} \geq \mathbf{0},\, \mathbf{1}^T\mathbf{p} = 1 \\ & \alpha_i \leq \mathbf{a}_i^T\mathbf{p} \leq \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{array}$$

gdje je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ vektor nepoznanica.

5. Zapišite gornje LP probleme u kanonskom obliku.

4. Separacija konveksnih skupova

4.1. Projekcija na zatvoren konveksan skup

Podsjetimo se problema projekcije točke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ na neprazan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Broj

$$d(\mathbf{x}, K) := \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in K\}$$

zove se udaljenost točke $\mathbf{x}$ do skupa K. Točka $\mathbf{y_x} \in K$ projekcija je točke $\mathbf{x}$ na skup K ako je $\|\mathbf{x} - \mathbf{y_x}\| = d(\mathbf{x}, K)$. Kao što smo već ranije kazali, projekcija ne mora postojati niti mora biti jedinstvena. Međutim, ako je skup K zatvoren, projekcija će postojati, no ne mora biti jedinstvena. Zanimljivo je da konveksnost skupa K osigurava jedinstvenost projekcije. O tome nam govore sljedeći teorem i njegov korolar 4.2.

4.1. Teorem
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan skup. Tada vrijedi:

(i) Ako je K zatvoren skup, onda svaka točka iz $\mathbb{R}^n$ ima projekciju na skup K.

(ii) Ako je K konveksan skup i ako postoji projekcija neke točke na skup K, onda je ona jedinstvena.

Dokaz. *(i)* Kao prvo, ako je $\mathbf{x} \in K$, onda je točka $\mathbf{x}$ sama sebi projekcija. Za $\mathbf{x} \notin K$ odaberimo $r > 0$ takav da je $K \cap \operatorname{Cl} B(\mathbf{x}, r)$ neprazan skup. Taj je skup kompaktan (kao presjek omeđene zatvorene kugle $\operatorname{Cl} B(\mathbf{x}, r)$ i zatvorenog skupa K), pa neprekidna funkcija

$$\mathbf{y} \mapsto \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

na njemu dostiže svoj minimum u nekoj točki $\mathbf{y_x} \in K \cap \operatorname{Cl} B(\mathbf{x}, r)$. Dakle,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|, \quad \forall\, \mathbf{y} \in K \cap \operatorname{Cl} B(\mathbf{x}, r).$$

Nadalje, kako je

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > r \geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|, \quad \forall\, \mathbf{y} \in K \backslash \operatorname{Cl} B(\mathbf{x}, r),$$

zaključujemo da za sve $\mathbf{y} \in K$ vrijedi $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|$. Zato je $d(\mathbf{x}, K) = \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|$.

(ii) Pretpostavimo da su $\mathbf{y_x} \in K$ i $\mathbf{z_x} \in K$ projekcije točke $\mathbf{x}$ na konveksan skup K, tj.

$$d(\mathbf{x}, K) = \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{z_x} - \mathbf{x}\|.$$

Treba pokazati da je $\mathbf{z_x} = \mathbf{y_x}$. Prvo primijetimo da je $\frac{1}{2}(\mathbf{y_x} + \mathbf{z_x}) \in K$ zbog konveksnosti skupa K, a zatim da je

$$\|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\| \leq \|\tfrac{1}{2}(\mathbf{y_x} + \mathbf{z_x}) - \mathbf{x}\|$$

po definiciji projekcije. Ako je $\mathbf{z_x} \neq \mathbf{y_x}$, pomoću jednakosti paralelograma (vidi zadatak 1 na str. 113.)

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

za $\mathbf{u} = \mathbf{y_x} - \mathbf{x}$ i $\mathbf{v} = \mathbf{z_x} - \mathbf{x}$ dobiva se

$$\|(\mathbf{y_x}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z_x}-\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{y_x}-\mathbf{z_x}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{y_x}-\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{z_x}-\mathbf{x}\|^2\big),$$

odakle je (zbog $\mathbf{z_x} \neq \mathbf{y_x}$)

$$\|(\mathbf{y_x}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z_x}-\mathbf{x})\|^2 < 2\big(\|\mathbf{y_x}-\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{z_x}-\mathbf{x}\|^2\big).$$

Zato je

$$\begin{aligned} 4\|\tfrac{1}{2}(\mathbf{y_x}+\mathbf{z_x}) - \mathbf{x}\|^2 &= \|(\mathbf{y_x}-\mathbf{x}) + (\mathbf{z_x}-\mathbf{x})\|^2 \\ &< 2\big(\|\mathbf{y_x}-\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{z_x}-\mathbf{x}\|^2\big) \\ &= 4\|\mathbf{y_x}-\mathbf{x}\|^2, \end{aligned}$$

odakle slijedi $\|\frac{1}{2}(\mathbf{y_x}+\mathbf{z_x}) - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{y_x}-\mathbf{x}\|$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $\mathbf{y_x}$ projekcija točke $\mathbf{x}$ na skup K. ■

4.2. Korolar
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Tada svaka točka iz $\mathbb{R}^n$ ima jedinstvenu projekciju na skup K.

Pretpostavimo da je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Prema korolaru 4.2. svaka točka $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ima jedinstvenu projekciju $\mathbf{y_x}$ na skup K, tj. postoji samo jedna točka $\mathbf{y_x}$ iz K takva da je

$$\|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

Funkciju $P_K : \mathbb{R}^n \to K$ koja točki $\mathbf{x}$ pridružuje njezinu projekciju $\mathbf{y_x}$ zovemo operator projiciranja ili projektorom na skup K. Dakle,

$$\|P_K(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K. \tag{4.1}$$

4.3. Primjedba
Uočite da je $P_K(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ onda i samo onda ako je $\mathbf{x} \in K$.

4.4. Teorem
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup, te neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Točka $\mathbf{y_x} \in K$ projekcija je točke $\mathbf{x}$ na skup K, tj. $\mathbf{y_x} = P_K(\mathbf{x})$ onda i samo onda ako je

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K. \tag{4.2}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{y_x} = P_K(\mathbf{x})$. Zbog konveksnosti skupa K tada za svaki $\mathbf{y} \in K$ i sve $\lambda \in [0,1]$ imamo $\mathbf{y_x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{y_x}) \in K$, pa je

$$\|\mathbf{y_x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{y_x}) - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|^2,$$

odnosno, ekvivalentno,

$$2\lambda\langle \mathbf{y_x} - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x}\rangle + \lambda^2\|\mathbf{y} - \mathbf{y_x}\|^2 \geq 0.$$

Ako tu nejednakost prvo podijelimo s λ, a zatim uzmemo limes kad $\lambda \to 0+$, dobivamo (4.2).

Obratno, pretpostavimo da za točku $\mathbf{y_x} \in K$ vrijedi (4.2). Tada pomoću Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti koja glasi

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

za sve $\mathbf{y} \in K$ dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &\geq \langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{y_x}\rangle \\
&= \|\mathbf{x} - \mathbf{y_x}\|^2 + \langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle \\
&\geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y_x}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y_x}\|\,\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,
\end{aligned}$$

odakle slijedi $\|\mathbf{x} - \mathbf{y_x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ (bez obzira je li $\mathbf{x} \neq \mathbf{y_x}$ ili je $\mathbf{x} = \mathbf{y_x}$!). To znači da je $\mathbf{y_x}$ projekcija točke $\mathbf{x}$ na K. ■

4.5. Primjedba

Uz oznake

$$\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \quad \beta := \langle \mathbf{a}, \mathbf{y_x}\rangle,$$

nejednakost (4.2) možemo zapisati kao

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle \leq \beta, \quad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

Ako je $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, to nam govori da je cijeli skup K sadržan u zatvorenom poluprostoru $H^-_{\mathbf{a},\beta}$ određenom hiperravninom $H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}\rangle = \beta\}$. Više o tome bit će govora u točki 4.3.

Sljedeći korolar govori nam da je projiciranje na neprazan, zatvoren i konveksan skup neprekidno i neekspanzivano preslikavanje (Lipschitzovo preslikavanje s konstantom 1 ili manje).

4.6. Korolar

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Tada za sve $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2)\| \leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

što nam govori da je projektor P_K neekspanzivno i neprekidno preslikavanje.

Dokaz. Ako u (4.2) stavimo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ i $\mathbf{y} = P_K(\mathbf{x}_2)$, imamo

$$\langle \mathbf{x}_1 - P_K(\mathbf{x}_1), P_K(\mathbf{x}_2) - P_K(\mathbf{x}_1) \rangle \leq 0,$$

odnosno, ekvivalentno,

$$\langle P_K(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_1, P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2) \rangle \leq 0.$$

Slično, ako u (4.2) stavimo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ i $\mathbf{y} = P_K(\mathbf{x}_1)$, imamo

$$\langle \mathbf{x}_2 - P_K(\mathbf{x}_2), P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2) \rangle \leq 0.$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$\langle \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2), P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2) \rangle \leq 0,$$

odnosno, ekvivalentno,

$$\|P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2)\|^2 \leq \langle P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle.$$

Primjenom Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na desnu stranu gornje nejednakosti dobivamo

$$\|P_K(\mathbf{x}_1) - P_K(\mathbf{x}_2)\| \leq \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

■

4.7. KOROLAR
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash K$ i $\mathbf{y_x} := P_K(\mathbf{x})$. Tada je

$$P_K\big(\{\mathbf{y_x} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y_x}) : \lambda \geq 0\}\big) = \mathbf{y_x},$$

tj. cijela zraka $\{\mathbf{y_x} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y_x}) : \lambda \geq 0\}$ projicira se u istu točku.

Dokaz. Kako je $\mathbf{y_x} = P_K(\mathbf{x})$, prema teoremu 4.4. jest

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

Zato za svaki $\lambda \geq 0$ imamo

$$\langle \mathbf{y_x} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y_x}) - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K,$$

pa, opet po teoremu 4.4., slijedi $P_K(\mathbf{y_x} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y_x})) = \mathbf{y_x}$. ■

Ako je K afin skup, onda (4.2) prelazi u jednakost koja ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Ona nam govori da će $\mathbf{y_x}$ biti projekcija točke $\mathbf{x}$ na K onda i samo onda ako je vektor $\mathbf{x} - \mathbf{y_x}$ okomit na linearni potprostor paralelan skupu K. Tu tvrdnju dokazujemo u sljedećem korolaru.

4.8. KOROLAR
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ afin skup i $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Točka $\mathbf{y_x} \in K$ projekcija je točke $\mathbf{x}$ na skup K, tj. $\mathbf{y_x} = P_K(\mathbf{x})$ onda i samo onda ako je

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle = 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K,$$

odnosno, ekvivalentno, ako je

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{v} \rangle = 0, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in L, \tag{4.3}$$

gdje je $L = K - \mathbf{y_x}$ linearni potprostor paralelelan s afinim skupom K.

Dokaz. To je zato jer $\mathbf{y}, \mathbf{y_x} \in K \implies \mathbf{y_x} - (\mathbf{y} - \mathbf{y_x}) \in K$, pa stavi li se u (4.2) $\mathbf{y_x} - (\mathbf{y} - \mathbf{y_x})$ umjesto $\mathbf{y}$, dobiva se obratna nejednakost

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle \geq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

■

4.9. PRIMJER (LINEARNI PROBLEM NAJMANJIH KVADRATA). Neka su zadani matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Treba pronaći vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ koji minimizira izraz $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$, što zapisujemo kao

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}.$$

Taj je problem direktno povezan s projekcijom. Da bismo to vidjeli, neka je L linearni potprostor razapet stupcima matrice $\mathbf{A}$, tj. $L = \{\mathbf{Ax} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$. Tada je polazni problem najmanjih kvadrata ekvivalentan problemu nalaženju vektora $\mathbf{z} \in L$ ($\mathbf{z} = \mathbf{Ax}$ za neki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) takvog da $\|\mathbf{z} - \mathbf{b}\|$ bude minimalno.

Linearni je potprostor L neprazan, zatvoren i konveksan. Zato (vidi korolar 4.2.) traženi minimizirajući vektor $\mathbf{z}$ postoji, jedinstven je i jednak je projekciji vektora $\mathbf{b}$ na potprostor L. Uočite da jedinstvenost minimizirajućeg vektora $\mathbf{x}$ ovisi o rangu $r(\mathbf{A})$ matrice $\mathbf{A}$: nije jedinstven ako je $r(\mathbf{A}) < n$, a jedinstven je ako je $r(\mathbf{A}) = n$.

Nadalje, prema prethodnom korolaru vektor $\mathbf{z} = \mathbf{Ax}$ bit će minimizirajući onda i samo onda ako vrijedi (4.3) :

$$\langle \mathbf{b} - \mathbf{Ax}, \mathbf{v} \rangle = 0 \;\text{ za svaki } \mathbf{v} \in L,$$

tj. ako je $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ okomit na L. Budući da je potprostor L razapet sa stupcima matrice $\mathbf{A}$, to će biti onda i samo onda ako je

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{O} \iff \mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

Dakle, vektor $\mathbf{x}$ bit će rješenje polaznog linearnog problema najmanjih kvadrata onda i samo onda ako je on rješenje tzv. sustava normalnih jednadžbi

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

4.2. Dualni konus i projekcija na zatvoren konveksan konus

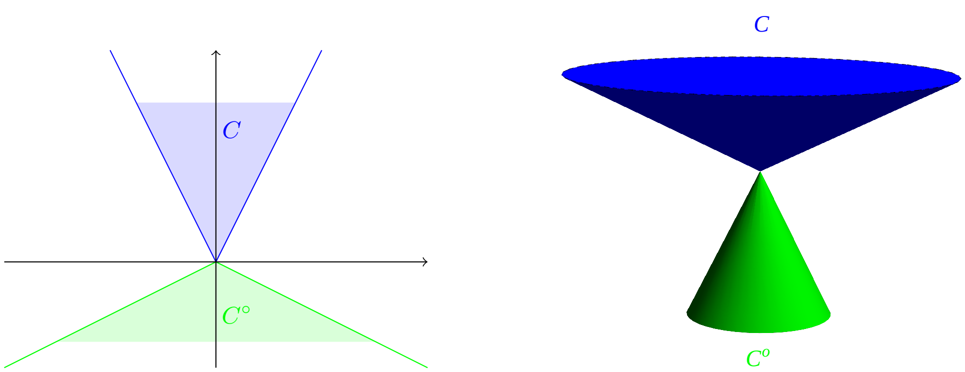
Prije nego što navedemo teorem o projekciji na konus, uvodimo sljedeću definiciju polarnog konusa nepraznog skupa $C \subseteq \mathbb{R}^n$ (ne nužno konveksnog).

4.10. DEFINICIJA
Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan skup. Skup

$$C^\circ = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0 \text{ za sve } \mathbf{x} \in C\}$$

zovemo polarni ili dualni konus skupa C.

Promatrano geometrijski, $\mathbf{y} \in C^\circ$ ako se cijeli skup C nalazi u zatvorenom poluprostoru $H^-_{\mathbf{y},0}$ određenom hiperravninom $H_{\mathbf{y},0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$.



Slika 16. *Konveksni konus C i njegov dualni konus C°.*

Lako je provjeriti da polarni konusi imaju sljedeća svojstva:

(i) C° konveksni je konus,

(ii) $C_1 \subseteq C_2 \Longrightarrow C_2^\circ \subseteq C_1^\circ$,

(iii) $C \subseteq (C^\circ)^\circ$,

(iv) C° zatvoren je skup.

Zaista, prikažemo li C° kao

$$C^\circ = \bigcap_{\mathbf{x} \in C} \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0\}$$

i prisjetimo li se da je svaki poluprostor $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \leq 0\}$ zatvoren konveksan konus (primjer 1.16.), onda je i C° (kao njihov presjek) također zatvoren konveksan konus. Drugo i treće svojstvo slijedi iz definicije.

4.11. PRIMJER. Navedimo dva vrlo jednostavna, ali ilustrativna i važna primjera. Neka je C konus generiran stupcima $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, tj.

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} = \Big\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i : \lambda_i \geq 0\Big\} = \{\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}.$$

Lako je pokazati da je

$$C^\circ = \big\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}\rangle \leq 0 \text{ za svaki } i = 1, \ldots, m\big\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{0}\}.$$

Specijalno, polarni konus nenegativnog ortanta

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \Big\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i : \lambda_i \geq 0\Big\}$$

nepozitivni je ortant

$$\mathbb{R}^n_- = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \leq \mathbf{0}\}.$$

4.12. TEOREM (O PROJEKCIJI NA KONUS)
Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren konveksni konus te neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Točka $\mathbf{y_x} \in \mathbb{R}^n$ projekcija je točke $\mathbf{x}$ na C, tj. $\mathbf{y_x} = P_C(\mathbf{x})$ onda i samo onda ako je

$$\mathbf{y_x} \in C, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y_x} \in C^\circ, \quad \langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y_x}\rangle = 0. \tag{4.4}$$

Dokaz. Ako je $\mathbf{y_x}$ projekcija točke $\mathbf{x}$ na C, onda je $\mathbf{y_x} \in C$. Nadalje, prema teoremu 4.4. jest

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x}\rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in C. \tag{4.5}$$

Specijalno, zamijenimo li $\mathbf{y}$ s $\lambda\mathbf{y_x}$, $\lambda \geq 0$, dobivamo

$$(\lambda - 1)\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y_x}\rangle \leq 0, \qquad \forall \lambda \geq 0.$$

Kako $\lambda - 1$ može biti bilo kakvog predznaka, dobivamo $\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y_x}\rangle = 0$, a (4.5) prelazi u

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y}\rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in C,$$

što nam govori da je $\mathbf{x} - \mathbf{y_x} \in C^\circ$.

Obratno, ako $\mathbf{y_x} \in C$ zadovoljava (4.4), onda za svaki $\mathbf{y} \in C$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{y} - \mathbf{y_x} + \mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|^2 \\
&\geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y_x} - \mathbf{y}\rangle \\
&\geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y}\rangle \\
&\geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|^2,
\end{aligned}$$

odnosno, ekvivalentno, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{y_x} - \mathbf{x}\|$, odakle slijedi da je $\mathbf{y_x}$ projekcija točke $\mathbf{x}$ na C. ■

4.13. KOROLAR
Ako je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren konveksni konus, onda je $(C^\circ)^\circ = C$.

Dokaz. Kako je $C \subseteq (C^\circ)^\circ$, preostaje provjeritititi obratnu inkluziju $(C^\circ)^\circ \subseteq C$, što ćemo napraviti tako da dokažemo implikaciju $\mathbf{x} \notin C \Rightarrow \mathbf{x} \notin (C^\circ)^\circ$. Pretpostavimo da $\mathbf{x} \notin C$. Neka je $\mathbf{y_x}$ projekcija točke $\mathbf{x}$ te neka je $\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{y_x} \neq \mathbf{0}$. Prema prethodnom teoremu jest $\mathbf{y_x} \in C$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y_x} \rangle = 0$ i $\mathbf{a} \in C^\circ$, tj.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in C.$$

Kako je

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{y_x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{y_x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 > 0,$$

slijedi $\mathbf{x} \notin (C^\circ)^\circ$ jer, budući da je $\mathbf{a} \in C^\circ$, za svaki $\mathbf{z} \in (C^\circ)^\circ$ vrijedi $\langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle \leq 0$. ■

4.14. KOROLAR
Neka je zadana matrica $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Konačno generirani konus

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$$

i poliedarski konus

$$P = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y}^T \mathbf{A} \leq \mathbf{0}\}$$

jedan su drugom polarni, tj. $C^\circ = P$ i $P^\circ = C$. Zato je $(C^\circ)^\circ = C$ i $(P^\circ)^\circ = P$.

Dokaz. U primjeru 4.11. već smo konstatirali da je $C^\circ = P$. Budući da je konveksni konus C zatvoren (vidi korolar 2.33.), prema prethodnom je korolaru $C = (C^\circ)^\circ = P^\circ$. ■

4.3. Potporna hiperravnina

Sada ćemo dati geometrijsku interpretaciju teorema 4.4. Pretpostavimo da $\mathbf{x} \notin K$, gdje je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup. Neka je $\mathbf{y_x} := P_K(\mathbf{x})$. Tada je $\mathbf{x} \neq \mathbf{y_x}$, jer je $\mathbf{y_x} \in K$. Prema teoremu 4.4. jest

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle \leq 0, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

Uvedemo li oznake

$$\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \quad \beta := \langle \mathbf{a}, \mathbf{y_x} \rangle,$$

imamo

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

To znači da je cijeli skup K sadržan u negativnom zatvorenom poluprostoru

$$H^-_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta\}$$

određenom hiperavninom

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}$$

koja prolazi točkom $\mathbf{y_x}$ (slika 17). Nadalje, kako je

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{y_x} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y_x} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \beta > \beta,$$

točka $\mathbf{x}$ pripada pozitivnom otvorenom poluprostoru

$$H^+_{\mathbf{a},\beta} \backslash H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle > \beta\}.$$

Osim toga, uočimo da za svaki $\mathbf{y} \in K$ vrijedi

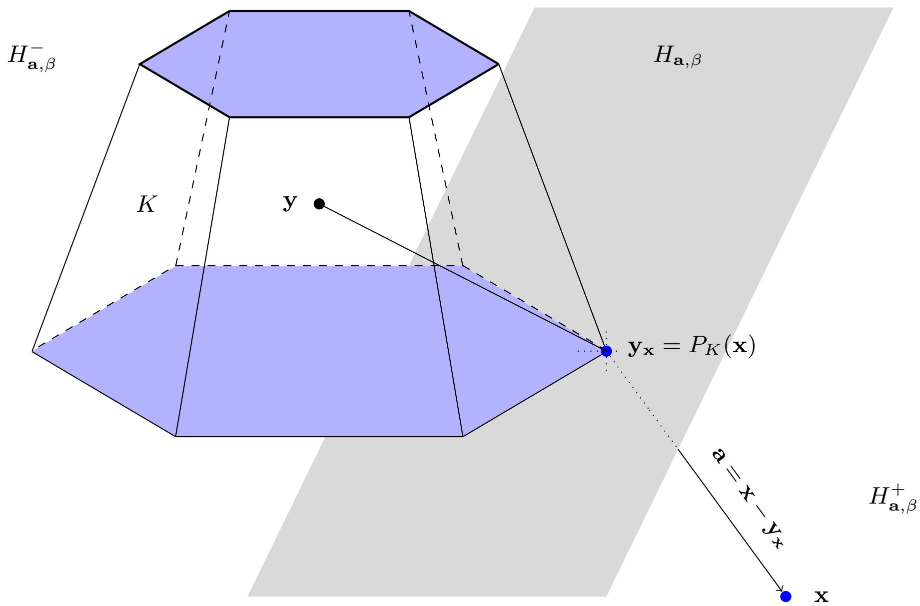
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta < \beta + \|\mathbf{a}\|^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle,$$

odakle dobivamo

$$\sup_{\mathbf{y} \in K} \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta < \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle.$$

Motivirani tim gornjim razmatranjima, uvodimo sljedeće definicije:

4.15. DEFINICIJA
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{y}_0 \in S$. Za hiperravninu H kažemo da je potporna hiperravnina na skup S u točki $\mathbf{y}_0 \in S$ ako je $\mathbf{y}_0 \in H$ i ako S leži s jedne strane hiperravnine H, tj. ako je $S \subseteq H^-$ ili $S \subseteq H^+$. Pri tome i za odgovarajući zatvoreni poluprostor koji sadrži skup S također kažemo da je potporni poluprostor.



Slika 17. *Potporna hiperravnina* $H_{\mathbf{a},\beta}$ *na skup* K *u točki* $\mathbf{y_x} = P_K(\mathbf{x})$.

U skladu s prethodnom definicijom, gore provedena razmatranja možemo iskazati u obliku sljedeće leme:

4.16. Lema

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *neprazan, zatvoren i konveksan skup,* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus K$, $\mathbf{y_x} := P_K(\mathbf{x})$, $\mathbf{a} := \mathbf{x} - \mathbf{y_x} \neq \mathbf{0}$ *i* $\beta := \langle \mathbf{a}, \mathbf{y_x} \rangle$. *Tada hiperravnina*

$$\begin{aligned} H &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x} - \mathbf{y_x}, \mathbf{y} - \mathbf{y_x} \rangle = 0\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\} \end{aligned}$$

podupire skup K *u točki* $\mathbf{y_x}$. *Pri tome je* $K \subseteq H^-$, $\mathbf{x} \in H^+ \setminus H$. *Osim toga, vrijedi*

$$\sup_{\mathbf{y} \in K} \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta < \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle. \tag{4.6}$$

4.17. Primjedba

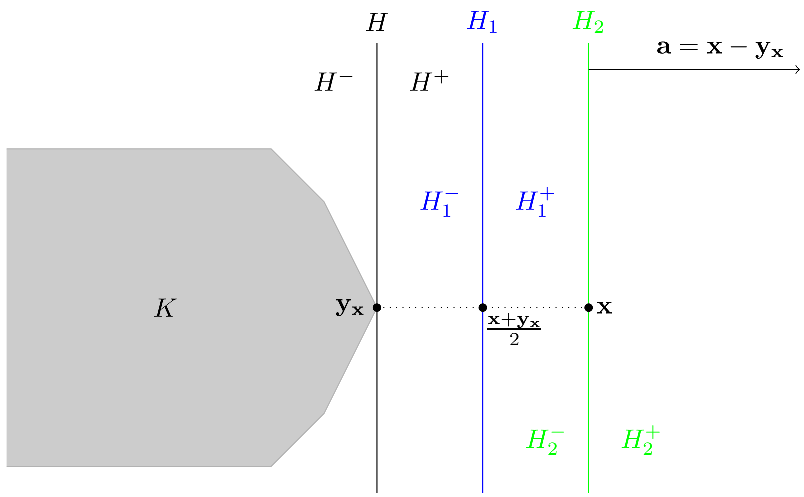
Neka je H hiperravnina iz prethodne leme, tj.

$$H = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}.$$

Definirajmo hiperravnine H_1 i H_2:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \tfrac{\mathbf{x}+\mathbf{y_x}}{2} \right\rangle = 0\right\} = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \right\rangle = \beta + \tfrac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2\right\}, \\ H_2 &= \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \right\rangle = 0\right\} = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \right\rangle = \beta + \|\mathbf{a}\|^2\right\}. \end{aligned}$$

Uočimo da su H, H_1 i H_2 međusobno paralelne hiperravnine, H_1 sadrži točku $\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y_x}}{2}$, a H_2 sadrži točku $\mathbf{x}$ (slika 18).



