Dragana Jankov Maširević

Teorija odlučivanja

Udžbenik

Osijek, 2022.

D. Jankov Maširević – Teorija odlučivanja

Izdavač:
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku
Trg Ljudevita Gaja 6, Osijek

Odgovorna osoba izdavača:
Prof. dr. sc. Kristian Sabo

Recenzenti:
Izv. prof. dr. sc. Tomislav Burić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva
Izv. prof. dr. sc. Zoran Tomljanović, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku

Lektorica:
Marina Tomić, mag. educ. philol. croat.

Tehnička obrada:
Izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Mjesec i godina objavljivanja publikacije:
rujan, 2022.

CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 150610096.

ISBN 978-953-8154-19-5

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Suglasnost za izdavanje ovog sveučilišnog udžbenika donio je Senat Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku na 8. sjednici u akademskoj godini 2021./2022. održanoj 29. lipnja 2022. godine pod brojem 17/22.

Udžbenik se tiska uz novčanu potporu Ministarstva znanosti i obrazovanja.

Tisak:
Studio HS Internet d.o.o., Osijek

Sadržaj

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namijenjen je u prvom redu studentima Odjela za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku kao dodatna pomoć pri pripremanju za polaganje ispita iz kolegija Teorija odlučivanja. Materija je podijeljena u sedam poglavlja: *Uvod u teoriju odlučivanja*, *Poznati problemi odlučivanja*, *Tablice odlučivanja*, *Preferencije i funkcije vrijednosti*, *Stabla odlučivanja*, *Hijerarhijsko odlučivanje* te *O višekriterijskom odlučivanju.*

Na kraju udžbenika nalaze se popis literature i kazalo pojmova. U svim poglavljima, osim zadnjeg, teorijski dio ilustriran je mnoštvom primjera, a na kraju svakog od tih poglavlja dani su zadaci za samostalno utvrđivanje izloženog gradiva i proširivanje znanja.

Posebno zahvaljujem recenzentima izv. prof. dr. sc. Zoranu Tomljanoviću i izv. prof. dr. sc. Tomislavu Buriću, koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama pomogli da mnogi dijelovi teksta budu pregledniji i razumljiviji.

Veliko hvala i studentima 1. godine diplomskog studija Financijske matematike i statistike te Matematike i računarstva (generacija 2020./2021.), koji su me, pažljivim iščitavanjem radne verzije ovog udžbenika, upozorili na zaostale pogreške i propuste te su svojim komentarima doprinijeli kvaliteti udžbenika i zanimljivoj priči koja stoji iza pojedinih riješenih primjera.

Također, unaprijed zahvaljujem svima koji mi ukažu na pogrešku ili propust bilo koje vrste i predlože ispravak ili poboljšanje.

Osijek, lipanj, 2022.

1. Uvod u teoriju odlučivanja

Kroz povijest, postupak donošenja odluka bio je uvijek jedan od ključnih procesa na kojemu se zasniva organizacija čovjekovog vremena, kako s privatnog tako i s poslovnog aspekta. Svakim danom donosimo odluke, bile one male poput što jesti za ručak ili kada ići na spavanje do onih većih kao što su kupnja kuće ili auta, promjena radnog okruženja i slično.

U današnjim modernim i užurbanim vremenima javlja se sve veća potreba za kvalitetnim donošenjem odluka u što kraćem vremenu iako razvoj savršene metode za racionalno donošenje odluka u svakodnevnom životu i dalje ostaje nedostižan cilj, bez obzira na mnogobrojne znanstvene pristupe koji su se bavili tim problemom (vidi npr. [23, 24, 71, 87, 91]).

Nastanak teorije odlučivanja često se veže uz nastanak teorije vjerojatnosti [83] čiji početci sežu u 17. stoljeće, kada su B. Pascal i P. de Fermat pokušali dati matematičko rješenje problema koji je Pascalu 1654. godine postavio kockar Chevalier de Méré, a odnosi se na izračunavanje vjerojatnosti dobivanja najmanje jednog para šestica, ako se dvije simetrične igraće kockice bace 24 puta [13, 42].

Nadalje, vrsni matematičar D. Bernoulli predstavio je 1738. ideju o vrijednosti ishoda kao pojma koji govori u kojoj je mjeri, s točke gledišta donositelja odluke, neki ishod dobar ili loš te je, dodatno, prvi predložio zamjenu koncepta *očekivane vrijednosti* s konceptom *očekivane korisnosti*, koja će se pokazati kao veoma bitan pojam u teoriji odlučivanja.

Znanstveni razvoj teorije odlučivanja, u pravom smislu riječi, počinje tek u tridesetim godinama 20. stoljeća; preciznije, 1931. kada počinje aksiomatska faza teorije odlučivanja, nakon objavljenog članka F. Ramseya o teoriji vjerojatnosti koji sadrži osam aksioma namijenjenih kako bi pomogli racionalnim donositeljima odluka prilikom izbora između nesigurnih inačica odluke. Prema Ramseyu, poštivanje navedenih aksioma omogućuje svim mogućim ishodima implicitno dodjeljivanje numeričke vrijednosti i korisnosti, što će dovesti do maksimizacije očekivane korisnosti.

U povijesti nastanka teorije odlučivanja važnu ulogu odigrao je i razvoj *teorije igara* (engl. *game theory*) i *ekonomske teorije korisnosti* (engl. *economic utility theory*), koje su razvili matematičar J. von Neumann i ekonomist O. Morgenstern 1944. godine [55], s namjerom prevođenja svakodnevnog racionalnog ponašanja u kvantitativne izraze koji su zatim doveli do mnogih neočekivanih rezultata i pokrenuli još više otvorenih pitanja. Von Neumann i Morgenstern potvrdili su Ramseyeve aksiome te su pokazali da je svaki donositelj odluke koji postupa u skladu s njima u skladu i s načelima maksimizacije očekivane korisnosti. S obzirom da teorija igara nije predmet ovog udžbenika, a često se, u velikoj mjeri, isprepliće s teorijom odlučivanja, u Poglavlju 2. objasnit ćemo ukratko što ona proučava te odgovoriti na često pitanje o glavnim razlikama između tih dviju teorija.

Također, prekretnicu za razvoj i praktičnu primjenu teorije odlučivanja označilo je osnivanje *Društva za operacijska istraživanja* (engl. *the Operations Research Society*) 1950–ih godina, kao i *Instituta za menadžerske znanosti* (engl. *the Institute of Management Sciences*) te nešto kasnije i *Instituta za znanost o odlukama* (engl. *Decision Sciences Institute*) (za više detalja vidi [94, str. 317]).

Još su se 1950–ih i 1960-ih godina temelji za rješavanje problema teorije odlučivanja bazirali na matematičkim modelima i algoritmima, što je i danas slučaj.

Krajem 1960-ih javljaju se nove ideje vezane uz područje analize odluka, koje se temelje na subjektivnoj vjerojatnosti i teoriji korisnosti, a koje postaju općeprihvaćene jer su uvedene od, u to vrijeme, najboljih stručnjaka u teoriji odlučivanja, kao što su, primjerice, Howard, Watson i Savage [36, 37, 80, 94, 98].

Različiti pristupi i spoznaje o procesu donošenja odluka proizlaze iz interdisciplinarnosti područja odlučivanja, jer se problematikom odlučivanja bave kako matematičari, tako i ekonomisti, psiholozi, politolozi te također i filozofi, sociolozi, inženjeri, statističari i informatičari [81, 83].

Matematičari su uglavnom usredotočeni na racionalne procedure i logične posljedice različitih pravila odlučivanja, koje su vezane uz to *kako bi ljudi trebali donositi odluke*; psiholozi su orijentirani na *razumijevanje načina na koji ljudi stvarno donose odluke*, tj. u kojoj je mjeri njihovo ponašanje usklađeno s racionalnim modelima; ekonomisti istražuju *primjenu modela odlučivanja na konkretnim problemima*; dok, na primjer, politologe zanimaju *pravila glasanja i ostali aspekti skupnog odlučivanja* [83].

Iako su mnogi tijekom godina predlagali različite podjele teorije odlučivanja, danas je najzastupljenija klasifikacija koju su predložili D. E. Bell, H. Raiffa i A. Tverski 1998. godine [4] i to na

- deskriptivne teorije odlučivanja
- normativne teorije odlučivanja i
- preskriptivne teorije odlučivanja.

Predložena podjela proizlazi iz dosadašnjih istraživanja procesa odlučivanja, gdje su najzastupljenija dva pristupa. Naime, određeni znanstvenici istražuju na koji se način psihološke osobine čovjeka odražavaju na njegovo donošenje odluka te se takav pristup temelji na teoriji koja se zove *deskriptivna teorija odlučivanja*, dok ostali istodobno pokušavaju utvrditi kako treba donositi odluke, tj. kako izabrati *najbolju* inačicu, a taj, drugi pristup, obuhvaćaju *normativna* i *preskriptivna teorija odlučivanja*. Sva tri pristupa imaju svoju vrijednost za praksu odlučivanja te o njima čitatelj može pročitati više, npr., u [83].

Višekriterijsko (*multikriterijsko*) donošenje odluka je jedno od najpoznatijih pristupa prilikom donošenja odluka te se ono, prema mnogim autorima (vidi, npr., [91, 96]) dijeli na *više–objektno* donošenje odluka (promatraju se problemi odlučivanja u kojima je prostor odlučivanja neprekidan (neprebrojiv)) i *više–atributno* (ponekad se koristi upravo i termin *višekriterijsko*) donošenje odluka (bazira se na probleme s diskretnim prostorom odlučivanja). I pored široke palete raznolikih metoda za višekriterijsko odlučivanje, sve one imaju neke zajedničke aspekte [15, 91] koji se ogledaju u dva osnovna pojma s kojima ćemo se upoznati u nastavku: *alternative* i *kriteriji*.

Istaknimo

- *Alternative* ćemo još zvati i *akcije*, a rjeđe i *objekti*
  te one predstavljaju različite mogućnosti, odnosno različite izbore akcija, koje su dostupne donositelju odluke (odlučitelju) u situaciji o kojoj treba odlučiti. U ovom udžbeniku smatrat ćemo da je skup alternativa konačan, kao što je i slučaj kod velikog broja autora.

- *Kriteriji*, koje još nazivamo i *atributi* te *stanja svijeta*,
  su zapravo faktori koji dodatno utječu na donošenje odluke. Preciznije, to su različiti kutevi gledanja na dane alternative.

  U slučajevima u kojima je broj kriterija velik (npr. više od desetak), kriteriji se mogu rasporediti na hijerarhijski način, što znači da se neki kriterij odredi kao glavni te on posljedično ima svoje podkriterije itd.
  Iako neke metode višekriterijskog odlučivanja uključuju i hijerarhijsku strukturu, većina njih pretpostavlja jednu razinu kriterija (bez hijerarhija), dok je hijerarhija zastupljena upravo u *hijerarhijskom tipu odlučivanja* o kojem će više riječi biti kasnije.

Ponekad je i za najjednostavnije probleme teško donijeti *pravu* odluku. Naime, neki donositelji odluke odluku mogu donijeti u trenutku, vodeći se samo svojom intuicijom, dok neki odlažu donošenje odluke dok ne ispitaju sve moguće opcije te razmisle i o posljedicama koje odluka nosi sa sobom. Za učinkovito donošenje odluka osoba mora biti u stanju predvidjeti ishod svake opcije te utvrditi koja je opcija najbolja za određenu situaciju, što danas svakako olakšava lak i brz pristup velikom broju informacija na koje je uvelike utjecao razvoj novih tehnologija, umreženost i novi načini komuniciranja [95].

Također, bitno je istaknuti da postoje *dva glavna pristupa u donošenju odluka*, a to su

- **Tablice odlučivanja**
  Alternative i *kriterije* raspoređujemo u tablicu. Ovaj pristup biti će detaljno opisan u nastavku, odnosno u poglavljima 2. i 3.

- **Hijerarhijsko odlučivanje**
  Ukoliko je situacija o kojoj trebamo donijeti odluku nešto kompliciranija, tablica odlučivanja može biti nepregledna te u tom slučaju kriterije i alternative raspoređujemo u takozvane *nivoe*, pri čemu odluke donosimo *nivo po nivo*. Ovaj tip odlučivanja detaljnije ćemo upoznati u Poglavlju 6.

2. Poznati problemi odlučivanja

U nastavku navodimo nekoliko poznatih i u literaturi često spomenutih primjera odlučivanja (vidi, npr., [19]), koji će nam također poslužiti i kao ilustrativni primjeri prilikom boljeg razumijevanja metoda i pripadnih aksioma odlučivanja s kojima ćemo se upoznati nešto kasnije.

2.1. PRIMJER. Marko je student *Odjela za matematiku* u Osijeku koji treba što prije dovršiti seminar iz kolegija *Teorija odlučivanja*, no baterija na laptopu prestala mu je raditi, subota je ujutro te hitno mora kupiti novu. Marko treba odlučiti hoće li kupiti bateriju u trgovini *Links* koja je odmah pored njegove zgrade, no tu je baterija znatno skuplja, ili u trgovini *Chipoteka* koja je udaljena od njegove zgrade čak dva kilometra, no u njoj može kupiti povoljniju bateriju. Također, mjesec je siječanj te je napolju poledica i postoji opasnost da se ozlijedi ukoliko se odluči ići do *Chipoteke*. Što Marko treba odlučiti ukoliko promatra odluku s materijalne strane?

Rješenje. Najprije trebamo odrediti koje su dane alternative te potom treba odabrati najbolju. S obzirom da Marko bira između *Linksa* i *Chipoteke*, to su dvije mogućnosti, odnosno alternative, dok su dani kriteriji koji su bitni prilikom donošenja odluke: hoće li se Marko ozlijediti ili ne. Dakle, pripadna tablica odlučivanja dana je s

	Marko se neće ozlijediti	Marko će se ozlijediti
Links	Marko je nepotrebno potrošio više novca	Marko je potrošio više, ali je izbjegao neugodnu ozljedu i troškove liječenja
Chipoteka	Marko je znatno manje potrošio	Marko se ozlijedio i potrošio više novaca na liječenje nego što je uštedio na bateriji

Tablica 1. Markova tablica odlučivanja

Da bi Marko donio odluku, treba dodijeliti neke vrijednosti danim događajima. Ukoliko, na primjer, s x označimo cijenu jeftinije baterije, s X cijenu skuplje baterije te s L cijenu liječenja, onda bi tablica odlučivanja mogla biti dana na sljedeći način (ukoliko pretpostavimo da Marka zanima samo materijalna strana odluke):

	Marko se neće ozlijediti	Marko će se ozlijediti
Links	X kuna	X kuna
Chipoteka	x kuna	$x + L$ kuna

Tablica 2. Markova tablica odlučivanja s materijalne strane

Čitatelj lako može zaključiti kako to nije najprecizniji pristup, jer smo problem donošenja odluke promatrali samo kroz materijalnu stranu, a zanemarili smo ostale faktore. □

Također, bitno je napomenuti da ponekad mislimo kako nam ne treba nikakva teorija da bismo donijeli *pravu* odluku jer se rješenje čini očito, stoga ćemo u nastavku pogledati nekoliko paradoksa koji će nas u tome razuvjeriti. Na samom kraju ovog poglavlja navodimo i poznati paradoks iz teorije igara (tzv. Zatvorenikova dilema) te nekoliko crtica o samoj teoriji koje će čitatelju pomoći u razumijevanju glavnih razlika između teorije odlučivanja i teorije igara.

2.1. Prvi paradoks: Minimizacija gubitka

Studenti *Odjela za matematiku* žele skupiti novac za apsolventsku ekskurziju te planiraju organizirati manifestaciju pomoću koje će to ostvariti. Oni razmišljaju između sportskog natjecanja i zabave uz ples i pjevanje karaoka u dvorištu *Odjela*. Prilikom donošenja odluke svjesni su da će prihod u oba slučaja ovisiti o vremenu te zbog jednostavnosti razmatraju dva slučaja –što ako vrijeme bude kišovito te što ako bude sunčano. Blagajnik studentskog zbora predvidio je prihode dane u Tablici 3:

Prihod	Kišovito vrijeme	Sunčano vrijeme
Sportsko natjecanje	630 kuna	900 kuna
Zabava	560 kuna	1120 kuna

Tablica 3. Minimizacija gubitka – tablica prihoda

Predsjednik studentskog zbora predlaže da se ide na sigurno, odnosno da se izabere sportsko natjecanje, s obzirom da garantira prihod od najmanje 630 kuna, dok zabava, u slučaju kišovitog vremena, garantira prihod od samo 560 kuna. Prije glasanja, blagajnik se sjetio (jer je odrađivao studentsku praksu u osiguravajućem društvu) da se može uzeti osiguranje, koje daje 350 kuna, u slučaju kišovitog vremena, dok sama polica osiguranja košta 75 kuna. Dakle, ukoliko studenti odluče uzeti osiguranje, mogući su ishodi dani u Tablici 4:

Prihod	Kišovito vrijeme	Sunčano vrijeme
Sportsko natjecanje	905 kuna	825 kuna
Zabava	835 kuna	1045 kuna

Tablica 4. Minimizacija gubitka – tablica prihoda, uz osiguranje

Ponovno, donoseći odluku na osnovu opcije koja garantira veći prihod, predsjednik studentskog zbora sada predlaže zabavu jer ona garantira najmanje 835 kuna, nasuprot 825 kuna kod sportskog natjecanja. Ali blagajnik, pun iskustva, primjećuje da bi izbor u svakoj od tablica trebao biti jednak.

Naime, u oba slučaja, ako pada kiša, natjecanje donosi 70 kuna više nego zabava, dok u slučaju sunčanog vremena zabava donosi 220 kuna više. Kako bi donijeli najbolju odluku, trebalo bi minimizirati gubitak. Preciznije, ne promatramo prihod nego koliko gubimo (manje dobivamo) od maksimuma u situaciji kišovitog te sunčanog vremena, što možemo vidjeti u Tablici 5.

Gubitak	Kišovito vrijeme	Sunčano vrijeme	Najveći gubitak
Sportsko natjecanje	0 kuna	220 kuna	220 kuna
Zabava	70 kuna	0 kuna	70 kuna

Tablica 5. Minimizacija gubitka – tablica gubitaka

Iz prethodnih podataka zaključujemo da je najbolje odlučiti se za zabavu jer je najveći gubitak kod zabave manji od najvećeg gubitka kod natjecanja.

No, blagajnik je i dalje u dilemi: treba li uzeti osiguranje ili ne? Kako bismo donijeli konačnu odluku, možemo primijetiti da problem koji muči blagajnika ima četiri alternative između kojih treba odlučiti (vidi Tablicu 6). Dakle, konačna je odluka organizirati

Prihod (gubitak)	Kišovito vrijeme	Sunčano vrijeme	Najveći gubitak
Sportsko natjecanje bez osiguranja	630 kuna (275 kuna)	900 kuna (220 kuna)	275 kuna
Zabava bez osiguranja	560 kuna (345 kuna)	1 120 kuna (0 kuna)	345 kuna
Sportsko natjecanje s osiguranjem	905 kuna (0 kuna)	825 kuna (295 kuna)	295 kuna
Zabava s osiguranjem	835 kuna (70 kuna)	1 045 kuna (75 kuna)	75 kuna

Tablica 6. Minimizacija gubitka – tablica prihoda i gubitaka

zabavu te uzeti osiguranje protiv kiše.

Istaknimo

Gore opisana metoda poznata je pod imenom **minimax regret**, jer je cilj izabrati alternativu koja minimizira najveći očekivani gubitak. Iako se čini da je rješenje zasnovano na potpuno logičnom rezoniranju, ta metoda često može dovesti do kontradiktornih odluka. Na primjer, ukoliko blagajnik studentskog zbora, iz našeg primjera, dođe u osiguravajuće društvo uplatiti policu i tamo sazna da su ukinuli takvu vrstu police, to bi vodilo situaciji u kojoj studenti trebaju odlučiti između sportskog natjecanja bez osiguranja i zabave bez osiguranja. Primijene li studenti ponovno minimizaciju gubitka, mogu se naći u dilemi: dok Tablica 6 kao izbor predlaže sportsko natjecanje (gubitak od 275 kuna, naspram 345 kuna kod zabave), Tablica 5 kao odluku daje zabavu (koja vodi do gubitka od 70 kuna, naspram 220 kuna kod sportskog natjecanja).

Bitno je još istaknuti da ta metoda ne zadovoljava takozvani *aksiom o irelevantnim alternativama* s kojim ćemo se upoznati u Poglavlju 3.3.

2.2. Drugi paradoks: Neovisnost preferencija

Ivana je na tomboli dobila poklon bon u trgovini H&M, uz mogućnost izbora između *elegantne haljine* i *trenirke* te između *sportskih patika* i *cipela na visoku petu*. Ona se ne može odlučiti što odabrati. Da bi lakše donijela odluku, Ivana je dodijelila sljedeće bodove pojedinim alternativama:

elegantna haljina	10
trenirka	12
sportske patike	8
cipele na visoku petu	9.