Slika 18.

Zbog (4.6) jest

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \le \beta < \beta + \tfrac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 < \beta + \|\mathbf{a}\|^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle, \qquad \forall\, \mathbf{y} \in K.$$

To posljednje opažanje značit će da hiperravnina H_1 jako separira (u smislu definicije 4.24.) skup K i točku $\mathbf{x}$ te će stoga ujedno biti dokaz tvrdnje (ii) teorema 4.26.

4.18. Teorem (Vanjski opis zatvorenog konveksnog skupa)
Svaki neprazan, zatvoren i konveksan pravi podskup K od $\mathbb{R}^n$ može se prikazati kao presjek svih zatvorenih poluprostora koji sadrže skup K.

Dokaz. Neka je B presjek svih zatvorenih poluprostora koji sadrže skup K. Očito je $K \subseteq B$. Ako $\mathbf{x} \notin K$, onda prema lemi 4.16. postoji potporna hiperravnina H takva da je $K \subseteq H^-$ i $\mathbf{x} \in H^+ \backslash H$, pa stoga $\mathbf{x} \notin B$. ■

Sada ćemo navesti dvije propozicije koje nam, između ostalog, govore da potporna hiperravnina na neprazan skup $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ može postojati samo u točkama s granice tog skupa (u slučaju affdim $S = n$), odnosno relativne granice tog skupa (u slučaju affdim $S < n$).

4.19. Propozicija (Slučaj affdim $S = n$)
Neka je $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ neprazan skup pune afine dimenzije, tj. affdim $S = n$*. Ako je*

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}, \quad \beta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_0 \rangle$$

potporna hiperravnina skupa S u točki $\mathbf{y}_0 \in S$, onda vrijedi:

(i) $H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{Int}(\operatorname{conv} S) = \emptyset$,

(ii) $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{Bd} S \cap \operatorname{Bd}(\operatorname{conv} S)$,

(iii) *Skup S nije sadržan u $H_{\mathbf{a},\beta}$, tj. $H_{\mathbf{a},\beta}$ netrivijalna je potporna hiperravnina u smislu definicije 4.20.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je

$$S \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta\}.$$

Tada je i $\operatorname{conv} S \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}$.

(i) Kako je S skup pune afine dimenzije, to je $\operatorname{Int}(\operatorname{conv} S) \neq \emptyset$ (propozicija 2.22.). Pretpostavimo da je $\mathbf{y}_1 \in H_{\mathbf{a},\beta}$. Treba pokazati da $\mathbf{y}_1 \notin \operatorname{Int}(\operatorname{conv} S)$, tj. da ne postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je cijela otvorena kugla $B(\mathbf{y}_1, \varepsilon)$ sadržana u skupu $\operatorname{conv} S$. Zaista, za svaki $\varepsilon > 0$ jest

$$\mathbf{y}_1 + \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \in B(\mathbf{y}_1, \varepsilon),$$

a kako je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle = \beta$ (jer je $\mathbf{y}_1 \in H_{\mathbf{a},\beta}$), vrijedi

$$\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 + \tfrac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \right\rangle = \beta + \tfrac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{a}\| > \beta.$$

To znači da je $\mathbf{y}_1 + \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \in H^+_{\mathbf{a},\beta} \backslash H_{\mathbf{a},\beta}$. Zato $\mathbf{y}_1 + \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} \notin \operatorname{conv} S$ jer je $\operatorname{conv} S \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}$.

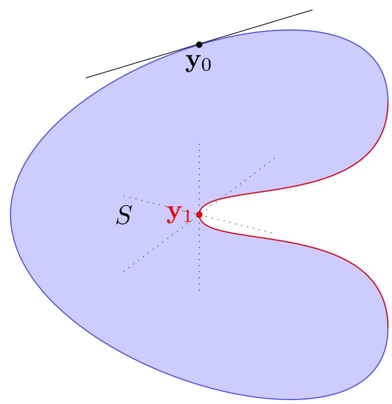
(ii) Kako je $\mathbf{y}_0 \in S \cap H_{\mathbf{a},\beta}$ i $H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{Int}(\operatorname{conv} S) = \emptyset$, dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}_0 \in S \backslash \operatorname{Int}(\operatorname{conv} S) \subseteq \operatorname{Cl} S \backslash \operatorname{Int} S = \operatorname{Bd} S,\\
&\mathbf{y}_0 \in \operatorname{conv} S \backslash \operatorname{Int}(\operatorname{conv} S) \subseteq \operatorname{Cl}(\operatorname{conv} S) \backslash \operatorname{Int}(\operatorname{conv} S) = \operatorname{Bd}(\operatorname{conv} S),
\end{aligned}$$

odakle slijedi $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{Bd} S \cap \operatorname{Bd}(\operatorname{conv} S)$.

(iii) Kako je $\operatorname{affdim} S = n$, a $\operatorname{affdim} H_{\mathbf{a},\beta} = n - 1$, skup S ne može biti podskup od $H_{\mathbf{a},\beta}$, tj. $H_{\mathbf{a},\beta}$ netrivijalno podupire skup S. ■

Dakle, ako je skup $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ pune dimenzije, onda potporna hiperravnina ne može prolazati kroz unutarnju točku (točku iz interiora) skupa S. Zato, ako u nekoj točki $\mathbf{y}_0 \in S$ postoji potporna hiperravnina na skup S, onda $\mathbf{y}_0$ nužno pripada granici $\operatorname{Bd} S$. Osim toga, budući da je $\operatorname{affdim} S = n$, a dimenzija hiperravnine iznosi $n - 1$, potporna hiperravnina ne može sadržavati cijeli skup S. Za sada još ne znamo u kojim će točkama s granice $\operatorname{Bd} S$ postojati potporna hiperravnina, no jasno je da ne mora postojati u svakoj, kao što je ilustrirano na sljedećoj slici.



Slika 19. *Ako skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ izgleda kao na slici, potporni pravac (hiperravnina) neće postojati ni u jednoj točki s dijela granice označenog crvenom bojom. Npr. u točki $\mathbf{y}_1$ potporni pravac ne postoji, a u točki $\mathbf{y}_0$ postoji.*

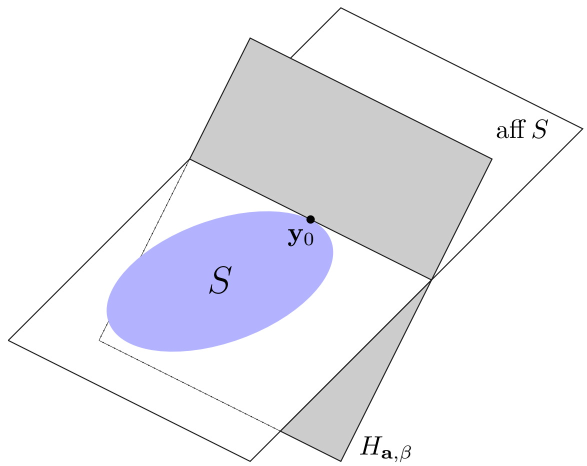
Međutim, ako skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ nije pune afine dimenzije ($\operatorname{affdim} S < n$), onda u svakoj točki iz S postoji potporna hiperravnina na skup S. Zaista, neka su $\mathbf{y}_0 \in S \subseteq \operatorname{aff} S$ i L linearni potprostor paralelan s $\operatorname{aff} S$. Tada je $\operatorname{aff} S = \mathbf{y}_0 + L$. Nadalje, neka je $L^\perp$ ortogonalni komplement od L. Za svaki $\mathbf{a} \in L^\perp$, hiperravnina

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}, \quad \beta := \langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_0 \rangle$$

sadrži cijeli skup $\operatorname{aff} S$, pa prema tome ona sadrži i skup S. Zaista, $\mathbf{a} \in L^\perp \implies \mathbf{a}_L = \mathbf{0}$, pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.4. Tu tvrdnju možemo dokazati i na drugi, vrlo jednostavan način. Zaista, ako je $\mathbf{y} \in \operatorname{aff} S$, onda je $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \in L$ i zato je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \rangle = 0$, tj. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta$. Po definiciji, hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ potporna je hiperravnina skupa S u svakoj njegovoj točki, no takve trivijalne potporne hiperravnine koje sadrže cijeli skup S nisu posebno zanimljive.

4.20. Definicija

Za potpornu hiperravninu $H_{\mathbf{a},\beta}$ skupa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je netrivijalna ako ona ne sadrži cijeli skup S.



Slika 20. $S \subseteq \mathbb{R}^3$, affdim $S = 2$. *Ravnine* aff S *i* $H_{\mathbf{a},\beta}$ *potporne su na skup* S *u točki* $\mathbf{y}_0 \in S$*;* aff S *jest trivijalna, a* $H_{\mathbf{a},\beta}$ *netrivijalna potporna ravnina.*

4.21. Propozicija (Slučaj affdim $S < n$)
Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ *neprazan skup afine dimenzije* affdim $S < n$*, a*

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}$$

potporna hiperravnina skupa S *u točki* $\mathbf{y}_0 \in S$*. Nadalje, neka je* $L = \operatorname{aff} S - \mathbf{y}_0$ *linearni potprostor paralelan s* aff S *te prikažimo vektor* $\mathbf{a}$ *na jedinstven način kao*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_L + \mathbf{a}_{L^\perp}, \qquad \textit{gdje su } \mathbf{a}_L \in L,\ \mathbf{a}_{L^\perp} \in L^\perp.$$

Tada vrijedi:

(i) Potporna hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ *netrivijalna je ako i samo ako je* $\mathbf{a}_L \neq \mathbf{0}$*, tj. ako* $\mathbf{a} \notin L^\perp$*.*

(ii) Ako je $H_{\mathbf{a},\beta}$ *netrivijalna potporna hiperravnina, onda je:*

a) $H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{RelInt}(\operatorname{conv} S) = \emptyset$,

b) $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelBd} S \cap \operatorname{RelBd}(\operatorname{conv} S)$,

c) $\dim(H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{aff} S) = \operatorname{affdim} S - 1$.

Dokaz. *(i)* Ta tvrdnja slijedi iz propozicije 2.4. Zaista, ako je $\mathbf{a}_L \neq \mathbf{0}$, po toj propoziciji $H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{aff} S$ afin je skup čija je dimenzija za jedan manja od dimenzije skupa aff S, tj.

$$\dim(H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{aff} S) = \dim(\operatorname{aff} S) - 1 < n - 1.$$

Zbog toga $H_{\mathbf{a},\beta}$ ne sadrži cijeli aff S, pa je $H_{\mathbf{a},\beta}$ netrivijalna potporna hiperravnina. Ako je $\mathbf{a}_L = \mathbf{0}$, po toj je propoziciji aff $S \subseteq H_{\mathbf{a},\beta}$, pa je $H_{\mathbf{a},\beta}$ trivijalna potporna hiperravnina.

(ii) Bez smanjenja općenitosti, neka je $S \subseteq H^{-}_{\mathbf{a},\beta}$. Tada je i $\operatorname{conv} S \subseteq H^{-}_{\mathbf{a},\beta}$.

a) Tu tvrdnju možemo dokazati sitnim modifikacijama dokaza tvrdnje (i) iz propozicije 4.19. Neka je $\mathbf{y}_1 \in H_{\mathbf{a},\beta}$. Treba pokazati da $\mathbf{y}_1 \notin \operatorname{RelInt}(\operatorname{conv} S)$. Ako $\mathbf{y}_1 \notin \operatorname{aff} S$, onda očito $\mathbf{y}_1 \notin \operatorname{RelInt}(\operatorname{conv} S)$ jer je $\operatorname{RelInt}(\operatorname{conv} S) \subseteq \operatorname{aff} S$. Zato nadalje pretpostavimo da je $\mathbf{y}_1 \in H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{aff} S$ i pokažimo da tada $\mathbf{y}_1 \notin \operatorname{RelInt}(\operatorname{conv} S)$, tj. da ne postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je $B(\mathbf{y}_1, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} S \subseteq \operatorname{conv} S$. Zaista, za svaki $\varepsilon > 0$ je $\mathbf{y}_1 + \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}_L\|}\mathbf{a}_L \in B(\mathbf{y}_1, \varepsilon) \cap \operatorname{aff} S$, a kako je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 \rangle = \beta$ (jer je $\mathbf{y}_1 \in H_{\mathbf{a},\beta}$), vrijedi

$$\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_1 + \tfrac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}_L\|}\mathbf{a}_L \right\rangle = \beta + \tfrac{\varepsilon}{2}\|\mathbf{a}_L\| > \beta.$$

To znači da je $\mathbf{y}_1 + \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}_L\|}\mathbf{a}_L \in H^{+}_{\mathbf{a},\beta} \backslash H_{\mathbf{a},\beta}$. Zato $\mathbf{y}_1 + \frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{a}_L\|}\mathbf{a}_L \notin \operatorname{conv} S$ jer je $\operatorname{conv} S \subseteq H^{-}_{\mathbf{a},\beta}$. Time smo dokazali da $\mathbf{y}_1 \notin \operatorname{RelInt}(\operatorname{conv} S)$.

b) Oponašajte dokaz tvrdnje (ii) iz propozicije 4.19.
c) Po propoziciji 2.4. jest $\dim(H_{\mathbf{a},\beta} \cap \operatorname{aff} S) = \operatorname{affdim} S - 1$. ■

Vratimo se na problem potporne hiperravnine za neprazan, zatvoren i konveksan skup $K \subsetneq \mathbb{R}^n$. Ako je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash K$, prema lemi 4.16. u točki $P_K(\mathbf{x})$ postoji potporna hiperravnina

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\},$$

gdje je

$$\mathbf{a} := \mathbf{x} - P_K(\mathbf{x}), \quad \beta := \langle \mathbf{a}, P_K(\mathbf{x}) \rangle.$$

Ako je $\operatorname{affdim} K = n$, onda je $P_K(\mathbf{x}) \in \operatorname{Bd} K$ i ta potporna hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ nije trivijalna (propozicija 4.19.). Međutim, ako je $\operatorname{affdim} K < n$, onda ta potporna hiperravnina može biti trivijalna; a ako je netrivijalna, onda je $P_K(\mathbf{x}) \in \operatorname{RelBd} K$ (propozicija 4.21.). Budući da trivijalne potporne hiperravnine nisu od nekog interesa, postavlja se sljedeće pitanje:

Postoji li netrivijalna potporna hiperravnina na skup K u točki $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelBd} K$?

Ako je odgovor na postavljeno pitanje afirmativan, onda mora biti $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelBd} K$ (propozicije 4.19. i 4.21.). Potpun odgovor na postavljeno pitanje daje nam sljedeća propozicija.

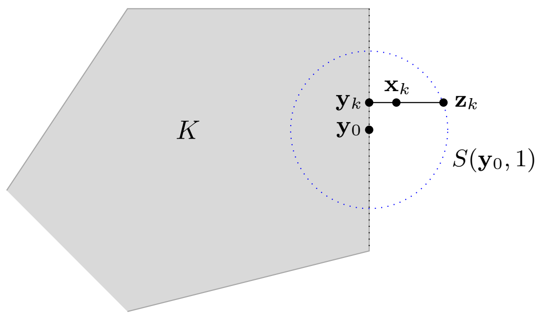
4.22. Propozicija
Zatvoren konveksan skup $K \subsetneq \mathbb{R}^n$ ima netrivijalnu potpornu hiperravninu u svakoj točki sa svoje relativne granice.

Dokaz. Neka je $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelBd} K = K \backslash \operatorname{RelInt} K$. Dovoljno je pokazati da postoji točka $\mathbf{z}_0 \in \operatorname{aff} K \backslash K$ čija je projekcija na skup K jednaka točki $\mathbf{y}_0$, tj. $P_K(\mathbf{z}_0) = \mathbf{y}_0$. Zaista, prema lemi 4.16. tada će

$$H = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0, \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 \rangle = 0\}$$

biti potporna hiperravnina skupa K u točki $\mathbf{y}_0$. Ako je $\operatorname{affdim} K = n$, H jest netrivijalna potporna hiperravnina (propozicija 4.19.). Ako je $\operatorname{affdim} K < n$, budući da su $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \operatorname{aff} K$, normala $\mathbf{z}_0 - \mathbf{y}_0$ hiperravnine H jest iz linearnog potprostora paralelnog s $\operatorname{aff} K$, pa iz propozicije 4.21. slijedi da je H netrivijalna potporna hiperravnina.

Preostaje pokazati da postoji točka $\mathbf{z}_0 \in \operatorname{aff} K \backslash K$ takva da je $P_K(\mathbf{z}_0) = \mathbf{y}_0$. Kako je $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelBd} K = \operatorname{RelBd}(\operatorname{aff} K \backslash K)$, postoji niz točaka $\mathbf{x}_k \in \operatorname{aff} K \backslash K$ koji konvergira prema $\mathbf{y}_0$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{y}_0, 1)$. Neka je $\mathbf{y}_k = P_K(\mathbf{x}_k)$. Označimo sa $S(\mathbf{y}_0, 1)$ jediničnu sferu s centrom u točki $\mathbf{y}_0$. Svakoj točki $\mathbf{x}_k$ možemo pridružiti jedinstvenu točku $\mathbf{z}_k \in S(\mathbf{y}_0, 1) \cap \operatorname{aff} K$, ali tako da bude $\mathbf{x}_k \in (\mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k)$ (slika 21).



Slika 21.

Prema korolaru 4.7. jest $P_K(\mathbf{z}_k) = \mathbf{y}_k$. Nadalje, iskoristimo li svojstvo neekspanzivnosti projektora P_K, dobivamo

$$\|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_0\| = \|P_K(\mathbf{x}_k) - P_K(\mathbf{y}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_0\|,$$

odakle zbog $\mathbf{x}_k \to \mathbf{y}_0$ slijedi $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}_0$, tj. $P_K(\mathbf{z}_k) \to \mathbf{y}_0$. Zbog kompaktnosti jedinične sfere $S(\mathbf{y}_0, 1)$ niz $(\mathbf{z}_k)$ ima konvergentan podniz $(\mathbf{z}_{u_k})$ koji konvergira nekoj točki $\mathbf{z}_0 \in S(\mathbf{y}_0, 1) \cap \operatorname{aff} K$. Iskoristimo li neprekidnost (Heineova definicija!) projektora P_K, dobivamo

$$P_K(\mathbf{z}_0) = \lim_{k\to\infty} P_K(\mathbf{z}_{u_k}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_{u_k} = \mathbf{y}_0.$$

Nadalje, kako je $P_K(\mathbf{z}_0) = \mathbf{y}_0 \neq \mathbf{z}_0$, točka $\mathbf{z}_0$ ne pripada skupu K (primjedba 4.3.); dakle $\mathbf{z}_0 \in \operatorname{aff} K \backslash K$. ■

4.23. KOROLAR

Neka je $K = \operatorname{conv} S$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Svaka točka $\mathbf{x} \in K \cap \operatorname{RelBd} K$ može se prikazati kao konveksna kombinacija od najviše affdim S *točaka iz S.*

Dokaz. Prema Carathéodoryjevom teoremu točka $\mathbf{x}$ može se prikazati kao konveksna kombinacija od najviše affdim $S+1$ točaka iz skupa S. Neka je

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\operatorname{affdim} S+1} \lambda_i \mathbf{x}_i, \qquad \sum_{i=1}^{\operatorname{affdim} S+1} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0.$$

Ako je neki λ_i jednak nuli, dokaz je gotov. Zato nadalje pretpostavimo da su svi λ_i strogo pozitivni. Kako je skup $\operatorname{Cl} K$ zatvoren i konveksan, prema propoziciji 4.22. postoji netrivijalna potporna hiperravnina

$$H_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \beta\}$$

skupa $\operatorname{Cl} K$ u točki $\mathbf{x}$. Bez smanjenja općenitosti, neka je

$$\operatorname{Cl} K \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \leq \beta\}.$$

Tada je

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle \leq \beta, \quad i = 1, \ldots, \operatorname{affdim} S + 1,$$

a budući da je

$$\beta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{\operatorname{affdim} S+1} \lambda_i \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle, \qquad \sum_{i=1}^{\operatorname{affdim} S+1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i > 0,$$

lako je zaključiti da mora biti

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle = \beta, \quad i = 1, \ldots, \operatorname{affdim} S + 1.$$

Dakle, točke $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, \operatorname{affdim} S + 1$, osim u skupu S leže i u hiperravnini $H_{\mathbf{a},\beta}$. Zato sve one leže i u skupu $\operatorname{aff} S \cap H_{\mathbf{a},\beta}$. Uočimo da je $\dim(\operatorname{aff} S \cap H_{\mathbf{a},\beta}) = \operatorname{affdim} S - 1$. Zaista, tvrdnja očito vrijedi ako je $\operatorname{affdim} S = n$ (ekvivalentno, $\operatorname{aff} S = \mathbb{R}^n$), a ako je $\operatorname{affdim} S < n$, po propoziciji 4.21. jest $\dim(\operatorname{aff} S \cap H_{\mathbf{a},\beta}) = \operatorname{affdim} S - 1$. Primjenimo li ponovo Carathéodoryjev teorem, ali sada na afin skup $\operatorname{aff} S \cap H_{\mathbf{a},\beta}$, zaključujemo da se $\mathbf{x}$ može prikazati kao konveksna kombinacija od najviše $\operatorname{affdim} S$ točaka iz skupa S. ■

4.4. Teoremi o separaciji konveksnih skupova

Teoremi o separaciji (razdvajanju) konveksnih skupova imaju važnu ulogu u konveksnoj analizi i optimizaciji.

4.24. Definicija

Neka su $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ skupovi i $H_{\mathbf{a},\beta}$ afina hiperravnina.

Kažemo da skup S **leži** s jedne strane hiperravnine $H_{\mathbf{a},\beta}$ ako je $S \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}$ ili $S \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta}$.

Ako je $S \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta} \backslash H_{\mathbf{a},\beta} = \operatorname{Int} H^-_{\mathbf{a},\beta}$ ili $S \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta} \backslash H_{\mathbf{a},\beta} = \operatorname{Int} H^+_{\mathbf{a},\beta}$, kažemo da skup S **strogo leži** s jedne strane hiperravnine $H_{\mathbf{a},\beta}$.

Kažemo da hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ **separira** ili **slabo separira** skupove S i T ako oni leže s različitih strana te hiperravnine. Za tu separaciju kažemo da je **prava** ili **netrivijalna** ako $S \cup T$ nije sadržano u $H_{\mathbf{a},\beta}$.

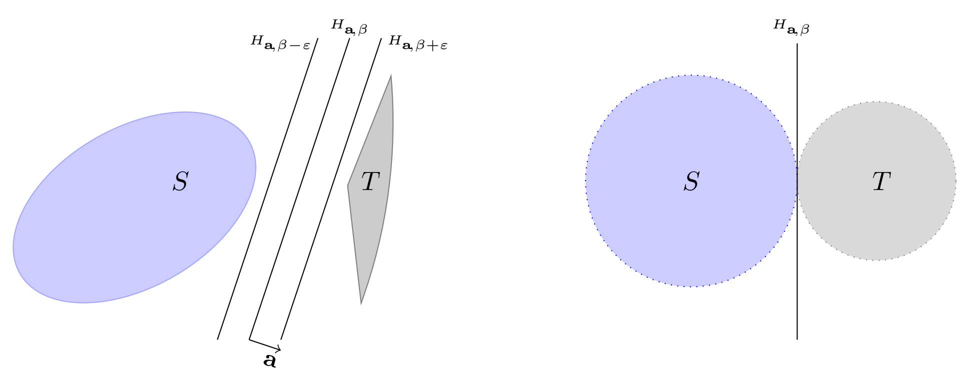
Hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ **strogo separira** skupove S i T ako oni strogo leže s različitih strana te hiperravnine.

Hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ **jako separira** skupove S i T ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da obje hiperravnine $H_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$ i $H_{\mathbf{a},\beta+\varepsilon}$ separiraju skupove S i T.

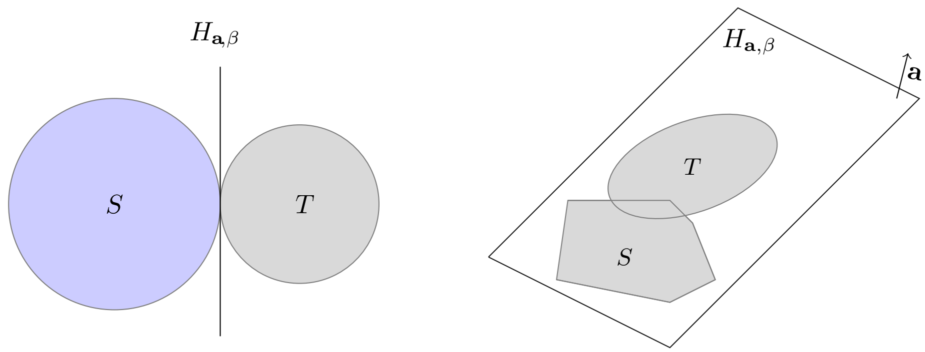
Lako je provjeriti da vrijede implikacije:

$$\boxed{\text{jaka sep.} \implies \text{stroga sep.} \implies \text{prava sep.} \implies \text{slaba sep.}} \tag{4.7}$$

Navedeni tipovi separacije ilustrirani su na sljedećoj slici.



a) Jaka separacija *b) Stroga separacija; nije moguća jaka*



c) Prava separacija; nije moguća stroga *d) Separacija (slaba); nije moguća prava*

Slika 22. *Razni tipovi separacije.*

4.25. Primjedba
Može se pokazati (vidi zadatak 6 na str. 113) da se navedeni tipovi separacije mogu iskazati na sljedeći ekvivalentan način:

- Slaba separacija: Postoji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je
$$\sup_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle \leq \inf_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle.$$
- Prava separacija: Postoji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je
$$\sup_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle \leq \inf_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle \quad \& \quad \inf_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle < \sup_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle.$$
- Stroga separacija: Postoje $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ takvi da je
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle < \beta < \langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle \quad \text{za sve } \mathbf{s} \in S \text{ i } \mathbf{t} \in T.$$
- Jaka separacija: Postoji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je
$$\sup_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle < \inf_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle.$$

4.26. Teorem (Separacija točke i konveksnog skupa)
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup, a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash K$. Tada vrijedi:

(i) Postoji hiperravnina koja na pravi način (netrivijalno) separira skup K i točku $\mathbf{x}$.