Tablica 7. Neovisnost preferencija – dodijeljeni bodovi odjevnih predmeta i obuće

Zbrajanjem bodova *odjevnih predmeta* i *obuće*, koji predstavljaju cjelovitu odjevnu kombinaciju, dobivamo sljedeće iznose:

trenirka i sportske patike	20
elegantna haljina i sportske patike	18
trenirka i cipele na visoku petu	21
elegantna haljina i cipele na visoku petu	19.

Tablica 8. Neovisnost preferencija – dodijeljeni bodovi cjelovitih odjevnih kombinacija

Ukoliko bi se Ivana odlučila odabrati opciju koja nosi najviše bodova, onda bi odabrala *trenirku i cipele na visoku petu*, no to baš i nije logičan izbor za *zajednički* odabir.

Problem se pojavio kada smo zanemarili pretpostavku o ovisnosti izbora odjevnog predmeta i obuće. Može se pokazati da alternative (odnosno njihove težine) možemo zbrajati ako i samo ako su one neovisne (vidi [23, Chapter 4]).

2.3. Treći paradoks: Bordino prebrojavanje

Bordino pravilo i Condorcetov jednostavni princip većine bili su žarišne točke istraživanja društvenog izbora od svojeg pojavljivanja, prije gotovo dva stoljeća, a dobili su ime prema francuskim matematičarima Jean–Carles de Bordi i Marie–Jean–Antoine–Nicolas de Caritat, Marquis de Condorcet.

Dok se Condorcetova metoda temelji na *kolektivnom uspoređivanju u parovima* i kandidata koji je većinski pobjednik u usporedbi sa svakim *protivnikom* naziva *Condorcetovim pobjednikom*, odnosno smatra da takav kandidat treba biti prvi izbor [19, str. 328], prema Bordinom pravilu treba odabrati kandidata s najvećim ukupnim brojem bodova, pod uvjetom da birači nikada nisu indiferentni između različitih kandidata. Preciznije, ako se bira između m kandidata te su bodovi $m-1$, $m-2$, $\ldots$ 0 dodijeljeni kandidatu na 1. (najboljem) mjestu, na drugom mjestu... te zadnjem (najlošijem) rangiranom kandidatu, u redoslijedu preferencija svakog birača, onda je pobjednik kandidat s najvećim ukupnim brojem bodova [10, 19, 20].

U nastavku pogledajmo primjer koji ilustrira Bordino pravilo.

2.2. Primjer. U Osijeku se održala likovna kolonija s natjecanjem u amaterskom slikanju na kojem su sudjelovali Ana, Branka, Cvjetko i Denis. Natjecanje je ocjenjivalo čak šest sudaca i to na način da je svaki sudac dao ocjene od 0 do 3 svim natjecateljima (svaki sudac je svom *favoritu* dao najvišu ocjenu 3, sljedećem prvu nižu ocjenu itd., dok je natjecatelju koji mu se najmanje svidio dao najnižu ocjenu 0. Nakon zbrajanja svih ocjena, najboljim amaterskim slikarom trebao je biti proglašen kandidat s najvećim ukupnim brojem bodova. Dakle, suci su se vodili Bordinim pravilom te su redna mjesta kandidata zapisali u sljedeću tablicu:

	Suci					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ana	2.	3.	1.	2.	3.	1.
Branka	1.	2.	3.	4.	1.	3.
Cvjetko	3.	4.	2.	3.	4.	2.
Denis	4.	1.	4.	1.	2.	4.

Tablica 9. Bordino prebrojavanje – redna mjesta kandidata

Tko je, prema mišljenju sudaca, najbolji izbor za pobjednika?

Rješenje. Prema Bordinom pravilu, češće je korišten sljedeći zapis prethodnog rangiranja:

Broj sudaca	2	1	1	1	1
1. mjesto	Ana	Branka	Denis	Denis	Branka
2. mjesto	Cvjetko	Ana	Branka	Ana	Denis
3. mjesto	Branka	Cvjetko	Ana	Cvjetko	Ana
4. mjesto	Denis	Denis	Cvjetko	Branka	Cvjetko

Tablica 10. Bordino prebrojavanje – skupne preferencije sudaca

Iz prethodne je tablice, s obzirom da znamo koliko bodova nosi pojedino mjesto, lako izračunati bodove za svakog od kandidata:

$$\begin{aligned} Ana: &\quad 2\times 3+1\times 2+1\times 2+1\times 1+1\times 1=12\\ Branka: &\quad 1\times 3+1\times 3+1\times 2+2\times 1+1\times 0=10\\ Cvjetko: &\quad 2\times 2+1\times 1+1\times 1+1\times 0+1\times 0=6\\ Denis: &\quad 1\times 3+1\times 3+1\times 2+1\times 0+1\times 0=8. \end{aligned}$$

Iz prethodnog je lako zaključiti da je pobjednica Ana. No, u međuvremenu, Brankin je tim *googlao* Cvjetka jer im se učinio poznatim te su otkrili da on nije amater nego profesionalni slikar te su zahtijevali da se on diskvalificira! Sucima je bilo zaista neugodno i nakon detaljne provjere odlučili su zaista to učiniti iako nisu planirali mijenjati poredak kandidata, tj. izjavili su da ostaju pri svojim preferencijama. No, Brankin se tim pobunio i zahtijevao novo glasanje nakon Cvjetkove diskvalifikacije. Nakon toga, sudci su rekli da oni ostaju pri svojim stajalištima. Kako su ostala tri kandidata, najbolje je plasirani prema tome sada dobio 2 boda, sljedeći 1 bod, dok je kandidat najlošije rangiran od strane svakog pojedinog suca dobio 0 bodova.
Nakon novog je rangiranja tablica dana s:

	Suci					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Ana	2.	3.	1.	2.	3.	1.
Branka	1.	2.	2.	3.	1.	2.
Denis	3.	1.	3.	1.	2.	3.

Tablica 11. Bordino prebrojavanje – redna mjesta kandidata nakon Cvjetkovog izbacivanja

Također, vrijedi:

Broj sudaca	2	1	1	1	1
1. mjesto	Ana	Branka	Denis	Denis	Branka
2. mjesto	Branka	Ana	Branka	Ana	Denis
3. mjesto	Denis	Denis	Ana	Branka	Ana

Tablica 12. Bordino prebrojavanje – skupne preferencije sudaca nakon Cvjetkovog izbacivanja,

što daje sljedeće bodove svakog od kandidata:

$$\begin{aligned} Ana: &\quad 2 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 1 \times 0 = 6 \\ Branka: &\quad 1 \times 2 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 7 \\ Denis: &\quad 1 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 0 = 5. \end{aligned}$$

Dakle, nova je pobjednica Branka! Naime, sucima 3 i 6 više se sviđao Cvjetko nego Branka, a više Ana nego Cvjetko, pa je Cvjetkovim diskvalificiranjem Branka dobila nove bodove, dok su Anini ostali *nepromijenjeni* (misli se na skupne preferencije sudaca iako su dodijeljeni novi bodovi). □

Taj paradoks klasičan je primjer metode odlučivanja koja ne poštuje *aksiom neovisnosti o irelevantnim alternativama* koji ćemo upoznati u Poglavlju 3.3. Naime, Cvjetko je bio najlošije rangirani natjecatelj i nije dobro da njegovo sudjelovanje utječe na poredak bilo koja druga dva natjecatelja. Ukoliko suce proglasimo stanjima svijeta, Bordino prebrojavanje može se lako primijeniti i u situacijama odlučivanja uz jaku nesigurnost, s kojima ćemo se ubrzo upoznati.

2.4. Četvrti paradoks: Petrogradski paradoks (engl. *St. Petersburg Paradox*)

Ovaj je paradoks prvi uveo N. Bernoulli 1713. godine [59], a potječe od istoimene igre, koja glasi: *baca se pravilan simetričan novčić sve dok ne padne glava; ako se glava pojavi tek u n–tom bacanju (pri čemu je n prirodan broj), dobit ćemo 2^n kuna. Koliko smo spremni platiti za samo jedno sudjelovanje u takvoj igri?*

G. Cramer predložio je svoje rješenje 1728. godine, odnosno on je tvrdio da postoji gornja granica preko koje daljnji dobitak ne stvara veće zadovoljstvo niti utječe na odluku za sudjelovanje u igri, a to je vrijednost 2^{24}, odnosno $16\,777\,216$.

Detaljno rješenje problema predstavio je D. Bernoulli 1738. godine, koji nakon pomnog istraživanja dolazi do zaključka da je za donošenje ispravne odluke najbolje pogledati koliko iznosi očekivani dobitak u igri.

Naime, vjerojatnost da će u n–tom bacanju prvi puta pasti glava je $1/2^n$, što znači da promatramo diskretnu slučajnu varijablu X danu tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots & \frac{1}{2^n} & \cdots \end{pmatrix}$$

te je očekivani dobitak (više o diskretnoj slučajnoj varijabli i njezinom očekivanju čitatelj može pronaći npr. u [5, 79])

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Prema prethodnom, mogli bismo donijeti odluku da se zaista isplati uložiti poprilično velik iznos za jedno sudjelovanje u igri, no, očito, takvu odluku ne možemo smatrati razumnom.

Dakle, možemo zaključiti da materijalna strana nije uvijek dobar kriterij za donošenje odluke.

Na osnovu prethodno spomenutog istraživanja, D. Bernoulli objavljuje i djelo *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk* o teoriji mjerenja rizika [6], koje je prvi puta objavljeno na Znanstvenoj akademiji u Petrogradu, dajući tako ime paradoksu [27]. D. Bernoulli uveo je i pojam *korisnosti novca*, uz pretpostavku da povećanje korisnosti dobitka u svakoj sljedećoj isplati opada te također predlaže da se promatra korisnost (funkcija korisnosti) $u(x) = \log(x + c)$, $c \in \mathbb{R}$ i da se umjesto prethodnog očekivanja promatra

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^n + c)}{2^n} < \infty;$$

za više detalja o prethodnom modelu i ostalim mogućim modelima čitatelj može pročitati u [19, str. 212]. Također, o samoj korisnosti i funkciji korisnosti bit će više riječi u Poglavlju 5.1.

2.5. Peti paradoks (teorija igara): Zatvorenikova dilema (engl. *The Prisoner's Dilemma*)

S obzirom da ćemo u nastavku opisati jedan od najpoznatijih paradoksa iz teorije igara, recimo najprije nešto više o samoj teoriji.

U svojoj knjizi [55] iz 1944. godine, u kojoj se prvi puta spominje teorija igara, J. von Neumann i O. Morgenstern definirali su takvu teoriju kao *svaku interakciju između agenata koja je vođena skupom pravila koja određuju moguće poteze za svakog sudionika i skup ishoda za svaku moguću kombinaciju poteza.*

Kako navode autori Hargreaves–Heap i Varoufakis [31], teško je pronaći primjer koji se ne može opisati na prethodni način te stoga teorija igara obećava primjenu na gotovo svaku društvenu interakciju u kojoj pojedinci imaju određeno razumijevanje o tome kako na ishod za nekoga utječu ne samo njegovi/njezini postupci nego i postupci drugih. To bi značilo da se sve sitacije iz svakodnevnog života, kao što su, na primjer, prelazak ceste u prometu, podizanje cijena, proizvodnja robe itd., mogu analizirati uz pomoć teorije igara. Sigurno je da bi alat, uz pomoć kojega bi mogli odlučiti što je najbolje napraviti u određenoj situaciji i koji bi nam pomogao predvidjeti što će ostali sudionici napraviti, bio od velike vrijednosti; najpoznatiji koncept koji je do sada osmišljen za detaljno proučavanje igara i njihovih ishoda je koncept ravnoteže koji je razvio John Nash 1950–ih godina [31] (tzv. *Nashova ravnoteža* [41, str. 1]), kao i ideja da igrači biraju strategije nasumce kada su u situacijama u kojima ne mogu biti sigurni što bi trebali učiniti (tzv. *mješovite strategije* [31, str. 37]). Nashova ravnoteža se pokazala najfascinantnijim i najkorisnijim konceptom u teoriji igara [31], no u pozadini postavlja veoma jake uvjete na ponašanje igrača, zbog čega se našla pod mnogim kritikama; naime, ona od igrača očekuje da bude *racionalan* u smislu da odabire strategiju koja maksimizira njegovu korisnost te ujedno od igrača zahtijeva da odabire strategije pod pretpostavkom da su i ostali igrači racionalni te da i oni znaju da su preostali igrači racionalni. Čak i ako prihvatimo pretpostavke

koje podrazumijeva Nashov pristup, odnosno da su svi igrači *savršeno racionalni* te da se brinu samo za maksimiziranje svoje korisnosti, javlja se i sljedeći problem: iako Nashova ravnoteža uvijek postoji, rijetko je jedinstvena [41].
Iz prethodnog možemo zaključiti da teorija igara analizira situacije interaktivnog odlučivanja, koje uključuju nekoliko donositelja odluka (igrača, sudionika), pri čemu odluka svakog od njih utječe na ishod svih donositelja odluka. Takva interaktivnost upravo razlikuje teoriju igara od standardne teorije odlučivanja koja uključuje jednog donositelja odluke i to je njezin glavni fokus [53].
Dakle, glavna razlika između spomenutih teorija jeste ta da teorija odlučivanja proučava individualno odlučivanje u situacijama u kojima izbor pojedinca niti utječe na izbore drugih pojedinaca niti na njega utječu izbori drugih, dok teorija igara proučava donošenje odluka u situacijama u kojima izbori pojedinaca utječu jedni na druge [8]. Teorija igara pokušava predvidjeti ponašanje igrača i ponekad donositeljima odluka također daje prijedloge o načinima na koje mogu postići svoje ciljeve, što ćemo ilustrirati sljedećim primjerom, dok zaineresirani čitatelj više može pronaći, npr., u [8, 31, 41, 53].

Zatvorenikova dilema jedan je od najpoznatijih paradoksa u teoriji igara (vidi npr. [9, str. 5, poglavlje 1.3], [31, str. 146, Poglavlje 5], [103]), a naziv datira iz 1950–ih godina i pripisuje se kanadskom matematičaru A. W. Tuckeru [31, str. 146]. Iako postoje razne (no međusobno vrlo slične) inačice tog paradoksa, originalna je priča smještena u Chicago [9], a glavni su akteri gangsteri Adam i Eva koje okružni tužitelj krivi za veliki zločin. Adam i Eva nakon uhićenja smješteni su u odvojene ćelije te nemaju mogućnost komunikacije, a okružni tužitelj svakome od njih daje dvije opcije: *šuti* ili *optuži drugoga*. Ako oboje šute, svatko će odslužiti jednu godinu u zatvoru; ako svaki zatvorenik optuži onog drugoga, kazna će biti dvije godine za svakoga te ako jedan od zatvorenika optuži drugoga dok ovaj drugi šuti, prvi će biti oslobođen optužbi, dok će ovaj koji je šutio biti osuđen na tri godine zatvora. Dakle, optuženi mogu minimizirati ukupno zatvorsko vrijeme za oboje (2 godine) samo ako oboje surađuju i šute, ali će ih vjerojatno poticaji s kojima će se svatko od njih zasebno suočiti natjerati da odaberu opciju s maksimalnim ukupnim zatvorskim vremenom za oboje (4 godine). Taj paradoks posebno intrigira znanstvenike u društvenim znanostima jer se u njemu radi o interakciji u kojoj individualna težnja za onim što se čini racionalnim i najboljim proizvodi kolektivno najlošije ishode. U [31, 41] čitatelj može pronaći detaljnu razradu prethodnog problema gdje se navodi i da je jedinstvena Nashova ravnoteža takvog paradoksa (imajući na umu da ona od igrača zahtjeva maksimiziranje svoje korisnosti) kada se oboje optuženika odluče za strategiju *optuži drugoga* iako je očito da bi oba igrača ostvarila veću korisnost kada bi se odlučila na opciju *šuti*.

3. Tablice odlučivanja

Na samom smo se početku upoznali s pojmovima *stanja svijeta* i *akcija/alternativa*. Pretpostavimo, nadalje, da donositelj odluke (odlučitelj) zna koja su moguća stanja svijeta.

Preciznije, pretpostavimo

- da imamo konačno mnogo stanja svijeta, koja ćemo označavati s $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$
- da imamo konačan broj akcija (alternativa), koje ćemo označavati s $a_1, a_2, \ldots, a_m$
- samo jedna akcija mora biti odabrana;

tada je tablica odlučivanja dana s (vidi Tablicu 13),

		stanja svijeta			
akcije	posljedice	θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_n
	a_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	a_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}

Tablica 13. Opći oblik tablica odlučivanja s m akcija i n stanja svijeta

gdje x_{ij} označava posljedicu akcije a_i u stanju θ_j.

Ako posljedicama x_{ij} pridružimo numeričke vrijednosti

$$v(x_{ij}) := v_{ij},$$

onda ako je, na primjer, $v(x_{ij}) > v(x_{kl})$, smatrat ćemo da odlučitelj preferira posljedicu x_{ij} nasuprot x_{kl}. Tada možemo dobiti tablicu vrijednosti

$$x_{ij} \quad \longleftrightarrow \quad v_{ij}.$$

3.1. Modeli odlučivanja klasificirani prema uvjetima/okolnostima odlučivanja

Postoji više modela odlučivanja [58, str. 10] koji su proizašli iz modeliranja problema koji nam je od interesa, a koji u velikoj mjeri pomažu donositelju odluke u pronalasku najboljeg rješenja, bez suvišne pristranosti pri odlučivanju.

Cilj je modeliranja da se zadani problem preformulira u svrhu bolje razumljivosti, polazeći od nekih njegovih bitnih značajki s ciljem da se lakše nađe metoda za njegovo rješavanje, kao i da sama metoda bude što pouzdanija. U ovom udžbeniku vodit ćemo se *modelima odlučivanja klasificiranim prema uvjetima odlučivanja*, odnosno možemo reći i *prema okolnostima u kojima se odlučuje*.

S obzirom da odluke često donosimo u odnosu na to koliko odlučitelj poznaje stanja svijeta, ta vrsta modela odlučivanja zasniva se na sljedećoj podjeli [58]:

- **Modeli odlučivanja u uvjetima sigurnosti** (**Odluke uz sigurnost**)
  Donositelj odluke točno zna posljedice svih svojih odluka, što bi značilo da imamo točno jedno stanje svijeta. U takvom slučaju donositelj odluke donosi odluku koja maksimizira njegovo zadovoljstvo. Problem kod takvog odlučivanja krije se u tome što se, najčešće, odluke od velikog interesa, bilo u privatnom, bilo u poslovnom smislu, gotovo nikada ne donose u uvjetima sigurnosti [95, str. 10].

  Kako bismo preciznije uvidjeli na što se misli, možemo uočiti da bi to u Primjeru 2.1. značilo da točno znamo hoće li se Marko ozlijediti ili ne.

- **Modeli odlučivanja u uvjetima rizika** (**Odluke uz slabu nesigurnost** ili **uz rizik**)
  Donositelj odluke ne zna posljedice svojih odluka, ali zna stanja svijeta i posljedice u svakom od stanja.
  Također, kod tog tipa odlučivanja karakteristično je i to da su poznate vjerojatnosti svih mogućih stanja svijeta.

  U primjeru bi sa studentom Markom to značilo da je poznato koliko iznosi vjerojatnost da će se on ozlijediti.

- **Modeli odlučivanja u uvjetima nesigurnosti** (**Odluke uz jaku nesigurnost** ili **uz potpuno neznanje**)
  Donositelj odluke jedino zna koja su stanja svijeta. Naime, on ne zna ništa o njihovim vjerojatnostima niti može donositi bilo kakve procjene.

  U Primjeru 2.1. to bi značilo da ne znamo ništa o vjerojatnosti Markove ozljede; ne znamo je li vani sunčan ljetni dan i nema opasnosti od ozljede ili je hladan zimski dan i sve je pod ledom te se on lako može ozlijediti.

3.2. Četiri kriterija za donošenje odluka u slučaju jake nesigurnosti

Prirodno je zapitati se *na koji način donositelj odluke može donijeti najbolju odluku u uvjetima jake nesigurnosti?*

Kao odgovor na to pitanje nameću se četiri kriterija koja ćemo opisati u nastavku, dok o drugim kriterijima odlučivanja u takvoj vrsti modela, koji se također temelje na racionalnim argumentima, čitatelj može pročitati više u [23, Section 2.6].

3.2.1. Waldov kriterij maksimalnog povrata ulaganja

Abraham Wald 1950. godine [23, 25] predložio je ovaj kriterij na osnovu ideje da donositelj odluke treba odabrati akciju koja ima najveći mogući nivo pouzdanosti.

Preciznije, Waldov kriterij zasniva se na maksimizaciji sigurne dobiti te se smatra pesimističnim kriterijem.