(ii) Ako je K zatvoren skup, onda se skup K i točka $\mathbf{x}$ mogu jako separirati.

Dokaz. Za dokaz ovih tvrdnje iskoristit ćemo lemu 4.16., primjedbu 4.17. i propoziciju 4.22.

(ii) Dokaz te tvrdnje napravljen je u primjedbi 4.17.

(i) Ako $\mathbf{x} \notin \operatorname{Cl} K$, onda prema *(ii)* postoji hiperravnina koja jako separira $\operatorname{Cl} K$ i točku $\mathbf{x}$, a jaka separacija povlači pravu separaciju. Ako je $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$, onda je $\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K = \operatorname{Cl} K \setminus \operatorname{RelInt} K$, pa tvrdnja slijedi iz propozicije 4.22. ■

Mi smo već dokazali Farkasevu lemu (teorem 1.40.) koristeći Weylov teorem 1.35. Sljedeći se ekvivalentan iskaz i dokaz Farkaseve leme najčešće može naći u literaturi.

4.27. KOROLAR (FARKASEVA LEMA)
Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor. Tada samo jedan od sljedećih dvaju sustava ima rješenje:

$$(a) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{4.8}$$

$$(b) \quad \mathbf{y}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0. \tag{4.9}$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da ne mogu oba sustava imati rješenje, a zatim ćemo pokazati da drugi sustav ima rješenje ako prvi nema. Kad bi oba sustava imala rješenje, tj. kad bi postojali vektori $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ takvi da vrijede nejednakosti (4.8) i (4.9), onda bi bilo $0 \leq (\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$. Time smo pokazali da ne mogu oba sustava imati rješenje.

Pretpostavimo da prvi sustav nema rješenje, tj. da $\mathbf{b} \notin \operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, gdje je $\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ konus generiran stupacima $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ matrice $\mathbf{A}$. Uočite da je

$$\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{A}\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Konus $\operatorname{cone}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ konveksan je i zatvoren skup (korolar 2.33.), pa ga prema teoremu 4.26. možemo jako separirati od točke $\mathbf{b}$, tj. postoji vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ takav da je

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle < \inf_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle. \tag{4.10}$$

Specijalno, za $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dobivamo $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle < 0$. Preostaje pokazati da je $\mathbf{y}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$, tj. da je $\mathbf{y}^T\mathbf{a}_i \geq \mathbf{0}$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Zaista, za svaki $\lambda > 0$ jest $\lambda\mathbf{e}_i \geq \mathbf{0}$, pa iz (4.10) dobivamo

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} < \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}(\lambda\mathbf{e}_i) \rangle = \langle \mathbf{y}, \lambda\mathbf{a}_i \rangle = \lambda\mathbf{y}^T\mathbf{a}_i,$$

a kako je $\mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$, mora biti $\mathbf{y}^T\mathbf{a}_i \geq \mathbf{0}$. ■

Sljedeća lema govori nam da se problem slabe separacije [jake separacije, netrivijalne separcije] dvaju skupova reducira na problem slabe separacije [jake separacije, netrivijalne] skupa i točke.

4.28. LEMA
Neprazne skupove S i T iz $\mathbb{R}^n$ možemo slabo [jako, na pravi način] separirati onda i samo onda ako možemo slabo [jako, na pravi način] separirati skupove $\{\mathbf{0}\}$ i $S - T$.

Dokaz. Promotrimo samo slučaj jake separacije; slično se tretiraju preostala dva tipa separacije. Prvo pretpostavimo da skupove S i T možemo jako separirati. Tada postoji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je (vidi primjedbu 4.25.)

$$\sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle < \inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle.$$

Zato za sve $\mathbf{s} \in S$ i $\mathbf{t} \in T$ vrijedi

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle \leq \sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle < \inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle,$$

odakle slijedi da su $\sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle$ i $\inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle$ konačni brojevi. Neka je $\mathbf{x} \in S - T$ oblika $\mathbf{x} = \mathbf{s} - \mathbf{t}$, gdje su $\mathbf{s} \in S$ i $\mathbf{t} \in T$. Tada je

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle \leq \sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle - \inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle < 0,$$

odakle slijedi

$$\sup_{\mathbf{x}\in S-T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle < 0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle,$$

a to znači (opet primjedba 4.25.!) da skupove $S - T$ i $\{\mathbf{0}\}$ možemo jako separirti.

Pretpostavimo sada da se skupovi $S - T$ i $\{\mathbf{0}\}$ mogu jako separirati, tj. da postoji $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je

$$\sup_{\mathbf{x}\in S-T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle < 0.$$

Tada za sve $\mathbf{s} \in S$ i $\mathbf{t} \in T$ vrijedi

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle \leq \sup_{\mathbf{x}\in S-T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle < 0,$$

odakle se lako dobiva da su $\sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle$ i $\inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle$ konačni brojevi te da je

$$\sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle \leq \inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle + \sup_{\mathbf{x}\in S-T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle.$$

Zato je

$$\sup_{\mathbf{s}\in S} \langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle < \inf_{\mathbf{t}\in T} \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle,$$

što nam govori da se skupovi S i T mogu jako separirati. ■

Sada ćemo dokazati teorem Minkowskog o separaciji konveksnih skupova.

4.29. Teorem (Minkowski)
Neka su K_1 i K_2 neprazni konveksni skupovi u $\mathbb{R}^n$ (ne nužno zatvoreni) takvi da je $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Tada K_1 i K_2 možemo separirati. Nadalje, ako su K_1 i K_2 zatvoreni skupovi te ako je barem jedan od njih omeđen, onda ih možemo jako separirati.

Dokaz. Razlika $K_1 - K_2$ konveksnih skupova K_1 i K_2 konveksan je skup. Nadalje, uočite da vrijedi

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset \Longleftrightarrow \mathbf{0} \notin K_1 - K_2.$$

Tvrdnja da skupove K_1 i K_2 možemo separirati slijedi iz teorema 4.26. i leme 4.28.

Preostaje dokazati tvrdnju o jakoj separaciji. U tu svrhu, opet prema lemi 4.28. i teoremu 4.26., dovoljno je pokazati da je uz navedene pretpostavke razlika $K_1 - K_2$ zatvoren skup. Pretpostavimo da je K_1 zatvoren, a K_2 kompaktan (zatvoren i omeđen) skup i pokažimo da je tada razlika $K_1 - K_2$ također zatvoren skup. Za dokaz te tvrdnje iskoristit ćemo dobro poznatu činjenicu da je u metričkom prostoru neki skup S zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova iz S. Neka je $(\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k)$, gdje je $\mathbf{a}_k \in K_1$, $\mathbf{b}_k \in K_2$, konvergentan niz iz skupa $K_1 - K_2$. Treba pokazati da limes niza $(\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k)$ pripada skupu $K_1 - K_2$. Kao prvo, zbog kompaktnosti skupa K_2 niz $(\mathbf{b}_k)$ ima konvergentan podniz $(\mathbf{b}_{u_k})$ koji konvergira nekoj točki $\mathbf{b}_0 \in K_2$. Shvatimo li podniz $(\mathbf{a}_{u_k})$ kao zbroj konvergentnih podnizova $(\mathbf{a}_{u_k} - \mathbf{b}_{u_k})$ i $(\mathbf{b}_{u_k})$, slijedi da je $(\mathbf{a}_{u_k})$ konvergentan niz. Neka $\mathbf{a}_{u_k} \to \mathbf{a}_0$. Zbog zatvorenosti skupa K_1 je $\mathbf{a}_0 \in K_1$. Dakle, $\mathbf{a}_{u_k} - \mathbf{b}_{u_k} \to \mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0 \in K_1 - K_2$. Kako svaki podniz konvergentnog niza konvergira prema istoj točki kao i niz, slijedi da $\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k \to \mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0 \in K_1 - K_2$. ■

Pod određenim uvjetima konveksne skupove moguće je separirati čak i ako nisu disjunktni. O tome nam govori sljedeći teorem.

4.30. TEOREM (PRAVA SEPARACIJA KONVEKSNIH SKUPOVA)
Neka su $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni konveksni skupovi. Prava separacija skupova K_1 i K_2 postoji ako i samo ako je

$$\operatorname{RelInt} K_1 \cap \operatorname{RelInt} K_2 = \emptyset.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{RelInt} K_1 \cap \operatorname{RelInt} K_2 = \emptyset$. Prema korolaru 2.26. skupovi $\operatorname{RelInt} K_1$ i $\operatorname{RelInt} K_2$ jesu konveksni. Neka je $C := \operatorname{RelInt} K_1 - \operatorname{RelInt} K_2$. Tada $\mathbf{0} \notin C$ i C jest konveksan skup, pa prema teoremu 4.26. postoji prava separacija skupa C i točke $\mathbf{0}$. Iz leme 4.28. slijedi prava separacija skupova $\operatorname{RelInt} K_1$ i $\operatorname{RelInt} K_2$, tj. postoji hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ takva da je

$$\operatorname{RelInt} K_1 \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}, \quad \operatorname{RelInt} K_2 \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta}, \quad \operatorname{RelInt} K_1 \cup \operatorname{RelInt} K_2 \nsubseteq H_{\mathbf{a},\beta}.$$

Pomoću korolara 2.27. sada jest lako pokazati da hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ na pravi način separira skupove K_1 i K_2, tj. da vrijedi

$$K_1 \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}, \quad K_2 \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta}, \quad K_1 \cup K_2 \nsubseteq H_{\mathbf{a},\beta}.$$

Obratno, neka hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ na pravi način separira skupove K_1 i K_2. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $K_1 \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}$, a $K_2 \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta}$. Treba pokazati da je $\operatorname{RelInt} K_1 \cap \operatorname{RelInt} K_2 = \emptyset$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom pa zato pretpostavimo da je $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelInt} K_1 \cap \operatorname{RelInt} K_2$. Tada je $\mathbf{y}_0 \in H^-_{\mathbf{a},\beta} \cap H^+_{\mathbf{a},\beta} = H_{\mathbf{a},\beta}$, pa je $H_{\mathbf{a},\beta}$ potporna hiperravnina (u točki $\mathbf{y}_0$) skupova K_1 i K_2.

Zbog prave separacije barem jedan od skupova K_1 i K_2 nije cijeli sadržan u $H_{\mathbf{a},\beta}$. Pretpostavimo da K_1 nije sadržan u $H_{\mathbf{a},\beta}$. Tada je $H_{\mathbf{a},\beta}$ netrivijalna potporna hiperravnina na skup K_1 u točki $\mathbf{y}_0$ i zbog toga je $\mathbf{y}_0 \in \operatorname{RelBd} K_1 = \operatorname{Cl} K_1 \setminus \operatorname{RelInt} K_1$ (vidi propoziciju 4.19. i propoziciju 4.21.), što je kontradikcija. ■

Zadaci za vježbu

1. Neka je X realan vektorski prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dokažite da norma $\| \cdot \|$ inducirana tim skalarnim produktom zadovoljava tzv. jednakost paralelograma
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\big)$$
i tzv. polarizacijsku formulu
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tfrac{1}{4}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2).$$

   Uputa:
$$\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} \pm \mathbf{v}, \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \pm 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2.$$
   Zbrajanjem i oduzimanjem dviju jednadžbi koje se kriju u gornjoj relaciji, dobivamo jednakost paralelograma i polarizacijsku formulu.

2. Pokažite da svaka potporna hiperravnina na konus C sadrži $\mathbf{0}$.

   Uputa: Neka je $H_{\mathbf{a},\beta}$ potporna hiperravnina na konus C u točki $\mathbf{x}_0 \in C$. Tada je $\beta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle$. Pretpostavimo da je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \le \beta$ za svaki $\mathbf{x} \in C$. Za svaki $\lambda \ge 0$ vrijedi $\lambda\beta = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{x}_0 \rangle \le \beta$, tj. $(\lambda - 1)\beta \le 0$, odakle slijedi da je $\beta = 0$.

3. (Vanjski opis zatvorenog konveksnog konusa) Za poluprostor kažemo da je homogen ako njegova granica sadrži točku $\mathbf{0}$. Dokažite da se svaki zatvoren i konveksnan konus C može prikazati kao presjek svih homogenih zatvorenih poluprostora koji sadrže C.

   Uputa: Iskoristite 2. zadatak i oponašajte dokaz teorema 4.18.

4. Neka je C vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$, a $C^\perp$ njegov ortogonalni komplement. Provjerite da je dualni konus C° jednak ortogonalnom komplementu $C^\perp$.

5. Neka su C_1 i C_2 konusi. Dokažite: (a) $(C_1 \times C_2)^\circ = C_1^\circ \times C_2^\circ$. (b) $(C_1 + C_2)^\circ = C_1^\circ \cap C_2^\circ$.

6. Dokažite tvrdnje iz primjedbe 4.25.

   Uputa za slabu i pravu separaciju: Prvo pretpostavimo da su skupovi S i T slabo separirani. Tada postoji hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ takva da je
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{s} \rangle \le \beta \le \langle \mathbf{a}, \mathbf{t} \rangle, \qquad \text{za sve } \mathbf{s} \in S \text{ i } \mathbf{t} \in T, \tag{4.11}$$

odakle slijedi

$$\sup_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle \leq \inf_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle. \tag{4.12}$$

Osim toga, ako se radi o pravoj separaciji, onda još postoji $\mathbf{s}_0 \in S$ takav da je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}_0\rangle < \beta$ ili postoji $\mathbf{t}_0 \in T$ takav da je $\beta < \langle \mathbf{a}, \mathbf{t}_0\rangle$ i zato je

$$\inf_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle < \sup_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle. \tag{4.13}$$

Obratno, ako je (4.12), onda za sve $\mathbf{s} \in S$ i $\mathbf{t} \in T$ vrijedi

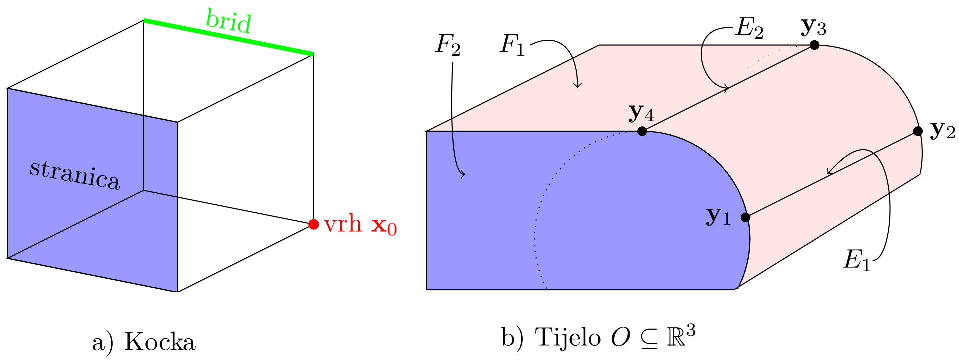
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle \leq \sup_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle \leq \inf_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle.$$

Uzmemo li za β bilo koji broj između $\sup_{\mathbf{s}\in S}\langle \mathbf{a}, \mathbf{s}\rangle$ i $\inf_{\mathbf{t}\in T}\langle \mathbf{a}, \mathbf{t}\rangle$, hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ separirat će skupove S i T. Ako osim (4.12) vrijedi i (4.13), imat ćemo pravu separaciju.

5. Reprezentacija konveksnih skupova

5.1. Ekstremalne točke i stranice konveksnog skupa

Postavlja se pitanje kako definirati vrhove, bridove i stranice konveksnog skupa $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Prije nego što damo formalnu definiciju, pogledajmo kocku i tijelo O sa slike 23.



Slika 23. Kocka i tijelo O.

Stranice, bridovi i vrhovi kocke konveksni su podskupovi koji se mogu dobiti kao presjek kocke i potporne hiperravine. Kazat ćemo da je stranica (odnosno brid ili vrh) izložena s tom hiperravninom. Precizniju definiciju izloženosti nekog skupa hiperravniom navest ćemo malo kasnije.

Lako je provjeriti da stranice, bridovi i vrhovi kocke imaju sljedeće zajedničko svojstvo:

Neka je F stranica, brid ili vrh kocke. Ni jedna točka $\mathbf{z} \in F$ ne može se prikazati kao netrivijalna konveksna kombinacija $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ dviju različitih točaka $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ iz kocke, osim eventualno ako su obje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ iz F (zbog konveksnosti skupa F tada je i cijeli segment $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ sadržan u F).

Pri tome konveksnu kombinaciju $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ smatramo **netrivijalnom** ako je $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ i $0 < \lambda < 1$, tj. ako je $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ i $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Drugim riječima, F jest konveksan podskup od kocke koji je ekstremalan u smislu sljedeće definicije:

5.1. DEFINICIJA

Neka je S bilo kakav podskup od $\mathbb{R}^n$.

Za podskup F od S kažemo da je **ekstremalan skup skupa** S ako ima svojstvo

$$(\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2) \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F.$$

Svaki skup S ima dva trivijalna ekstremalna podskupa: cijeli skup S i prazan skup. Po definiciji je prazan skup ekstremalan jer ne postoje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ takve da je $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ i $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Dakle, u skladu s navedenim definicijama, vrhovi, bridovi i stranice kocke i extremalni su i izloženi skupovi.

Promotrimo sada tijelo O sa slike 23. Istaknute plohe F_1, F_2, dužine E_1, E_2 i točke $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_4$ konveksni su podskupovi od O. Svaki je od tih podskupova i ekstremalan. Plohe F_1 i F_2 jesu izložene. Dužina E_1 jest izložena, dok dužina E_2 nije. Točke $\mathbf{y}_1$ i $\mathbf{y}_2$ jesu izložene, a $\mathbf{y}_3$ i $\mathbf{y}_4$ nisu.

5.2. Definicija

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup.

Ekstremalna ili **ekstremna stranica** konveksnog skupa K jest svaki njegov ekstremalni konveksan podskup. Drugim riječima, konveksan podskup F od K ekstremalna je stranica ako vrijedi:

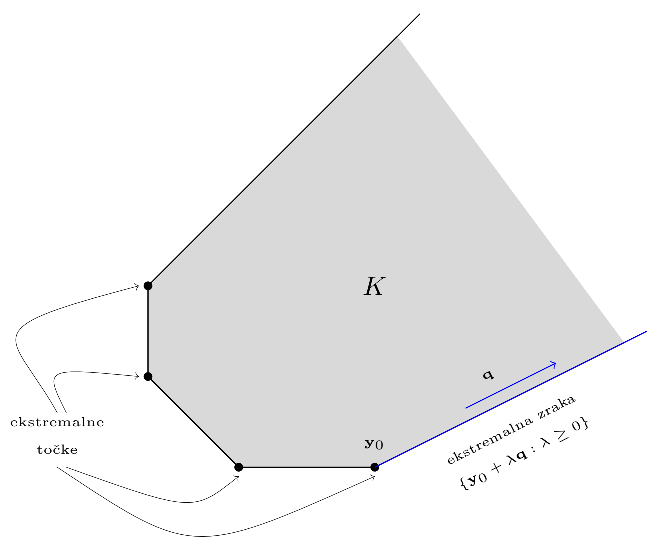
$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2) \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F. \tag{5.1}$$

Pod dimenzijom ekstremalne stranice F podrazumijevamo njezinu afinu dimenziju $\operatorname{affdim} F$.

Točka $\mathbf{x}_0 \in K$ **ekstremalna** je ili **ekstremna točka** skupa K ako je jednočlani skup $\{\mathbf{x}_0\}$ njegova ekstremalna stranica. Skup svih ekstremalnih točaka skupa K označavamo s $\operatorname{ext} K$.

Ako je zraka $\{\mathbf{y}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$ ekstremalna stranica od K, zovemo je **ekstremalna zraka**. Njezin vektor smjera $\mathbf{q}$ zovemo **ekstremalni smjer**. Skup svih ekstremalnih zraka skupa K označavamo s $\operatorname{exthl} K$.

Svaki konveksan skup K ima dvije **trivijalne** ekstremalne stranice: prazan skup i cijeli skup K. Preostale ekstremalne stranice zovemo **pravim**. Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup afine dimenzije $\operatorname{affdim} K = r$, njegove $(r-1)$-dimenzionalne stranice zovemo **facetama**.



Slika 24. *Ekstremalne točke i ekstremalna zraka.*

5.3. PRIMJEDBA
Uočimo:

a) Zbog konveksnosti skupa F iz definicije 5.2. svojstvo (5.1) ekvivalentno je svojstvu

$$(\forall\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K, \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2) \quad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq F. \tag{5.2}$$

Drugim riječima, ekstremalna stranica konveksnog skupa K svaki je njegov konveksan podskup F sa svojstvom da sadrži svaki segment $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ iz K čiji relativni interior $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ siječe F.

b) Konveksan podskup F od K ekstremalna je stranica onda i samo onda ako se ni jedna njegova točka $\mathbf{z} \in F$ ne može prikazati kao netrivijalna konveksna kombinacija $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ dviju različitih točaka $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, osim eventualno ako su obje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ iz F (zbog konveksnosti skupa F tada je i cijeli segment $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ sadržan u F).

Specijalno, $\mathbf{x}_0 \in K$ ekstremalna je točka konveksnog skupa K onda i samo onda ako se $\mathbf{x}_0$ ne može prikazati kao netrivijalna konveksna kombinacija točaka iz K, a to je onda i samo onda ako ne postoje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, takve da je $\mathbf{x}_0 \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Nakon tih opažanja lako je dokazati sljedeću propoziciju.

5.4. PROPOZICIJA
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Točka $\mathbf{x}_0 \in K$ ekstremalna je točka skupa K onda i samo onda ako je skup $K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$ konveksan.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $\mathbf{x}_0 \in K$ ekstremalna točka skupa K. Neka su $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ bilo koje dvije različite točke iz $K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$. Treba pokazati da je $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \subseteq K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$. Svaka točka $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ može se zapisati kao

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \qquad \text{gdje je } \lambda \in (0,1).$$

Kako je $\mathbf{x}_0$ ekstremalna točka, slijedi $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}_0$, tj. $\mathbf{z} \in K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$.

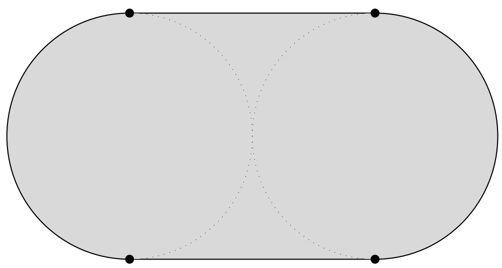
Obratno, zbog konveksnosti skupa $K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$ ne postoje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, takve da je $\mathbf{x}_0 \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. ■

Lako je dokazati sljedeću propoziciju.

5.5. PROPOZICIJA
Presjek svake familije ekstremalnih stranica jest ekstremalna stranica.

5.6. DEFINICIJA
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Za skup $E \subseteq K$ kažemo da je izložena stranica od K ako je $E = \emptyset$, $E = K$ ili ako postoji potporna hiperravnina H skupa K takva da je $E = H \cap K$.

Ekstremalna stranica ne mora biti izložena. Zaista, pogledajmo slike 23.b) i 25. Na slici 23.b) dužina E_2 ekstremalna je stranica koja nije izložena. Na slici 25. sve točke zatvorenih polukružnica ekstremalne su točke, ali ekstremalne točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ i $\mathbf{x}_4$ nisu izložene.



Slika 25. *Lik K unija je pravokutnika i dva polukruga.*

Međutim, svaka je izložena stranica i ektremalna, kao što nam govori sljedeća propozicija; dakle, pojam ekstremalne stranice širi je od pojma izložene stranice.

5.7. PROPOZICIJA

Vrijedi:

(a) Svaka je izložena stranica konveksnog skupa i ekstremalna stranica.

(b) Presjek svake familije izloženih stranica jest izložena stranica.

Dokaz. *(a)* Neka je K konveksan skup, $H_{\mathbf{a},\beta}$ potporna hiperravnina od K i $F = K \cap H_{\mathbf{a},\beta}$ izložena stanica od K. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq \beta, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in K.$$

Očito je F konveksan podskup od K. Pokažimo da je F ekstremalna stranica skupa K, tj. da ima svojstvo (5.1). Neka su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ bilo koje dvije različite točke. Tada je

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_1 \rangle \leq \beta \quad \text{i} \quad \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 \rangle \leq \beta. \tag{5.3}$$

Pretpostavimo da je $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$, tj. da postoji $\lambda \in (0,1)$ takav da je

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in F = K \cap H_{\mathbf{a},\beta}.$$

Tada je $\langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \rangle = \beta$, odnosno

$$\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_1 \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 \rangle = \beta.$$

Zbog (5.3) tada mora biti $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_1 \rangle = \beta$ i $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_2 \rangle = \beta$, tj. tada su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H_{\mathbf{a},\beta}$.

(b) Neka je $\mathcal{E} = \{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ familija izloženih stranica E_λ konveksnog skupa $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Treba pokazati da je

$$E := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$$

izložena stranica. Ako je $E = \emptyset$, nema se što dokazivati. Zato nadalje pretpostavimo da je $E \neq \emptyset$. Neka je $\mathbf{x}_0 \in E$. Za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoje vektor $\mathbf{a}_\lambda \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ i skalar β_λ takvi da je $E_\lambda = K \cap H_{\mathbf{a}_\lambda, \beta_\lambda}$ i $K \subseteq H^-_{\mathbf{a}_\lambda, \beta_\lambda}$. Neka je r maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u skupu $\{(\mathbf{a}_\lambda^T, \beta_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Možemo pretpostaviti da su $(\mathbf{a}_1^T, \beta_1), \ldots, \ldots, (\mathbf{a}_r^T, \beta_r)$ linearno nezavisni vektori. Tada je $E = \bigcap_{i=1}^r E_i$. Neka je

$$\mathbf{a} := \sum_{i=1}^r \mathbf{a}_i, \quad \beta := \sum_{i=1}^r \beta_i.$$

Tada je $K \subseteq H^-_{\mathbf{a},\beta}$ i $\mathbf{x}_0 \in K \cap H_{\mathbf{a},\beta}$, što nam govori da je $H_{\mathbf{a},\beta}$ potporna hiperravnina skupa K. Pokažemo li da je

$$E = K \cap H_{\mathbf{a},\beta},$$

dokaz će biti gotov. Ako je $\mathbf{x} \in E$, onda je $\mathbf{x} \in K$ i $\langle \mathbf{a}_\lambda, \mathbf{x} \rangle = \beta_\lambda$ za svaki $\lambda \in \Lambda$, odakle slijedi $\mathbf{x} \in K \cap H_{\mathbf{a},\beta}$. Time smo dokazali inkluziju $E \subseteq K \cap H_{\mathbf{a},\beta}$. Ako je $\mathbf{y} \in K \backslash E$, onda je $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y} \rangle < \beta_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, r\}$, što povlači $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle < \beta$ i zato $\mathbf{y} \notin H_{\mathbf{a},\beta}$. Time smo dokazali obratnu inkluziju $K \cap H_{\mathbf{a},\beta} \subseteq E$. ■

Da obrat tvrdnje *(a)* iz prethodne propozicije općenito ne vrijedi, tj. da ekstremalna stranica ne mora biti izložena, već smo vidjeli na primjeru tijela O sa slike 23 (dužina E_2 ekstremalna je stranica koja nije izloživa). Ipak, svaka ekstremalna stranica konveksnog skupa K jednaka je presjeku skupa K s jednom ili više hiperravnina. O tome nam govori sljedeći teorem.

5.8. TEOREM

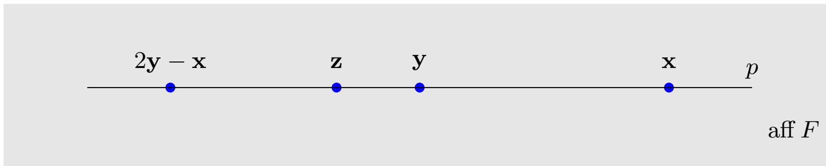
Neka je K konveksan skup iz $\mathbb{R}^n$, a F njegov konveksan podskup. Skup F ekstremalna je stranica od K ako i samo ako je $K \backslash F$ konveksan skup i

$$F = K \cap \operatorname{aff} F. \tag{5.4}$$

Specijalno, točka $\mathbf{x}_0 \in K$ ekstremalna je točka skupa K ako i samo ako je $K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$ konveksan skup.

Dokaz. Pretpostavimo da je F ekstremalna stranica od K. Prvo ćemo pokazati da je $K \backslash F$ konveksan skup. Kad skup $K \backslash F$ ne bi bio konveksan, postojale bi točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K \backslash F$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, takve da je $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$. Budući da je F ekstremalna stranica od K, slijedilo bi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$, što bi bila kontradikcija. Time smo pokazali konveksnost skupa $K \backslash F$. Sad ćemo dokazati jednakost (5.4). Očigledno je $F \subseteq K \cap \operatorname{aff} F$. Za dokaz obratne inkluzije $K \cap \operatorname{aff} F \subseteq F$ pretpostavimo da je $\mathbf{x} \in K \cap \operatorname{aff} F$. Odaberimo bilo koju točku $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} F$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Neka je p afini pravac određen točkama $\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}$ (slika 26). Jasno, $p \subseteq \operatorname{aff} F$ jer su $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \operatorname{aff} F$. Točka $2\mathbf{y} - \mathbf{x}$ leži na pravcu p, a točka $\mathbf{y}$ jest između $2\mathbf{y} - \mathbf{x}$ i $\mathbf{x}$. Kako je skup F konveksan,

$2\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \operatorname{aff} F$ i $\mathbf{y} \in \operatorname{RelInt} F$, po propoziciji 2.25. postoji točka $\mathbf{z} \in (2\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{y})$ takva da je $[\mathbf{z}, \mathbf{y}] \subseteq F$. Uočimo da je $\mathbf{y} \in (\mathbf{z}, \mathbf{x})$. Kako su $\mathbf{z}, \mathbf{x} \in K$ te kako je F ekstremalna stranica, slijedi $[\mathbf{z}, \mathbf{x}] \subseteq F$. Time smo pokazali da je $\mathbf{x} \in F$.



Slika 26.

Obratno, pretpostavimo da je $K \backslash F$ konveksan skup i $F = K \cap \operatorname{aff} F$. Pokažimo da je F ekstremalna stranica od K. U tu svrhu, neka su točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ takve da je $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ i $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$. Treba pokazati da je $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$. Zbog $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$ i konveksnosti skupa $K \backslash F$ barem jedna od točaka $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ mora pripadati skupu F. Neka je $\mathbf{x}_1 \in F$. Iz $\mathbf{x}_1 \in F$ i $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$ slijedi $\mathbf{x}_2 \in \operatorname{aff} F$. Zato je $\mathbf{x}_2 \in K \cap \operatorname{aff} F = F$. Dakle, obje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ leže u skupu F. ■

5.9. KOROLAR

Ako je $K = \operatorname{conv} E$, gdje je $E \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan skup, onda svaka ekstremalna točka skupa K leži u E, tj.

$$\operatorname{ext} K \subseteq E.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da ekstremalna točka $\mathbf{x}_0$ skupa $K = \operatorname{conv} E$ ne leži u E. Tada je $E \subseteq K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$, odakle bi zbog konveksnosti skupa $K \backslash \{\mathbf{x}_0\}$ (teorem 5.8.) slijedilo

$$K = \operatorname{conv} E \subseteq \operatorname{conv} (K \backslash \{\mathbf{x}_0\}) = K \backslash \{\mathbf{x}_0\},$$

što nije moguće. ■

5.10. KOROLAR

Ako je F prava ekstremalna stranica konveksnog skupa K ($F \neq K$ i $F \neq \emptyset$), onda je $\operatorname{affdim} F < \operatorname{affdim} K$.

Dokaz. Kad bi bilo $\operatorname{affdim} F = \operatorname{affdim} K$, po definiciji afine dimenzije skupovi F i K imali bi isti maksimalan broj afino nezavisnih točaka. Budući da je $F \subseteq K$, tada bi imali $\operatorname{aff} F = \operatorname{aff} K$. Prema (5.4), tada bi bilo

$$F = K \cap \operatorname{aff} F = K \cap \operatorname{aff} K = K,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom da je F prava stranica. ■

5.11. PROPOZICIJA

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, a F njegova ekstremalna stranica. Podskup $F_1 \subseteq F$ ekstremalna je stranica od F ako i samo ako je F_1 ekstremalna stranica od K.

Dokaz. Neka je F_1 ekstremalna stranica od F. Pretpostavimo da je $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F_1 \neq \emptyset$, gdje su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Treba pokazati da je $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F_1$, što će značiti da je F_1 ekstremalna stranica od K. Neka je $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F_1$. Kako je $F_1 \subseteq F$, to je $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F$, a kako je F ekstremalna stranica od K, slijedi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$. Dakle, imamo da je $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F_1$ i $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$, odakle, budući da je F_1 stranica od F, slijedi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F_1$.

Obratna je implikacija očigledna. ■

Prethodna propozicija ne vrijedi za izložene stranice. Zaista, vratimo se na sliku 25. Segment (dužina) $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ je izložena stranica konveksnog skupa K. Točke $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ izložene su stranice tog segmenta, ali nisu izložene stranice skupa K.

5.12. Korolar

Ako je F ekstremalna stranica konveksnog skupa K, onda je $\operatorname{ext} F = F \cap \operatorname{ext} K$, tj. ekstremalne točke od F ekstremalne su točke od K koje se nalaze u F.

5.13. Korolar

Ako je $\{\mathbf{y}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$ ekstremalna zraka konveksnog skupa K, onda je $\mathbf{y}_0$ ekstremalna točka od K.

Dokaz. Dovoljno je uočiti da je $\mathbf{y}_0$ ekstremalna točka zrake i primijeniti propoziciju 5.11. ■

5.14. Propozicija

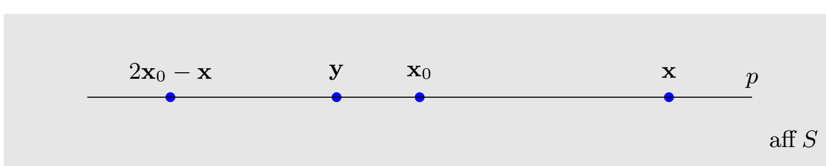
Neka je K konveksan skup, F ekstremalna stranica od K i S bilo koji konveksan podskup od K. Ako je $F \cap \operatorname{RelInt} S \neq \emptyset$, onda je $S \subseteq F$. To možemo matematički zapisati kao

$$(\forall S \subseteq K) \quad F \cap \operatorname{RelInt} S \neq \emptyset \Longrightarrow S \subseteq F.$$

Dokaz. Za dokaz te tvrdnje iskoristit ćemo drugu tvrdnju propozicije 2.25. koja opisuje relativni interior. Neka je

$$\mathbf{x}_0 \in F \cap \operatorname{RelInt} S.$$

Uzmimo bilo koju točku $\mathbf{x} \in S \backslash \{\mathbf{x}_0\}$ te pokažimo da je $\mathbf{x} \in F$. U tu svrhu, neka je p pravac koji prolazi točkama $\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x}$ (slika 27). Jasno, $p \subseteq \operatorname{aff} S$ jer su $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in S$. Točka $2\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ leži na pravcu p, a točka $\mathbf{x}_0$ jest između $2\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ i $\mathbf{x}$. Kako je skup S konveksan, $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelInt} S$ i $2\mathbf{x}_0 - \mathbf{x} \in \operatorname{aff} S$, po propoziciji 2.25. postoji točka $\mathbf{y} \in (2\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ takva da je $[\mathbf{y}, \mathbf{x}_0] \subseteq S$. Uočimo da je $\mathbf{x}_0 \in (\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Budući da je F ekstremalna stranica od K, slijedi $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in F$. ■



Slika 27.

Zahvaljujući prethodnoj propoziciji 5.14. lako se uočava da se ekstremalna stranica može definirati na sljedeći ekvivalentan način:

5.15. DEFINICIJA (EKVIVALENTNA DEFINICIJA EKSTREMALNIH STRANICA)
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Konveksan podskup F od K ekstremalna je stranica od K ako ima svojstvo da za svaki konveksan podskup S od K vrijedi

$$F \cap \operatorname{RelInt} S \neq \emptyset \Longrightarrow S \subseteq F.$$

5.16. KOROLAR
Neka je K konveksan skup. Vrijedi:

a) *Ako ekstremalna stranica F od K siječe $\operatorname{RelInt} K$, onda se ona podudara s K. Dakle,*
$$F \cap \operatorname{RelInt} K \neq \emptyset \Longrightarrow F = K.$$

b) *Svaka prava ekstremalna stranica F od K leži na njegovoj relativnoj granici $\operatorname{RelBd} K$, tj. $F \subseteq \operatorname{RelBd} K = \operatorname{Cl} K \backslash \operatorname{RelInt} K$.*

c) *Svaka prava ekstremalna stranica F od K sadržana je u nekoj pravoj izloženoj stranici E od K.*

d) *Svaka ekstremalna stranica F zatvorenog konveksnog skupa K jest zatvorena.*

e) *Relativna granica zatvorenog konveksnig skupa K sastoji se od pravih izloženih stranica.*

Dokaz. *a)* Za S iz prethodne propozicije stavite $S = K$.

b) Dovoljno je pokazati da je $F \cap \operatorname{RelInt} K = \emptyset$. Zaista, kad bi bilo $F \cap \operatorname{RelInt} K \neq \emptyset$, prema tvrdnji a) imali bismo $F = K$, što bi bila kontradikcija s pretpostavkom da je F prava ekstremalna stranica.

c) Vrijedi:
(i) $F \cap \operatorname{RelInt} K = \emptyset$,
(ii) $F = K \cap \operatorname{aff} F$.
Zaista, (i) slijedi iz tvrdnje b), dok (ii) nije ništa drugo nego jednakost (5.4). Iz (i) i (ii) dobivamo:

$$\begin{aligned}\emptyset &= F \cap \operatorname{RelInt} K = (K \cap \operatorname{aff} F) \cap \operatorname{RelInt} K = \operatorname{aff} F \cap (K \cap \operatorname{RelInt} K)\\ &= \operatorname{aff} F \cap \operatorname{RelInt} K = \operatorname{RelInt}(\operatorname{aff} F) \cap \operatorname{RelInt} K.\end{aligned}$$

Zbog toga prema teoremu 4.30. postoji hiperravnina H koja na netrivijalan način separira skupove K i $\operatorname{aff} F$, tj.
(iii) $K \subseteq H^-$,
(iv) $\operatorname{aff} F \subseteq H^+$ i
(v) barem jedan od skupova K i $\operatorname{aff} F$ nije cijeli sadržan u H.

Sada ćemo pokazati da je $F \subseteq H \cap K$. Kako je $F \subseteq K$ po definiciji ekstremalne stranice, dovoljno je pokazati da je $F \subseteq H$. Zaista, zbog (iii) jest $F \subseteq H^-$, a iz $F \subseteq \operatorname{aff} F$ i (iv) slijedi $F \subseteq H^+$. Time smo pokazali da je $F \subseteq H^- \cap H^+ = H$.

Kako je $\emptyset \neq F \subseteq H$ te kako vrijedi (iii), po definiciji izložene stranice zaključujemo da je $H \cap K$ izložena stranica od K. Sada ćemo pokazati da je $H \cap K$ prava izložena stranica. Zaista, kao prvo, zbog pretpostavke $F \neq \emptyset$ i zbog $F \subseteq H \cap K$ slijedi da je $H \cap K \neq \emptyset$. Nadalje, zbog (v) mora biti $H \cap K \neq K$.

d) Prema (5.4) jest $F = K \cap \operatorname{aff} F$. Skupovi K i $\operatorname{aff} K$ zatvoreni su, pa je kao njihov presjek zatvorena i stranica F.

e) Kroz svaku točku $\mathbf{x}$ s relativne granice $\operatorname{RelBd} K = K \backslash \operatorname{RelInt} K$ možemo postaviti netrivijalnu (pravu) potpornu hiperravninu $H_{\mathbf{x}}$ skupa K (propozicija 4.22.), tj. potpornu hiperravninu koja ne sadrži cijeli skup K. $F_{\mathbf{x}} := H_{\mathbf{x}} \cap K$ izložena je, pa stoga i ekstremalna stranica skupa K (tvrdnja (a) propozicije 5.7.). Kako je $\mathbf{x} \in F_{\mathbf{x}}$ i kako $H_{\mathbf{x}}$ ne sadrži cijeli skup K, stranica $F_{\mathbf{x}}$ jest prava ($F_{\mathbf{x}} \neq \emptyset$ i $F_{\mathbf{x}} \neq K$). Prema tvrdnji b) jest $F_{\mathbf{x}} \subseteq \operatorname{RelBd} K$ i zato je

$$\operatorname{RelBd} K = \bigcup_{\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K} \{\mathbf{x}\} \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K} F_{\mathbf{x}} \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K} \operatorname{RelBd} K = \operatorname{RelBd} K,$$

odakle slijedi $\operatorname{RelBd} K = \bigcup_{\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K} F_{\mathbf{x}}$. ■

5.2. Teorem Minkowskog

Neki konveksni skupovi nemaju ekstremalnih točaka, npr. otvoreni krug. Sljedeća propozicija govori nam da svaki neprazan, kompaktan i konveksan skup ima barem jednu ekstremalnu točku.

5.17. Propozicija
Svaki neprazan, kompaktan i konveksan skup iz $\mathbb{R}^n$ ima ekstremalnu točku.

Dokaz. Neka je $\|\mathbf{x}_0\|^2$ maksimum neprekidne funkcije $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2$ na kompaktu K. Tvrdimo da je $\mathbf{x}_0$ ekstremalna točka skupa K. Zaista, u suprotnom bi postojale dvije različite točke $\mathbf{x_1}, \mathbf{x}_2 \in K$ takve da je $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ (vidi (5.15) na str. 142). Tada bi zbog $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ iz jednakosti paralelograma

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|^2 + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 = 2(\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2)$$

slijedilo

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|^2 < 2(\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2),$$

odakle bismo dobili

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 = \left\|\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)\right\|^2 < \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2) \leq \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{x}_0\|^2 + \|\mathbf{x}_0\|^2) = \|\mathbf{x}_0\|^2,$$

što nije moguće. ■

Sada možemo iskazati fundamentalni teorem o reprezentaciji kompaktnog konveksnog skupa, koji je poznat pod nazivom teorem Minkowskog ili Krein-Milmanov teorem, a često se spominju i sva tri imena zajedno. Naime, taj je teorem prvi dokazao Minkowski, a njegovu generalizaciju u lokalno konveksnom topološkom prostoru napravili su Krein[16] i Milman[17].

5.18. Teorem (Minkowski, Krein-Milman)
Svaki neprazan, kompaktan i konveksan skup u $\mathbb{R}^n$ konveksna je ljuska svojih ekstremalnih točaka, tj.

$$K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K).$$

Dokaz. Neka je $K \subsetneq \mathbb{R}^n$ kompaktan konveksan skup. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po afinoj dimenziji $\operatorname{affdim} K$ skupa K. Tvrdnja očigledno vrijedi ako je $\operatorname{affdim} K = 0$, tj. ako je K jednočlani skup. Zato pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve konveksne kompakte afine dimenzije manje od k. Neka je K kompaktan konveksan skup afine dimenzije $k > 0$. Kako je $K = \operatorname{Cl} K$, to je $\operatorname{RelBd} K = K \backslash \operatorname{RelInt} K$ i zato za svaku točku $\mathbf{x} \in K$ imamo samo dvije mogućnosti: a) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K$ ili b) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$.

---

[16]Mark Grigorievich Krein (Марк Григо́рьевич Крейн) (1907. - 1989.), rusko-izraelski matematičar.
[17]David Pinhusovich Milman (Дави́д Пи́нхусович Ми́льман) (1912. - 1982.), rusko-izraelski matematičar.

Slučaj a) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K$. Prema propoziciji 4.22. u točki $\mathbf{x}$ postoji netrivijalna (prava) potporna hiperravnina H skupa K. Budući da H netrivijalno podupire skup K, tj. K nije sadržan u H, K nije sadržan ni u $K \cap H$. Drugim riječima, $K \cap H$ prava je izložena stranica od K ($K \cap H \neq \emptyset$ i $K \cap H \neq K$) i zato je $\operatorname{affdim}(K \cap H) < \operatorname{affdim} K = k$ (korolar 5.10.). Zato i kako je $\mathbf{x} \in K \cap H$, po induktivnoj je pretpostavci $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K \cap H))$. Nadalje, izložena stranica $K \cap H$ jest i ekstremalna stranica skupa K (propozicija 5.7.), pa su njezine ekstremalne točke ujedno ekstremalne točke i skupa K (propozicija 5.11.). Dakle, točka $\mathbf{x}$ može se prikazati kao konveksna kombinacija ekstremalnih točaka skupa K.

Slučaj b) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$. Odaberimo točku $\mathbf{x}' \in K \setminus \{\mathbf{x}\}$. Kako je $\dim K > 0$, to je moguće. Pravac određen točkama $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}'$ siječe relativnu granicu $\operatorname{RelBd} K$ u najviše dvjema točkama (prema korolaru 2.24. svaki polupravac s početkom u točki $\mathbf{x}$ siječe relativnu granicu u najviše jednoj točki). Budući da je K kompaktan skup, imamo točno dvije takve presječne točke $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$. Pri tome je $\mathbf{x} \in (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, tj. $\mathbf{x}$ jest netrivijalna konveksna kombinacija točaka $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$. Prema prvom dijelu dokaza, svaka od točaka $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ može se prikazati kao konveksna kombinacija ekstremalnih točaka skupa K, pa se zato i točku $\mathbf{x}$ može prikazati kao konveksnu kombinaciju ekstremalnih točaka od K. ∎

5.19. Korolar

Neka je $K \subsetneq \mathbb{R}^n$ kompaktan konveksan skup. Ako je $f\colon K \to \mathbb{R}$ neprekidna i konveksna funkcija, onda ona svoj globalni maksimum dostiže u nekoj ekstremalnoj točki skupa K.

Dokaz. Neka f svoj globalni maksimum dostiže u točki $\mathbf{x}_0 \in K$. Prema teoremu 5.18. postoje ekstremalne točke $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \operatorname{ext} K$ takve da je

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Stavimo li

$$f(\mathbf{v}_{i_0}) := \max_{i=1,\ldots,m} f(\mathbf{v}_i),$$

konveksnost funkcije f daje

$$f(\mathbf{v}_{i_0}) \leq f(\mathbf{x}_0) = f\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\mathbf{v}_i) \leq \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big) f(\mathbf{v}_{i_0}) = f(\mathbf{v}_{i_0}),$$

odakle slijedi $f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{v}_{i_0})$. ∎

5.3. Recesivni i asimptotski konus konveksnog skupa

Tvrdnja teorema 5.18. ne može se proširiti na neomeđene konveksne skupove. Primjerice, zraka $K = \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, neomeđen je skup kome je $\mathbf{x}_0$ jedina ekstremalna točka ($\operatorname{ext} K = \{\mathbf{x}_0\}$) pa je više nego očigledno da se ni jedna druga točka te zrake ne može prikazati kao konveksna kombinacija ekstremalnih točaka.

Za potpun opis neomeđenih konveksnih skupova potrebni su nam pojmovi recesivnog i asimptotskog konusa, no prvo ćemo navesti sljedeći teorem.

5.20. Teorem
Konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neomeđen je ako i samo ako sadrži zraku.

Dokaz. Ako K sadrži zraku, onda je K očigledno neomeđen. Obratno, pretpostavimo da je K neomeđen. Tada postoji niz $(\mathbf{x}_k)$ u skupu K takav da $\|\mathbf{x}_k\| \to \infty$. Neka je $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelInt} K$. Prema propoziciji 2.22. takav $\mathbf{x}_0$ postoji. Definirajmo novi niz točaka s jednične sfere S^{n-1}:

$$\mathbf{q}_k := \tfrac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kako je S^{n-1} kompaktan skup, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da niz $(\mathbf{q}_k)$ konvergira prema točki $\mathbf{q}_0 \in S^{n-1}$ (u suprotnom uzmemo konvergentan podniz, što je moguće prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu za nizove).

Sad ćemo pokazati da je $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q}_0 : \lambda \geq 0\} \subseteq K$ i time završiti dokaz. Neka je $\lambda \geq 0$. Treba pokazati da je $\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q}_0 \in K$. Kako $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \to \infty$, postoji dovoljno velik $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$0 < \tfrac{\lambda+1}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|} < 1 \qquad \text{za svaki } k \geq k_0.$$

Zbog konveksnosti skupa K, za svaki $k \geq k_0$ tada je

$$\mathbf{x}_0 + \tfrac{\lambda+1}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) \in K,$$

tj., ekvivalentno,

$$\mathbf{x}_0 + (\lambda+1)\mathbf{q}_k \in K.$$

Zato limes konvergentnog niza $\big(\mathbf{x}_0 + (\lambda+1)\mathbf{q}_k\big)_{k \geq k_0}$ leži u zatvaraču skupa K, tj. $\mathbf{x}_0 + (\lambda+1)\mathbf{q}_0 \in \operatorname{Cl} K$. Kako je $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelInt} K$, prema lemi 2.23. slijedi $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + (\lambda+1)\mathbf{q}_0\rangle \subseteq \operatorname{RelInt} K$ i zato je $\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q}_0 \in \operatorname{RelInt} K \subseteq K$. ■

5.21. Definicija
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup.

Za vektor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je recesivan smjer ili smjer opadanja za K ako je

$$\{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K \quad \text{za svaki } \mathbf{x} \in K.$$

Skup svih recesivnih smjerova skupa K zovemo recesivni konus ili konus opadanja skupa K i označavamo s $\operatorname{rec} K$.

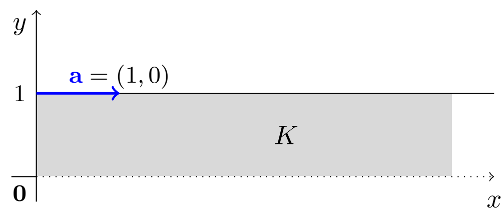
Za vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je asimptotski smjer za K ako postoji točka $\mathbf{x}_0 \in K$ takva da je $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{a} : \lambda \geq 0\} \subseteq K$. Skup svih asimptotskih smjerova skupa K zovemo asimptotski konus skupa K i označavamo s K_∞.

Uočimo da recesivni i asimptotski smjerovi leže u vektorkom potprostoru L koji je paralelan s $\operatorname{aff} K$; prisjetimo se da je $L = \operatorname{aff} K - \mathbf{y}_0$, gdje je $\mathbf{y}_0$ bilo koja točka iz $\operatorname{aff} K$.