U slučaju akcije a_i, najgora moguća posljedica ima vrijednost s_i; preciznije

$$s_i = \min_{j=1,\dots,n} v_{ij},$$

pri čemu s_i nazivamo **razina sigurnosti akcije** a_i.

Ako o vrijednostima v_{ij} razmišljamo kao o financijskoj dobiti, onda se s_i može interpretirati kao **garantirana dobit** u akciji a_i.

Waldov kriterij

bira akciju a_k tako da je

$$s_k = \max_{i=1,\dots,m} s_i = \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \min_{j=1,\dots,n} v_{ij} \right\}.$$

Na kraju, napomenimo da je taj pristup primijenjen na početku paradoksa *Minimizacija gubitka.*

3.2.2. Hurwiczov optimistično–pesimistični kriterij

Paralelno s Waldovim pesimističnim pristupom razvio se optimistični kriterij koji uzima u obzir najbolji mogući ishod za svaku akciju.

Kod tog kriterija uvodimo **razinu optimizma**

$$o_i = \max_{j=1,\dots,n} v_{ij},$$

što je zapravo vrijednost najbolje posljedice koju imamo prilikom odabira akcije a_i.

Takozvani *maximax povratni kriterij*

bira akciju a_k tako da je

$$o_k = \max_{i=1,\ldots,m} o_i = \max_{i=1,\ldots,m} \{ \max_{j=1,\ldots,n} v_{ij} \}.$$

Optimistično–pesimistični kriterij uveo je Leonid Hurwicz 1951. godine [57], koji je sugerirao da bi malo tko želio biti toliko pesimističan ili optimističan da se odluči za jednu od prethodne dvije opisane *krajnosti* te je stoga predložio da umjesto da biramo između potpunog optimizma ili pesimizma, uključimo određenu mjeru i jednog i drugog.

Preciznije, Hurwicz je pokušao objediniti prethodno opisane kriterije na sljedeći način:

Hurwiczov kriterij

uvodi parametar $\alpha \in [0,1]$, pri čemu alternativu a_k biramo tako da je

$$\alpha \cdot s_k + (1-\alpha) \cdot o_k = \max_{i=1,\ldots,m} \{\alpha \cdot s_i + (1-\alpha) \cdot o_i\}.$$

Kako bismo koristili prethodni kriterij, odnosno kako bi se donositelj odluke mogao odlučiti oko odabira jedne od alternativa, jasno je da je nužno najprije odrediti α. Također, iz prethodno opisanog lako je uočiti da za $\alpha = 1$ imamo pesimista, dok za $\alpha = 0$ imamo optimista.

Na primjer, ako trebamo odabrati akciju u vrlo jednostavnom problemu, kao što je problem dan u Tablici 14

	θ_1	θ_2	s_i	o_i	$\alpha \cdot s_i + (1-\alpha) \cdot o_i$
a_1	1	0	0	1	$\alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1 - \alpha$
a_2	v	v	v	v	$\alpha \cdot v + (1-\alpha) \cdot v = v$

Tablica 14. Hurwiczov kriterij – neodlučnost,

te ako je donositelj odluke *indiferentan* (*ravnodušan*) između akcija a_1 i a_2, odnosno on ne preferira ni alternativu a_1 (o kojoj treba donijeti odluku) ni alternativu a_2 (kod koje je svejedno je li optimist ili pesimist), drugim riječima, *ako želi postići neodlučnost*, onda treba biti

$$1 - \alpha = v \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 1 - v.$$

3.2.3. Savageova minimizacija gubitka

Ovaj kriterij, koji nazivamo i *minimax regret*, utemeljio je Leonard Savage 1951. godine.

Savage tvrdi da ako ne znamo ništa o stanjima svijeta, onda akcije treba uspoređivati prema pojedinim stanjima svijeta, a ne u cjelini (sjetite se paradoksa *Minimizacija gubitka* koji smo također nazivali i *minimax regret*, opisanog u Poglavlju 3.). Ako je neka posljedica loša u kontekstu cijele tablice, ona u nekom stanju svijeta može biti najbolja moguća.

Definiramo gubitak (po stupcima, tj. stanjima svijeta) kao

$$r_{ij} = \max_{i=1,\dots,m} v_{ij} - v_{ij},$$

odnosno gubitak definiramo kao razliku najveće dobiti u stanju svijeta i dobiti akcije a_i u tom istom stanju svijeta.

Najveći gubitak u akciji a_i je

$$\rho_i = \max_{j=1,\dots,n} r_{ij}.$$

Kod tog kriterija najveći očekivati gubitak želimo minimizirati, tj.

Savageov kriterij

bira alternativu a_k tako da je

$$\rho_k = \min_{i=1,\dots,m} \rho_i = \min_{i=1,\dots,m} \{\max_{j=1,\dots,n} r_{ij}\}.$$

3.2.4. Laplaceov pristup nedostatne argumentacije

Ovaj kriterij utemeljio je Pierre–Simon Laplace 1825. godine [51] te on tvrdi da s obzirom da ništa ne znamo o posljedicama stanja svijeta, to je ekvivalentno tvrdnji da su **sva stanja svijeta jednako vjerojatna**.

Ukoliko imamo n stanja svijeta koja su jednako vjerojatna, onda očito vjerojatnost svakog stanja iznosi $\frac{1}{n}$ (jer nam je dobro poznato da suma svih danih vjerojatnosti mora

		stanja svijeta				
akcije	posljedice	θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_n	Laplace
	a_1	v_{11}	v_{12}	$\cdots$	v_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} v_{1j} \cdot \frac{1}{n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_i	v_{i1}	v_{i2}	$\cdots$	v_{in}	$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot \frac{1}{n}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_m	v_{m1}	v_{m2}	$\cdots$	v_{mn}	$\sum_{j=1}^{n} v_{mj} \cdot \frac{1}{n}$

Tablica 15. Tablica odlučivanja – Laplaceov pristup

iznositi jedan [5, str. 58]).
Sada, iz Tablice odlučivanja 15 iščitavamo da očekivana vrijednost akcije a_i iznosi

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot \frac{1}{n}.$$

Iz prethodnog možemo zaključiti:

Laplaceov kriterij

bira alternativu a_k tako da je

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{v_{kj}}{n} = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n}.$$

Laplaceov kriterij poznat je i pod nazivom *kriterij racionalnosti* [58]; naime, kako se on koristi u situacijama u kojima nije moguće dati prednost pojedinom ishodu (svi imaju jednake vjerojatnosti), teško je predvidjeti koji ishod ima veće izglede.

Više o prethodno navedenim kriterijima čitatelj može pročitati, npr., u [2, 23].

3.2.5. Ilustracija četiri kriterija odlučivanja

Istaknimo

U nastavku navodimo primjer koji je 1954. konstruirao J. Milnor, kako bi pokazao da sva četiri opisana kriterija na istom primjeru mogu dati potpuno različite izbore.

3.1. PRIMJER. (Milnor) Neka je dana tablica odlučivanja:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	2	2	0	1
a_2	1	1	1	1
a_3	0	4	0	0
a_4	1	3	0	0

Tablica 16. Tablica odlučivanja – Milnor

Koje izbore alternativa daje svaki od opisanih kriterija?

Rješenje. Nadopunimo najprije danu tablicu, koristeći prva tri opisana kriterija:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	s_i	o_i	$\alpha \cdot s_i + (1-\alpha) \cdot o_i$	Laplace
a_1	2	2	0	1	0	2	$(1-\alpha) \cdot 2$	$\frac{5}{4}$
a_2	1	1	1	1	1	1	$\alpha + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$	1
a_3	0	4	0	0	0	4	$(1-\alpha) \cdot 4$	1
a_4	1	3	0	0	0	3	$(1-\alpha) \cdot 3$	1

Tablica 17. Nadopunjena tablica odlučivanja – Milnor

Sada možemo pogledati koje izbore daju opisani kriteriji:

- Waldov kriterij bira alternativu a_2 jer je u tom slučaju vrijednost od s_i, $i = 1, 2, 3, 4$ najveća.

- Hurwicz:

  - za $\alpha = 0$ imamo vrijednosti $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 3$ te on bira a_3;
  - za $\alpha = 1$ vrijednosti su $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ te se bira a_2;
  - za $0 < \alpha < 1$ je očito $0 < 1 - \alpha < 1$ te bismo imali da je (kada usporedimo alternative koje ovise o α)

    $$\max\{a_1,\, a_3,\, a_4\} = a_3,$$

    no ne znamo odmah je li a_3 bolji od $a_2 = 1$; primijetimo da to očito vrijedi za $(1 - \alpha) \cdot 4 > 1$, tj. za $\alpha < \frac{3}{4}$. Dakle,

    $$\begin{array}{llll} \text{za} & \alpha = \dfrac{3}{4} & \text{biramo} & a_2 \quad \text{ili} \quad a_3 \\ \text{za} & \alpha > \dfrac{3}{4} & \text{biramo} & a_2 \\ \text{za} & \alpha < \dfrac{3}{4} & \text{biramo} & a_3. \end{array}$$

- Laplace: imamo četiri stanja svijeta s istim vjerojatnostima, odnosno s vjerojatnostima $\frac{1}{4}$ te je očekivana vrijednost kod akcije a_i jednaka $\sum_{j=1}^{4} \frac{v_{ij}}{4}$. Prema vrijednostima istaknutim u Tablici 17 taj kriterij bira a_1.

- Tablica gubitaka kod Savageovog kriterija dana je s

gubitak	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	najveći gubutak
a_1	0	2	1	0	2
a_2	1	3	0	0	3
a_3	2	0	1	1	2
a_4	1	1	1	1	1

Tablica 18. Tablica odlučivanja – Milnor, Savageov kriterij

te je očito da taj kriterij bira a_4, jer u toj akciji imamo najmanji od svih (najvećih) gubitaka.

Iz prethodnog možemo uočiti da Waldov kriterij bira akciju a_2, Hurwiczov a_2 ili a_3, Laplaceov a_1, dok Savageov kao izbor daje akciju a_4 koju nije odabrao nijedan od prethodnih kriterija. □

3.2. Primjer. Neka je dana tablica odlučivanja

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	0	10	5	5
a_2	9	0	1	0
a_3	3	1	1	10
a_4	5	2	0	5

Tablica 19. Tablica odlučivanja – donositelj odluke odabire a_4

Ako je donositelj odluke odabrao akciju a_4, provjerite s kojim je od 4 opisanih kriterija on kompatibilan.

Rješenje. Četiri navedena kriterija vode do sljedećih izbora, uz proširenu prethodnu tablicu odlučivanja:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	s_i	o_i	$\alpha \cdot s_i + (1-\alpha) \cdot o_i$	Laplace
a_1	0	10	5	5	0	10	$(1-\alpha) \cdot 10$	$\frac{20}{4}$
a_2	9	0	1	0	0	9	$(1-\alpha) \cdot 9$	$\frac{10}{4}$
a_3	3	1	1	10	1	10	$\alpha + (1-\alpha) \cdot 10$	$\frac{15}{4}$
a_4	5	2	0	5	0	5	$(1-\alpha) \cdot 5$	$\frac{12}{4}$

Tablica 20. Nadopunjena tablica odlučivanja – donositelj odluke odabire a_4

- Waldov kriterij bira alternativu a_3 jer je u tom slučaju vrijednost od s_i, $i = 1, 2, 3, 4$ najveća.
- Hurwicz:
  - za $\alpha = 0$ imamo vrijednosti $a_1 = 10$, $a_2 = 9$, $a_3 = 10$, $a_4 = 5$ te on bira a_1 ili a_3;
  - za $\alpha = 1$ vrijednosti jesu $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$ te se bira a_3;
  - za $0 < \alpha < 1$ je $0 < 1 - \alpha < 1$ te svakako ne bismo odabrali a_4, jer je $(1 - \alpha) \cdot 5$ manje od $(1-\alpha) \cdot 9$ i $(1-\alpha) \cdot 10$; naime, preostale tri akcije imaju veće vrijednosti.
- Iz Tablice 20 očito je da Laplaceov kriterij bira a_1 te također nije kompatibilan s donositeljem odluke.
- Kod Savageovog kriterija dana je sljedeća tablica gubitaka:

gubitak	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	najveći gubitak
a_1	9	0	0	5	9
a_2	0	10	4	10	10
a_3	6	9	4	0	9
a_4	4	8	5	5	8

Tablica 21. Tablica odlučivanja – donositelj odluke odabire a_4, Savageov kriterij

te je očito ovdje izbor alternativa a_4, iz čega zaključujemo da je donositelj odluke kompatibilan s tim kriterijem. □

3.3. Primjer. Promotrimo tablicu odlučivanja 22, gdje je $x \in \mathbb{R}$.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	x	3	4	6
a_2	2	2	2	4
a_3	3	2	1	9
a_4	6	6	1	3

Tablica 22. Tablica odlučivanja s nepoznanicom x

a) Odredite koju akciju treba odabrati u ovisnosti o x, prema četiri poznata kriterija, pri čemu u Hurwiczovom kriteriju odaberite $\alpha = 1/2$.

b) Odredite vrijednosti od $x \in \mathbb{R}$ za koje će sva četiri kriterija dati isti odabir.

Rješenje. a) Najprije nadopunimo danu tablicu prema prva tri opisana kriterija:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	s_i	o_i	$\frac{s_i+o_i}{2}$	Laplace
a_1	x	3	4	6	$\min\{x,3\}$	$\max\{x,6\}$	$\frac{\min\{x,3\}+\max\{x,6\}}{2}$	$\frac{13+x}{4}$
a_2	2	2	2	4	2	4	3	$\frac{10}{4}$
a_3	3	2	1	9	1	9	5	$\frac{15}{4}$
a_4	6	6	1	3	1	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{16}{4}$

Tablica 23. Nadopunjena tablica odlučivanja s nepoznanicom x.

Promotrimo sada detaljno svaki od kriterija:

- Kod Waldovog kriterija biramo između alternativa a_1 i a_2, u ovisnosti koji je maksimum
$$\max\{\min\{x,3\},2\}.$$
Dobivamo sljedeće:
  - za $x = 2$ je $\min\{x,3\} = 2$ te biramo a_1 ili a_2
  - za $x < 2$ je $\min\{x,3\} = x < 2$ te biramo a_2
  - za $x > 2$ je $\min\{x,3\} > 2$ te biramo a_1.
- Hurwiczov kriterij bira alternativu a_1 ili a_3, u ovisnosti o maksimumu
$$\max\left\{\frac{\min\{x,3\}+\max\{x,6\}}{2}, 5\right\}.$$
Definiramo li pomoćnu funkciju $f(x) = \dfrac{\min\{x,3\}+\max\{x,6\}}{2}$, vidimo da je ona po dijelovima definirana s
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+6}{2}, & \text{za} \quad x < 3 \\[2ex] \dfrac{x+3}{2}, & \text{za} \quad x > 6 \\[2ex] \dfrac{9}{2}, & \text{za} \quad x \in [3,6] \end{cases},$$
te stoga dobivamo sljedeće odluke:

  - za $x = 7$ biramo a_1 ili a_3
  - za $x < 7$ biramo a_3
  - za $x > 7$ biramo a_1.

- Laplaceov kriterij bira a_1 ili a_4, u ovisnosti o vrijednosti maksimuma

$$\max\left\{\frac{13+x}{4}, \frac{16}{4}\right\}.$$

  Dakle,

  - za $x = 3$ Laplace bira a_1 ili a_4
  - za $x < 3$ Laplace bira a_4
  - za $x > 3$ kao izbor Laplace daje a_1.

- Kod Savageovog kriterija dana je sljedeća tablica gubitaka:

	θ_1 $(x < 6)$	θ_1 $(x > 6)$	θ_2	θ_3	θ_4	najveći gubitak $(x < 6)$	najveći gubitak $(x > 6)$
a_1	$6 - x$	0	3	0	3	$\max\{6 - x, 3\}$	3
a_2	4	$x - 2$	4	2	5	5	$\max\{x - 2, 5\}$
a_3	3	$x - 3$	4	3	0	4	$\max\{x - 3, 4\}$
a_4	0	$x - 6$	0	3	6	6	$\max\{x - 6, 6\}$

Tablica 24. Tablica odlučivanja s nepoznanicom x, Savageov kriterij.

S obzirom da želimo minimizirati najveći očekivani gubitak, imamo sljedeća dva slučaja:

- za $x \geq 6$ biramo a_1
- za $x < 6$ biramo a_1 ili a_3 s obzirom na vrijednost minimuma

$$\min\{\max\{6 - x, 3\}, 4\}.$$

Naime,

- za $x = 2$ je $\max\{6 - x, 3\} = 4$ te biramo a_1 ili a_3
- za $x > 2$ je $6 - x < 6 - 2 = 4$ te biramo a_1,
- dok za $x < 2$ biramo a_3.

b) Alternativa a_1 očito ulazi u izbor jer se jedina pojavljuje u sva četiri kriterija. Naime, uočimo

- Wald bira a_1 za $x > 2$
- Hurwicz bira a_1 za $x > 7$
- Laplace bira a_1 za $x > 3$
- Savage bira a_1 za $x > 2$

te za $x > 7$ svi kriteriji kao izbor daju a_1. □

3.4. PRIMJER. Neka je dana tablica odlučivanja 25, gdje je $x \in \mathbb{R}$.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	6	4	4	6
a_2	4	1	6	2
a_3	5	x	5	3
a_4	3	3	2	2

Tablica 25. Tablica odlučivanja s nepoznanicom x

a) U ovisnosti o x odredite najbolju akciju primjenom Laplaceovog kriterija.

b) U ovisnosti o x odredite najbolju akciju primjenom Savageovog kriterija.

c) Odredite vrijednosti od $x \in \mathbb{R}$ za koje će prethodna dva kriterija dati istu odluku.

Rješenje. a) Nadopunimo najprije danu tablicu, prema Laplaceovom kriteriju:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	Laplace
a_1	6	4	4	6	$\frac{20}{4}$
a_2	4	1	6	2	$\frac{13}{4}$
a_3	5	x	5	3	$\frac{13+x}{4}$
a_4	3	3	2	2	$\frac{10}{4}$

Tablica 26. Tablica odlučivanja s nepoznanicom x, Laplaceov kriterij.

Sada je očito da Laplaceov kriterij bira a_1 ili a_3, u ovisnosti o vrijednosti maksimuma

$$\max\left\{\frac{20}{4}, \frac{13+x}{4}\right\}.$$

Dakle,

- za $x = 7$ Laplace bira a_1 ili a_3
- za $x < 7$ Laplace bira a_1
- za $x > 7$ kao izbor Laplace daje a_3.

b) Kod Savageovog kriterija imamo sljedeću tablicu gubitaka:

	θ_1	θ_2 $(x < 4)$	θ_2 $(x > 4)$	θ_3	θ_4	najveći gubitak $(x < 4)$	najveći gubitak $(x > 4)$
a_1	0	0	$x - 4$	2	0	2	$\max\{x - 4, 2\}$
a_2	2	3	$x - 1$	0	4	4	$\max\{x - 1, 4\}$
a_3	1	$4 - x$	0	1	3	$\max\{4 - x, 3\}$	3
a_4	3	1	$x - 3$	4	4	4	$\max\{x - 3, 4\}$

Tablica 27. Tablica odlučivanja s nepoznanicom x, Savageov kriterij.

Kako nam je cilj minimizirati najveći očekivani gubitak, imamo sljedeća dva slučaja:

- za $x < 4$ biramo a_1
- za $x \geq 4$ biramo a_1 ili a_3 s obzirom na vrijednost minimuma

  $$\min\{\max\{x - 4, 2\}, 3\}.$$

  Očito,

  - za $x = 7$ je $\max\{x - 4, 2\} = 3$ te biramo a_1 ili a_3
  - za $x < 7$ biramo a_1,
  - dok za $x > 7$ biramo a_3.

c) Prethodna dva kriterija će dati istu odluku za bilo koji x. □

3.3. Socijalni aksiomi –*razumni zahtjevi na kriterije odlučivanja uz jaku nesigurnost*

U nastavku ćemo promatrati aksiome vezane uz četiri opisana kriterija odlučivanja koji akciji a_i pridružuju vrijednost v_i te nadalje, bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da ako je $v_i > v_k$, onda kriterij smatra da je akcija a_i bolja od akcije a_k. Ponekad se, u literaturi, ti aksiomi nazivaju i *socijalni aksiomi*.
Prije nego se upoznamo s aksiomima, ponovimo izbore koje daju opisani kriteriji:

- Waldov kriterij: $v_i = s_i$;
- Hurwiczov kriterij: $v_i = \alpha \cdot s_i + (1 - \alpha) \cdot o_i$, pri čemu je $\alpha \in [0, 1]$;
- Savageov kriterij: $v_i = -\rho_i$ (sjetimo se da ovdje promatramo gubitke, odnosno treba minimizirati najveći gubitak što je ekvivalentno s maksimizacijom od v_i);
- Laplaceov kriterij: $v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n}$.