Drugim riječima, vektor $\mathbf{q}$ recesivni je smjer skupa K ako kod kretanja s početkom iz bilo koje točke $\mathbf{x} \in K$ i u smjeru vektora $\mathbf{q}$ stalno ostajemo u skupu K; vektor $\mathbf{a}$ asimptotski je smjer od K ako postoji točka $\mathbf{x}_0 \in K$ iz koje je moguće kretati se u smjeru vektora $\mathbf{a}$ i pritom stalno ostati u skupu K. Očito je

$$\operatorname{rec} K \subseteq K_\infty,$$

tj. svaki recesivni smjer jest i asimptotski. Obratna inkluzija ne mora vrijediti. Zaista, pogledajmo sliku 28. Iz svih točaka danog skupa K, osim iz točke $(0,0) \in K$, moguće je kretati se u smjeru vektora $\mathbf{a}$ i pritom ostati u skupu K. Dakle, vektor $\mathbf{a}$ asimptotski je smjer, ali nije recesivni smjer.



Slika 28. $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\}$,
$\operatorname{Cl} K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \in [0,1]\}$.

Istaknimo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rec} K &= \big\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K \text{ za svaki } \mathbf{x} \in K\big\},\\
K_\infty &= \big\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \mathbf{x}_0 \in K \text{ takav da je } \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K\big\}.
\end{aligned}$$

Uvijek je $\mathbf{0} \in K_\infty$ i $\mathbf{0} \in \operatorname{rec} K$. Ako je K omeđen skup, onda je očigledno $\operatorname{rec} K = \{\mathbf{0}\}$ i $K_\infty = \{\mathbf{0}\}$. Nadalje, lako je provjeriti da su $\operatorname{rec} K$ i K_∞ konveksni konusi te da vrijedi relacija (vidi zadatak 8, str. 142)

$$A \subseteq B \Longrightarrow A_\infty \subseteq B_\infty \tag{5.5}$$

5.22. PRIMJEDBA
Za konveksne skupove A i B, inkluzija $A \subseteq B$ ne implicira $\operatorname{rec} A \subseteq \operatorname{rec} B$. Zaista, neka je K konveksan skup sa slike 28. Stavimo $A := K \setminus \{(0,0)\}$ i $B := K$. Tada je $\operatorname{rec} A = \{\lambda(1,0) : \lambda \geq 0\}$, a $\operatorname{rec} B = \{(0,0)\}$.

5.23. PRIMJER. Za poliedre $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ i $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ u primjeru 3.8. pokazali smo da njihovi recesivni konusi glase:

$$\operatorname{rec} P = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{q} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}\}, \quad \operatorname{rec} Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{q} \leq \mathbf{0}\}.$$

Lako se provjerava da je $P_\infty = \operatorname{rec} P$ i $Q_\infty = \operatorname{rec} Q$.

Teorem 5.20. možemo iskazati na sljedeći ekvivalentan način:

5.24. Teorem
Neprazan konveksan skup K neomeđen je ako i samo ako je $K_\infty \neq \{\mathbf{0}\}$.

5.25. Lema
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Svaki asimptotski smjer zatvarača skupa K recesivan je smjer i za zatvarač i za njegovu relativnu nutrinu, tj.

$$(\operatorname{Cl} K)_\infty \subseteq \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K) \tag{5.6}$$

i

$$(\operatorname{Cl} K)_\infty \subseteq \operatorname{rec}(\operatorname{RelInt} K). \tag{5.7}$$

Drugim riječima, ako zatvarač konveksnog skupa K sadrži zraku sa smjerom $\mathbf{q}$, onda je svaka zraka sa smjerom $\mathbf{q}$ i početkom u bilo kojoj točki iz zatvarača [relativne nutrine] također sadržana u zatvaraču [relativnoj nutrini].

Dokaz. Ako je $\operatorname{Cl} K$ omeđen skup, onda on ne sadrži zraku (teorem 5.20.) pa je zato $\operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K) = \{\mathbf{0}\}$ i $(\operatorname{Cl} K)_\infty = \{\mathbf{0}\}$ i time je dokaz gotov. Zato nadalje pretpostavimo da je $\operatorname{Cl} K$ neomeđen skup. Neka je $\mathbf{a} \in (\operatorname{Cl} K)_\infty$, tj. $\{\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{a} : \mu \geq 0\} \subseteq \operatorname{Cl} K$ za neki $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{Cl} K$. Treba pokazati da je $\mathbf{a} \in \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$ i $\mathbf{a} \in \operatorname{rec}(\operatorname{RelInt} K)$. U tu svrhu prvo ćemo pokazati da je

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mu\mathbf{a}] \subseteq \operatorname{Cl} K \qquad \text{za sve } \mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K \text{ i sve } \mu \geq 0. \tag{5.8}$$

Neka su $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$ i $\mu \geq 0$ proizvoljni. Prema korolaru 2.26., $\operatorname{Cl} K$ konveksan je skup. Zato je dovoljno pokazati da je $\mathbf{x} + \mu\mathbf{a} \in \operatorname{Cl} K$. Zaista, kako za svaki $\varepsilon \in (0, 1)$ vrijedi

$$\varepsilon\big(\overbrace{\mathbf{x}_0 + \tfrac{\mu}{\varepsilon}\mathbf{a}}^{\in \operatorname{Cl} K}\big) + (1 - \varepsilon)\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$$

te kako je

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\varepsilon\big(\mathbf{x}_0 + \tfrac{\mu}{\varepsilon}\mathbf{a}\big) + (1 - \varepsilon)\mathbf{x}\right] = \mathbf{x} + \mu\mathbf{a},$$

zbog zatvorenosti skupa $\operatorname{Cl} K$ jest $\mathbf{x} + \mu\mathbf{a} \in \operatorname{Cl} K$. Time smo dokazali (5.8).

Za svaki $\mathbf{x} \in \operatorname{Cl} K$ iz (5.8) slijedi $\{\mathbf{x} + \mu\mathbf{a} : \mu \geq 0\} \subseteq \operatorname{Cl} K$. To znači da je $\mathbf{a} \in \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$.

Sada ćemo pokazati da je $\mathbf{a} \in \operatorname{rec}(\operatorname{RelInt} K)$. Pomoću leme 2.23. i (5.8) dobivamo

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mu\mathbf{a}) \subseteq \operatorname{RelInt} K \qquad \text{za sve } \mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K \text{ i sve } \mu \geq 0.$$

To je dovoljno da se zaključi da je $\{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a} : \lambda \geq 0\} \subseteq \operatorname{RelInt} K$ za svaki $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$, tj. da je $\mathbf{a} \in \operatorname{rec}(\operatorname{RelInt} K)$. ∎

5.26. PRIMJEDBA
Prema lemi 5.25., ako zatvarač konveksnog skupa K sadrži zraku sa smjerom $\mathbf{q}$, onda je svaka zraka sa smjerom $\mathbf{q}$ i početkom u zatvaraču [relativnoj nutrini] sadržana u zatvaraču [relativnoj nutrini]. Budući da je $\operatorname{RelInt} K \subseteq K \subseteq \operatorname{Cl} K$, implicira li to da će zraka s početkom iz skupa K i istim tim smjerom $\mathbf{q}$ biti sadržana u K? Odgovor je, nažalost, općenito negativan, tj.

$$(\operatorname{Cl} K)_\infty \nsubseteq \operatorname{rec} K.$$

Ilustrirajmo to sljedećim primjerom. Za konveksan skup K sa slike 28 imamo $(\operatorname{Cl} K)_\infty = \operatorname{cone}\{(1,0)\} = \{\lambda(1,0) : \lambda \geq 0\}$, a $\operatorname{rec} K = \{(0,0)\}$.

5.27. TEOREM
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan zatvoren konveksan skup. Tada je

$$K_\infty = \operatorname{rec} K.$$

Dokaz. Uvijek je $\operatorname{rec} K \subseteq K_\infty$. Kako je $K = \operatorname{Cl} K$, prema (5.6) jest $K_\infty \subseteq \operatorname{rec} K$. ■

5.28. KOROLAR
Zatvoren konveksan skup K omeđen je ako i samo ako je njegov recesivni konus trivijalan, tj. $\operatorname{rec} K = \{\mathbf{0}\}$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 5.24. i 5.27. ■

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Za svaku točku $\mathbf{x}_0 \in K$ možemo definirati skup

$$R(K, \mathbf{x}_0) := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K\},$$

za koji kažemo da je skup recesivnih smjerova (od K) u točki $\mathbf{x}_0$. Pomoću jednakosti

$$\mathbf{x}_0 + \lambda(\lambda_1\mathbf{q}_1 + \lambda_2\mathbf{q}_2) = \tfrac{1}{2}\big[\big(\mathbf{x}_0 + (2\lambda\lambda_1)\mathbf{q}_1\big) + \big(\mathbf{x}_0 + (2\lambda\lambda_2)\mathbf{q}_2\big)\big]$$

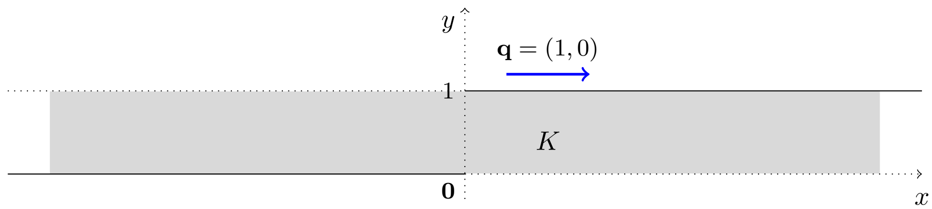
lako je provjeriti da je $R(K, \mathbf{x}_0)$ konveksni konus. Uočimo da je konus $\mathbf{x}_0 + R(K, \mathbf{x}_0)$ jednak uniji svih zraka s početkom u $\mathbf{x}_0$ koje leže u skupu K. Nadalje, očito je

$$\operatorname{rec} K \subseteq R(K, \mathbf{x}_0) \subseteq K_\infty,$$

s mogućnošću pojave pravih inkluzija kao što nam ilustrira sljedeći primjer.

5.29. PRIMJER. Za konveksan skup K sa slike 29 i točku $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rec} K = \{\mathbf{0}\},\\
&R(K, \mathbf{x}_0) = \{\lambda\mathbf{q} : \lambda \leq 0\},\\
&K_\infty = \{\lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$



Slika 29.

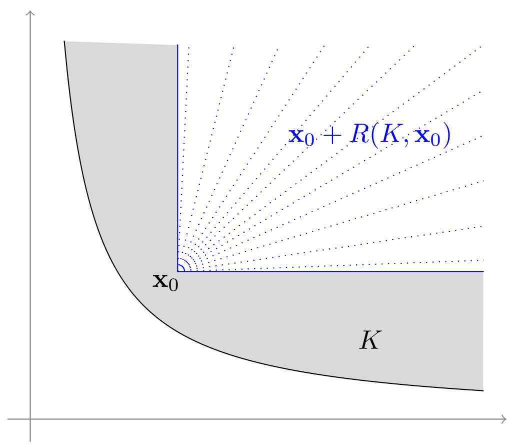
Sljedeći je korolar vrlo koristan za određivanje recesivnog i/ili asimptotskog konusa zatvorenog konveksnog skupa.

5.30. Korolar
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan i zatvoren konveksan skup, te $\mathbf{x}_0 \in K$. Tada je

$$\operatorname{rec} K = K_\infty = R(K, \mathbf{x}_0).$$

Dokaz. Pomoću teorema 5.27. dobivamo $\operatorname{rec} K \subseteq R(K, \mathbf{x}_0) \subseteq K_\infty = \operatorname{rec} K$. ■

Korisnost prethodnog korolara ilustrirana je na sljedećoj slici.



Slika 30. *Zatvoren konveksan skup $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x\}$ i njegov za vektor $\mathbf{x}_0$ translatirani recesivni konus* $\operatorname{rec} K$*,* $\mathbf{x}_0 + \operatorname{rec} K = \mathbf{x}_0 + R(K, \mathbf{x}_0)$.

Sada ćemo navesti teorem koji nam govori da se skupovi $\operatorname{rec} K$ i K_∞ „tanko" razlikuju, u smislu da je $\operatorname{rec} K \subseteq K_\infty = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$.

5.31. Teorem
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Tada:

(a) Vrijedi jednakost

$$\operatorname{rec} K = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} \subseteq K\}.$$

Nadalje, ako je skup K zatvoren, onda je i $\operatorname{rec} K$ *zatvoren.*

(b) Asimptotski konus K_∞ *zatvoren je skup i vrijedi*

$$K_\infty = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Cl} K + \mathbf{q} \subseteq \operatorname{Cl} K\},$$

kao i

$$K_\infty = (\operatorname{RelInt} K)_\infty = (\operatorname{Cl} K)_\infty = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K). \tag{5.9}$$

(c) Za svaki $\mathbf{x}_0 \in K$,

$$R(K, \mathbf{x}_0) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}_0 + \mathbf{q} \subseteq K\}.$$

Dokaz. *(a)* Prvo ćemo dokazati inkluziju $\operatorname{rec} K \subseteq \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} \subseteq K\}$. Neka je $\mathbf{q} \in \operatorname{rec} K$. Po definiciji recesivnog konusa $\operatorname{rec} K$ tada je $\mathbf{x} + \mathbf{q} \in K$ za svaki $\mathbf{x} \in K$, tj. $K + \mathbf{q} \subseteq K$.

Sada ćemo dokazati obratnu inkluziju, tj. da je $\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} \subseteq K\} \subseteq \operatorname{rec} K$. Neka je $\mathbf{q} \in \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} \subseteq K\}$. Tada je

$$K + 2\mathbf{q} = (K + \mathbf{q}) + \mathbf{q} \subseteq K + \mathbf{q} \subseteq K.$$

Nastavljajući taj postupak dobivamo

$$K + m\mathbf{q} \subseteq K, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Zato i zbog konveksnosti skupa K, za svaki $\mathbf{x} \in K$ svi segmenti

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{q}],\ [\mathbf{x} + \mathbf{q}, \mathbf{x} + 2\mathbf{q}],\ [\mathbf{x} + 2\mathbf{q}, \mathbf{x} + 3\mathbf{q}], \ldots$$

sadržani su u skupu K, što implicira da za svaki $\mathbf{x} \in K$ i zraka $\{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$ leži u skupu K, tj. $\mathbf{q} \in \operatorname{rec} K$.

Pretpostavimo da je K zatvoren skup. Neka je $(\mathbf{q}_k)$ bilo koji konvergentan niz točaka iz $\operatorname{rec} K$. Pretpostavimo da $\mathbf{q}_k \to \mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^n$. Treba pokazati da je $\mathbf{q}_0 \in \operatorname{rec} K$, tj. da je $K + \mathbf{q}_0 \subseteq K$. Za svaki $\mathbf{x} \in K$ jest $\mathbf{x} + \mathbf{q}_k \in K$, a kako je K zatvoren skup, dobivamo $\mathbf{x} + \mathbf{q}_0 = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{x} + \mathbf{q}_k) \in K$. Zbog proizvoljnosti točke $\mathbf{x} \in K$ jest $K + \mathbf{q}_0 \subseteq K$.

(b) Prema tvrdnji *(a)* jest $\operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Cl} K + \mathbf{q} \subseteq \operatorname{Cl} K\}$ i $\operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$ jest zatvoren. Preostaje pokazati da je $K_\infty = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$. Iskoristimo li redom implikaciju (5.5), teorem 5.27., lemu 5.25., inkluziju $\operatorname{rec} A \subseteq A_\infty$ koja vrijedi za svaki konveksan skup A te na kraju opet relaciju (5.5), dobivamo

$$K_\infty \subseteq (\operatorname{Cl} K)_\infty = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K) \subseteq \operatorname{rec}(\operatorname{RelInt} K) \subseteq (\operatorname{RelInt} K)_\infty \subseteq K_\infty,$$

odakle slijedi $K_\infty = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$ i (5.9).

(c) Dovoljno je oponašati dokaz tvrdnje *(a)*. ■

5.3.1. Asimptotski potprostor

Očigledno je da neprazan konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ima netrivijalan afin podskup onda i samo onda ako on sadrži barem jedan pravac.

5.32. PROPOZICIJA
Neprazan konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sadrži pravac ako i samo ako je

$$K_\infty \cap (-K_\infty) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{q}, -\mathbf{q} \in K_\infty\} \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Ako je pravac $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ sadržan u skupu K, onda je $\mathbf{q} \in K_\infty \cap (-K_\infty)$.

Dokaz. Ako K sadrži pravac $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, onda on sadrži obje zrake $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$ i $\{\mathbf{x}_0 + \lambda(-\mathbf{q}) : \lambda \geq 0\}$, pa je stoga $\mathbf{q} \in K_\infty \cap (-K_\infty)$.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathbf{0} \neq \mathbf{q} \in K_\infty \cap (-K_\infty)$, tj. $\mathbf{q} \in K_\infty$ i $-\mathbf{q} \in K_\infty$. Po definiciji asimptotskog konusa K_∞, tada postoje točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ takve da je $\{\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K$ i $\{\mathbf{x}_2 + \lambda(-\mathbf{q}) : \lambda \geq 0\} \subseteq K$. Neka je $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelInt} K$. Prema propoziciji 2.22. takav $\mathbf{x}_0$ postoji. Prema 5.7 jest $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq \operatorname{RelInt} K$ i $\{\mathbf{x}_0 + \lambda(-\mathbf{q}) : \lambda \geq 0\} \subseteq \operatorname{RelInt} K$, tj. $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \operatorname{RelInt} K \subseteq K$. ■

5.33. PROPOZICIJA
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni konus. Skup

$$K \cap (-K)$$

vektorski je potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Dokaz. Neka je $V := K \cap (-K)$. Treba pokazati da je $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ i $\lambda\mathbf{x} \in V$ za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ i sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je $\mathbf{x}, -\mathbf{x}, \mathbf{y}, -\mathbf{y} \in K$. Kako je K konveksni konus, to je $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in K$ i $-(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = -\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) \in K$. Time smo pokazali da je $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$. Preostaje pokazati da je $\lambda\mathbf{x} \in V$, tj. $-\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \in K$. To je lako, slijedi iz definicije konusa K. Zaista, ako je $\lambda \geq 0$, onda $\mathbf{x} \in K \Rightarrow \lambda\mathbf{x} \in K$ i $-\mathbf{x} \in K \Rightarrow -\lambda\mathbf{x} = \lambda(-\mathbf{x}) \in K$; ako je $\lambda < 0$, onda $-\mathbf{x} \in K \Rightarrow -\lambda\mathbf{x} \in K$ i $-\mathbf{x} \in K \Rightarrow \lambda\mathbf{x} = -\lambda(-\mathbf{x}) \in K$. ■

5.34. PRIMJER. Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup. Skup

$$R(K, \mathbf{x}_0) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K\}$$

svih recesivnih smjerova (od K) u točki $\mathbf{x}_0$ jest konus, pa je

$$R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0)) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq K\}$$

vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$.

5.35. Definicija

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup, a K_∞ njegov asimptotski konus. Vektorski potprostor

$$L_{\text{as}} := K_\infty \cap (-K_\infty)$$

zovemo **asimptotski potprostor** od K.

Sad propoziciju 5.32. možemo iskazati na sljedeći ekvivalentan način:

5.36. Propozicija

Neprazan konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sadrži pravac ako i samo ako je $L_{\text{as}} \neq \{\mathbf{0}\}$. Ako je pravac $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ sadržan u skupu K, onda je $\mathbf{q} \in L_{\text{as}}$.

5.37. Propozicija

Neka je K konveksan skup iz $\mathbb{R}^n$ te neka je A afin skup iz $\mathbb{R}^n$ paralelan s potprostorom L_A, tj.

$$A = \mathbf{x}_0 + L_A,$$

gdje je $\mathbf{x}_0$ bilo koja točka iz A. Skup A podskup je od K onda i samo onda ako

$$\mathbf{x}_0 \in K \quad \& \quad L_A \subseteq R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0)).$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je afin skup $A = \mathbf{x}_0 + L_A$ podskup od K. Tada je $\mathbf{x}_0 \in K$. Neka je $\mathbf{q} \in L_A$. Tada je i $\lambda\mathbf{q} \in L_A$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ jer je L_A vektorski potprostor, pa je zato pravac $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ sadržan u skupu A. Zato je $\mathbf{q} \in R(K, \mathbf{x}_0)$ i $-\mathbf{q} \in R(K, \mathbf{x}_0)$, odakle slijedi $\mathbf{q} \in R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0))$. Time smo pokazali da je $L_A \subseteq R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0))$.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathbf{x}_0 \in K$ i $L_A \subseteq R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0))$. Treba pokazati da je $A \subseteq K$. Svaki $\mathbf{x} \in A$ jest oblika $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{q}$, gdje je $\mathbf{q} \in L_A$. Kako je $L_A \subseteq R(K, \mathbf{x}_0)$, iz definicije skupa $R(K, \mathbf{x}_0)$ slijedi $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K$. Zato je $\mathbf{x}_0 + \mathbf{q} \in K$. ■

Prirodno se postavlja pitanje kako izgledaju maksimalni (u smislu inkluzije) afini podskupovi konveksnog skupa. Odgovor na postavljeno pitanje daje nam sljedeći korolar.

5.38. Korolar

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup i $\mathbf{x}_0 \in K$. Tada je

$$A := \mathbf{x}_0 + R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0))$$

maksimalan (u smislu inkluzije) afin podskup od K koji sadrži zadanu točku $\mathbf{x}_0$.

Na kraju ove točke navodimo još jedan interesantan rezultat. Prije toga uočimo da je $\operatorname{rec} K \cap (-\operatorname{rec} K)$ vektroski potprostor od $\mathbb{R}^n$ (propozicija 5.33.). Tom potprostoru, za koji se kaže da je recesivni potprostor konveksnog skupa K, posvećena je sljedeća točka.

5.39. PROPOZICIJA

Svaki neprazan i zatvoren konveksni skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ima afinu ekstremalnu stranicu F koja je kao skup maksimalna, u smislu inkluzije, na skupu svih afinih podskupova od K. Ta maksimalna afina stranica F paralelna je s vektorskim potprostorom $\operatorname{rec} K \cap (-\operatorname{rec} K)$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po afinoj dimenziji k skupa K. Ako je $k = 0$, onda je K jednočlani skup, pa je dovoljno staviti $F := K$. Ako je $k = 1$, onda je K segment, zraka ili pravac. I u tom je slučaju lako provjeriti da vrijedi tvrdnja propozicije. Npr., ako je K zraka oblika $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$, dovoljno je staviti $F := \{\mathbf{x}_0\}$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve konveksne skupove afine dimenzije strogo manje od k. Neka je K konveksan skup afine dimenzije k. Moguća su samo dva slučaja: (i) $\operatorname{RelBd} K = \emptyset$ ili (ii) $\operatorname{RelBd} K \neq \emptyset$, gdje je $\operatorname{RelBd} K = \operatorname{Cl} K \backslash \operatorname{RelInt} A$ relativna granica skupa K. Kako je skup K zatvoren, to je $\operatorname{RelBd} K = K \backslash \operatorname{RelInt} A$.

Slučaj (i) $\operatorname{RelBd} K = \emptyset$. Tada je $K = \operatorname{RelInt} K$. Dakle, u tom slučaju je $K = \operatorname{Cl} K = \operatorname{RelInt} K$, tj. K jest i otvoren i zatvoren u relativnoj topologiji na $\operatorname{aff} K$, pa zato mora biti[18] ili $K = \emptyset$ ili $K = \operatorname{aff} K$. Kako je po pretpostavci $K \neq \emptyset$, to je $K = \operatorname{aff} K$. Lako je provjeriti da za $F :=$ K $= \operatorname{aff} K$ vrijede sve tvrdnje propozicije.

Slučaj (ii) $\operatorname{RelBd} K \neq \emptyset$. Neka je $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelBd} K$. Po propoziciji 4.22. tada postoji netrivijalna potporna hiperravnina H skupa K u točki $\mathbf{x}_0$. Neprazan skup $K \cap H$ prava je izložena (pa stoga i ekstremalna) stranica afine dimenzije najviše $k - 1$ (korolar 5.10.), pa ona po induktivnoj pretpostavci ima afinu stranicu F koja je maksimalna (u smislu inkluzije) na skupu svih afinih podskupova od $K \cap H$. Prema propoziciji 5.11., F jest ekstremalna stranica i skupa K.

Pomoću propozicije 5.14. lako je pokazati da je F maksimalan (u smislu inkluzije) afin podskup od K. Zaista, ako je $S \subseteq K$ afin skup koji sadrži F, onda je $\operatorname{RelInt} S = \operatorname{aff} S$ i zato je $\operatorname{RelInt} S \cap F = F \neq \emptyset$. Po propoziciji 5.14. tada je $S \subseteq F$.

Prema korolaru 5.38. jest

$$F = \mathbf{x}_0 + R(K, \mathbf{x}_0) \cap (-R(K, \mathbf{x}_0)),$$

gdje je $\mathbf{x}_0$ bilo koja točka iz F. Nadalje, kako je K zatvoren i konveksan, prema korolaru 5.30. jest $R(K, \mathbf{x}_0) = \operatorname{rec} K$. Time smo pokazali da je afina stranica F paralelna s potprostorom $\operatorname{rec} K \cap (-\operatorname{rec} K)$. ■

5.3.2. Recesivni potprostor

5.40. DEFINICIJA

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup, a $\operatorname{rec} K$ njegov recesivni konus. Vektorski potprostor

$$L_{\text{rec}} := \operatorname{rec} K \cap (-\operatorname{rec} K)$$

zovemo recesivni potprostor skupa K.

[18] Može se pokazati, što mi nećemo raditi, da je skup $A \subseteq \operatorname{aff} K$ istovremeno otvoren i zatvoren s obzirom na $\operatorname{aff} K$ onda i samo onda ako je $A = \emptyset$ ili $A = \operatorname{aff} K$.

Kako je

$$\operatorname{rec} K = \big\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K \text{ za svaki } \mathbf{x} \in K\big\}$$

te kako je $\mathbf{q} \in -\operatorname{rec} K \iff -\mathbf{q} \in \operatorname{rec} K$, dobivamo

$$-\operatorname{rec} K = \big\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x} - \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\} \subseteq K \text{ za svaki } \mathbf{x} \in K\big\}.$$

Zato je

$$L_{\text{rec}} = \big\{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq K \text{ za svaki } \mathbf{x} \in K\big\}.$$

Dakle, $\mathbf{q} \in L_{\text{rec}}$ ako i samo ako je, za svaki $\mathbf{x} \in K$, pravac $\{\mathbf{x} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ sadržan u skupu K.