Sada smo spremni navesti aksiome.

A1) (Potpunost rangiranja)
Mnogi autori tvrde da odabrani kriterij ne treba rangirati akcije od najbolje prema najlošijoj, redom, nego da je dovoljno samo dati odluku o tome koju akciju odabrati. Prema Frenchu [23, str. 40], to nije dobar pristup, jer ukoliko se, nakon detaljne analize, odlučimo za jednu akciju (a pri tome ne rangiramo ostale), može se dogoditi, kao što smo već istaknuli u paradoksu *Minimizacija gubitka*, da se odlučimo za jednu akciju koja se u međuvremenu prestala nuditi kao izbor (u spomenutom paradoksu odlučili smo uzeti osiguranje te smo se pitali što ako se ono više ne može ugovoriti) te ponovno moramo provesti detaljnu analizu kako bismo utvrdili koja je sljedeća najbolja akcija. Stoga je razumno zahtijevati da metoda (kriterij odlučivanja) treba dati potpuno rangiranje svih akcija, preciznije:

A1: Potpunost rangiranja

Kriterij odlučivanja mora dati potpuno rangiranje svih mogućih akcija.

S obzirom da sva četiri kriterija posljedicama pridružuju numeričke vrijednosti, jasno je da sve akcije možemo rangirati.

A2) (Neovisnost o oznakama)
Ovaj aksiom utjelovljuje prirodni zahtjev da na odabir akcije ne utječe predstavljanje temeljnog problema odluke, odnosno on zahtijeva da krajnji poredak akcija bude neovisan o redoslijedu kojim smo označili akcije u tablici odlučivanja.

Kako bismo se pobliže upoznali s tim aksiomom, navodimo sljedeći primjer.

3.5. PRIMJER. Promotrimo najprije tablicu odlučivanja 28 (a). S obzirom da je u njoj $s_1 = 0$, $s_2 = 3$ te stoga i $v_2 > v_1$, lako iščitavamo da je preferirana akcija a_2.

	θ_1	θ_2
a_1	10	0
a_2	8	3

(a)

	θ_1'	θ_2'
a_1'	8	3
a_2'	10	0

(b)

	θ_1''	θ_2''
a_1''	0	10
a_2''	3	8

(c)

Tablica 28. Tablica odlučivanja, neovisnost o oznakama

Tablica 28 (b) dobivena je jednostavnom zamjenom redaka iz Tablice 28 (a) te kako je u njoj $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, to je $v_1' > v_2'$.

Na sličan način, ako u Tablici 28 (a) zamjenimo stupce, odnosno promijenimo poredak stanja svijeta, uz nove oznake iz Tablice 28 (c) iščitavamo da je $s_1 = 0$, $s_2 = 3$ te je $v_2'' > v_1''$. □

Precizno, tvrdnja korištena u prethodnom primjeru glasi:

A2: Neovisnost o oznakama

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Neka je nova $m \times n$ tablica odlučivanja s akcijama a_i', stanjima svijeta θ_j' i vrijednostima v_{ij}', $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ konstruirana iz prve uz pomoć permutacije redaka (red i postaje red $\pi(i)$) i permutacije stupaca (stupac j postaje stupac $\tau(j)$), tj. $v'_{\pi(i)\tau(j)} = v_{ij}$,
tada kriterij mora akcijama pridružiti vrijednosti v_i i $v'_{\pi(i)}$, redom, tako da je

$$v_i > v_k \quad \iff \quad v'_{\pi(i)} > v'_{\pi(k)},\ 1 \le i, k \le m.$$

A3) (Neovisnost o mjernoj skali)
Kao i prethodni aksiom, i ovaj zahtijeva da na odabir akcije ne utječe predstavljanje temeljnog problema odluke, odnosno, konkretno, u ovom slučaju da krajnji poredak akcija bude neovisan o skali prema kojoj *mjerimo* zadane vrijednosti. Na primjer, temperaturu na našem području najčešće mjerimo uz pomoć Celzijeve temperaturne ljestvice, dok je također možemo mjeriti i u Fahrenheitovim stupnjevima, no to ne bi smjelo biti bitno prilikom donošenja konačne odluke.

Preciznu tvrdnju koju zahtijeva ovaj aksiom navodimo u nastavku.

A3: Neovisnost o mjernoj skali

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Neka druga tablica odlučivanja $m \times n$ ima iste akcije i stanja, ali ima težine u drugoj mjernoj skali, odnosno neka su nove težine dane s

$$v'_{ij} = \alpha \cdot v_{ij} + \beta, \quad \text{za neke fiksne} \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tada metoda mora akcijama dodijeliti težine v_i, $i = 1, \ldots, m$ (u 1. tablici), odnosno v'_i, $i = 1, \ldots, m$ (u 2. tablici) tako da je

$$v_i > v_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad v'_i > v'_k.$$

Neki autori zamjeraju tom aksiomu da je preslab jer on novu mjernu skalu povezuje isključivo s afinom funkcijom, dok se može pokazati da je svaka monotona funkcija primjenjiva.

A4) (Jaka dominacija)
Ako jedna akcija vodi do boljih posljedica od druge, bez obzira u kojem se stanju svijeta nalazimo, onda bi očito toj akciji trebalo dati prednost pred drugom. Upravo o tome govori aksiom A4), no pogledajmo najprije sljedeći primjer.

3.6. PRIMJER. Ukoliko je dana tablica odlučivanja 30

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	3	2	3	8
a_2	2	1	2	4

Tablica 30. Tablica odlučivanja,

dodijelimo vrijednosti akcijama, s obzirom na četiri obrađena kriterija te pri tome kod Hurwicza možemo odabrati $\alpha = 1/2$.

Rješenje. Nadopunimo li danu tablicu, uz pomoć Waldovog, Hurwiczovog i Laplaceovog kriterija dobivamo:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	s_i	o_i	$\alpha s_i + (1-\alpha)o_i$	Laplace
a_1	3	2	3	8	2	8	5	$16/4$
a_2	2	1	2	4	1	4	$5/2$	$9/4$

Tablica 31. Tablica odlučivanja, nadopunjena uz pomoć Walda, Hurwicza i Laplacea,

dok Savageov kriterij daje

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	najveći gubitak
a_1	0	0	0	0	0
a_2	1	1	1	4	4

Tablica 32. Tablica odlučivanja, prema Savageovom kriteriju.

Iz tablica 31 i 32 zaključujemo da u svim stanjima svijeta akcija a_1 dominira nad a_2 te svi kriteriji kao izbor trebaju dati upravo a_1. $\square$

Iskažimo sada precizno taj aksiom.

A4: Jaka dominacija

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Ako jedna akcija dominira nad ostalima u svim stanjima svijeta, tada metoda mora tu dominantnu akciju izabrati kao bolju, tj.

$$v_{ij} > v_{kj}, \text{ za svaki } j = 1, \dots, n \qquad \Longrightarrow \qquad v_i > v_k.$$

Iz Primjera 3.6. vidimo da je

$$v_{1j} > v_{2j}, \text{ za svaki } j = 1, \dots, 4 \quad \Longrightarrow v_1 > v_2.$$

A5) (Aksiom o irelevantnim alternativama)
Sjetimo se primjera s *likovnom kolonijom*, danog u trećem paradoksu (vidi Poglavlje 2.3.), gdje se eliminacijom jednog kandidata (Cvjetka) promijenio poredak ostalih kandidata (prije nego što je Cvjetko diskvalificiran, pobjednica je bila Ana, dok je konačnom pobjednicom proglašena Branka). Dodavanje novih alternativa usko je vezano uz ovaj aksiom koji zahtijeva da metoda ne dira u međusobni položaj početnih alternativa ukoliko dodamo jednu alternativu/akciju u polaznu tablicu.

A5: Aksiom o irelevantnim alternativama

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Neka je druga tablica odlučivanja konstruirana tako da prvoj tablici dodamo jednu akciju te je

$$\begin{aligned} v'_{ij} &= v_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n \\ v'_{(m+1)j} &= x,\ j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

gdje je x bilo koja vrijednost. Tada metoda mora akcijama dodijeliti težine v_i, $i = 1, \dots, m$ (u 1. tablici), odnosno v'_i, $i = 1, \dots, m+1$ (u 2. tablici) tako da je

$$v_i > v_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad v'_i > v'_k,\ i, k = 1, \dots, m.$$

Možemo primijetiti da paradoks s *likovnom kolonijom* ne zadovoljava taj aksiom.

A6) (Neovisnost o dodavanju konstante stupcu)
Ovaj je aksiom u bliskoj vezi s aksiomom $A3$), odnosno može se interpretirati kao *neovisnost o mjernoj skali po pojedinim stupcima.* Prije nego navedemo precizan iskaz aksioma, pogledajmo sljedeći primjer.

3.7. Primjer. Neka su dane sljedeće tablice odlučivanja, s dvije akcije i dva stanja svijeta te već nadopunjene prema Waldovom kriteriju; pri čemu je Tablica 33 (b) dobivena iz Tablice 33 (a) dodavanjem konstante 10 prvom stupcu.

	θ_1	θ_2	s_i
a_1	6	4	4
a_2	3	8	3

(a)

	θ_1'	θ_2'	s_i
a_1'	16	4	4
a_2'	13	8	8

(b)

Tablica 33. Tablica odlučivanja, neovisnost o dodavanju konstante stupcu, nadopunjena prema Waldovom kriteriju

Iz prethodnog je očito da Waldov kriterij bira a_1 u Tablici 33 (a) te a_2' u Tablici 33 (b). □

Dakle, možemo zaključiti da Waldov kriterij ne zadovoljava aksiom $A6$) koji u nastavku precizno navodimo.

A6: Neovisnost o dodavanju konstante stupcu

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Neka je druga tablica odlučivanja konstruirana tako da ima iste akcije i stanja kao prva tablica, ali za vrijednosti v_{ij} vrijedi

$$v_{il}' = v_{il} + c,\ i = 1, \dots, m,$$
$$v_{ij}' = v_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,\ j \neq l.$$

Tada metoda mora akcijama dodijeliti težine v i v', redom, tako da je

$$v_i > v_k \quad \Longleftrightarrow \quad v_i' > v_k',\ i, k = 1, \dots, m.$$

Taj aksiom vezan je uz dodavanje konstante jednom stupcu (u prethodno opisanom slučaju l-tom stupcu), dok ostale vrijednosti ostaju jednake početnima. Ponavljanjem toga aksioma više puta možemo dodavati konstante istom ili različitim stupcima i više puta, što će biti korisno u dokazu jednog od važnijih teorema (vidi Milnorov teorem, odnosno Teorem 3.11.).

Istaknimo

Sljedeća dva aksioma koja navodimo namijenjena su kako bi točno okarakterizirala što podrazumijevamo pod okolnostima *jake nesigurnosti*. U slučaju da se nalazimo u uvjetima *sigurnosti* ili *slabe nesigurnosti*, treba ih potpuno zanemariti.

A7) (Neovisnost o permutaciji elemenata u retku)
Ako donositelj odluke zaista ne zna ništa o stanjima svijeta, onda je razumno pretpostaviti da bi bio indiferentan između dvije akcije u tablici ispod:

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	6	0	3
a_2	0	3	6

Tablica 35. Tablica odlučivanja

jer, naime, možemo primijetiti da u Tablici 35 oba retka imaju iste elemente te nam je svejedno biramo li a_1 ili a_2.

3.8. PRIMJER. Na osnovu Tablice 35 dodijelimo vrijednosti akcijama, s obzirom na četiri obrađena kriterija.

Rješenje. Rješenje, uz pomoć Waldovog, Hurwiczovog i Laplaceovog kriterija, dano je u Tablici 36.

	θ_1	θ_2	θ_3	s_i	o_i	$\alpha s_i + (1-\alpha)o_i$	Laplace
a_1	6	0	3	0	6	$(1-\alpha)\cdot 6$	9/3
a_2	0	3	6	0	6	$(1-\alpha)\cdot 6$	9/3

Tablica 36. Tablica odlučivanja, nadopunjena uz pomoć Walda, Hurwicza i Laplacea

Nadalje, Savageov kriterij kao izbor daje a_1 (vidi Tablicu 37). □

	θ_1	θ_2	θ_3	najveći gubitak
a_1	0	3	3	3
a_2	6	0	0	6

Tablica 37. Tablica odlučivanja, prema Savageovom kriteriju

Navedimo, u nastavku, precizan iskaz aksioma.

A7: Neovisnost o permutaciji elemenata u retku

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Ako u danoj tablici odlučivanja imamo alternative a_i i a_k tako da postoji permutacija τ koja povlači

$$v_{ij} = v_{k\tau(j)}, \; j = 1, \ldots, n,$$

onda mora vrijediti $v_i = v_k$.

Iz Tablice 37 možemo zaključiti da Savageov kriterij ne zadovoljava ovaj aksiom.

A8) (Neovisnost o dupliciranju stupaca)
Ako se nalazimo u uvjetima *jake nesigurnosti*, tj. ne znamo ništa o stanjima svijeta osim koja su to, postoji li razlika između tablica odlučivanja, Tablice 38 (a) i Tablice 38 (b)?

	θ_1	θ_2
a_1	5	1
a_2	0	4

(a)

	θ'_1	θ'_2	θ'_3	θ'_4
a_1	5	1	1	1
a_2	0	4	4	4

(b)

Tablica 38. Tablica odlučivanja, dupliciranje stupaca

Naime, ukoliko stanja svijeta θ'_2, θ'_3 i θ'_4 iz Tablice 38 (b) *okupimo* zajedno i identificiramo s jednim stanjem θ''_2, onda bi Tablica 38 (b) postala identična Tablici 38 (a) te situacija *jake nesigurnosti*, u kojoj se nalazimo, ne daje nijedan argument kako bismo preferirali stanje svijeta θ_2, u Tablici 38 (a), naspram stanja svijeta θ''_2 u Tablici 38 (b).

3.9. Primjer. Dodijelimo vrijednosti tablicama 38 (a) i (b), s obzirom na Waldov i Laplaceov kriterij te rješenje zapišimo u tablice 40 (a) i (b), redom.

	θ_1	θ_2	s_i	Laplace
a_1	5	1	1	6/2
a_2	0	4	0	4/2

(a)

	θ'_1	θ'_2	θ'_3	θ'_4	s_i	Laplace
a_1	5	1	1	1	1	8/4
a_2	0	4	4	4	0	12/4

(b)

Tablica 40. Tablica odlučivanja, dupliciranje stupaca, nadopunjena prema Waldovom i Laplaceovom kriteriju

Sada je lako zaključiti da Waldov kriterij u obje prethodne tablice bira a_1, dok Laplaceov kriterij bira a_1 u tablici (a) te a_2 u tablici (b). □

Iskažimo precizno aksiom koji smo iznad ilustrirali.

A8: Neovisnost o dupliciranju stupaca

Neka je dana tablica odlučivanja $m \times n$ s akcijama a_i, stanjima svijeta θ_j i vrijednostima v_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ i druga tablica $m \times (n+1)$ tako da je

$$v'_{ij} = v_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$
$$v'_{i(n+1)} = v_{in},\ i = 1, \ldots, m.$$

Tada kriterij treba pridružiti vrijednosti v_i, v'_i tako da vrijedi

$$v_i > v_k \iff v'_i > v'_k,\ \ i, k = 1, \ldots, m.$$

Iz Primjera 3.9. možemo zaključiti da Laplaceov kriterij ne zadovoljava ovaj aksiom.

U nastavku navodimo teorem koji opisuje koji od kriterija zadovoljava navedene aksiome.

3.10. Teorem
Četiri obrađena kriterija (ne)zadovoljavaju navedene aksiome, kao što je prikazano u Tablici 42, pri čemu znak + znači zadovoljava, dok znak − znači da kriterij ne zadovoljava dani aksiom:

	A1)	A2)	A3)	A4)	A5)	A6)	A7)	A8)
Wald	+	+	+	+	+	−	+	+
Hurwicz	+	+	+	+	+	−	+	+
Savage	+	+	+	+	−	+	−	+
Laplace	+	+	+	+	+	+	+	−

Tablica 42. Tablica kriterija i aksioma

Dokaz. Ovaj teorem nećemo u potpunosti dokazivati. Neke od tvrdnji ćemo obrazložiti na intuitivnoj razini, za neke ćemo složenije dati detaljan dokaz, dok ćemo preostale ostaviti čitatelju na razmatranje.

A1)
Već smo kod uvođenja aksioma A1) objasnili kako svi navedeni kriteriji posljedicama pridružuju numeričke vrijednosti te stoga akcije možemo u potpunosti rangirati.
A2)
Kako bismo se uvjerili da Waldov kriterij zadovoljava ovaj aksiom, prisjetimo se primjera danog kod uvođenja tog aksioma te primijetimo sljedeće: iz definicije minimuma možemo uočiti da permutacija stupaca ne mijenja poredak vrijednosti s_i pridruženim akcijama a_i, dok permutacija redaka (akcija) permutira i poredak vrijednosti s_i, no konačna vrijednost (maksimalna vrijednost) s_i, $i = 1, \ldots, m$ ostaje ista.
A3)
Pokažimo da Laplaceov kriterij zadovoljava ovaj aksiom, pri čemu je u novoj tablici

$$v'_{ij} = \alpha v_{ij} + \beta, \quad \alpha > 0.$$

Iz polazne pretpostavke zaključujemo

$$v_i > v_k \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} > \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{kj}.$$

Pomnožimo li prethodnu nejednakost s $\alpha > 0$ te zatim dodamo β, dobivamo

$$\begin{aligned}
v_i > v_k &\Longleftrightarrow \frac{\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} + \beta > \frac{\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{kj} + \beta \\
&\Longleftrightarrow \frac{\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta}{n} > \frac{\alpha}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{kj} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta}{n} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}(\alpha v_{ij} + \beta) > \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}(\alpha v_{kj} + \beta) \\
&\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}v'_{ij} > \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}v'_{kj} \quad \Longleftrightarrow v'_i > v'_k.
\end{aligned}$$

A4)
Pokažimo da Waldov i Laplaceov kriterij zadovoljavaju aksiom *jake dominacije*, odnosno A4). Polazna pretpostavka od koje krećemo je

$$v_{ij} > v_{kj}, \text{ za svaki } j = 1, \ldots n.$$

Da Waldov kriterij zadovoljava A4) odmah slijedi iz

$$v_i = s_i = \min_{j=1,\ldots,n} v_{ij} = v_{ij_0} > v_{kj_0} \geq \min_{j=1,\ldots,n} v_{kj} = s_k = v_k,$$

dok tvrdnju za Laplaceov kriterij opravdava slijed

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} v_{ij} > \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} v_{kj} = v_k.$$

A5)
Hurwiczov kriterij zadovoljava A5), što opravdava sljedeća jednakost:

$$v_i = \alpha s_i + (1-\alpha) o_i = \alpha \min_{j=1,\ldots,n} v_{ij} + (1-\alpha) \max_{j=1,\ldots,n} v_{ij}.$$

Naime, uočimo da vrijednost v_i ovisi samo o i–tom retku, pa dodavanje nove akcije neće izmijeniti poredak prethodnim retcima. Isti je slučaj i kod Waldovog i Laplaceovog kriterija.
Vezano uz Savageov kriterij, pogledajmo sljedeću tablicu:

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	6	0	3
a_2	0	3	6

$\Longrightarrow$

Gubitak	θ_1	θ_2	θ_3	Najveći gubitak
a_1	0	3	3	$v_1 = 3$
a_2	6	0	0	$v_2 = 6$

.

Dodamo li novi red (novu akciju) u prethodnu tablicu, dobivamo

	θ'_1	θ'_2	θ'_3
a'_1	6	0	3
a'_2	0	3	6
a'_3	2	9	4

$\Longrightarrow$

Gubitak	θ'_1	θ'_2	θ'_3	Najveći gubitak
a'_1	0	9	3	$v'_1 = 9$
a'_2	6	6	0	$v'_2 = 6$
a'_3	4	0	2	$v'_3 = 4$

.