5.41. PROPOZICIJA

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup, a L_{rec} njegov recesivni potprostor. Tada je

$$L_{\text{rec}} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} = K\}. \tag{5.10}$$

Osim toga,

$$L_{\text{as}} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Cl} K + \mathbf{q} = \operatorname{Cl} K\}, \tag{5.11}$$

gdje je L_{as} asimptotski potprostor skupa K.

Specijalno, ako je K i zatvoren skup, onda je $L_{\text{rec}} = L_{\text{as}}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazti (5.10) jer (5.11) slijedi iz (5.9) i (5.10). Zaista, prema (5.9) je $K_\infty = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)$, pa pomoću (5.10) dobivamo

$$L_{\text{as}} = K_\infty \cap (-K_\infty) = \operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K) \cap (-\operatorname{rec}(\operatorname{Cl} K)) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \operatorname{Cl} K + \mathbf{q} = \operatorname{Cl} K\}$$

Preostaje dokazati (5.10). Prema teoremu 5.31. jest

$$\operatorname{rec} K = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} \subseteq K\}.$$

Zato je

$$-\operatorname{rec} K = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K - \mathbf{q} \subseteq K\}$$

i

$$L_{\text{rec}} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K + \mathbf{q} \subseteq K\} \cap \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : K - \mathbf{q} \subseteq K\}.$$

Nadalje, lako je provjeriti[19] ekvivalenciju

$$K - \mathbf{q} \subseteq K \iff K \subseteq K + \mathbf{q}.$$

Zaista, ako je $K - \mathbf{q} \subseteq K$, dobivamo $K = (K - \mathbf{q}) + \mathbf{q} \subseteq K + \mathbf{q}$; a ako je $K \subseteq K + \mathbf{q}$ onda je $K - \mathbf{q} \subseteq (K + \mathbf{q}) - \mathbf{q} = K$. Pomoću gornje ekvivalencije lako je provjeriti da je $K + \mathbf{q} = K$ ako i samo ako je istovremeno $K + \mathbf{q} \subseteq K$ i $K - \mathbf{q} \subseteq K$. ■

Uočimo da je recesivni konus L_{rec} najveći skup S iz $\mathbb{R}^n$ sa svojstvom $K + S = K$.

---

[19] S vektorskim sumama treba biti pažljiv jer, općenito, $A \subseteq B + C$ ne implicira $A - B \subseteq C$. Za kontraprimjer uzmite $A = B = \mathbb{R}$ i $C = \{0\}$.

5.42. PROPOZICIJA
Neprazan zatvoren konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sadrži pravac ako i samo ako je $L_{\mathrm{rec}} \neq \{\mathbf{0}\}$. Ako je pravac $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ sadržan u skupu K, onda je $\mathbf{q} \in L_{\mathrm{rec}}$.

Dokaz. Skup K jest zatvoren, pa je $L_{\mathrm{as}} = L_{\mathrm{rec}}$ (propozicija 5.41.). Zato tvrdnja slijedi iz propozicije 5.36. ■

5.43. PROPOZICIJA
Neprazan zatvoren konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ima ekstremalnu točku ako i samo ako je njegov recesivni potprostor L_{rec} trivijalan, tj. $L_{\mathrm{rec}} = \{\mathbf{0}\}$.

Dokaz. Neka je prvo $L_{\mathrm{rec}} = \{\mathbf{0}\}$. Prema propoziciji 5.39. skup K ima afinu ekstremalnu stranicu F koja je paralelna s potprostorom L_{rec}. Kako je $L_{\mathrm{rec}} = \{\mathbf{0}\}$, ta je ekstremalna stranica F jednočlani skup.

Obratno, ako skup K ima ekstremalnu točku, onda ni jedan pravac iz K ne može prolaziti kroz tu točku i zato je $\operatorname{rec} K \cap (-\operatorname{rec} K) = \{\mathbf{0}\}$, tj. $L_{\mathrm{rec}} = \{\mathbf{0}\}$. ■

Kombiniranjem prethodnih dviju propozicija dobivamo sljedeći teorem:

5.44. TEOREM
Neprazan zatvoren konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ima ekstremalnu točku onda i samo onda ako K ne sadrži niti jedan pravac.

5.4. Dekompozicija konveksnog skupa

5.45. Teorem (o dekompoziciji konveksnog skupa)
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan konveksan skup, a L bilo koji potprostor od njegovog recesivnog potprostora L_{rec}. Tada je

$$K = L \oplus (K \cap L^{\perp}), \tag{5.12}$$

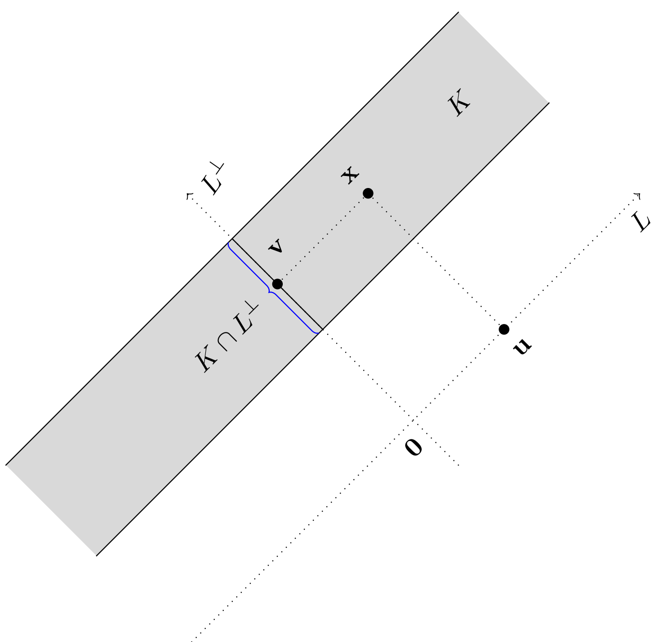
gdje je $L^{\perp}$ ortogonalni komplement od L. Skup $K \cap L^{\perp}$ jest konveksan. Ako je K zatvoren skup, onda je i $K \cap L^{\perp}$ zatvoren.

Dokaz. Neka je $\mathbf{x} \in K$. Tada se $\mathbf{x}$ može na jedinstven način prikazati kao $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$, gdje su $\mathbf{u} \in L$, $\mathbf{v} \in L^{\perp}$. Kako je $-\mathbf{u} \in L$ i $L \subseteq L_{\mathrm{rec}}$, vektor $-\mathbf{u}$ recesivan je smjer za K i zato je $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \in K$. Dakle, $\mathbf{v} \in K \cap L^{\perp}$. Time smo pokazali da je $K \subseteq L \oplus (K \cap L^{\perp})$.

Obratno, ako je $\mathbf{x} \in L \oplus (K \cap L^{\perp})$, onda $\mathbf{x}$ možemo zapisati kao $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, gdje su $\mathbf{u} \in L$, $\mathbf{v} \in K \cap L^{\perp}$. Dakle, $\mathbf{v} \in K$. Nadalje, budući da je $L \subseteq L_{\mathrm{rec}}$, vektor $\mathbf{u}$ recesivan je smjer za K, pa je zato $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in K$. Time smo pokazali da je $L \oplus (K \cap L^{\perp}) \subseteq K$.

Skupovi K i $L^{\perp}$ konveksni su pa je konveksan i njihov presjek $K \cap L^{\perp}$.

Ortogonalni komplement $L^{\perp}$ vektorski je potprostor od $\mathbb{R}^n$, pa je on zatvoren skup. Zato, ako je K zatvoren skup, onda je i skup $K \cap L^{\perp}$ zatvoren kao presjek dvaju zatvorenih skupova. ■



Slika 31. *Dekompozicija $K = L \oplus (K \cap L^{\perp})$.*

5.46. Definicija
Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kazat ćemo da je bez pravaca ako on ne sadrži nijedan pravac.

Skup $K \cap L^\perp$ iz dekompozicije (5.12) općenito nije bez pravaca. Primjerice, ako je

$$K = \mathbb{R}^2 \times [0,1],$$

onda je

$$L_{\text{rec}} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

Nadalje,

$$L := \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} = \{(q_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : q_1 \in \mathbb{R}\}$$

potprostor je od L_{rec}, njegov ortogonalni komplement glasi

$$L^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}^2 = \{(0, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 : q_2, q_3 \in \mathbb{R}\},$$

a skup

$$K \cap L^\perp = \{0\} \times \mathbb{R} \times [0,1]$$

jednak je uniji svih pravaca oblika

$$\{(0,0,z) + \lambda(0,1,0) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad z \in [0,1].$$

Međutim ako je K neprazan zatvoren konveksan skup, a $L = L_{\text{rec}}$, onda skup $K \cap L^\perp$ ne sadrži pravac. Tu tvrdnju dokazujemo u sljedećem teoremu.

5.47. Teorem (o dekompoziciji zatvorenog konveksnog skupa)
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan zatvoren konveksan skup, a L_{rec} njegov recesivni potprostor. Tada je

$$K = L_{\text{rec}} \oplus (K \cap L_{\text{rec}}^\perp). \tag{5.13}$$

Skup $K \cap L_{\text{rec}}^\perp$ konveksan je, zatvoren i bez pravaca.

Dokaz. Sve tvrdnje, osim tvrdnje da $K \cap L_{\text{rec}}^\perp$ ne sadrži nijedan pravac, slijede direktno iz teorema 5.45.

Ako skup K sadrži pravac sa smjerom $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, onda je $\mathbf{q} \in L_{\text{rec}}$ (propozicija 5.42.). Budući da je $L_{\text{rec}} \cap L_{\text{rec}}^\perp = \{\mathbf{0}\}$, skup $K \cap L_{\text{rec}}^\perp$ ne sadrži nijedan pravac. ■

Skup $K \cap L_{\text{rec}}^\perp$ iz dekompozicije (5.13) je konveksan, zatvoren i bez pravaca. Sljedeći teorem, čije se otkriće pripisuje američkom matematičaru Victoru L. Klee[20], ima važnu ulogu u teoriji konveksnosti i primjenama. On nam govori da se svaki neprazan zatvoren konveksan skup bez pravaca može prikazati kao konveksna ljuska skupa koji se sastoji od njegovih ekstremalnih točaka i ekstremalnih zraka. Za dokaz tog teorema, koji je sličan dokazu teorema 5.18., trebat će nam sljedeća lema.

[20] Victor L. Klee (1925. - 2007.), američki matematičar.

5.48. LEMA

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan zatvoren konveksan skup bez pravaca. Tada vrijedi:

(a) $\operatorname{RelBd} K \neq \emptyset$.

(b) Ako je $\operatorname{affdim} K \geq 2$, *onda je*

$$K = \operatorname{conv}(\operatorname{RelBd} K).$$

Dokaz *(a)* Tvrdnja očigledno vrijedi ako je $\operatorname{affdim} K = 0$ jer tada je K jednočlan skup pa je $\operatorname{RelInt} K = \emptyset$, $\operatorname{Cl} K = K$ i $\operatorname{RelBd} K = K \backslash \operatorname{RelInt} K = K \neq \emptyset$. Zato nadalje pretpostavimo da je $\operatorname{affdim} K \geq 1$. Ako je $\operatorname{RelBd} K = K \backslash \operatorname{RelInt} K = \emptyset$, onda je $K = \operatorname{Cl} K = \operatorname{RelInt} K$, tj. skup K jest i otvoren i zatvoren u relativnoj topologiji na $\operatorname{aff} K$, pa zato mora biti ili $K = \emptyset$ ili $K = \operatorname{aff} K$. Kako je po pretpostavci $K \neq \emptyset$, to je $K = \operatorname{aff} K$. Dakle, ako je $\operatorname{RelBd} K = \emptyset$, onda je $K = \operatorname{aff} K$. Budući da se $\operatorname{aff} K$ sastoji od pravaca, a po pretpostavci K nema pravac, mora biti $\operatorname{RelBd} K \neq \emptyset$.

(b) Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\operatorname{affdim} K = n$, tj. $\operatorname{aff} K = \mathbb{R}^n$; u suprotnom, umjesto u $\mathbb{R}^n$, sva razmatranja treba provesti u $\operatorname{aff} K$. Tada je $\operatorname{RelInt} K = \operatorname{Int} K$ i $\operatorname{RelBd} K = \operatorname{Bd} K$.

Budući da je $\operatorname{Bd} K = K \backslash \operatorname{Int} K \subseteq K$, slijedi $\operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K) \subseteq K$. Preostaje dokazati obratnu inkluziju $K \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K)$. U tu svrhu prvo uočimo da je

$$K = \operatorname{Int} K \cup (K \backslash \operatorname{Int} K) = \operatorname{Int} K \cup \operatorname{Bd} K.$$

Neka je $\mathbf{x} \in K$. Treba pokazati da je $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K)$. Ako je $\mathbf{x} \in \operatorname{Bd} K$, onda je $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K)$. Zato nadalje pretpostavimo da $\mathbf{x} \notin \operatorname{Bd} K$. Tada je $\mathbf{x} \in \operatorname{Int} K$. Pokažimo da i u tom slučaju mora biti $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K)$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom pa zato pretpostavimo da je $\mathbf{x} \in \operatorname{Int} K \backslash \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K)$. Tada po teoremu Minkowskog (teorem 4.29.) skup $\operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K)$ i točku $\mathbf{x}$ možemo jako separirati, tj. postoje hiperravnina $H_{\mathbf{a},\beta}$ i realan broj $\varepsilon > 0$ takvi da je

$$\mathbf{x} \in H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon} \qquad \& \qquad \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K) \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta+\varepsilon}.$$

Ako pokažemo da je $H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon} \subseteq \operatorname{Int} K$, dobit ćemo kontradikciju s pretpostavkom da je skup K bez pravaca i time će dokaz obratne inkluzije biti gotov. Zaista, pokažimo da iz $H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon} \subseteq \operatorname{Int} K$ slijedi da skup K sadrži pravac. Neka je $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ bilo koji vektor okomit na $\mathbf{a}$, tj. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{q} \rangle = 0$. Budući da je po pretpostavci $\operatorname{affdim} K = n \geq 2$, takav vektor $\mathbf{q}$ postoji. Kako je $\mathbf{x} \in H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$, tada za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ dobivamo

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leq \beta - \varepsilon,$$

što nam govori da je cijeli pravac $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ sadržan u skupu $H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon} \subseteq \operatorname{Int} K \subseteq K$.

Preostaje pokazati da je $H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon} \subseteq \operatorname{Int} K$. Neka je $\mathbf{y} \in H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$. Kako je $\mathbf{x} \in H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$, nadalje možemo smatrati da je $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Treba pokazati da je $\mathbf{y} \in \operatorname{Int} K$. U tu je svrhu dovoljno pokazati da postoji realan broj $\lambda > 1$ takav da je $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in K$

jer, prema lemi 2.23., tada je $\mathbf{y} = \mathbf{x} + 1 \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \operatorname{Int} K$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom pa zato pretpostavimo da ne postoji realan broj $\lambda > 1$ takav da je $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in K$. Tada je skup

$$\{\lambda : \lambda > 0, \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in K\}$$

omeđen s gornje strane brojem 1. Osim toga, taj je skup neprazan, jer, budući da je $\mathbf{x} \in \operatorname{Int} K = \operatorname{Int}(\operatorname{Int} K)$, primjenom propozicije 2.25. na skup $\operatorname{Int} K$ dobivamo da postoji $\lambda_1 \in (0, 1)$ takav da je

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \lambda_1(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \subseteq \operatorname{Int} K.$$

Neka je

$$\lambda_0 := \sup\{\lambda : \lambda > 0,\ \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in K\}.$$

Uočimo da je $0 < \lambda_1 \le \lambda_0 \le 1$. Pomoću propozicije 2.25. i leme 2.23. lako je pokazati da je

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \operatorname{Cl} K \backslash \operatorname{Int} K = \operatorname{Bd} K.$$

Nadalje, kako su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$, dobivamo

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_0 \rangle &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} + \lambda_0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \rangle \\ &= (1 - \lambda_0)\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \lambda_0 \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \\ &\le (1 - \lambda_0)(\beta - \varepsilon) + \lambda_0(\beta - \varepsilon) \\ &= \beta - \varepsilon, \end{aligned}$$

što nam govori da je $\mathbf{x}_0 \in H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$. Dakle, kad ne bi postojao realan broj $\lambda > 1$ takav da je $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in K$, postojala bi točka $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{Bd} K \cap H^-_{\mathbf{a},\beta-\varepsilon}$. A budući da je $\operatorname{Bd} K \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{Bd} K) \subseteq H^+_{\mathbf{a},\beta+\varepsilon}$ i $H^+_{\mathbf{a},\beta+\varepsilon} \cap H^-_{\mathbf{a},\beta+\varepsilon} = \emptyset$, to je nemoguće. ■

5.49. Teorem (Kleeov teorem)
Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan zatvoren konveksan skup bez pravaca. Tada se K podudara s konveksnom ljuskom skupa koji se sastoji od njegovih ekstremalnih točaka i ekstremalnih zraka, tj.

$$K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K \cup \operatorname{exthl} K). \tag{5.14}$$

Dokaz. Kako je $\operatorname{ext} K \cup \operatorname{exthl} K \subseteq K$, to je $\operatorname{conv}(\operatorname{ext} K \cup \operatorname{exthl} K) \subseteq K$. Dokaz obratne inkluzije $K \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K \cup \operatorname{exthl} K)$ provest ćemo matematičkom indukcijom po afinoj dimenziji $\operatorname{affdim} K$ skupa K. Tvrdnja očigledno vrijedi ako je $\operatorname{affdim} K = 0$, tj. ako je K jednočlani skup. Ako je $\operatorname{affdim} K = 1$, onda je K segment ili zraka, tj. $K = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ ili $K = \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \ge 0\}$, pa opet vrijedi (5.14). Zato pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za sve neprazne i zatvorene konveksne skupove bez pravaca čija je afina dimenzija manja od k. Neka je K neprazan zatvoren konveksan skup bez pravaca afine dimenzije $k \ge 2$. Prema lemi 5.48. jest $\operatorname{RelBd} K \neq \emptyset$. Za svaku točku $\mathbf{x} \in K$ imamo samo dvije mogućnosti: a) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K$ ili b) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$.

Slučaj a) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelBd} K$. Odaberimo netrivijalnu u točki $\mathbf{x}$ potpornu hiperravninu skupa K. Po propoziciji 4.22. takva potporna hiperravnina postoji. Neprazan i zatvoren konveksan skup $K \cap H$ jest afine dimenzije najviše $k-1$, a nema pravaca jer ih nema K. Zato i kako je $\mathbf{x} \in K \cap H$, po induktivnoj pretpostavci točka $\mathbf{x}$ može se prikazati kao konveksna kombinacija točaka iz skupa koji se sastoji od ekstremalnih točaka i ekstremalnih zraka skupa $K \cap H$, tj. $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K \cap H) \cup \operatorname{exthl}(K \cap H))$. Izložena stranica $K \cap H$ je i ekstremalna (propozicija 5.7.) pa su njezine ekstremalne točke [ekstremalne zrake] ujedno ekstremalne točke [ekstremalne zrake] i skupa K (propozicija 5.11.).

Slučaj b) $\mathbf{x} \in \operatorname{RelInt} K$. Prema tvrdnji (b) leme 5.48. jest $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{RelBd} K)$. Neka je

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i, \qquad \mathbf{x}_i \in \operatorname{RelBd} K,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Prema prvom je dijelu dokaza

$$\mathbf{x}_i \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K \cup \operatorname{exthl} K) \qquad \text{za sve } i = 1, \ldots, m,$$

pa je zato i $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K \cup \operatorname{exthl} K)$. ■

5.50. TEOREM

Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazan zatvoren konveksan skup bez pravaca. Tada je

$$K = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K) + \operatorname{rec} K.$$

Dokaz. Prema teoremu 5.49. svaku točku $\mathbf{x} \in K$ možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \mathbf{v}_i, \qquad \mathbf{x}_i \in \operatorname{ext} K,\ \mathbf{v}_i \in \operatorname{exthl} K, \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Nadalje, svaku točku $\mathbf{v}_i$ možemo zapisati kao $\mathbf{v}_i = \mathbf{y}_i + \mathbf{u}_i$, gdje je $\mathbf{y}_i$ rubna točka zrake (ta je točka ekstremalna točka skupa K!) i $\mathbf{u}_i \in K_\infty = \operatorname{rec} K$. Dakle, imamo

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \mathbf{u}_i \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K) + \operatorname{rec} K.$$

Time smo pokazali da je $K \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ext} K) + \operatorname{rec} K$. Obratna inkluzija $\operatorname{conv}(\operatorname{ext} K) + \operatorname{rec} K \subseteq K$ slijedi iz konveksnosti skupa K i definicije recesivnog konusa $\operatorname{rec} K$. ■

Zadaci za vježbu

1. Neka je F podskup konveksnog skupa K. a) Ako je F ekstremalna stranica od K, onda je skup $K \backslash F$ konveksan. Dokažite! b) Ilustrirajte primjerom da ne vrijedi obrat tvrdnje a).

   Uputa: b) Za K uzmite kocku, a za F odgovarajući pravi podskup (ne nužno konveksan) nekog brida.

2. Neka je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Pokažite da je $F \subseteq K$ stranica od K onda i samo onda ako je F konveksan skup i ako vrijedi

$$(\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K,\ \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2) \quad \tfrac{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}{2} \in F \Longrightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F. \tag{5.15}$$

   Uputa: Iz (5.1) slijedi (5.15). Obratno, neka je $F \subseteq K$ konveksan skup i neka su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, $\lambda \in (0,1)$ i $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \in F$. Treba pokazati da je $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$. Za $\lambda = \frac{1}{2}$ tvrdnja slijedi iz (5.15). Neka je $\lambda < \frac{1}{2}$ (slično se tretira slučaj $\lambda > \frac{1}{2}$). Kako je $2\lambda < 1$, točka $\mathbf{y}_2 := \mathbf{x}_1 + 2\lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ leži u segmentu $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq K$. Nadalje, $\mathbf{x}$ je polovište točaka $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{y}_2$ i zato (5.15) povlači $\mathbf{x}_1 \in F$ i $\mathbf{y}_2 \in F$. Preostaje pokazati da je $\mathbf{x}_2 \in F$. Nastavljajući taj postupak dolazi se do prirodnog broja k takvog da je $\frac{1}{2} < k\lambda < 1$ i $\mathbf{y}_k := \mathbf{x}_1 + k\lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \cap F$. Neka je $\lambda' := 1 - k\lambda$. Tada je $0 < \lambda' < \frac{1}{2}$ i $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_2 + \lambda'(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Točka $\mathbf{z} := \mathbf{x}_2 + 2\lambda'(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ leži u segmentu $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq K$. Kako je $\mathbf{y}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{z}) \in F$ te $\mathbf{x}_2, \mathbf{z} \in K$, iz (5.15) slijedi $\mathbf{x}_2 \in F$.

3. Otvorena kugla primjer je konveksnog skupa koji nema ekstremalnih stranica. Nađite još neki takav primjer!

4. Navedite primjer neomeđenog konveksnog skupa koji je jednak konveksnoj ljuski svojih ekstremalnih točaka.

   Uputa: Promatrajte nadgraf konveksne funkcije.

5. Navedite primjer zatvorenog konveksnog skupa S koji ima ekstremalnu točku, ali se ne podudara s konveksnom ljuskom svojih ekstremalnih točaka.

   (Uputa: Npr. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, \frac{1}{x} \geq y\}$.)

6. Navedite primjer omeđenog konveksnog skupa S koji ima ekstremalnu točku, ali se ne podudara s konveksnom ljuskom svojih ekstremalnih točaka.

   Uputa: Iskoristite uputu iz prethodnog zadatka.

7. Neka je $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$. Pokažite da je $\operatorname{rec} P = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{q} \leq \mathbf{0},\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0}\}$.

   Uputa: Uočite da je $P = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}$, a zatim primijenite rezultat iz primjera 5.23. na str. 127.

8. Dokažite da su K_∞ i $\operatorname{rec} K$ konveksni skupovi.

9. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ neprazni zatvoreni konveksni skupovi takvi da je $A \cap B \neq \emptyset$. Pokažite da je $\operatorname{rec}(A \cap B) = \operatorname{rec} A \cap \operatorname{rec} B$.

6. Poliedri

Zbog velike važnosti koju imaju u linearnom programiranju, ovu točku posvećujemo poliedrima. Prisjetimo se, u linearnom programiranju skup dopustivih (mogućih) rješenja zadan je sustavom linearnih nejednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

koji ćemo često zapisivati u kraćem, tzv. matričnom obliku kao

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \tag{6.1}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrica koeficijenata sustava, a $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_m]^T$ vektor-stupac ograničenja. Kazat ćemo da sustav linearnih nejednadžbi (6.1) ima rang r, ako matrica $\mathbf{A}$ ima rang r. Označimo li sa $\mathbf{a}^i$ i-ti redak matrice $\mathbf{A}$, onda sustav nejednadžbi (6.1) možemo zapisati kao

$$\mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{a}^i \neq \mathbf{0}$ za sve $i = 1, \ldots, m$. Osim toga, i-toj nejednadžbi prirodno je pridružiti hiperravninu

$$H_i := H_{\mathbf{a}^i, b_i} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i\}$$

i zatvorene poluprostore

$$\begin{aligned} H_i^- &:= H^-_{\mathbf{a}^i, b_i} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i\} \\ H_i^+ &:= H^+_{\mathbf{a}^i, b_i} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} \geq b_i\}. \end{aligned}$$

Radi lakšeg zapisivanja korisno je uvesti sljedeću definiciju:

6.1. Definicija

Neka su zadani sustav linearnih nejedndžbi (6.1) i točka $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Ako je $\mathbf{a}^i\mathbf{z} = b_i$, onda:

(i) indeks i nazivamo **aktivnim indeksom** u točki $\mathbf{z}$,

(ii) i-ti uvjet (ograničenje) $\mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i$ nazivamo **aktivnim uvjetom** u točki $\mathbf{z}$

(iii) i-ti redak $\mathbf{a}^i$ matrice $\mathbf{A}$ nazivamo **aktivnim retkom** u točki $\mathbf{z}$.

Skup svih aktivnih indeksa u točki $\mathbf{z}$ označavat ćemo s $I(\mathbf{z})$. S $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}$ označavat ćemo submatricu matrice $\mathbf{A}$ sastavljenu od aktivnih redaka u točki $\mathbf{z}$.

Kao što znamo, skup P svih rješenja sustava linearnih nejednadžbi (6.1) po definiciji zove se poliedar ili poliedarski skup. Dakle,

$$\begin{aligned} P &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-. \end{aligned}$$

Hiperravnine H_i zovemo **definicionim** ili **graničnim hiperravninama** poliedra P. Slično, za zatvorene poluprostore H_i^- kažemo da su **definicioni** iii **granični poluprostori** poliedra P. Konveksnost i zatvorenost poliedra P slijedi iz konveksnosti i zatvorenosti definicionih poluprostora.

Valja naglasiti da sustav (6.1) samo prividno uključuje jedino nejednadžbe. Naime, osim nejednadžbi mogu se pojaviti i jednadžbe, jer svaku jednadžbu možemo zapisati kao dvije nejednadžbe.

Za opis afine ljuske i ekstremalnih stranica poliedra P definiranog sustavom (6.1) ključan je skup

$$I_P := \big\{i \in \{1, \ldots, m\} : \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i \text{ za svaki } \mathbf{x} \in P\big\}, \tag{6.2}$$

tj. skup svih indeksa koji su aktivni u svakoj točki poliedra P. Lako se provjerava jednakost

$$\bigcap_{i \in I_P} H_i = \bigcap_{\substack{i=1 \\ P \subseteq H_i}}^{m} H_i.$$

6.2. Lema

Neka je poliedar $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definiran sustavom nejednadžbi (6.1). Afina mnogostrukost razapeta poliedrom P jednaka je presjeku svih definicionih hiperravnina koje sadrže P, tj.

$$\operatorname{aff} P = \bigcap_{\substack{i=1 \\ P \subseteq H_i}}^{m} H_i = \bigcap_{i \in I_P} H_i,$$

gdje je I_P skup definiran s (6.2).

Dokaz. Skup

$$M := \bigcap_{i \in I_P} H_i = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i \text{ za svaki } i \in I_P\big\}$$

afin je jer je presjek afinih skupova H_i. Pokažimo da je $\operatorname{aff} P = M$. Neka je $I_1 := \{1, \ldots, m\} \backslash I_P$. Ako je $I_1 = \emptyset$, onda je $P = M$, pa je očito $\operatorname{aff} P = \operatorname{aff} M = M$. Zato nadalje pretpostavimo da je $I_1 \neq \emptyset$. Kako je $P \subseteq M$, slijedi $\operatorname{aff} P \subseteq M$. Preostaje dokazati obratnu inkluziju $M \subseteq \operatorname{aff} P$. Neka je $\mathbf{x} \in M$. Za svaki $i \in I_1$ prvo odaberimo točku $\mathbf{x}_i \in P$ takvu da je $\mathbf{a}^i\mathbf{x}_i < b_i$, a zatim definirajmo novu točku

$$\mathbf{x}_0 := \tfrac{1}{|I_1|} \sum_{i \in I_1} \mathbf{x}_i \in P,$$

gdje $|I_1|$ označava kardinalni broj skupa I_1. Budući da je

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}^i\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i \qquad \text{za svaki } i \in I_P,\\&\mathbf{a}^i\mathbf{x}_0 < b_i \qquad \text{za svaki } i \in I_1,\end{aligned}$$

postoji dovoljno malen realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}^i(\mathbf{x}_0 + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) = b_i \qquad \text{za svaki } i \in I_P,\\&\mathbf{a}^i(\mathbf{x}_0 + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) < b_i \qquad \text{za svaki } i \in I_1.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $\mathbf{y} := \mathbf{x}_0 + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in P$. Dakle, $\mathbf{x}_0, \mathbf{y} \in P$. Zato pravac p određen točkama $\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{y}$ leži u $\operatorname{aff} P$, tj. $p = \{\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \operatorname{aff} P$. Budući da taj pravac p sadrži i točku $\mathbf{x}$, slijedi $\mathbf{x} \in \operatorname{aff} P$. Time smo dokazali da je $\operatorname{aff} P = M$. ■

6.3. Teorem

Neka je poliedar $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definiran sustavom nejednadžbi (6.1) te neka je I_P skup definiran s (6.2). Poliedar P afine je dimenzije r ako i samo ako sustav jednadžbi

$$\mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i, \qquad i \in I_P \tag{6.3}$$

ima rang $n - r$.

Drugim riječima, označimo li s $\mathbf{A}_{I_P}$ matricu sustava (6.3), tvrdnju teorema možemo kratko matematički zapisati kao:

$$\operatorname{affdim} P = r \iff r(\mathbf{A}_{I_P}) = n - r,$$

gdje je $r(\mathbf{A}_{I_P})$ rang matrice $\mathbf{A}_{I_P}$.

Dokaz. Kao i u dokazu leme 6.2., neka je

$$M := \bigcap_{i \in I_P} H_i = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i \text{ za svaki } i \in I_P\right\}.$$

Tada je $\operatorname{aff} P = M$, odakle slijedi

$$\operatorname{affdim} P = \dim M.$$

Sada je lako je dokazati tvrdnju teorema. Zaista, kao prvo uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da u presjeku

$$M = \bigcap_{i \in I_P} H_i$$

nema suvišnih hiperravnina, tj. da su linearno nezavisni reci matrice $\mathbf{A}_{I_P}$; u suprotnom iz presjeka izbacimo suvišne hiperravnine. Tada je (vidi propoziciju 2.1. i primjedbu 2.3.)

$$\dim M = n - r(\mathbf{A}_{I_P}).$$

Dakle,

$$\operatorname{affdim} P = r \iff \dim M = r \iff n - r(\mathbf{A}_{I_P}) = r \iff r(\mathbf{A}_{I_P}) = n - r.$$

■

6.1. Stranice poliedra

6.4. TEOREM

Neka je poliedar $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definiran sustavom nejednadžbi (6.1) te neka je I_P skup definiran s (6.2). Neprazan podskup F od P ekstremalna je stranica poliedra P ako i samo ako postoji skup indeksa I takav da je

$$I_P \subseteq I \subseteq \{1, \ldots, m\}$$

i

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i,\ i \in I \\ \mathbf{a}^i\mathbf{x} \le b_i,\ i \in \{1, \ldots, m\}\backslash I \end{array} \right\} \\ &= P \cap \Big(\bigcap_{i \in I} H_i \Big). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je skup F oblika (6.4) ekstremalna stranica poliedra P. Skup F jest očigledno konveksan. Pretpostavimo da su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in P$ takve da je $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ i $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F \neq \emptyset$. Treba pokazati da je $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq F$. U tu svrhu odaberimo bilo koju točku $\mathbf{z} \in (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cap F$. Neka je $\mathbf{z} = (1 - \lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2$ za neki $\lambda \in (0, 1)$. Za svaki $i \in I$ vrijedi

$$b_i = \mathbf{a}^i\mathbf{z} = (1 - \lambda)\, \mathbf{a}^i\mathbf{x}_1 + \lambda\, \mathbf{a}^i\mathbf{x}_2,$$

a budući da je $\mathbf{a}^i\mathbf{x}_1 \le b_i$ i $\mathbf{a}^i\mathbf{x}_2 \le b_i$ (jer su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in P$), mora biti $\mathbf{a}^i\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^i\mathbf{x}_2 = b_i$. Time smo pokazali da je $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$, odakle zbog konveksnosti skupa F slijedi $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq F$.

Obratno, pokažimo da je svaku ekstremalnu stranicu F poliedra P moguće prikazati u obliku (6.4). Kako je $F \neq \emptyset$, prema propoziciji 2.22. je $\operatorname{RelInt} F \neq \emptyset$. Odaberimo bilo koju točku $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{RelInt} F$, a zatim definirajmo skup indeksa

$$I := I(\mathbf{x}_0) = \big\{ i \in \{1, \ldots, m\} : \mathbf{a}^i\mathbf{x}_0 = b_i \big\}.$$

Neka je

$$F' = \big\{ \mathbf{x} : \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i,\ i \in I;\ \mathbf{a}^i\mathbf{x} \le b_i, i \in \{1, \ldots, m\}\backslash I \big\}.$$

Prema prvom dijelu dokaza, F' ekstremalna je stranica od P. Sad ćemo pokazati da je $F = F'$, i time završiti dokaz. Kako je $\mathbf{x}_0 \in F' \cap \operatorname{RelInt} F$, propozicija 5.14. povlači $F \subseteq F'$. Preostaje dokazati obratnu inkluziju $F' \subseteq F$. Neka je $\mathbf{x} \in F'$. Budući da je

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^i\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i \qquad \text{za svaki } i \in I, \\ &\mathbf{a}^i\mathbf{x}_0 < b_i \qquad \text{za svaki } i \in \{1, \ldots, m\}\backslash I, \end{aligned}$$

postoji dovoljno malen realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^i(\mathbf{x}_0 + \varepsilon(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})) = b_i \qquad \text{za svaki } i \in I, \\ &\mathbf{a}^i(\mathbf{x}_0 + \varepsilon(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})) < b_i \qquad \text{za svaki } i \in \{1, \ldots, m\}\backslash I. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $\mathbf{y} := \mathbf{x}_0 + \varepsilon(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \in F'$. Dakle, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F' \subseteq P$. Uočimo da je $\mathbf{x}_0 \in (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap F$. Budući da je F ekstremalna stranica od P, slijedi $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq F$, pa je $\mathbf{x} \in F$. ■

Ekstremalnu stranicu poliedra kratko zovemo samo stranica. U skladu s tim dogovorom, tvrdnju teorema 6.4. možemo iskazati na sljedeći ekvivalentan način koji može poslužiti za definiciju stranica poliedra.

6.5. Teorem

Neka je

$$P = \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-$$

poliedar iz $\mathbb{R}^n$. *Podskup* F *od* P *stranica je poliedra* P *ako i samo ako se* F *može prikazati kao presjek poliedra* P *sa konačno mnogo njegovih definicionih hiperravnina* H_i.

Sljedeći korolar slijedi direktno iz teorema 6.5.

6.6. Korolar

Neka je P *poliedar. Tada vrijedi:*

(i) P *ima konačno mnogo stranica.*

(ii) Svaka stranica poliedra P *jest poliedar.*

(iii) Neka je F *stranica poliedra* P. *Skup* $F_1 \subseteq F$ *stranica je od* F *ako i samo ako je* F_1 *stranica od* P.

6.7. Primjedba

Uočimo da tvrdnja *(iii)* prethodnog korolara slijedi i iz propozicije 5.11.

Kombiniranjem teorema 6.3. i 6.4. dobivamo:

6.8. Teorem

Neka je poliedar $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *definiran sustavom nejednadžbi (6.1). Skup* $F \subseteq P$ *jest* k*-dimenzionalana stranica poliedra* P *onda i samo onda ako postoji točno* $n-k$ *linearno nezavisnih redaka* $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_{n-k}}$ *matrice* $\mathbf{A}$ *takvih da je*

$$F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{i_j}\mathbf{x} = b_{i_j},\ j = 1, \ldots, n-k\}.$$

6.1.1. Vrhovi i bridovi poliedra

U teoriji linearnog programiranja (LP) važnu ulogu imaju vrhovi i bridovi poliedra, koje definiramo na sljedeći način:

6.9. Definicija

Pod vrhom poliedra podrazumijevamo njegovu 0-dimenzionalnu stranicu. Pod bridom poliedra podrazumijevamo njegovu 1-dimenzionalnu stranicu.

Dakle, vrhovi poliedra nisu ništa drugo nego njegove ekstremalne točke, a bridovi nisu ništa drugo nego 1-dimenzionalne ekstremalne stranice. Sljedeći opis vrhova i bridova poliedarskog skupa važan je u teoriji linearnog programiranja.

6.10. Teorem

Neka je poliedar $P \subseteq \mathbb{R}^n$ definiran sustavom nejednadžbi (6.1). Vrijedi:

(a) Točka $\mathbf{v} \in P$ vrh je poliedra P ako i samo ako postoji n linearno nezavisnih redaka $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_n}$ matrice $\mathbf{A}$ takvih da je

$$\mathbf{a}^{i_k}\mathbf{v} = b_{i_k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Drugim riječima, točka $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vrh je poliedra $P = \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-$ ako i samo ako postoji n linearno nezavisnih definicionih hiperravnina H_{i_k}, $k = 1, \ldots, n$, takvih da je

$$\{\mathbf{v}\} = P \bigcap_{k=1}^{n} H_{i_k}.$$

(b) Podskup γ od P brid je poliedra P ako i samo ako postoji točno $n-1$ linearno nezavisnih redaka $\mathbf{a}^{i_1}, \ldots, \mathbf{a}^{i_{n-1}}$ matrice $\mathbf{A}$ takvih da svaki $\mathbf{x} \in \gamma$ vrijedi

$$\mathbf{a}^{i_k}\mathbf{x} = b_{i_k}, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Drugim riječima, skup $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ brid je poliedra $P = \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-$ ako i samo ako postoji točno $n-1$ linearno nezavisnih definicionih hiperravnina H_{i_k}, $k = 1, \ldots, n-1$, takvih da je

$$L := \bigcap_{k=1}^{n-1} H_{i_k}$$

pravac i $\gamma = P \cap L$. Za pravac L kažemo da je nosilac brida *γ.*

Dokaz. Slijedi direktno iz teorema 6.8. ■

Prema prethodnom teoremu, vrh je određen s n linearno nezavisnih definicionih hiperravnina. Međutim, jasno je da općenito kroz vrh može prolaziti i više od n definicionih hiperravnina. Ako kroz vrh prolazi točno n definicionih hiperravnina, za taj vrh kažemo da je nedegeneriran; u suprotnom kažemo da je degeneriran. Slično, i brid može ležati u više od $n-1$ definicionih hiperravnina.

6.11. Teorem

Neka je P neprazan poliedar iz $\mathbb{R}^n$. Vrijedi:

(a) Poliedar P ima vrh onda i samo onda ako rang matrice $\mathbf{A}$ iznosi n, tj. ako je $r(\mathbf{A}) = n$.

(b) Točka $\mathbf{v} \in P$ vrh je poliedra P onda i samo onda ako postoji vektor $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ takav da je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{v} \qquad \text{za svaki } \mathbf{x} \in P \backslash \{\mathbf{v}\}.$$

Dokaz. *(a)* Pretpostavimo da je $\mathbf{v}$ vrh od P. Neka je $I_{\mathbf{v}}$ skup svih aktivnih indeksa u vrhu $\mathbf{v}$, a $\mathbf{A}_{\mathbf{v}}$ odgovarajuća submatrica matrice $\mathbf{A}$ sastavljena od aktivnih redaka u vrhu $\mathbf{v}$. Iz tvrdnje *(a)* prethodnog teorema slijedi da rang matrica $\mathbf{A}_{\mathbf{v}}$ iznosi n, tj. $r(\mathbf{A}_{\mathbf{v}}) = n$. Zato je i $r(\mathbf{A}) = n$.

Obratno, pretpostavimo da je $r(\mathbf{A}) = n$, tj., ekvivalentno, da su linearno nezavisni stupci matrice $\mathbf{A}$. Odaberimo bilo koju točku $\mathbf{z} \in P$; kako je $P \neq \emptyset$, takva točka postoji. Neka je $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}$ matrica sustava aktivnih ograničenja u točki $\mathbf{z}$, a $I(\mathbf{z})$ skup aktivnih indeksa u točki $\mathbf{z}$. Ako je $r(\mathbf{A}_{\mathbf{z}}) = n$, $\mathbf{z}$ je vrh (teorem 6.10.a)) i dokaz je gotov. Zato nadalje pretpostavimo da je $r(\mathbf{A}_{\mathbf{z}}) < n$. Tada su linearno zavisni stupci matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}$ i zato postoji $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Zbog $r(\mathbf{A}) = n$ mora biti

$$\mathbf{a}^i\mathbf{q} \neq 0 \quad \text{za barem jedan } i \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\mathbf{z}) \ .$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{a}^i\mathbf{q} > 0$ za barem jedan $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\mathbf{z})$. Neka je

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &:= \max\{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{z} + \lambda\mathbf{q} \in P\} \\
&= \max\{\lambda \in \mathbb{R} : \mathbf{a}^i(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{q}) \leq b_i \text{ za svaki } i \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\mathbf{z})\} \\
&= \min\left\{\frac{b_i - \mathbf{a}^i\mathbf{z}}{\mathbf{a}^i\mathbf{q}} : \mathbf{a}^i\mathbf{q} > 0\right\} \\
&= \frac{b_{i_0} - \mathbf{a}^{i_0}\mathbf{z}}{\mathbf{a}^{i_0}\mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

Definirajmo

$$\mathbf{z}_1 := \mathbf{z} + \lambda_0\mathbf{q}.$$

Tada je $\mathbf{z}_1 \in P$ i indeks i_0 aktivan je u točki $\mathbf{z}_1$. Nadalje, kako je $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{a}^{i_0}\mathbf{q} \neq 0$, lako je pokazati da je redak $\mathbf{a}^{i_0}$ linearno nezavisan od redaka matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}$. Zato je rang matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{z}_1}$ strogo veći od ranga matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{z}}$. Ako je $r(\mathbf{A}_{\mathbf{z}_1}) < n$, nastavljamo taj postupak sve dok u konačno mnogo koraka ne dođemo do točke $\mathbf{z}_k \in P$ takve da je $r(\mathbf{A}_{\mathbf{z}_k}) = n$, što će značiti da je $\mathbf{z}_k$ vrh poliedra P.

(b) Koristit ćemo oznake uvedene pod *(a)*. Neka je $\mathbf{v}$ vrh poliedra P. Definirajmo vektor

$$\mathbf{c}^T := \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \mathbf{a}^i$$

kao sumu onih redaka $\mathbf{a}^i$ matrice $\mathbf{A}$ koji su aktivni u vrhu $\mathbf{v}$ ($\mathbf{a}^i\mathbf{v} = b_i$). Tada je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{v} = \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \mathbf{a}^i\mathbf{v} = \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} b_i.$$

Nadalje, kako je $\mathbf{A}_{\mathbf{v}}$ regularna matrica (jer je $r(\mathbf{A}_{\mathbf{v}}) = n$) te kako je $\mathbf{a}^i\mathbf{v} = b_i$ za svaki $i \in I_{\mathbf{v}}$, za svaku drugu točku $\mathbf{x} \in P \backslash \{\mathbf{v}\}$ postoji barem jedan indeks $i \in I_{\mathbf{v}}$ takav da je $\mathbf{a}^i\mathbf{x} < b_i$ i zato je

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \mathbf{a}^i\mathbf{x} < \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} b_i = \mathbf{c}^T\mathbf{v}.$$

Obratno, pretpostavimo da postoji $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ takav da je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{v}$ za svaki $\mathbf{x} \in K \backslash \{\mathbf{v}\}$. Neka je $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{v}\}$. Tada je

$$H \cap P = \{\mathbf{v}\} \quad \text{i} \quad P \backslash \{\mathbf{v}\} \subseteq H^- \backslash H,$$

što nam govori da je $\{\mathbf{v}\}$ izložena stranica poliedra P. Prema tvrdnji *(a)* propozicije 5.7., $\mathbf{v}$ jest vrh poliedra P. ■

6.12. PRIMJEDBA
Tvrdnja *(b)* iz prethodnog korolara govori nam da je $\mathbf{v}$ vrh poliedra P onda i samo onda ako je $\{\mathbf{v}\}$ izložena stranica od P, tj. ako u točki $\mathbf{v}$ postoji potporna hiperravnina (od P) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \beta\}$ takva da je $P \cap H = \{\mathbf{v}\}$ i $P \backslash \{\mathbf{v}\} \subseteq H^- \backslash H$.

6.13. KOROLAR
Neprazan poliedar

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

ima vrh.

Dokaz. Zapišimo poliedar P u obliku

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}.$$

Kako je

$$r\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right) = n,$$

prema tvrdnji *(a)* teorema 6.11. poliedar P ima vrh. ■

Prema teoremu 5.44., neprazan, zatvoren i konveksan skup ima ekstremalnu točku onda i samo onda ako on ne sadržit nijedan pravac. Kako je svaki poliedar zatvoren i konveksan, ta tvrdnja vrijedi i za poliedre. Zbog izuzetne važnosti te tvrdnje u teoriji linearnog programiranja, formulirat ćemo je kao sljedeći teorem i dokazati na vrlo jednostavan način.

6.14. TEOREM
Neka je

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

neprazan poliedar. Poliedar P ima vrh ($\operatorname{ext} P \neq \emptyset$) *onda i samo onda ako P ne sadrži nijedan pravac.*

Dokaz. Prema tvrdnji *(a)* teorema 6.11. poliedar P ima vrh onda i samo onda ako je $r(\mathbf{A}) = n$, tj. ako su linearno nezavisni stupci matrice $\mathbf{A}$. Stupci matrice $\mathbf{A}$ linearno su nezavisni onda i samo onda ako ne postoji $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, takav da je $\mathbf{Aq} = \mathbf{0}$, a to je onda i samo onda ako P ne sadrži nijedan pravac. ■

Prije iskaza sljedećeg teorema korisno je vratiti se na str. 56 i podsjetiti se definicije baričnog dopustivog rješenja.

6.15. Teorem

Neka je $\mathbf{v} \in P$, *gdje je* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *poliedar oblika*

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \textit{gdje su } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \textit{ i } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m.$$

Točka $\mathbf{v}$ *je vrh poliedra* P *ako i samo ako je* $\mathbf{v}$ *bazično dopustivo rješenje sustava ograničenja koji definira* P, *tj. onda i samo onda ako su linearno nezavisni stupci matrice* $\mathbf{A}$ *koji odgovaraju strogo pozitivnim koordinatama vektora* $\mathbf{v}$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da rang matrice $\mathbf{A}$ iznosi m; u suprotnom iz sustava jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ izbacimo suvišne jednadžbe. Ako je $m = n$, tvrdnja teorema očigledno vrijedi. Zato nadalje pretpostavimo da je $m < n$. Nadalje, kako bismo mogli iskoristiti teorem 6.10., označimo s I_n jediničnu matrica reda n i zapišimo poliedar P u obliku

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}.$$

Neka je $\mathbf{v} = [v_1, \ldots, v_n]^T \in P$. Tada je $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ i $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$. Zato je

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{a}_i, \qquad v_i \geq 0,$$

tj. $\mathbf{b}$ jest linearna kombinacija stupaca matrice $\mathbf{A}$; nenegativni koeficijenti te kombinacije koordinate su vektora $\mathbf{v}$. Novom numeracijom stupaca matrice $\mathbf{A}$ i koordinata točke $\mathbf{v}$, ako je to potrebno, možemo postići da je

$$v_i = 0 \text{ za } i \leq s,\ v_i > 0 \text{ za } i > s.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}^i \mathbf{v} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ &\mathbf{e}^i \mathbf{v} = v_i = 0, \quad i = 1, \ldots, s \\ &\mathbf{e}^i \mathbf{v} = v_i > 0, \quad i = s+1, \ldots, n, \end{aligned}$$

gdje $\mathbf{e}^i$ označava i-ti redak jedinične matrice $\mathbf{I}_n$. Neka je

$$\hat{\mathbf{A}} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^s \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & a_{m,s+1} & \dots & a_{mn} \\ \hdashline 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & \dots & 0 & a_{1,s+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,s+1} & \dots & a_{mn} \\ \hdashline 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right].$$

matrica sustava aktivnih ograničenja u točki $\mathbf{v}$. Dakle, matrica $\hat{\mathbf{A}}$ dobiva se tako da matrici $\mathbf{A}$ pripišemo prvih s redaka $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^s$ jedinične matrice n-tog reda; istaknuta submatrica jedinična je matrica $\mathbf{I}_s$ reda s; znakom $\sim$ koji se nalazi između gore navedenih dviju matrica naglasili smo da one imaju isti rang, što je lako provjeriti elementarnim operacijama nad recima matrice $\hat{\mathbf{A}}$. Neka je $r(\hat{\mathbf{A}})$ rang matrice $\hat{\mathbf{A}}$. Lako je zaključiti da je $r(\hat{\mathbf{A}}) = n$ ako i samo ako su linearno nezavisni stupci $\mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ matrice $\mathbf{A}$. Drugim riječima, $r(\hat{\mathbf{A}}) = n$ ako i samo ako je $\mathbf{v}$ bazično dopustivo rješenje.

Prema tvrdnji (a) teorema 6.10. točka $\mathbf{v}$ vrh je od P ako i samo ako je $r(\hat{\mathbf{A}}) = n$. Ekvivalentno, $\mathbf{v}$ jest vrh od P ako i samo ako su linearno nezavisni stupci $\mathbf{a}_{s+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ matrice $\mathbf{A}$ ■

Ako je poliedar P zadan u standardnom obliku i ako odgovarajući LP problem ima rješenje, prema tvrdnji *(ii)* teorema 3.13. optimalno rješenje dostiže se u vrhu poliedra P. Sljedeći teorem govori nam da ta tvrdnja vrijedi za svaki poliedar s barem jednim vrhom.