Iz $v_1 < v_2$ trebalo bi slijediti $v'_1 < v'_2$, dok je iz prethodnog očito $v'_1 > v'_2$. Dakle, Savageov kriterij ne zadovoljava A5).
A6)
Pokažimo da Laplaceov kriterij zadovoljava ovaj aksiom. Krećemo od pretpostavke

$$v_i > v_k \quad \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} > \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_{kj}$$

te, ukoliko objema stranama dodamo c/n, dobivamo

$$\begin{aligned} v_i > v_k \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}(v_{ij} + v_{il} + c) > \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}(v_{kj} + v_{kl} + c) \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{v'_{ij}}{n} > \sum_{j=1}^{n}\frac{v'_{kj}}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad v'_i > v'_k. \end{aligned}$$

Kod uvođenja ovog aksioma već smo pokazali da ga Waldov kriterij ne zadovoljava.
A7)
S obzirom da se radi o permutaciji elemenata u retku, a jasno je da minimum ne ovisi o poretku elemenata u skupu, Waldov kriterij očito zadovoljava *aksiom neovisnosti o permutaciji elemenata u retku*, odnosno A7). Isto vrijedi i za maksimum te i Hurwiczov kriterij zadovoljava taj aksiom.
Laplaceov kriterij zbraja vrijednosti u pojedinom retku i dijeli s brojem elemenata u retku, a kako je zbrajanje komutativno, očito je i da taj kriterij zadovoljava A7).
Naposljetku, sjetimo se da smo kod uvođenja ovog aksioma konstruirali primjer koji pokazuje da ga Savageov kriterij ne zadovoljava.
A8)
Kod uvođenja ovog aksioma, pokazali smo primjerom da Laplaceov kriterij ne zadovoljava A8). Dupliciranje stupaca ne utječe na određivanje minimuma i maksimuma (skupa elemenata), pa iz toga zaključujemo da ovaj aksiom zadovoljavaju i Waldov i Hurwiczov kriterij.
∎

3.11. Teorem (MILNOR)
Pretpostavimo da neka metoda odlučivanja zadovoljava aksiome A1), A4), A5), A6) i A7). Tada nužno vrijedi

$$v_i \geq v_k \quad \textit{ako i samo ako} \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{v_{ij}}{n} \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{v_{kj}}{n}.$$

Dokaz. Primijetimo da nam aksiom A1) treba da bismo mogli pretpostaviti da metoda svakoj akciji a_i pridružuje vrijednost v_i. Nadalje, primijetimo da s obzirom da vrijedi A6), možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je

$$v_{ij} \geq 0, \quad \text{za sve} \quad i, j$$

jer možemo dodavati konstante stupcima dok to ne zadovoljimo.

Promotrimo sada akcije a_i i a_k tako da vrijedi jednakost, tj.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{kj}}{n} \tag{3.1}$$

te dokažimo smjer $\Longleftarrow$, odnosno trebamo pokazati da iz jednakosti (3.1) slijedi $v_i = v_k$.

Uvedimo nove oznake dobivene u $l-$tom koraku transformacije:

$$\begin{array}{ll} a_i^l & l\text{–ta akcija} \\ v_{ij}^l & l\text{–ta vrijednost, tj. } l\text{–ta težina.} \end{array}$$

Polazimo od vrijednosti $l = 1$, s pretpostavkom da je

$$a_i^0 = a_i, \quad v_{ij}^0 = v_{ij},$$

gdje su a_i, v_{ij} akcije i vrijednosti zadane u polaznoj tablici. Provest ćemo dva koraka:

<u>KORAK 1</u> U tablicu dodajemo akcije a_i^l, a_k^l koje su konstruirane tako da permutiramo vrijednosti $\{v_{ij}^{l-1}\}$, odnosno $\{v_{kj}^{l-1}\}$ u rastućem poretku. Prema A5), jer mi sada dodajemo akcije u polaznu tablicu, nove alternative neće promijeniti poredak starih a_i^{l-1} i a_k^{l-1}, pa prema A7) vrijedi

$$v_i^{l-1} = v_k^{l-1} \quad \Longleftrightarrow \quad v_i^l = v_k^l. \tag{3.2}$$

<u>KORAK 2</u> Dodajemo alternative a_i^{l+1} i a_k^{l+1} tako da vrijedi

$$\begin{aligned} v_{ij}^{l+1} &= v_{ij}^l - \min\{v_{ij}^l, v_{kj}^l\} \\ v_{kj}^{l+1} &= v_{kj}^l - \min\{v_{ij}^l, v_{kj}^l\}, \end{aligned}$$

za sve $j = 1, \ldots, n$, tj. minimalnu vrijednost $\min\{v_{ij}^l, v_{kj}^l\}$ oduzimamo od vrijednosti u $j-$tom stupcu.

Prema aksiomu A6) ni ova transformacija neće promijeniti poredak alternativa, tj.

$$v_i^l = v_k^l \quad \Longleftrightarrow \quad v_i^{l+1} = v_k^{l+1}. \tag{3.3}$$

Nadalje, postavimo vrijednost $l = l + 2$. Ponavljamo korake 1 i 2 te ćemo nakon konačno mnogo koraka doći do dva retka sastavljena od nula.

Primijetimo da kako smo krenuli od pretpostavke (3.1), oba će retka u nekom koraku istovremeno biti nula. Neka je to, npr., μ–ti korak. Ponavljajući korake 1 i 2 te uz pomoć (3.2) i (3.3) dobivamo

$$v_i^\mu = v_k^\mu \quad\Longleftrightarrow\quad v_i^{\mu-1} = v_k^{\mu-1} \quad\Longleftrightarrow\quad \cdots \quad\Longleftrightarrow\quad v_i^0 = v_k^0 \quad\Longleftrightarrow\quad v_i = v_k.$$

Pretpostavimo sada da umjesto jednakosti (3.1) vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n} > \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{kj}}{n}$$

i pokažimo da iz toga slijedi $v_i > v_k$.

Dodajemo akciju a_l u tablicu tako da je

$$v_{lj} = v_{ij} - \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n}(v_{is} - v_{ks}). \tag{3.4}$$

Sada iz (3.4) dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} v_{lj} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} v_{ij} - \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n}(v_{is} - v_{ks}) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} v_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}(v_{ij} - v_{kj}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} v_{kj}, \end{aligned}$$

dok s druge strane, prema aksiomima A4) i A5), slijedi

$$v_i > v_l = v_k \quad\Longrightarrow\quad v_i > v_k,$$

pri čemu nejednakost $v_i > v_k$ vrijedi zbog jake dominacije i uvjeta $v_{ij} > v_{lj}$, za sve $j = 1, \ldots, n$.

Dakle,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n} > \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{kj}}{n} \quad&\Longrightarrow\quad v_i > v_k \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{kj}}{n} \quad&\Longrightarrow\quad v_i = v_k\,. \end{aligned}$$

Primijetimo da bi tim načinom dokazali i suprotan smjer, odnosno

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{v_{ij}}{n} < \sum_{j=1}^{n} \frac{v_{kj}}{n} \quad\Longrightarrow\quad v_i < v_k,$$

kada bismo primijenili dokazivanje obratom po kontrapoziciji, samo uz zamjenu indeksa $i \longleftrightarrow k$. ∎

Na sljedećem ćemo primjeru detaljno ilustrirati Milnorov teorem.

3.12. PRIMJER. Provedimo korake 1 i 2 (iz dokaza Milnorovog teorema) na primjeru Tablice 43, dok ne dobijemo dva retka sastavljena od nula.

	θ_1	θ_2	θ_3
a_i^0	8	6	10
a_k^0	12	3	9

Tablica 43. Tablica uz Primjer 3.12.

Rješenje. Provedimo tražene korake, uz dodatna obrazloženja u Tablici 44.

	θ_1	θ_2	θ_3	komentari
a_i^0	8	6	10	Primijetimo da je $\frac{8+6+10}{3} = \frac{12+3+9}{3}$.
a_k^0	12	3	9	
a_i^1	6	8	10	Korak 1: permutirajmo vrijednosti u redovima u rastućem poretku.
a_k^1	3	9	12	
a_i^2	3	0	0	Korak 2: Oduzimamo $\min\{v_{ij}^1, v_{kj}^1\}$ od $j-$tog stupca, $j = 1, 2, 3$.
a_k^2	0	1	2	
a_i^3	0	0	3	Korak 1: permutirajmo vrijednosti u redovima u rastućem poretku.
a_k^3	0	1	2	
a_i^4	0	0	1	Korak 2: Oduzimamo $\min\{v_{ij}^3, v_{kj}^3\}$ od $j-$tog stupca, $j = 1, 2, 3$.
a_k^4	0	1	0	
a_i^5	0	0	1	Korak 1: permutirajmo vrijednosti u redovima u rastućem poretku.
a_k^5	0	0	1	
a_i^6	0	0	0	Korak 2: Oduzimamo $\min\{v_{ij}^5, v_{kj}^5\}$ od $j-$tog stupca, $j = 1, 2, 3$.
a_k^6	0	0	0	

Tablica 44. Ilustracija Milnorovog teorema

Uočimo i sljedeću, očitu tvrdnju:

3.13. KOROLAR
Ni jedan kriterij odlučivanja ne može zadovoljiti sve aksiome.

3.4. Zadaci za vježbu

3.1. Zadatak Donositelj odluke ima izbor:

- Igrati sljedeću igru: Deset puta baca simetričan (pravilno izrađen) novčić. Ako svaki put padne pismo, ne dobiva ništa, a inače dobiva $10\,000\,000$ kuna.
- Bezuvjetno uzeti 1 kunu.

Je li to dobar primjer za zaključivanje u slučaju jake nesigurnosti?

3.2. Zadatak Donositelj odluke ima izbor:

- Igrati igru u kojoj s nepoznatom vjerojatnošću može dobiti $10\,000\,000$ kuna ili ništa.
- Bezuvjetno uzeti 1 kunu.

Koju alternativu bi nam dao Waldov kriterij kao dobru odluku?

3.3. Zadatak Neka je zadana tablica odlučivanja 45, gdje je x realan broj.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	5	4	3	4
a_2	6	3	6	2
a_3	3	x	5	3
a_4	4	3	5	1

Tablica 45. Tablica uz zadatak 3.3.

Odredite koju akciju treba odabrati, u ovisnosti o x, prema 4 obrađena kriterija. Zbog jednostavnosti, u odgovarajućem kriteriju uzmite $\alpha = \frac{1}{2}$.

3.4. Zadatak Neka je zadana tablica odlučivanja 46. Ako je donositelj odluke odabrao akciju a_2, s kojim je od četiri kriterija on kompatibilan? Ispitajte detaljno sva četiri poznata kriterija i zaključke obrazložite. Precizno navedite uvjete pod kojima Vaš odgovor vrijedi (nakon što riješite zadatak, pri provjeri imajte na umu da u ovoj situaciji treba težiti optimizmu).

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	7	0	3	0
a_2	0	1	0	8
a_3	3	1	1	4
a_4	7	7	4	7

Tablica 46. Tablica uz zadatak 3.4.

3.5. Zadatak Neka je zadana tablica odlučivanja 47, pri čemu je x realan broj.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
a_1	3	4	x	2
a_2	4	3	7	3
a_3	5	1	4	4
a_4	4	3	5	1

Tablica 47. Tablica uz zadatak 3.5.

a) Odredite koju akciju treba odabrati, u ovisnosti o x, prema 4 obrađena kriterija. U Hurwiczovom kriteriju uzmite $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) Odredite za kakav će $x \in \mathbb{R}$ sva četiri kriterija dati isti odabir.

3.6. Zadatak Dokažite da Savageov kriterij zadovoljava aksiom neovisnosti o dupliciranju stupaca.

3.7. Zadatak Provedite korake iz Milnorovog teorema na primjeru Tablice 48, dok ne dobijete dva retka sastavljena od nula.

	θ_1	θ_2	θ_3
a_i^0	18	6	15
a_k^0	20	12	7

Tablica 48. Tablica uz zadatak 3.7.

3.8. Zadatak Provedite korake iz Milnorovog teorema na primjeru Tablice 49, dok ne dobijete

	θ_1	θ_2	θ_3
a_i^0	15	5	25
a_k^0	8	7	30

Tablica 49. Tablica uz zadatak 3.8.

dva retka sastavljena od nula.

4. Preferencije i funkcije vrijednosti

Kada govorimo o preferencijama (kažemo još i *relacijama preferencije*) i funkcijama vrijednosti, pretpostavljamo da smo u uvjetima sigurnosti, odnosno da donositelj odluke točno zna posljedice svojih odluka te da svaka od dostupnih akcija vodi do dobro određenih posljedica. Ovdje pretpostavljamo da racionalni donositelj odluke uvijek odabire akciju koja vodi posljedici koju on više preferira. U kontekstu preferencija, akcije je uobičajeno zvati objektima, što ćemo primijetiti u nastavku.

4.1. Definicija
Kažemo da donositelj odluke **preferira** (kažemo još i **jako preferira**) objekt a nad objektom b (u oznaci $a \succ b$) ako bi, u slučaju da mu ponudimo izbor između a i b, bio razočaran ako mora uzeti b.

4.2. Definicija
Kažemo da je donositelj odluke **indiferentan** između objekata a i b (u oznaci $a \sim b$) ako je jednako sretan dobije li ili a ili b.

U nastavku navodimo glavne zahtjeve koje trebamo očekivati od preferencija.

1) Za proizvoljna tri objekta a, b, c vrijedi svojstvo **tranzitivnosti** (s obzirom na preferenciju), odnosno
$$a \succ b \quad \text{i} \quad b \succ c \quad \Longrightarrow \quad a \succ c.$$

2) Ako za neki par objekata a i b vrijedi $a \succ b$, tada ne može vrijediti $b \succ a$, tj.
$$a \succ b \quad \Longrightarrow \quad b \not\succ a.$$
Ovo svojstvo naziva se **asimetričnost** (s obzirom na relaciju preferencije).

3) Za proizvoljna tri objekta a, b, c vrijedi svojstvo **tranzitivnosti** (s obzirom na indiferentnost), odnosno
$$a \sim b \quad \text{i} \quad b \sim c \quad \Longrightarrow \quad a \sim c.$$

4) Za svaki objekt a vrijedi svojstvo **refleksivnosti** (s obzirom na indiferentnost), odnosno
$$a \sim a.$$

5) Za svaka dva objekta a i b vrijedi **simetričnost** (s obzirom na indiferentnost)

$$a \sim b \implies b \sim a.$$

Posljednja dva svojstva povezuju preferencije i indiferentnost:

6) Za proizvoljna tri objekta a, b, c vrijedi

$$\begin{aligned} a \sim b \quad \text{i} \quad b \succ c &\implies a \succ c \\ a \succ b \quad \text{i} \quad b \sim c &\implies a \succ c. \end{aligned}$$

   Prethodno je svojstvo odmah intuitivno jasno kada ga interpretiramo pomoću značenja danih simbola, što daje:
   ako je donositelj odluke indiferentan između a i b te preferira b nad c onda donositelj odluke preferira a nad c; dok drugo svojstvo, analogno, glasi: ako donositelj odluke preferira a nad b te je indiferentan između b i c, onda donositelj odluke preferira a nad c.

7) Za svaka dva objekta a i b vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:

$$\text{ili} \quad a \succ b \quad \text{ili} \quad a \sim b \quad \text{ili} \quad b \succ a,$$

   odnosno: donositelj odluke ili preferira a nad b ili je indiferentan između a i b ili preferira b nad a.

Sljedećim primjerom ukazat ćemo na pogrešku koja se može pojaviti prilikom korištenja svojstva tranzitivnosti s obzirom na relaciju indiferentnosti.

4.3. Primjer. Ana se s prijateljima dogovara da zajedno odu na izlet u Kopački rit. U *Hrvatskom meteorološkom časopisu* (vidi [18, str. 66, Tablica 1], [40, str. 135, Primjer 3.5]) pronašli su podatak da je prosječna mjesečna temperatura zraka (u Celzijusovim stupnjevima) u Kopačkom ritu tijekom srpnja 21.9. Ana i njezini prijatelji smatraju da je temperatura iznad $20°$ C sasvim prihvatljiva za izlet te su oni indiferentni između temperature od $20°$ C i $20.001°$ C, također između $20.001°$ C i $20.002°$ C itd. Prethodno razmišljanje možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} 20°\,C &\sim 20.001°\,C \\ 20.001°\,C &\sim 20.002°\,C \\ &\cdots \\ 99.999°\,C &\sim 100°\,C \end{aligned}$$

te iz tranzitivnosti indiferentnosti slijedi $20°\,C \sim 100°\,C$. □

Istaknimo

Iz prethodnog primjera slijedi da prilikom uporabe svojstva tranzitivnosti indiferentnosti moramo biti oprezni. Stoga ćemo, u nastavku, pretpostaviti da racionalni donositelj odluke može detektirati sve bitne razlike, s obzirom na model koji promatramo.

4.1. Slaba preferencija

U ovom poglavlju bavit ćemo se slabom preferencijom, što je na neki način *relaksirani* pojam preferencije.

4.4. Definicija
Kažemo da donositelj odluke **slabo preferira** objekt a nad objektom b (u oznaci $a \succcurlyeq b$) ako on smatra da je a dobar barem kao b.

U nastavku ćemo se upoznati i s aksiomima za slabu preferenciju, koji su vezani uz racionalno donošenje odluka.

Neka je, stoga, A skup objekata koje donositelj odluke promatra.

A 2.1: Usporedivost

Svaka dva objekta usporediva su relacijom $\succcurlyeq$. Preciznije, za svaka dva objekta $a, b \in A$ vrijedi

$$a \succcurlyeq b \quad \text{ili} \quad b \succcurlyeq a \quad \text{ili oboje.}$$

A 2.2: Tranzitivnost

Relacija $\succcurlyeq$ je tranzitivna, odnosno za svaka tri objekta $a, b, c \in A$ vrijedi

$$a \succcurlyeq b \quad \text{i} \quad b \succcurlyeq c \quad \Longrightarrow \quad a \succcurlyeq c.$$

A 2.3: Konzistentnost slabe preferencije i indiferentnosti

Za svaka dva objekta $a, b \in A$ vrijedi

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a \succcurlyeq b \quad \text{i} \quad b \succcurlyeq a.$$

A 2.4: Konzistentnost slabe i jake preferencije

Za svaka dva objekta $a, b \in A$ vrijedi

$$a \succ b \quad \Longleftrightarrow \quad b \not\succcurlyeq a.$$

U sljedećem teoremu bit će pokazano da prethodno navedeni aksiomi impliciraju korisna svojstva relacija preferencije i indiferentnosti.

4.5. Teorem

Ako vrijede aksiomi A 2.1–A 2.4, tada vrijedi

i) relacija $\succ$ je tranzitivna i asimetrična,

ii) relacija $\sim$ je tranzitivna, refleksivna i simetrična,

iii) za svaka tri objekta $a, b, c \in A$

$$a \sim b \quad i \quad b \succ c \quad \Longrightarrow \quad a \succ c,$$

iv) za svaka tri objekta $a, b, c \in A$

$$a \succ b \quad i \quad b \sim c \quad \Longrightarrow \quad a \succ c,$$

v) za svaka dva objekta $a, b \in A$ vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:

$$a \succ b, \quad a \sim b, \quad b \succ a.$$

Dokaz. i) Pretpostavimo suprotno onome što treba dokazati.

- Neka relacija $\succ$ nije tranzitivna. Prema tome, postoje $a, b, c \in$ A tako da vrijedi

$$a \succ b \quad \text{i} \quad b \succ c \quad \text{i} \quad a \not\succ c.$$

Iz prethodne pretpostavke slijedi

$$b \succ c \overset{\text{A 2.4}}{\iff} c \not\succcurlyeq b \overset{\text{A 2.1}}{\Longrightarrow} b \succcurlyeq c$$

te

$$a \nsucc c \overset{\text{A 2.4}}{\iff} c \succcurlyeq a$$

pri čemu, uz pomoć aksioma A 2.2 iz $b \succcurlyeq c$ i $c \succcurlyeq a$, zaključujemo da je $b \succcurlyeq a$. S druge strane, iz pretpostavke $a \succ b$, prema aksiomu A 2.4 dobivamo $b \not\succcurlyeq a$, što je u kontradikciji s prethodnim zaključkom. Dakle, relacija $\succ$ je tranzitivna.

- Neka relacija $\succ$ nije asimetrična, što znači da postoje $a, b \in$ A tako da je

$$a \succ b \quad \text{i} \quad b \succ a.$$

Prema aksiomu A 2.4 tvrdnja $a \succ b$ je ekvivalentna s $b \not\succcurlyeq a$, dok je tada očito i $b \succ a$ ekvivalentno s $a \not\succcurlyeq b$. Prema aksiomu A 2.1 nije moguće istovremeno zadovoljiti $b \not\succcurlyeq a$ i $a \not\succcurlyeq b$, dakle došli smo do kontradikcije, što dokazuje asimetričnost relacije $\succ$.

ii) Pokažimo redom tranzitivnost, refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$.

- Pretpostavimo da je $a \sim b$ i $b \sim c$. Prema aksiomu A 2.3 te su tvrdnje ekvivalentne s

$$a \succcurlyeq b \quad \text{i} \quad b \succcurlyeq a \quad \text{i} \quad b \succcurlyeq c \quad \text{i} \quad c \succcurlyeq b.$$

Sada, aksiom A 2.2 povlači

$$a \succcurlyeq c \quad \text{i} \quad c \succcurlyeq a \overset{\text{A 2.3}}{\iff} a \sim c.$$

Dakle, vrijedi tranzitivnost.