6.16. Teorem

Neka poliedar

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

ima vrh, tj. $\operatorname{ext} P \neq \emptyset$*. Nadalje, neka je* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$*.*

Ako postoji točka $\mathbf{z} \in P$ *takva da je*

$$M := \inf_{\mathbf{x} \in P} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{z},$$

onda postoji vrh $v \in \operatorname{ext} P$ *takav da je*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{v} = M.$$

Dokaz. Kako je $\operatorname{ext} P \neq \emptyset$, poliedar P ne sadrži nijedan pravac (teorem 6.14.). Zato i neprazan poliedar

$$Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = M\} \cap P$$

ne sadrži nijedan pravac pa stoga on ima vrh $\mathbf{v}$ (teorem 6.14.). Pokažimo da je $\mathbf{v}$ vrh i poliedra P i time će dokaz biti gotov. Zaista, ako $\mathbf{v} \notin \operatorname{ext} P$, onda je $r(\mathbf{A_v}) < n$ (tvrdnja *a)* teorema 6.10.), pa zato postoji $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\mathbf{A_v q} = \mathbf{0}$, a to znači da se može odabrati dovoljno malen $\varepsilon > 0$ takav da bude $\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{q} \in P$ i $\mathbf{v} - \varepsilon\mathbf{q} \in P$. Kako je $\mathbf{c}^T\mathbf{v} = M$, mora biti $\mathbf{c}^T\mathbf{q} = 0$ i zato je

$$\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{q} \in Q \quad \& \quad \mathbf{v} - \varepsilon\mathbf{q} \in Q.$$

Zbog

$$\mathbf{v} = \tfrac{1}{2}[(\mathbf{v} - \varepsilon\mathbf{q}) + (\mathbf{v} + \varepsilon\mathbf{q})],$$

$\mathbf{v}$ ne bi bila ekstremalna točka od Q, što je kontradikcija. ■

6.17. Korolar

Ako je γ brid poliedra $P \subseteq \mathbb{R}^n$, onda je γ jedan od sljedećih triju skupova:

(i) segment, $\gamma = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, gdje su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vrhovi od P,

(ii) zatvorena zraka, $\gamma = \{\mathbf{v} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}$, gdje su $\mathbf{v}$ vrh od P i $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ ili

(iii) pravac, $\gamma = \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, gdje su $\mathbf{x}_0 \in P$ i $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$.

Dokaz. Za dokaz te tvrdnje iskoristit ćemo propoziciju 5.11. i tvrdnju d) teorema 5.16.

Poliedar P zatvoren je konveksan skup, a brid γ jest po definiciji njegova 1-dimenzionalna ekstremalna stranica. Prema tvrdnji d) teorema 5.16., brid γ zatvoren je skup. Dakle, γ jest 1-dimenzionalan, zatvoren i konveksan podskup od P. Moguća su dva slučaja: γ jest omeđen ili je γ neomeđen skup. Ako je γ omeđen, zbog zatvorenosti i konveksnosti on je oblika $\gamma = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$, gdje su $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P$. Kako su $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ ekstremalne točke od γ, prema propoziciji 5.11. rubne točke $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ vrhovi su od P. Ako je γ neomeđen skup, zbog zatvorenosti i konveksnosti γ mora biti zraka

$$\gamma = \{\mathbf{v} + \lambda\mathbf{q} : \lambda \geq 0\}, \quad \mathbf{v} \in P,\ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$$

ili pravac

$$\gamma = \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbf{x}_0 \in P,\ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}.$$

Pri tome, u slučaju da je γ zraka s početkom u točki $\mathbf{v} \in P$ koja je njezina ekstremalna točka, $\mathbf{v}$ jest vrh od P (propozicija 5.11.). ■.

6.18. Definicija

Za dva različita vrha $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ poliedra P kažemo da su susjedni ako je segment $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ brid poliedra P.

6.2. Dekompozicija poliedarskog skupa

Prema Motzkinovom teoremu 1.38. o dekompoziciji poliedra, neprazan skup $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedar je ako i samo ako postoje politop $Q = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ i konačno generiran konus $C = \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\}$ takvi da je

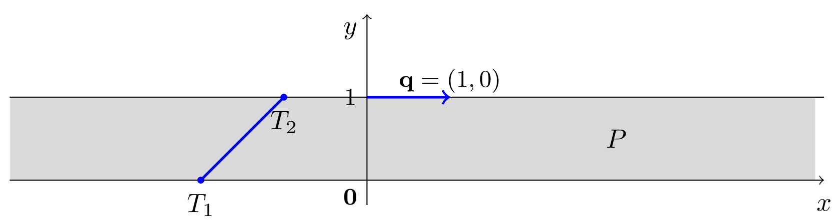
$$\begin{aligned} P &= Q + C \\ &= \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\}. \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su točke $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ konveksno nezavisne, tj. da se ni jedna od njih ne može prikazati kao konveksna kombinacija preostalih; u suprotnom ju eliminiramo iz skupa generatora politopa Q i umanjeni skup generatora generira isti politop Q. Tada su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ vrhovi politopa Q, ali ne nužno i vrhovi poliedra P; čak više, poliedar P ne mora imati vrh, što ilustriramo u sljedećem primjeru. Osim toga, gornji prikaz poliedra nije jedinstven, što također ilustriramo u sljedećem primjeru. Isto tako, možemo pretpostaviti da se ni jedan vektor $\mathbf{q}_j$ ne može prikazati kao konusna kombinacija preostalih vektora $\mathbf{q}_i$.

6.19. Primjer. Neka je P poliedar sa slike 32. Uočimo da ga možemo zapisati kao

$$P = \operatorname{conv}\{T_1, T_2\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}, \qquad \mathbf{q} = (1, 0),$$

gdje je T_1 bilo koja točka s x-osi, a T_2 bilo koja točka s pravca $y = 1$. Dakle, dekompozicija tog poliedra nije jedinstvena. Taj poliedar nema vrhova.



Slika 32. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$.

Za poliedre koji imaju vrh (ekvivalentno, ne sadrže nijedan pravac) vrijedi sljedeće profinjenje Motzkinova teorema 1.38. o dekompoziciji. Premda je to profinjenje specijalan slučaj teorema 5.44., zbog izuzetne važnosti dekompozicije u teoriji linearnog programiranja dokaz ćemo napraviti i na drugi način, bez zahtjevne teorije konveksnosti.

6.20. Teorem
Ako poliedar

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

ima vrh, onda je

$$P = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} P) + \operatorname{rec} P.$$

Dokaz. Direktno iz definicije recesivnog konusa $\operatorname{rec} P$ slijedi $\operatorname{conv}(\operatorname{ext} P) + \operatorname{rec} P \subseteq P$. Dokaz obratne inkluzije provest ćemo silaznom indukcijom po rangu matrice aktivnih ograničenja u točki $\mathbf{x} \in P$. Zato prvo pretpostavimo da je $\mathbf{x} \in P$ i $r(\mathbf{A_x}) = n$. Prema tvrdnji *(a)* teorema 6.10. točka $\mathbf{x}$ vrh je poliedra P, a kako je $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$ i $\mathbf{0} \in \operatorname{rec} P$, očito je $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} P) + \operatorname{rec} P$. Time smo pokazali da tvrdnja vrijedi za svaku točku $\mathbf{x} \in P$ takvu da je $r(\mathbf{A_x}) = n$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaku točku $\mathbf{x} \in P$ takvu da je $k \leq p = r(\mathbf{A_x}) \leq n$. Treba pokazati da tvrdnja vrijedi za svaku točku $\mathbf{x} \in P$ za koju je $r(\mathbf{A_x}) = k - 1$. Neka je $\mathbf{x} \in P$ takva da je $r(\mathbf{A_x}) = k - 1$. Kako je $r(\mathbf{A_x}) < n$, postoji $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, takav da je $\mathbf{A_x q} = \mathbf{0}$. Budući da po pretpostavci poliedar P ima vrh, P ne sadrži nijedan pravac (teorem 6.14.). Kako pravac $\{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{q} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ nije sadržan u P, mora biti

$$\mathbf{a}^i \mathbf{q} \neq 0 \quad \text{za barem jedan } i \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\mathbf{x}) \,.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{a}^i \mathbf{q} > 0$ za barem jedan $i \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\mathbf{x})$. Moguća su tri slučaja: (i) $\mathbf{Aq} \geq \mathbf{0}$, (ii) $\mathbf{Aq} < \mathbf{0}$ ili (iii) $\mathbf{Aq}$ ima strogo pozitivnih i strogo negativnih koordinata.

(i) Neka je

$$\begin{aligned}
\tau_0 &:= \max\{\tau \in \mathbb{R} : \mathbf{x} + \tau \mathbf{q} \in P\} \\
&= \max\{\tau \in \mathbb{R} : \mathbf{a}^i(\mathbf{x} + \tau \mathbf{q}) \leq b_i \text{ za svaki } i \in \{1, \ldots, m\} \backslash I(\mathbf{x})\} \\
&= \min\left\{ \frac{b_i - \mathbf{a}^i \mathbf{x}}{\mathbf{a}^i \mathbf{q}} : \mathbf{a}^i \mathbf{q} > 0 \right\} \\
&= \frac{b_{i_0} - \mathbf{a}^{i_0} \mathbf{x}}{\mathbf{a}^{i_0} \mathbf{q}} > 0.
\end{aligned}$$

Definirajmo

$$\mathbf{x}_0 := \mathbf{x} + \tau_0 \mathbf{q}.$$

Tada je $\mathbf{x}_0 \in P$ i indeks i_0 aktivan je u točki $\mathbf{x}_0$. Nadalje, kako je $\mathbf{A_x q} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{a}^{i_0} \mathbf{q} \neq 0$, lako je pokazati da je redak $\mathbf{a}^{i_0}$ linearno nezavisan od redaka matrice $\mathbf{A_x}$. Zato je rang matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_0}$ strogo veći od ranga matrice $\mathbf{A_x}$. Po induktivnoj je pretpostavci $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} P) + \operatorname{rec} P$, tj. $\mathbf{x}_0$ oblika je

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_0, \qquad \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \mathbf{A d}_0 \leq \mathbf{0}.$$

Zato je

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \tau_0 \mathbf{q} = \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}, \qquad \mathbf{d} := \mathbf{d}_0 - \tau_0 \mathbf{q}.$$

Kako je $\mathbf{Ad}_0 \leq \mathbf{0}$, $\tau_0 > 0$ i $\mathbf{Aq} \geq \mathbf{0}$, očito je $\mathbf{Ad} \geq \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{d} \in \operatorname{rec} P$.

(ii) U tom je slučaju $\mathbf{A}(-\mathbf{q}) > 0$. Dalje se postupa kao pod (i).

(iii) Kombinirat ćemo prethodna dva slučaja. Neka je

$$\tau_1 := \min\Big\{\frac{b_i - \mathbf{a}^i\mathbf{x}}{\mathbf{a}^i\mathbf{q}} : \mathbf{a}^i\mathbf{q} > 0\Big\}, \qquad \mathbf{x}_1 := \mathbf{x} + \tau_1\,\mathbf{q},$$
$$\tau_2 := \min\Big\{\frac{b_i - \mathbf{a}^i\mathbf{x}}{-\mathbf{a}^i\mathbf{q}} : -\mathbf{a}^i\mathbf{q} > 0\Big\}, \qquad \mathbf{x}_2 := \mathbf{x} - \tau_2\,\mathbf{q}.$$

Lako se provjeri da $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ leže u poliedru P te da su rangovi matrica $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1}$ i $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_2}$ strogo veći od ranga matrice $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$. Po induktivnoj pretpostavci $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ oblika su

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_1, \qquad \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ \mathbf{A}\mathbf{d}_1 \le \mathbf{0},$$
$$\mathbf{x}_2 = \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \mu_i \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_2, \qquad \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \mu_i = 1,\ \mu_i \ge 0,\ \mathbf{A}\mathbf{d}_2 \le \mathbf{0}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{x}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{x}_2 \\
&= \tfrac{\tau_2}{\lambda_1+\tau_2} \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \lambda_i \mathbf{v}_i + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2} \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \mu_i \mathbf{v}_i + \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_2 \\
&= \sum_{v_i \in \operatorname{ext} P} \big(\tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\lambda_i + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mu_i\big)\mathbf{v}_i + \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_2,
\end{aligned}$$

odakle vidimo da tvrdnja teorema vrijedi za $\mathbf{d} = \tfrac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_1 + \tfrac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2}\mathbf{d}_2$. ■

Još neke informacija o dekompoziciji poliedra na politop i poliedarski konus daje nam sljedeći teorem.

6.21. Teorem

Neka je

$$P = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\}$$

bilo koja dekompozija nepraznog poliedra $P \subseteq \mathbb{R}^n$ na politop

$$Q = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

i konačno generiran konus

$$C = \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\}.$$

Tada vrijedi:

(a) $C = \operatorname{rec} P$.

(b) Svaka ekstremalna točka od P jednaka je nekoj točki $\mathbf{v}_j$ koja se ne može prikazati kao konveksna kombinacija preostalih točaka $\mathbf{v}_i$.

Dokaz. *(a)* $C+C=C$ jer je C konveksni konus. Zato i kako je $P=Q+C$, vrijedi

$$P+C \subseteq Q+C+C \subseteq Q+C=P,$$

odakle slijedi $C \subseteq \operatorname{rec} P$. Preostaje dokazati obratnu inkluziju $\operatorname{rec} P \subseteq C$. U tu svrhu pretpostavimo da je $\mathbf{q} \in \operatorname{rec} P$. Neka je $\mathbf{x}_0$ bilo koja točka iz P. Tada je $\mathbf{x}_0 + k\mathbf{q} \in P$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa postoje točke $\mathbf{p}_k \in Q$, $\mathbf{c}_k \in C$ takve da je

$$\mathbf{x}_0 + k\mathbf{q} = \mathbf{p}_k + \mathbf{c}_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Politop Q kompaktan je pa niz $(\mathbf{p}_k)$ ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je taj niz konvergentan. Neka je $\lim_{k\to\infty} \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_0 \in Q$. Tada je

$$\lim_{k\to\infty} \|k\mathbf{q} - \mathbf{c}_k\| = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{p}_k - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{x}_0\|,$$

odakle dobivamo $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{q} - (1/k)\mathbf{c}_k\| = 0$, odnosno, ekvivalentno, $(1/k)\mathbf{c}_k \to \mathbf{q}$. Kako je $(1/k)\mathbf{c}_k \in C$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, zatvorenost skupa C povlači $\mathbf{q} \in C$.

(b) Svaka je ekstremalna točka $\mathbf{x}_0$ poliedra P oblika

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{p} + \mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\big(\overbrace{(\mathbf{p} + \tfrac{1}{2}\mathbf{c})}^{\in P} + \overbrace{(\mathbf{p} + \tfrac{3}{2}\mathbf{c})}^{\in P}\big), \qquad \mathbf{p} \in Q, \mathbf{c} \in C.$$

Kako je $\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{c} \neq \mathbf{p} + \frac{3}{2}\mathbf{c}$ ako i samo ako je $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, te kako je $\mathbf{x}_0$ ekstremalna točka, mora biti $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Dakle, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p} \in Q$. Po definiciji ekstremalne točke, $\mathbf{x}_0$ ne može se prikazati kao konveksna kombinacija preostalih točaka iz Q pa zato $\mathbf{x}_0$ mora biti jednaka nekoj točki $\mathbf{v}_j$ koju nije moguće prikazati kao konveksnu kombinaciju preostalih točaka $\mathbf{v}_i$. ■

Vrijedi sljedeće poopćenje teorema 6.16. na konveksne funkcije:

6.22. Teorem
Neka je

$$P = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\}$$

dekompozicija nepraznog poliedra $P \subseteq \mathbb{R}^n$ na politop $Q = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ i konus $C = \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\}$, a $f\colon P \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Ako je

$$\sup_{\mathbf{x}\in P} f(\mathbf{x}) < \infty,$$

onda f svoj globalni maksimum postiže u nekoj točki $\mathbf{v}_i \in Q$.

Dokaz. Neka je $M := \sup_{\mathbf{x}\in P} f(\mathbf{x})$. Svaki $\mathbf{x} \in P$ jest oblika

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_i \mathbf{q}_j, \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Nadalje, zbog konveksnosti funkcije f za svaki $t \geq 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f\Big((1-\tfrac{1}{t})\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{v}_i + \tfrac{1}{t}\big(\mathbf{x} + (t-1)\sum_{j=1}^{s}\mu_i\mathbf{q}_j\big)\Big) \\ &\leq (1-\tfrac{1}{t})f\Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{v}_i\Big) + \tfrac{1}{t}f\Big(\mathbf{x} + (t-1)\sum_{j=1}^{s}\mu_i\mathbf{q}_j\Big) \\ &\leq (1-\tfrac{1}{t})f\Big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{v}_i\Big) + \tfrac{M}{t}. \end{aligned}$$

Uzmemo li limes kad $t \to \infty$, dobivamo

$$f(\mathbf{x}) \leq f\big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{v}_i\big).$$

Nadalje, primjenom Jensenove nejednakosti dobivamo

$$f(\mathbf{x}) \leq f\big(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\mathbf{v}_i\big) \leq \sum_{i=1}^{r}\lambda_i f(\mathbf{v}_i) \leq \max\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_r)\}.$$

■

Zadaci za vježbu

1. (Unutarnja i vanjska poliedarska aproksimacija) Odaberimo točke $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K$ s granice zatvorenog konveksnog skupa $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Neka je $H_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}_i\}$ potporna hiperravnina na skup C u točki $\mathbf{x}_i$. Definirajmo poliedre

   $$P_{in} := \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K\}, \quad P_{out} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, K\}.$$

   Provjerite da je $P_{in} \subseteq C \subseteq P_{out}$.

2. (Voronojev[21] opis poluprostora) Neka su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dvije različite točke iz $\mathbb{R}^n$. Definirajmo hiperravninu

   $$H_{\mathbf{c},\beta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \beta\},$$

   gdje su $\mathbf{c} := 2(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\beta := \mathbf{b}^T\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{a}$. Dokažite:

   (a) Skup svih točaka iz $\mathbb{R}^n$ koje su bliže (u euklidskoj metrici) točki $\mathbf{a}$ nego točki $\mathbf{b}$, tj. skup $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|\}$ poluprostor je $H^-_{\mathbf{c},\beta}$.

   (b) Skup svih točaka iz $\mathbb{R}^n$ koje su jednako udaljene od točaka $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ jest hiperravnina $H_{\mathbf{c},\beta}$,

[21] Georgy Feodosevich Voronoy (Гео́ргій Феодо́сійович Вороний) (1868. - 1908), ukrajinski matematičar.

(c) $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \in H_{\mathbf{c},\beta}$.

Uputa: (a)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 \le \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2 &\Leftrightarrow (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \le (\mathbf{x}-\mathbf{b})^T(\mathbf{x}-\mathbf{b})\\ &\Leftrightarrow 2(\mathbf{b}-\mathbf{a})^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{b}-\mathbf{a}^T\mathbf{a}.\end{aligned}$$

3. (Voronojevi skupovi) Zadane su točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^n$. Neka je V_0, skup točaka iz $\mathbb{R}^n$ koje su bliže točki $\mathbf{x}_0$ nego preostalim točkama $\mathbf{x}_i$, tj.

$$\begin{aligned}V_0 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\| \ \text{ za sve } i = 1,\ldots,K\}\\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = \min_{i\in\{0,1,\ldots,K\}} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|\}.\end{aligned}$$

Skup V_0 zovemo Voronojevo područje oko točke $\mathbf{x}_0$.

(a) Zapišete V_0 u obliku $V_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$, što će značiti da je V_0 poliedar.

(b) Obratno, za poliedar $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{K\times n}$, s nepraznim interiorom ($\operatorname{Int} P \neq \emptyset$) pronađite točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^n$ takve da P bude Voronojevo područje točke $\mathbf{x}_0$.

(c) Za svaki $k \in \{0,1,\ldots,K\}$, skup

$$V_k := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\| \quad \text{za sve } i \neq k\}$$

Voronojevo je područje oko točke $\mathbf{x}_k$. Skupovi $V_0, V_1, \ldots, V_K$ tvore poliedarsku dekmpoziciju skupa $\mathbb{R}^n$. Preciznije: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^K V_k$ i $\operatorname{Int} V_i \cap \operatorname{Int} V_j = \emptyset$ za $i \neq j$, tj. V_i i V_j mogu se sjeći samo u točkama sa svoje granice.

Uputa: (a) Prema 2. zadatku, točka $\mathbf{x}$ bliža je točki $\mathbf{x}_0$ nego točki $\mathbf{x}_i$ ako i samo ako je $2(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_0)^T\mathbf{x} \le \mathbf{x}_i^T\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0^T\mathbf{x}_0$.

$$\mathbf{A} = 2\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0\\ \vdots\\ \mathbf{x}_K-\mathbf{x}_0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0^T\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_0^T\mathbf{x}_0\\ \vdots\\ \mathbf{x}_K^T\mathbf{x}_K-\mathbf{x}_0^T\mathbf{x}_0\end{bmatrix}.$$

(b) Odaberite bilo koju točku $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{Int} P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{b}\}$. Neka je $\mathbf{x}_i$ zrcalna slika točke $\mathbf{x}_0$ u odnosu na hiperravninu $H_i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^i\mathbf{x} = b_i\}$, gdje $\mathbf{a}^i$ označava $i-$ti redak matrice $\mathbf{A}$. Drugim riječima, $\mathbf{x}_i$ oblika je $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{a}^i)^T$, pri čemu je realan broj λ takav da je udaljenost točke $\mathbf{x}_i$ do hiperravnine H_i jednaka udaljenosti točke $\mathbf{x}_0$ do H_i, tj.

$$\frac{b_i - \mathbf{a}^i\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{a}^i\|} = \frac{\mathbf{a}^i\mathbf{x}_i - b_i}{\|\mathbf{a}^i\|}.$$

Dobiva se da je $\lambda = \frac{2(b_i-\mathbf{a}^i\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}^i\|^2}$, pa je

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + \frac{2(b_i-\mathbf{a}^i\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}^i\|^2}(\mathbf{a}^i)^T.$$

4. Neka je $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ skup točaka iz $\mathbb{R}^n$. Dokažite: Ako je $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \max_{1\le i,j\le m} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$, onda su $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ekstremalne točke skupa $\operatorname{conv} E$.

5. Neka su P i Q poliedri iz $\mathbb{R}^n$. Dokažite: (a) $P + Q = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q\}$ poliedar. (b) Svaki vrh od $P + Q$ može se prikazati kao zbroj nekog vrha od P s nekim vrhom od Q.

   Uputa: (a) Neka je
$$M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{x} \in P, \mathbf{y} \in Q, \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\}.$$
   Pretpostavimo da je P definiran s n_1, a Q s n_2 linearnih ograničenja. Tada je M definiran s $n_1 + n_2 + n$ linearnih ograničenja: n_1 ograničenja od P, n_2 ograničenja od Q i n ograničenja od zbroja $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$; dakle, M jest poliedar. Neka je preslikavanje $\pi : \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^n$ definirano formulom $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}$. Uočite da je $\pi(M) = P + Q$. Također uočite da je π kompozicija vanjskih projekcija. Zato, višestrukom primjenom ($2n$ puta!) teorema 1.32. dobivamo da je $\pi(M)$ poliedar.

   (b) Neka je $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ vrh od $P + Q$. Pokažimo da je $\mathbf{x}$ vrh od P. U suprotnom bi postojale točke $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in P$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, i realan broj $\lambda \in (0, 1)$ takvi da je $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$. Zbog toga bi bilo
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2 + \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{y})(1 - \lambda)(\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}),$$
   a kako je $\mathbf{x}_1 + \mathbf{y} \neq \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}$, to bi značilo da $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ nije vrh od $P + Q$.

6. Neka je
$$P = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\} + \operatorname{cone}\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_s\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
   Definirajmo konus
$$C := \operatorname{cone}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}\mathbf{v}_r\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1\\0\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}\mathbf{q}_s\\0\end{bmatrix}\right\}$$
   Pokažite da je $\mathbf{x} \in P$ onda i samo onda ako je $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix} \in C$. Za konus C kaže se da je dobiven homogenizacijom poliedra P.

Literatura

[1] A. Barvinok, *A Course in Convexity*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 54, American Mathematical Society, Providence-Rhode Island, 2002.

[2] D. P. Bertsekas, A. Nedić, A. E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientific, Belmont-Massachusetts, 2003.

[3] D. Bertsimas, J.N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, Belmont-Massachusetts, 1997.

[4] L. Čaklović, *Geometrija linearnog programiranja*, Element, Zagreb, 2010.

[5] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1998.

[6] G. Dahl, *An Introduction to Convexity, Polyhedral Theory and Combinatorial Optimization*, University of Oslo, Oslo, 1997.

[7] M. Florenzano, C. Le Van, *Finite Dimensional Convexity and Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[8] J. Gallier, *Geometric Methods and Applications: For Computer Science and Engineering*, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2011.

[9] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Volume 221, 2nd edition, Springer-Verlag, 2003.

[10] O. Güler, *Foundations of Optimization*, Springer, New York, 2010.

[11] D. Jukić, *Realna analiza*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[12] I. Kuzmanović, K. Sabo, *Linearno programiranje*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2016.

[13] D. G. Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison Wesley, Reading, MA, 1984.

[14] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.

[15] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton-New Jersey, 1970.

[16] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[17] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, J. Wiley & Sons, Chichester, 1986.

[18] J. Stoer, C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1970.

[19] H. Tuy, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 1988.

[20] E. Torgersen, *Comparison of Statistical Experiments*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Volume 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[21] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer-Verlag, 1996.

[22] R.J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3rd edition, Springer, New York, 2008.

[23] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, New York-Tokio, 1994.

Kazalo

1. Dattoro ConvexGeometry.pdf str 226 tazne primjene LP problema, narocito norme
2. notes.pdf str 14, lijep dokaz da je bfs onda i samo onda ako je extremalna toccka
3. Vrhovi_Poliedra_Pogledati.pdf str 19. ima lijepo za extremalne recesivne smjerove
4. Soltan V pdf je prepun zadataka
5. George_B._Dantzig,_Mukund_N._Thapa_Linear_Programming_Theory_and_extensions_Volume_2_2003.pdf
   str. 17-isto kao pod 2. notes.pdf
6. Danas_5.pdf str 6. Isto kao pod 2 i 5
7. Danas_2.pdf str 15. Isto kao pod 2 i 5 i 6
8. Andreasson, Evgrafov, Patriksson. An introduction to continuous optimization.pdf str 218 (227)
   Inace, svasta ima