- Kako je za svaki $a \in A$ relacija $a \sim a$ ekvivalentna s $a \succcurlyeq a$ i $a \succcurlyeq a$, refleksivnost vrijedi.
- U svrhu dokazivanja simetričnosti primijetimo da je

$$a \sim b \overset{\text{A 2.3}}{\iff} a \succcurlyeq b \quad \text{i} \quad b \succcurlyeq a \iff b \succcurlyeq a \quad \text{i} \quad a \succcurlyeq b \overset{\text{A 2.3}}{\iff} b \sim a.$$

iii) Ponovno, pretpostavimo suprotno onome što treba dokazati, odnosno neka postoje $a, b, c \in A$ tako da je

$$a \sim b \quad \text{i} \quad b \succ c \quad \text{i} \quad a \nsucc c.$$

Prema aksiomima A 2.3 i A 2.4 prethodno je ekvivalentno s

$$a \succcurlyeq b \quad \text{i} \quad b \succcurlyeq a \quad \text{i} \quad c \nsucceq b \quad \text{i} \quad c \succcurlyeq a \quad \overset{\text{A 2.2}}{\Longrightarrow} \quad c \succcurlyeq b,$$

što je u kontradikciji s $c \nsucceq b$.

iv) Dokaz provodimo na potpuno isti način kao u dijelu iii).

v) Dokažimo da za sve $a, b \in A$ vrijedi točno jedna od tvrdnji $a \succ b$, $a \sim b$, $b \succ a$. Zanemarimo li na trenutak naše aksiome, možemo zaključiti da dva objekta a i b mogu biti u sljedećem odnosu:

$$\begin{array}{llll} a \succeq b & a \succeq b & a \nsucceq b & a \nsucceq b \\ b \nsucceq a & b \succeq a & b \succeq a & b \nsucceq a. \\ & & & \\ (1) & (2) & (3) & (4) \end{array}$$

Promotrimo sada svaki od slučajeva (1)–(4) zasebno:

(1) prema A 2.4
$$b \nsucceq a \quad \Longleftrightarrow \quad a \succ b$$
te iz $a \succeq b$ i $a \succ b$ slijedi $a \succ b$;

(2) prema A 2.3 $a \succeq b$ i $b \succeq a$ je ekvivalentno s $a \sim b$;

(3) prema A 2.4
$$a \nsucceq b \quad \Longleftrightarrow \quad b \succ a$$
te iz $b \succ a$ i $b \succeq a$ slijedi $b \succ a$;

(4) prema A 2.1 zaključujemo da nije moguće imati $a \nsucceq b$ i $b \nsucceq a$ (zbog usporedivosti). Dakle, taj slučaj ništa ne daje. ∎

4.2. Klasa indiferentnosti

Za proizvoljan objekt a iz skupa svih objekata A koje donositelj odluke promatra uvodimo **klasu indiferentnosti** s obzirom na a, koju označavamo s $I(a)$ i definiramo s

$$I(a) := \{b \in A : b \sim a\}. \tag{4.5}$$

Dakle, klasa indiferentnosti, s obzirom na objekt a, je skup svih objekata koji su indiferentni s a. Kako smo već pokazali da relacija indiferentnosti ima svojstvo refleksivnosti, odmah slijedi da je $a \in I(a)$. Navedimo, u nastavku, i sljedeća bitna svojstva vezana uz klasu indiferentnosti.

4.6. LEMA
Ako vrijede aksiomi A 2.1–A 2.4, tada

i) *ako je $a \sim b$, onda je $I(a) = I(b)$;*

ii) *ako $I(a)$ i $I(b)$ imaju zajednički element, onda je $I(a) = I(b)$;*

iii) *ako je $a \succ b$, onda za svaki $c \in I(a)$ i za svaki $d \in I(b)$ vrijedi $c \succ d$.*

Dokaz. Najprije primijetimo da s obzirom na pretpostavku o zadovoljenosti aksioma A 2.1–A 2.4 odmah slijedi da vrijede i tvrdnje Teorema 4.5., s obzirom da smo njih dokazali upravo uz takvu pretpostavku.

i) Pretpostavka od koje krećemo je $a \sim b$. Kako bismo dokazali traženu jednakost, uzmimo proizvoljan $c \in I(a)$, što po definiciji (4.5) povlači $c \sim a$. Sada, prema tranzitivnosti relacije $\sim$, iz $c \sim a$ i $a \sim b$ slijedi $c \sim b$, što (prema definiciji (4.5)) znači da je onda $c \in I(b)$.
Dakle, pokazali smo da je $I(a) \subseteq I(b)$.
Na isti način, za proizvoljni $c \in I(b)$ definicija (4.5) daje $c \sim b$, što, zbog tranzitivnosti, u kombinaciji s $b \sim a$ (što dobivamo iz $a \sim b$ i simetričnosti relacije $\sim$) daje $c \in I(a)$. Time je dokazana i obratna inkluzija $I(b) \subseteq I(a)$. Iz dviju dokazanih inkluzija slijedi tražena jednakost.

ii) Neka $I(a)$ i $I(b)$ imaju zajednički element c. Iz $c \in I(a)$, prema (4.5), slijedi $c \sim a$ (što je zbog svojstva simetričnosti ekvivalentno s $a \sim c$), dok iz $c \in I(b)$ dobivamo $c \sim b$.
Sada imamo

$$a \sim c \quad \text{i} \quad c \sim b \quad \overset{\text{tranzitivnost}}{\Longrightarrow} \quad a \sim b\,.$$

Prema prethodno dokazanoj tvrdnji i) iz $a \sim b$ slijedi tražena jednakost $I(a) = I(b)$.

iii) Neka je $a \succ b$, $c \in I(a)$ i $d \in I(b)$, pri čemu su c i d proizvoljni. Iz prethodnih dviju pretpostavki i jednakosti (4.5) dobivamo $c \sim a$ i $d \sim b$, odnosno, zbog svojstva simetričnosti i $b \sim d$.
Iz prethodnog uočavamo da je $c \sim a$, $a \succ b$ i $b \sim d$, iz čega slijedi, prema tvrdnji iii) Teorema 4.5., da je $c \succ b$ i $b \sim d$. Uz pomoć posljednjeg i tvrdnje iv) Teorema 4.5. zaključujemo da je $c \succ d$, što je i trebalo dokazati. ∎

4.7. Napomena
S obzirom da je relacija $\sim$ istovremeno refleksivna, simetrična i tranzitivna, možemo zaključiti da se radi o relaciji ekvivalencije. To upravo znači da relacija $\sim$ daje particiju skupa objekata na međusobno disjunktne podskupove [56].
Nadalje, uvodimo relaciju $\succ_i$ između klasa indiferentnosti na sljedeći način:

$$I_1 \succ_i I_2 \iff a \succ b,\ \forall a \in I_1,\ \forall b \in I_2.$$

Analogno, vrijedi

$$I_1 \succcurlyeq_i I_2 \iff a \succcurlyeq b,\ \forall a \in I_1,\ \forall b \in I_2.$$

4.8. Definicija
Za dani skup alternativa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i relaciju slabe preferencije $\succcurlyeq$ nad A, kažemo da je $\nu : A \to \mathbb{R}$ **ordinalna funkcija vrijednosti** ako za proizvoljne $a_i, a_j \in A$ vrijedi

$$a_i \succcurlyeq a_j \iff \nu(a_i) \geq \nu(a_j).$$

Iz prethodne je definicije očito da je ordinalna funkcija vrijednosti realna rastuća funkcija. Također, iz prethodne je definicije lako zaključiti sljedeće:

4.9. Propozicija
Za ordinalnu funkciju vrijednosti $\nu : A \to \mathbb{R}$, definiranu na danom skupu alternativa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, vrijedi

i) $a \succ b$ *ako i samo ako je* $\nu(a) > \nu(b)$

ii) $a \sim b$ *ako i samo ako je* $\nu(a) = \nu(b)$.

Dokaz. Dane je tvrdnje lako dokazati uz pomoć aksioma A 2.1–A 2.4 i Definicije 4.8. Naime,

i) lako je uočiti

$$a \succ b \overset{\text{A 2.4}}{\iff} b \not\succsim a \overset{\text{Def. 4.8.}}{\iff} \nu(b) \ngeq \nu(a) \iff \nu(b) < \nu(a),$$

gdje zadnja ekvivalencija slijedi zbog uređaja na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$.

ii) Očito je

$$\begin{aligned} a \sim b &\overset{\text{A 2.3}}{\iff} a \succsim b \quad \text{i} \quad b \succsim a \overset{\text{Def. 4.8.}}{\iff} \nu(a) \geq \nu(b) \quad \text{i} \quad \nu(b) \geq \nu(a) \\ &\iff \nu(a) = \nu(b), \end{aligned}$$

gdje posljednja ekvivalencija ponovno slijedi zbog uređaja na skupu $\mathbb{R}$. ■

4.10. PRIMJER. Darko razmišlja u koju boju bi mogao okrečiti sobu. Premišlja se između bijele (b), plave (p), zelene (z), krem (k) ili smeđe (s) (primijetimo da Darko odlučuje između pet alternativa). Preferencije je zapisao u Tablicu 50

	b	p	z	k	s
b	$\otimes$	$\bigcirc$	$\times$	$\times$	$\bigcirc$
p	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$
z	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\otimes$	$\otimes$	$\bigcirc$
k	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\otimes$	$\otimes$	$\bigcirc$
s	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\otimes$

Tablica 50. Tablica Darkovih preferencija

na sljedeći način:

- stavio je znak $\otimes$ na mjesto (i, j) ako i samo ako je $\underline{\text{red } i \sim \text{stupac } j}$
- stavio je znak $\times$ na mjesto (i, j) ako i samo ako je $\underline{\text{red } i \succ \text{stupac } j}$
- stavio je znak $\bigcirc$ na mjesto (i, j) ako i samo ako je $\underline{\text{red } i \prec \text{stupac } j}$

Nađimo jedan primjer ordinalne funkcije vrijednosti koja se slaže s relacijom $\succ_i$.

Rješenje. Iz tablice iščitavamo sljedeće: $I(b) = \{b\}, I(p) = I(s) = \{p, s\}$ te $I(z) = I(k) = \{z, k\}$. Također je $p \succ b$ i $s \succ b$ te $b \succ z$ i $b \succ k$. Dakle, zaključujemo

$$\{p, s\} \succ_i \{b\} \succ_i \{z, k\}.$$

Kako je prema Definiciji 4.8. ordinalna funkcija vrijednosti realna i rastuća, jedan od (neprebrojivo mnogo) izbora, koji zadovoljava prethodno dobiveno, je odabir vrijednosti

$$\nu(p) = \nu(s) = 5 > \nu(b) = \frac{7}{2} > \nu(z) = \nu(k) = 1.$$

Dakle, bitno je poštovati uvjet da je ν rastuća funkcija. □

Primijetimo da smo u prethodnom primjeru, iz preferencija koje je Darko zapisao u tablicu, predložili jedan način pridruživanja vrijednosti za ν. Naš zaključak opravdava sljedeći teorem [23, str. 77, Theorem 3.3]:

4.11. Teorem
Za konačan skup objekata $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ s relacijom $\succcurlyeq$ koja zadovoljava aksiome A 2.1–A 2.4, uvijek možemo konstruirati pripadnu ordinalnu funkciju vrijednosti.

Dokaz. Neka je

$$v(a_i) \quad \text{jednak broju objekata} \quad a_j \in A \quad \text{takvih da je} \quad a_i \succcurlyeq a_j. \tag{4.6}$$

U nastavku ćemo dokazati da je tada

$$v(a_i) \geq v(a_j) \quad \Longleftrightarrow \quad a_i \succcurlyeq a_j,$$

što će, po definiciji, značiti da je v ordinalna funkcija vrijednosti. Pokažimo najprije da $a_i \succcurlyeq a_j$ povlači nejednakost $v(a_i) \geq v(a_j)$.

Naime, neka je a_k bilo koji objekt za koji vrijedi $a_j \succcurlyeq a_k$. Ako je $a_i \succcurlyeq a_j$, onda je zbog tranzitivnosti i $a_i \succcurlyeq a_k$. Dakle, bilo koji objekt koji *ubrajamo* u $v(a_j)$ je također, prema definiciji (4.6), *ubrojan* u $v(a_i)$, što vodi do željene implikacije.

Pokažimo sada da

$$a_i \succ a_j \quad \Longrightarrow \quad v(a_i) > v(a_j).$$

Prema prethodno pokazanom, vrijede implikacije

$$a_i \succ a_j \quad \Longrightarrow \quad a_i \succcurlyeq a_j \quad \Longrightarrow \quad v(a_i) \geq v(a_j),$$

no prema pretpostavci da vrijede svi navedeni aksiomi A 2.1–A 2.4 također znamo da

$$a_i \succ a_j \quad \Longrightarrow \quad a_j \not\succcurlyeq a_i;$$

dakle, postoji barem jedan objekt, nazovimo ga a_i, koji je *ubrojan* u $v(a_i)$ zbog $a_i \succcurlyeq a_i$, a nije *ubrojan* u $v(a_j)$. Stoga je

$$a_i \succ a_j \quad \Longrightarrow v(a_i) \geq v(a_j) + 1 > v(a_j).$$

Preostalo je još pokazati implikaciju

$$v(a_i) \geq v(a_j) \quad \Longrightarrow \quad a_i \succcurlyeq a_j.$$

Pretpostavimo da prethodna implikacija ne vrijedi. Tada postoje objekti $a_k, a_l \in A$ takvi da je

$$v(a_k) \geq v(a_l) \quad \text{i} \quad a_k \not\succcurlyeq a_l.$$

Prema prethodno pokazanom, sada je

$$a_k \not\succcurlyeq a_l \quad \Longrightarrow \quad a_l \succ a_k \quad \Longrightarrow \quad v(a_l) > v(a_k) \quad \Longrightarrow \quad v(a_k) \not\geq v(a_l),$$

što je kontradikcija s našom pretpostavkom. Dakle, možemo zaključiti da takvi a_k i a_l ne postoje, što vodi na implikaciju koju smo trebali pokazati. ■

Ordinalnu funkciju vrijednosti možemo odrediti i ukoliko su poznate preferencije između promatranog skupa objekata, koje tada, poštujući pravila prethodno definiranih relacija $\succ$, $\succcurlyeq$ i $\sim$, lako možemo poslagati u tablicu kao što je ona dana u prethodnom primjeru. Za ilustraciju, navodimo sljedeći primjer:

4.12. PRIMJER. Trener atletskog kluba *Slavonija–Žito* razmišlja koga još odabrati za natjecanje na *Ekipnom prvenstvu Hrvatske u krosu.* Prema prethodnom iskustvu, on zna da je Ema brža i spretnija od Hane, Franka je brža i spretnija od Eme, Gordane i Hane, dok je Gordana brža i spretnija od Eme i Hane. Naravno, trener preferira natjecateljicu koja je brža i spretnija od drugih. Koga on treba povesti na natjecanje?

Rješenje. Ako je trener preferencije zapisao na sljedeći način:

- stavio je znak ⊗ na mjesto (i, j) ako i samo ako je red $i \sim$ stupac j
- stavio je znak × na mjesto (i, j) ako i samo ako je red $i \succ$ stupac j
- stavio je znak ◯ na mjesto (i, j) ako i samo ako je red $i \prec$ stupac j,

onda su njegove preferencije predstavljene Tablicom 51.

	E	F	G	H
E	$\otimes$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\times$
F	$\times$	$\otimes$	$\times$	$\times$
G	$\times$	$\bigcirc$	$\otimes$	$\times$
H	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\otimes$

Tablica 51. Tablica trenerovih preferencija

Naravno, trener je indiferentan kada bira između jedne te iste osobe te stoga na glavnoj dijagonali imamo $\otimes$, dok ni na jednom drugom mjestu u tablici nemamo znak za indiferentnost, što znači da imamo četiri klase indiferentnosti

$$I(E), \quad I(F), \quad I(G), \quad I(H).$$

Kako bismo odredili odnos klasa indiferentnosti s obzirom na relaciju $\succ_i$, iz tablice iščitavamo sljedeće: $E \succ H$, $F \succ E$, $F \succ G$, $F \succ H$, $G \succ E$ te $G \succ H$. Dakle, zaključujemo

$$I(F) \succ_i I(G) \succ_i I(E) \succ_i I(H),$$

što znači da je Franka brža i spretnija od ostalih te bi je trener trebao povesti na natjecanje. □

4.3. Izmjeriva funkcija vrijednosti

U svrhu veće ekspresivnosti donositelja odluke uvodimo pojam zamjene i relaciju slabog uređaja na zamjene. U nastavku simbol $(a \longleftarrow b)$ predstavlja **zamjenu** (engl. *exchange*, što je obrazloženje za oznaku $\succcurlyeq_e$ koja će se ispod pojaviti) b sa a; a kažemo još i *zamjenu* b *radi dobivanja* a ili *zamjenu* b *da bismo dobili* a.

Nadalje, relacija slabog uređaja na zamjene opisana je u sljedećoj definiciji.

4.13. Definicija

Neka su $a, b, c, d \in A$ alternative. Kažemo da donositelj odluke **preferira** (preciznije je reći **slabo preferira**, no u ovom kontekstu koriste se oba termina) zamjenu $(a \longleftarrow b)$ nad zamjenom $(c \longleftarrow d)$ u oznaci

$$(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow d)$$

ako više preferira dobiti a umjesto b nego c umjesto d.

Bitno je naglasiti, vezano uz prethodnu definiciju, da ne uspoređujemo krajnja stanja, nego gledamo kojom zamjenom više dobivamo, što ćemo ilustrirati sljedećim primjerom.

4.14. Primjer. Neka su dane alternative:
d – osoba nema koronu i dobit će ocjenu 2 iz Teorije odlučivanja
c – osoba ima težak oblik korone i dobit će ocjenu 2 iz Teorije odlučivanja
b – osoba nema koronu i dobit će ocjenu 5 iz Teorije odlučivanja
a – osoba nema koronu i dobit će ocjenu 3 iz Teorije odlučivanja.
Preferirate li zamjenu c sa d nad zamjenom a sa b ili obratno?

Rješenje. Ukoliko promotrimo kojom zamjenom više dobivamo te zdravlje stavimo na prvo mjesto, zaključit ćemo da nam bolje odgovara zamjena c sa d nego zamjena a sa b, odnosno

$$(d \longleftarrow c) \succcurlyeq_e (b \longleftarrow a).$$

□

4.15. Napomena

Primijetimo da smo do sada uveli dvije relacije slabe preferencije:

$\succcurlyeq$ slaba preferencija između objekata

$\succcurlyeq_e$ slaba preferencija između zamjena (tj. nad zamjenama).

4.16. Definicija

Izmjeriva funkcija vrijednosti za relacije slabe preferencije $\succcurlyeq$ i slabe preferencije nad zamjenama $\succcurlyeq_e$ je funkcija $\nu : A \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava

(1) $a \succcurlyeq b$ ako i samo ako je $\nu(a) \geq \nu(b)$

(2) $(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow d)$ ako i samo ako je $\nu(a) - \nu(b) \geq \nu(c) - \nu(d)$.

4.17. Definicija

Za dani skup zamjena Z i relaciju slabe preferencije $\succcurlyeq_e$ nad zamjenama Z kažemo da je $V : Z \to \mathbb{R}$ **ordinalna funkcija vrijednosti za relaciju** $\succcurlyeq_e$ ako za proizvoljne $a, b \in Z$ vrijedi

$$V(a \longleftarrow b) = \nu(a) - \nu(b).$$

4.18. Napomena

Primijetimo da uz pomoć Definicije 4.17. svojstvo (2) iz Definicije 4.16. možemo pisati kao

$$(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow d) \quad \Longleftrightarrow \quad V(a \longleftarrow b) \geq V(c \longleftarrow d).$$

4.4. Aksiomi slabog uređaja

U nastavku ćemo se upoznati s aksiomima koji povezuju slabu preferenciju i slabu preferenciju nad zamjenama, od kojih ćemo neke složenije i detaljno obrazložiti, odnosno dokazati.

Naime, prirodno je i nužno pretpostaviti da su indiferentnost $\sim_e$ i stroga preferencija $\succ_e$, između zamjena konzistentne (kažemo još *u skladu*) s $\succcurlyeq_e$, na isti način na koji su indiferentnost $\sim$ i stroga preferencija $\succ$ konzistentne s $\succcurlyeq$. To je upravo smisao sljedećih aksioma koje ponekad nazivamo i *aksiomi slabog uređaja* (engl. *weak ordering axioms*) [23, str. 83].

Neka je, kao i prije, A skup objekata (alternativa) koje donositelj odluke promatra.

A 3.1: Slabi uređaj

Relacija $\succcurlyeq$ mora zadovoljavati aksiome A 2.1–A 2.4 nad skupom alternativa, dok relacija $\succcurlyeq_e$ mora zadovoljavati iste aksiome nad skupom zamjena.

A 3.2: Konzistentnost $\succcurlyeq$ i $\succcurlyeq_e$

Za svaka dva objekta $a, b \in A$ vrijedi

$$a \succcurlyeq b \quad \Longleftrightarrow \quad (a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow c), \quad \text{za svaki } c \in A.$$

Zamjenu $(c \longleftarrow c)$ često nazivamo nul-zamjena. Preciznije, donositelj odluke zamijeni c sa c, što ne daje ni bolju ni goru situaciju.

Dokaz. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow c) \overset{\text{Def. 4.16. (2)}}{\Longleftrightarrow} \nu(a) - \nu(b) \geq \nu(c) - \nu(c) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \nu(a) \geq \nu(b) \overset{\text{Def. 4.16. (1)}}{\Longleftrightarrow} a \succcurlyeq b. \qquad \blacksquare$$

A 3.3: Inverzija

Za svaka četiri objekta $a, b, c, d \in A$ vrijedi

$$(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow d) \quad \Longleftrightarrow \quad (b \longleftarrow a) \preccurlyeq_e (d \longleftarrow c).$$

Prethodnu ekvivalenciju možemo interpretirati na sljedeći način: ako donositelj odluke misli da dobitak u zamjeni b sa a nije manji od dobitka u zamjeni d sa c, onda on također smatra da dobitak u zamjeni a sa b nije veći od dobitka u zamjeni c sa d (i obratno).

Dokaz. Uz pretpostavku da postoji ν, prema Definiciji 4.16. (2) zaključujemo:

$$\begin{aligned}(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow d) &\Longleftrightarrow \nu(a) - \nu(b) \geq \nu(c) - \nu(d)\\ &\Longleftrightarrow \nu(b) - \nu(a) \leq \nu(d) - \nu(c)\\ &\Longleftrightarrow (b \longleftarrow a) \preccurlyeq_e (d \longleftarrow c).\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

A 3.4: Konkatenacija

Za proizvoljne objekte $a, b, c, d, e, f \in A$ tvrdnje

$$(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (d \longleftarrow e),$$
$$(b \longleftarrow c) \succcurlyeq_e (e \longleftarrow f)$$

povlače $(a \longleftarrow c) \succcurlyeq_e (d \longleftarrow f)$.

Dokaz. Ponovno, uz pretpostavku da postoji funkcija ν, prema Definiciji 4.16. (2) slijedi

$$\begin{aligned}(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (d \longleftarrow e) \quad &\iff \quad \nu(a) - \nu(b) \geq \nu(d) - \nu(e),\\ (b \longleftarrow c) \succcurlyeq_e (e \longleftarrow f) \quad &\iff \quad \nu(b) - \nu(c) \geq \nu(e) - \nu(f).\end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih nejednakosti (s desne strane) dobivamo $\nu(a)-\nu(c) \geq \nu(d)-\nu(f)$, iz čega, prema Definiciji 4.16. (2), dobivamo traženu tvrdnju $(a \longleftarrow c) \succcurlyeq_e (d \longleftarrow f)$. ∎

U nastavku navodimo jedan primjer konstrukcije izmjerive funkcije vrijednosti ν.

4.19. PRIMJER. Neka je dan skup objekata A čije su vrijednosti u potpunosti poznate donositelju odluke. Za objekte $a, b \in A$ zamjena $a \longleftarrow b$ znači da će donositelj odluke izabrati a umjesto uzeti objekt b. Pretpostavimo da donositelj odluke preferira predmete veće vrijednosti, odnosno da preferira veću financijsku dobit od manje. Prvi korak u konstrukciji funkcije ν je izbor *mjerne jedinice*. U tu svrhu, izaberemo proizvoljnu (pozitivnu) dobit $a_1 \in A$ tako da je $\nu(a_1) = 1$. Zbog jednostavnije notacije uvodimo i objekt bez vrijednosti a_0, tj. $\nu(a_0) = 0$. Nadalje, donositelja odluke tražimo da navede vrijednost/iznos a_2 tako da vrijedi

$$(a_2 \longleftarrow a_1) \sim_e (a_1 \longleftarrow a_0), \tag{4.7}$$

odnosno, tako će donositelj odluke biti *podjednako* sretan ako zamijeni a_1 s a_2, kao i da zamijeni a_0 s a_1. Kako je $\nu(a_0) = 0$ i $\nu(a_1) = 1$, iz (4.7) slijedi

$$\nu(a_2) - \nu(a_1) = \nu(a_1) - \nu(a_0),$$

što je, očito, ekvivalentno s

$$\nu(a_2) = 2\nu(a_1) - \nu(a_0) = 2.$$

Nadalje, kada je donositelj odluke odabrao a_2, pitamo ga za vrijednost od a_3 tako da je zadovoljeno

$$(a_3 \longleftarrow a_2) \sim_e (a_2 \longleftarrow a_1),$$

zatim za vrijednost od a_4 tako da je

$$(a_4 \longleftarrow a_3) \sim_e (a_3 \longleftarrow a_2) \ldots.$$

Na prethodno opisan način induktivno dobivamo niz vrijednosti koje predstavljaju financijske dobiti, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tako da je

$$(a_1 \longleftarrow a_0) \sim_e (a_2 \longleftarrow a_1) \sim_e \cdots \sim_e (a_n \longleftarrow a_{n-1}) \sim_e \cdots$$

Prema prethodnoj je konstrukciji

$$\nu(a_0) = 0,\ \nu(a_1) = 1,\ \nu(a_2) = 2,\ \ldots,\ \nu(a_n) = n\ \ldots$$

Pretpostavimo sada da želimo odrediti $\nu(a)$ za neki $a \in A$. Tada trebamo promatrati dva slučaja:

- ako je $a = a_n$, za neki n, onda je $\nu(a) = \nu(a_n) = n$ i odredili smo traženu vrijednost;
- ako je $a \neq a_n$, za svaki n, nastavljamo na sljedeći način:
  pretpostavljamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je

  $$a_{n+1} \succcurlyeq a \succcurlyeq a_n \qquad (\star),$$

  iz čega slijedi $\nu(a_{n+1}) \geq \nu(a) \geq \nu(a_n)$, odnosno $n + 1 \geq \nu(a) \geq n$.
  Zatim, tražimo donositelja odluke da odredi $a_{n+\frac{1}{2}}$ takav da je

  $$(a_{n+1} \longleftarrow a_{n+\frac{1}{2}}) \sim_e (a_{n+\frac{1}{2}} \longleftarrow a_n) \qquad (\star\star).$$

  Riječima, donositelj odluke će biti podjednako sretan ako zamijeni $a_{n+\frac{1}{2}}$ s a_{n+1}, kao i da zamijeni a_n s $a_{n+\frac{1}{2}}$. U tom smislu, $a_{n+\frac{1}{2}}$ je srednja vrijednost u smislu preferencije intervala između a_n i a_{n+1}. Sada iz $(\star\star)$ zaključujemo

  $$\nu(a_{n+1}) - \nu(a_{n+\frac{1}{2}}) = \nu(a_{n+\frac{1}{2}}) - \nu(a_n),$$

  odnosno

  $$\nu(a_{n+\frac{1}{2}}) = n + \tfrac{1}{2}.$$

  Iz prethodnog je

  $$a_{n+1} \succ a_{n+\frac{1}{2}} \succ a_n,$$

  što vodi na

1° $a_{n+1} \succcurlyeq a \succcurlyeq a_{n+\frac{1}{2}}$, iz čega slijedi $n + 1 \geq \nu(a) \geq n + \frac{1}{2}$, ili

2° $a_{n+\frac{1}{2}} \succcurlyeq a \succcurlyeq a_n$, iz čega slijedi $n + \frac{1}{2} \geq \nu(a) \geq n$.

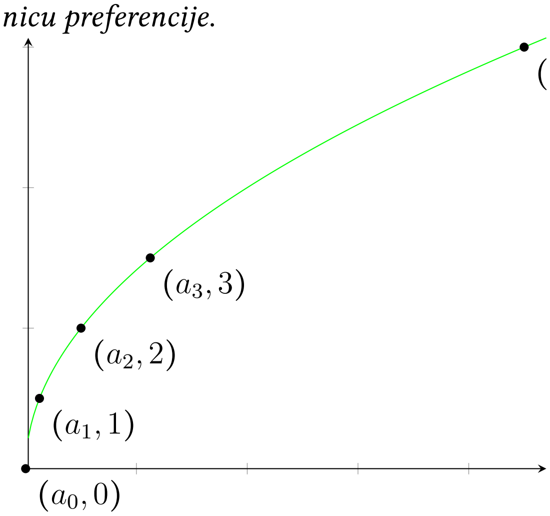
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi 1° (daljnji je postupak isti i u slučaju 2°). Tada pitamo donositelja odluke za $a_{n+\frac{3}{4}}$ tako da je

$$(a_{n+1} \longleftarrow a_{n+\frac{3}{4}}) \sim_e (a_{n+\frac{3}{4}} \longleftarrow a_{n+\frac{1}{2}})\,.$$

Na isti način kao što je opisano u prethodnom koraku dobivamo da je

$$n + 1 \geq \nu(a) \geq n + \tfrac{3}{4} \quad \text{ili} \quad n + \tfrac{3}{4} \geq \nu(a) \geq n + \tfrac{1}{2}.$$

Nastavljajući *raspolavljati* intervale na isti način možemo odrediti numeričku vrijednost od $\nu(a)$. Primijetimo da zamjena $(a_1 \longleftarrow a_0)$ zapravo definira *mjernu jedinicu preferencije.*



Slika 1. Graf prethodno konstruirane funkcije korisnosti v

□

Primijetimo da smo u konstrukciji prethodnog primjera pretpostavili da, na neki način, donositelj odluke može u svakom trenutku odgovoriti na sljedeća dva pitanja:

i) Za dane $b, c, d \in A$ koja vrijednost/dobit a zadovoljava uvjet

$$(a \longleftarrow b) \sim_e (c \longleftarrow d)\,?$$

ii) Za dane $b, c \in A$ koja vrijednost/dobit a zadovoljava uvjet

$$(b \longleftarrow a) \sim_e (a \longleftarrow c)\,?$$

Prethodne pretpostavke poznate su i pod nazivom *pretpostavke rješivosti* te nas vode do sljedećeg aksioma:

A 3.5: Rješivost

i) Za sve objekte $b, c, d \in A$ postoji objekt $a \in A$ tako da vrijedi

$$(a \longleftarrow b) \sim_e (c \longleftarrow d).$$

ii) Za sve objekte $b, c \in A$ postoji objekt $a \in A$ tako da vrijedi

$$(b \longleftarrow a) \sim_e (a \longleftarrow c).$$

Kako bismo definirali posljednji, šesti po redu aksiom, potrebno je najprije uvesti pojam standardne sekvence.

4.20. Definicija
Objekti $a_0, a_1, \ldots$ čine **standardnu sekvencu** ako su u nekom smislu jednako udaljeni.

Možemo uočiti da je u Primjeru 4.19. konstruirani niz $a_0, a_1, \ldots$ jedan primjer standardne sekvence jer vrijedi

$$(a_{n+1} \longleftarrow a_n) \sim_e (a_1 \longleftarrow a_0),$$

za svaki n.

4.21. Definicija
Standardna sekvenca je strogo omeđena ako za neki fiksni b vrijedi

$$b \succ a_n, \text{ za svaki } n \quad \text{i} \quad (a_n \longleftarrow a_{n-1}) \sim_e (a_1 \longleftarrow a_0),$$

odnosno, fiksan objekt b preferiran je nad svim objektima u standardnoj sekvenci.

Sada smo spremni iskazati posljednji aksiom.

A 3.6: Arhimedovost

Svaka strogo omeđena standardna sekvenca je konačna.

4.22. Teorem

Ako su za relacije $\succcurlyeq$ i $\succcurlyeq_e$ zadovoljeni aksiomi A 3.1–A 3.6, onda postoji i odgovarajuća izmjeriva funkcija vrijednosti, u smislu Definicije 4.16. Štoviše, aksiomi A 3.1–A 3.4 i A 3.6 nužni su za takvu reprezentaciju.

Više detalja, vezanih uz prethodnu tvrdnju, čitatelj može pronaći u [23, str. 88].

Istaknimo

Ordinalna funkcija vrijednosti jedinstvena je do na strogo rastuću transformaciju. Naime, ako je $A = \{a, b, c\}$ dani skup objekata te ukoliko pretpostavimo da vrijede sljedeće preferencije

$$a \succ b \succ c; \quad (a \longleftarrow c) \succ_e (a \longleftarrow b) \succ_e (b \longleftarrow c),$$

onda su s

$$v(a) = 10, \quad v(b) = 3, \quad v(c) = 0$$

te također s

$$w(a) = 12, \quad w(b) = 4, \quad w(c) = 1$$

dobro definirane vrijednosti funkcija koje predstavljaju dane preferencije. Nadalje, primijetimo da su $v(\cdot)$ i $w(\cdot)$ povezane sa strogo rastućom transformacijom

$$\phi(10) = 12, \quad \phi(3) = 4 \quad \phi(0) = 1.$$

Ukoliko želimo da su izmjerive funkcije vrijednosti jedinstvene do na transformaciju ϕ, moramo dodati još neke uvjete na tu funkciju, osim da je samo strogo rastuća. Nažalost, nije moguće biti precizan s obzirom na tu restrikciju, osim ako ne postavimo i neke dodatne uvjete na skup A. Kao što smo vidjeli u Teoremu 4.22., dovoljni uvjeti za postojanje izmjerive funkcije vrijednosti uključuju i aksiom *rješivosti* , koji zahtijeva da je dani skup objekata *dovoljno bogat elementima* na način da zadovoljava potrebne zahtjeve. Kako bismo mogli okarakterizirati jedinstvenost funkcije ϕ, trebamo pretpostaviti da vrijedi aksiom *rješivosti.*
U primjeru iznad taj aksiom očito nije zadovoljen jer ne postoji objekt
$x \in A = \{a, b, c\}$ tako da je

$$(x \longleftarrow c) \sim_e (a \longleftarrow b).$$

4.23. Propozicija

Uz pretpostavku da na skupu A vrijedi aksiom rješivosti, v i w su dvije izmjerive funkcije vrijednosti za iste preferencije $\succcurlyeq$ i $\succcurlyeq_e$ ako i samo ako postoje realni brojevi β i $\alpha > 0$ tako da *je*

$$w(a) = \alpha v(a) + \beta, \quad \textit{za svaki } a \in A.$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da vrijedi $w(a) = \alpha v(a) + \beta$, $a \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a \succcurlyeq b \quad &\Longleftrightarrow \quad v(a) \geq v(b) \quad \Longleftrightarrow \alpha v(a) + \beta \geq \alpha v(b) + \beta \\ &\Longleftrightarrow \quad w(a) \geq w(b), \end{aligned}$$

čime je zadovoljen uvjet (1) iz Definicije 4.16.

Također, vrijedi

$$\begin{aligned} (a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow d) \quad &\Longleftrightarrow \quad v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha(v(a) - v(b)) \pm \beta \geq \alpha(v(c) - v(d)) \pm \beta \\ &\Longleftrightarrow \quad w(a) - w(b) \geq w(c) - w(d), \end{aligned}$$

što je upravo uvjet (2) iz Definicije 4.16. Dakle, w je izmjeriva funkcija vrijednosti, nad istim preferencijama kao i v.

Dio dokaza koji pokazuje da funkcije v i w mogu biti definirane samo nad istim preferencijama ukoliko je $w = \alpha v + \beta$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, zaineresirani čitatelj može pronaći u [50, str. 151]. ∎

Na kraju, navedimo nekoliko primjera koji će čitatelju pomoći lakše usvojiti prethodno gradivo.

4.24. PRIMJER. Neka je A promatrani skup objekata i neka vrijede *aksiomi slabog uređaja*, tj. aksiomi A 3.1–A 3.6. Pokažite da vrijedi svojstvo refleksivnosti za relaciju $\succcurlyeq_e$. Zatim, koristeći refleksivnost i spomenute aksiome, pokažite da vrijedi

$$a \succcurlyeq b \quad \Longrightarrow \quad (a \longleftarrow c) \geq_e (b \longleftarrow c),$$

za svaki objekt $c \in A$.

Rješenje. Ukoliko za relaciju $\succcurlyeq_e$ vrijedi svojstvo refleksivnosti, to bi značilo da za proizvoljne objekte $a, b \in A$ vrijedi

$$(a \longleftarrow b) \geq_e (a \longleftarrow b).$$

Prethodnu je tvrdnju lako provjeriti. Naime, s obzirom da vrijede aksiomi A 3.1–A 3.6, prema Teoremu 4.22. postoji izmjeriva funkcija vrijednosti ν u smislu Definicije 4.16. te bi stoga prethodna tvrdnja bila ekvivalentna s

$$\nu(a) - \nu(b) \geq \nu(a) - \nu(b),$$

što je očito zadovoljeno.
Nadalje, koristeći upravo opravdanu refleksivnost i aksiom A 3.2 (koji primjenjujemo na pretpostavku $a \succcurlyeq b$) dobivamo

$$(c \longleftarrow a) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow a),$$
$$(a \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (a \longleftarrow a),$$

što prema A 3.4 povlači $(c \longleftarrow b) \succcurlyeq_e (c \longleftarrow a)$ te je prema A 3.3 ekvivalentno s

$$(a \longleftarrow c) \succcurlyeq_e (b \longleftarrow c),$$

što je i trebalo dokazati. □

4.25. PRIMJER. Neka je A promatrani skup objekata i neka vrijede *aksiomi slabog uređaja*, tj. aksiomi A 3.1–A 3.6. Ako za proizvoljne objekte $a, b, c \in A$ vrijedi

$$(a \longleftarrow c) \succeq_e (a \longleftarrow b) \succeq_e (b \longleftarrow c),$$

dokažite da je tada $a \succeq b \succeq c$.

Rješenje. Riješimo dani primjer na dva načina, kako bismo potakli čitatelja da razmisli i o drugim mogućim postupcima rješavanja koji će dovesti do željene tvrdnje.

- **1. način:** Iz pretpostavke

  $$(a \longleftarrow c) \succeq_e (a \longleftarrow b),$$

  prema aksiomu A 3.3 slijedi

  $$(b \longleftarrow a) \succeq_e (c \longleftarrow a);$$

  iz prethodnog, te relacije

  $$(a \longleftarrow c) \succeq_e (a \longleftarrow c)$$

koja vrijedi zbog refleksivnosti pokazane u prethodnom primjeru, prema A 3.4 dobivamo

$$(b \longleftarrow c) \succeq_e (c \longleftarrow c),$$

što je prema A 3.2 ekvivalentno s $b \succeq c$.
Nadalje, iz pretpostavke

$$(a \longleftarrow c) \succeq_e (b \longleftarrow c)$$

i refleksivnosti koja daje

$$(c \longleftarrow a) \succeq_e (c \longleftarrow a)$$

A 3.3 i A 3.4 povlače

$$(a \longleftarrow b) \succeq_e (a \longleftarrow a),$$

što je prema A 3.2 ekvivalentno s $a \succeq b$. Iz prethodno dokazanog slijedi željena tvrdnja.

- **2. način:** S obzirom da vrijede aksiomi A 3.1–A 3.6, prema Teoremu 4.22. postoji izmjeriva funkcija vrijednosti ν te iz danih pretpostavki, u smislu Definicije 4.16., zaključujemo:
  - $$\begin{aligned} (a \longleftarrow c) \succeq_e (a \longleftarrow b) &\iff \\ \nu(a) - \nu(c) \geq \nu(a) - \nu(b) &\iff \\ \nu(b) \geq \nu(c) &\iff \\ b \succeq c \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} (a \longleftarrow b) \succeq_e (b \longleftarrow c) &\iff \\ \nu(a) - \nu(b) \geq \nu(b) - \nu(c) &\iff \\ \nu(a) \geq 2\nu(b) - \nu(c) \geq 2\nu(c) - \nu(c) = \nu(c) &\iff \\ a \succeq c \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} (a \longleftarrow c) \succeq_e (b \longleftarrow c) &\iff \\ \nu(a) - \nu(c) \geq \nu(b) - \nu(c) &\iff \\ \nu(a) \geq \nu(b) &\iff \\ a \succeq b\,. \end{aligned}$$

Iz prethodnog odmah slijedi tražena tvrdnja $a \succeq b \succeq c$. □

4.5. Zadaci za vježbu

4.1. Zadatak Poslodavac razmatra prijave četiri zaposlenika za novi posao, a to su Ana, Branka, Cvjetko i Denis (da, opet su se sreli)! Preferencije je zapisao u sljedeću tablicu, pri čemu je stavio znak

$\otimes$ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \sim$ stupac j

$\times$ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \succ$ stupac j

$\bigcirc$ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \prec$ stupac j.

	A	B	C	D
A	$\otimes$	$\times$	$\times$	$\times$
B	$\bigcirc$	$\otimes$	$\bigcirc$	$\otimes$
C	$\bigcirc$	$\times$	$\otimes$	$\times$
D	$\times$	$\otimes$	$\bigcirc$	$\otimes$

Navedite jedan primjer ordinalne funkcije vrijednosti koja se slaže s relacijom $\succ_i$ i objasnite svoje rješenje.

4.2. Zadatak Neka je A promatrani skup objekata i neka vrijede prva četiri aksioma definirana u Poglavlju 4.3.

a) Ako za objekte a, b, c, d i e vrijedi da je $b \not\succ a$ i $(b \longleftarrow d) \succeq_e (c \longleftarrow e)$, dokažite ili opovrgnite tvrdnju

$$(e \longleftarrow c) \succeq_e (d \longleftarrow a).$$

b) Ako $(a \longleftarrow b) \sim_e (b \longleftarrow c)$ i $a \succ c$ dokažite da je tada $b \succ c$.

4.3. Zadatak Darko razmišlja koji sladoled kupiti u trgovini (pakiranje je od 5 kg pa mora dobro promisliti). Radi se o sladoledima od banane, jagode, čokolade i lješnjaka. Preferencije je zapisao u sljedeću tablicu, pri čemu je stavio znak

$\otimes$ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \sim$ stupac j

$\times$ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \succ$ stupac j

$\bigcirc$ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \prec$ stupac j.

	b	j	č	lj
b	⊗	×	◯	◯
j	◯	⊗	◯	◯
č	×	×	⊗	⊗
lj	×	×	⊗	⊗

Navedite jedan primjer ordinalne funkcije vrijednosti koja se slaže s relacijom $\succ_i$ i objasnite svoje rješenje.

4.4. Zadatak Barica razmišlja koju haljinu kupiti jer ide kod sestre na vjenčanje. Radi se o crvenoj, žutoj, plavoj i ljubičastoj haljini. Preferencije je zapisala u sljedeću tablicu, pri čemu je stavila znak

⊗ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \sim$ stupac j

× na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \succ$ stupac j

◯ na mjesto (i, j) ako i samo ako red $i \prec$ stupac j.

	c	ž	p	lj
c	⊗	◯	×	×
ž	×	⊗	×	×
p	◯	◯	⊗	⊗
lj	◯	◯	⊗	⊗

Navedite jedan primjer ordinalne funkcije vrijednosti koja se slaže s relacijom $\succ_i$ i objasnite svoje rješenje.

4.5. Zadatak Neka su dane alternative:
a – osoba je savršeno zdrava i dobit će uskrsnicu od $3\,500$ kuna
b – osoba je savršeno zdrava i dobit će uskrsnicu od $2\,050$ kuna
c – osoba je umjereno zdrava i neće dobiti uskrsnicu
d – osoba je teško bolesna.
Preferirate li zamjenu b sa a nad zamjenom d sa c ili obratno, ukoliko zdravlje stavite na prvo mjesto?

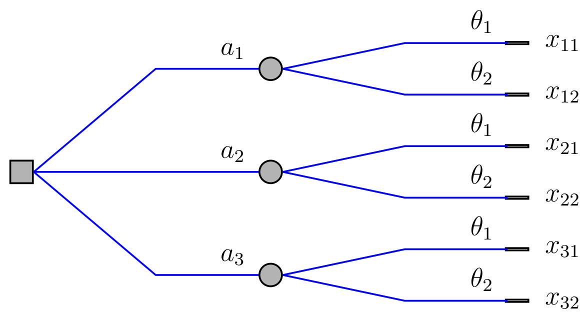
5. Stabla odlučivanja

Zbog moguće kompliciranosti tablice odlučivanja, u slučaju kada imamo zadano više akcija ili stanja svijeta, ponekad je jednostavnije željeni problem prevesti u oblik stabla odlučivanja te ga promatrati na taj način. Postupak *prevođenja* je veoma jednostavan. Na primjer, ukoliko imamo tablicu odlučivanja s tri akcije i dva stanja svijeta (vidi Tablicu 52),

		stanja svijeta	
akcije	posljedice	θ_1	θ_2
	a_1	x_{11}	x_{12}
	a_2	x_{21}	x_{22}
	a_3	x_{31}	x_{32}

Tablica 52. Tablica odlučivanja s 3 akcije i 2 stanja svijeta

možemo je zapisati u obliku stabla odlučivanja na sljedeći način:



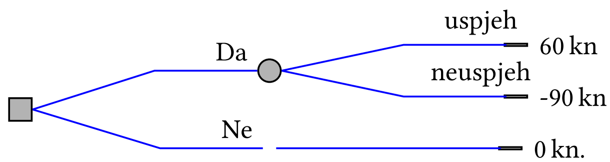
pri čemu, kao i prije, podrazumijevamo da je $v(x_{ij}) > v(x_{kl})$ ako i samo ako odlučitelj preferira x_{ij} u odnosu na x_{kl} te također $v_{ij} = v(x_{ij})$ daje tablicu/stablo pripadnih vrijednosti

$$v_{ij} \longleftrightarrow x_{ij}.$$

Pogledajmo, u nastavku, nekoliko primjera donošenja odluke uz pomoć stabla odlučivanja.

5.1. PRIMJER. Prijatelj nam predlaže okladu: platit ćeš mi 90 kuna i bacat ćemo pravilno izrađenu (simetričnu) kockicu (ako odlučiš sudjelovati!). Ako padne broj 3, 4, 5 ili 6, tada ću ti platiti 150 kuna; a ako padne broj 1 ili 2 nećeš dobiti ništa. Treba li sudjelovati u toj igri?

Rješenje. Opisani problem možemo prikazati sljedećim stablom odlučivanja:



Lako je uočiti da je prostor elementarnih događaja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dok su opisani događaji $A = \{3, 4, 5, 6\}$ i $B = \{1, 2\}$. Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti [5, str. 5] dobivamo

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Očekivana vrijednost dobitka, u jednoj igri, je

$$v = \frac{2}{3} \cdot 60 + \frac{1}{3} \cdot (-90) = 10\,\text{kuna}.$$

Ako, na primjer, tu igru odigramo 150 puta,

$$\begin{aligned} \text{pobijedit ćemo } & \frac{2}{3} \cdot 150 = 100 \text{ puta} \\ \text{izgubit ćemo } & \frac{1}{3} \cdot 150 = 50 \text{ puta.} \end{aligned}$$

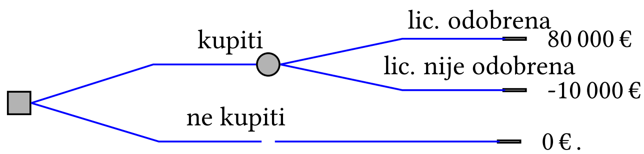
Očekivana zarada u 150 odigranih oklada je

$$100 \cdot 60 + 50 \cdot (-90) = 1\,500\,\text{kuna},$$

dakle treba sudjelovati. □

5.2. Primjer. *Kožarko* je tvrtka iz Zagreba kojoj je primarna djelatnost kožna galanterija. Tvrtci je ponuđeno kupiti tisuću ženskih kožnih jakni po cijeni od 120 € po jakni. Vlasnik tvrtke procjenjuje da će svaku jaknu moći prodati po 200 €. Međutim, nije još jasno hoće li carina dozvoliti uvoz, jer se jakne uvoze iz Turske koja nije u Europskoj uniji. Ukoliko carina odbije davanje licence za uvoz, nakon što su jakne kupljene, *Kožarko* mora platiti odštetu u iznosu od 10 € po jakni (u tom slučaju, kako jakne neće biti isporučene, tvrtki su novci za jakne vraćeni jer je takav bio dogovor između *Kožarka* i tvrtke koja prodaje jakne u Turskoj). Napravimo stablo odlučivanja te obrazložimo treba li kupiti jakne. Dodatno, direktor tvrtke procjenjuje da je vjerojatnost da carina odobri licencu 0.5.

Rješenje. Opisani problem možemo prikazati sljedećim stablom odlučivanja:



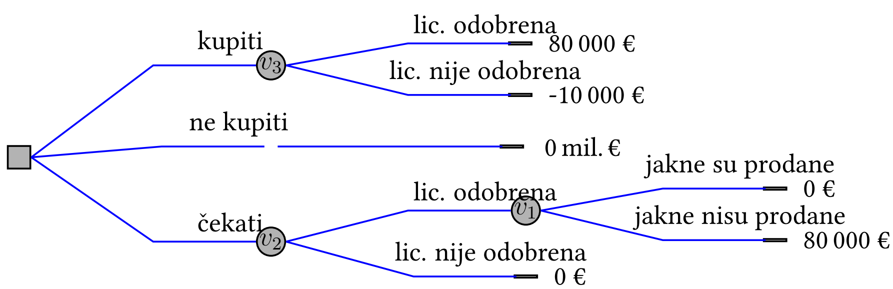
Iz danih podataka iščitavamo da je očekivani profit u slučaju da tvrtka odluči kupiti jakne

$$v = 0.5 \cdot 80\,000\,€ + 0.5 \cdot (-10\,000\,€) = 35\,000\,€,$$

što znači da se isplati kupiti jakne.

Za isti problem analitičar u firmi predlaže da se rizik proba smanjiti. Naime, tvrtka se može prijaviti za dobivanje licence i pričekati s kupnjom dok licenca ne bude odobrena, tj. dok ne vidi što će biti s licencom. Međutim, u međuvremenu netko drugi može kupiti jakne, a vjerojatnost za to je 0.7.

U nastavku možemo vidjeti *prošireno* stablo odlučivanja



iz kojeg iščitavamo sljedeće vrijednosti u naznačenim čvorovima:

$$\begin{aligned} v_3 &= 0.5 \cdot 80\,000\,€ - 0.5 \cdot 10\,000\,€ = 35\,000\,€ \\ v_1 &= 0.7 \cdot 0\,€ + 0.3 \cdot 80\,000\,€ = 24\,000\,€ \\ v_2 &= 0.5 \cdot v_1 + 0.5 \cdot 0\,€ = 0.5 \cdot 24\,000\,€ = 12\,000\,€. \end{aligned}$$

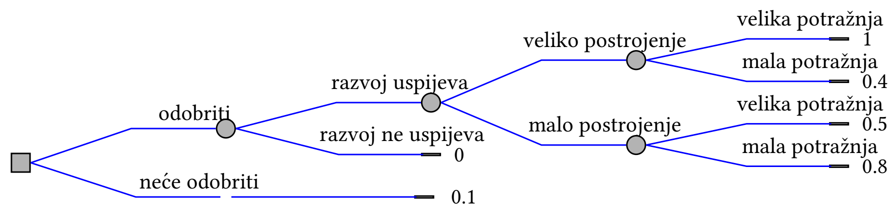
Uočimo $v_3 > 0$ i $v_3 > v_2$ te biramo kupnju jakni bez prijave tvrtke za dobivanje licence. □

5.3. Primjer. Iz *Turističke zajednice* grada Vukovara obratili su se tvornici *Borovo* kako bi za njih dizajnirali novi model popularnih *startasica*. *Borovo* treba odlučiti hoće li *odobriti* razvoj novog proizvoda (odnosno angažirati razvojni tim koji će raditi na razvoju novog proizvoda) ili *neće odobriti* razvoj novog proizvoda. Ukoliko se donese odluka o odobrenju razvoja, uvijek postoji mogućnost da razvojni tim ima tehničkih problema s dizajnom. Naime, može se dogoditi da tim ne dovrši razvoj novog proizvoda u danom roku od godine dana (u tom će slučaju uprava tvornice *Borovo* napustiti razvoj jer će donijeti odluku da *razvoj nije uspio*), dok, s druge strane, novi proizvod može biti dovršen na vrijeme (u tom će slučaju tvornica *Borovo* obavijestiti *Turističku zajednicu* da je razvoj uspio); u slučaju da razvoj uspijeva, *Borovo* će se naći pred novim izazovom: treba li graditi novo malo ili novo veliko postrojenje za proizvodnju novog proizvoda. Pri donošenju odluke, uprava tvornice razmišlja na sljedeći način (pri čemu su procijenjene vrijednosti svake od odluka donesene u konzultacijama sa stručnjacima):

- *ako se razvoj odobri i on uspijeva*, postoji mogućnost
  - gradnje velikog postrojenja, uz veliku potražnju, što povlači veliku proizvodnju, iskorišten kapacitet, veliki profit i zadovoljne mušterije te je procijenjene vrijednosti 1
  - gradnje velikog postrojenja, uz malu potražnju, što povlači malu proizvodnju, neiskorišten kapacitet, mali profit i zadovoljne mušterije te je procijenjene vrijednosti 0.4
  - gradnje malog postrojenja, uz veliku potražnju, što povlači malu proizvodnju, nedovoljan kapacitet tvornice, umjereni profit i nezadovoljne mušterije te je procijenjene vrijednosti 0.5
  - gradnje malog postrojenja, uz malu potražnju, što povlači malu proizvodnju, iskorišten kapacitet, umjeren profit i zadovoljne mušterije, uz procijenjenu vrijednost 0.8
- *ako se razvoj odobri i on ne uspijeva*, tvrtka snosi troškove razvoja, uz procijenjenu vrijednost 0
- *ako Borovo odmah odluči ne odobriti razvoj*, to znači da nema proizvoda, nema gubitka i nema zarade; u tom slučaju imamo pridruženu vrijednost 0.1.

Nadalje, pretpostavimo da su zadane polazne vjerojatnosti uspjeha razvoja 0.3 i neuspjeha razvoja 0.7 te vjerojatnosti za malu potražnju 0.4 i za veliku potražnju 0.6 (donesene na osnovu istraživanja tržišta).
Napravimo stablo odlučivanja te obrazložimo treba li odobriti ili ne razvoj novog proizvoda.

Rješenje. Sljedećim stablom odlučivanja prikazan je opisani problem te trebamo odlučiti hoćemo li nastaviti s razvojem:



S obzirom na zadane vrijednosti istaknute na krajevima stabla odlučivanja te na navedene vjerojatnosti, možemo izračunati očekivani profit u sljedeća dva slučaja:

$$\text{izgradnja velikog postrojenja: } 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.76$$
$$\text{izgradnja malog postrojenja: } 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.62.$$

Nakon toga, možemo izračunati očekivane dobiti kod odluke o tome treba li odobriti razvoj.
Ako razvoj uspije, s obzirom da je

$$0.76 > 0.62,$$

tu se odlučujemo za gradnju velikog postrojenja.
Nadalje, vjerojatnost za *propast* razvoja je 0.7, pripadni profit 0 te je vrijednost koju donosi *odluka o odobrenju razvoja*

$$0.3 \cdot 0.76 + 0.7 \cdot 0 = 0.228,$$

dok u slučaju *odluke o početnom neodobravanju razvoja* imamo dodijeljenu vrijednost 0.1.

Dakle, treba odobriti razvoj novog proizvoda i u slučaju uspjeha razvoja (razvoj uspijeva) treba izgraditi veliko postrojenje. □

Istaknimo

Kao što smo već primijetili, vjerojatnosna će nam podloga biti od velike pomoći pri donošenju odluka (vidi i [61, Poglavlje 4]) te ćemo se u nastavku prisjetiti još nekih korisnih tvrdnji za koje su nam potrebne definicije uvjetne vjerojatnosti i potpunog sustava događaja.

5.4. Definicija

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i događaj $B \in \mathcal{F}$ pozitivne vjerojatnosti, tj. $P(B) > 0$. Funkciju $P_B : \mathcal{F} \to [0,1]$ definiranu s

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathcal{F}$$

nazivamo *uvjetna vjerojatnost* uz uvjet da se dogodio događaj B.

5.5. **Definicija**
Konačna ili prebrojiva familija događaja $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ čini *potpun sustav događaja* u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako vrijedi

1) $P(H_i) > 0$, za svaki $i \in I$
2) $H_i \cap H_j = \emptyset$, za sve $i, j \in I$, $i \neq j$
3) $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega$, pri čemu Ω nazivamo siguran događaj.

5.6. **Teorem (Formula potpune vjerojatnosti)**
Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i).$$

Dokaz. Vidi [5, str. 36, Teorem 1.1]. ∎

5.7. **Teorem (Bayesova formula)**
Neka je $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $B \in \mathcal{F}$ događaj pozitivne vjerojatnosti, tj. $P(B) > 0$. Tada za svaki $i \in I$ vrijedi

$$P(H_i|B) = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{\sum_{i \in I} P(B|H_i)P(H_i)}.$$

Dokaz. Vidi [5, str. 39, Teorem 1.2]. ∎

5.8. **Primjer.** Uslijed pandemije izazvane koronavirusom, u osnovnim školama prekinuta je nastava te je jedna velika televizijska kuća u Hrvatskoj došla do ideje angažirati učitelje kako bi pred malim ekranima držali lekcije te na taj način pomogli malim školarcima oko savladavanja gradiva. Prije svega, televizijska kuća mora nabaviti novu, skupu opremu kako bi mogla obavljati snimanja za svaki razred od 1. do 8. istovremeno. No, kada je ispričao nekolicini kolega za svoju ideju, direktor je dobio ponudu za kupnju rabljene opreme, ali kako izvor nije bio pouzdan, on se pitao je li oprema *vrhunske kvalitete*, *srednje kvalitete* ili *loše kvalitete*. Naravno, ukoliko se ispostavi da je oprema *loše kvalitete*, na snimanjima će dolaziti do teškoća, gradivo neće moći ići redovito svojim tijekom, što će utjecati na loš marketing televizijske kuće, kao i na financijske gubitke jer će trebati ulagati u popravak opreme; ukoliko se ispostavi da je oprema *srednje kvalitete*, to će utjecati na nešto bolji marketing, no opet postoji mogućnost da se oprema često kvari, što vodi do novih troškova koje treba u nju uložiti; naposljetku, ako se radi o opremi *vrhunske kvalitete*, ona će donijeti veliko zadovoljstvo gledatelja, povećanu gledanost te stoga i povećan profit. Dakle, kako puno toga ovisi o tome kakva će biti kupljena oprema, stručnjak za marketing spomenute televizijske kuće smatra da treba tražiti istraživanje *Agencije za elektroničke medije* koja će dati procjenu kvalitete opreme, no, naravno, istraživanje košta. Spomenuta *Agencija* (ukoliko bude angažirana) u izvještaju neće napisati treba li kupiti opremu ili ne, nego će nakon detaljne procjene u izvješću napisati *zadovoljava* li ili *ne zadovoljava.* Nadalje, pretpostavimo da su zadane početne vrijednosti, bazirane na trenutnim vjerovanjima uprave televizijske kuće o kvaliteti opreme koja se kupuje:

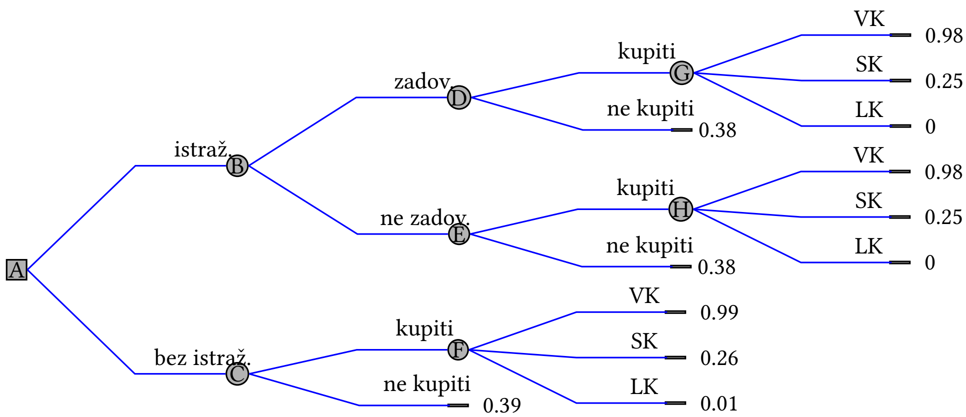
$$\begin{aligned} P(\text{vrhunske kvalitete}) &= P(VK) = 0.4 \\ P(\text{srednje kvalitete}) &= P(SK) = 0.5 \\ P(\text{loše kvalitete}) &= P(LK) = 0.1 \end{aligned} \tag{5.8}$$

te da je utvrđeno što uprava misli o *Agenciji* angažiranoj za pisanje izvještaja:

$$\begin{aligned} P(\text{zadovoljava}|VK) &= P(Z|VK) = 0.8 \\ P(\text{zadovoljava}|SK) &= P(Z|SK) = 0.4 \\ P(\text{zadovoljava}|LK) &= P(Z|LK) = 0.2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dakle, izvještaj se ne uzima *zdravo za gotovo.* Naime, *Agencija* može pogriješiti i uprava televizijske kuće o toj greški ima neko vjerovanje. Napravimo stablo odlučivanja te pokušajmo zaključiti koju odluku treba donijeti televizijska kuća.

Rješenje. Kako bismo skicirali stablo odlučivanja, primijetimo da se televizijska kuća najprije treba odlučiti hoće li tražiti istraživanje *Agencije za elektroničke medije* ili neće (*istraživanje* ili *bez istraživanja*) i to su dvije polazne alternative koje izlaze iz korijena stabla. Također, bitno je uočiti i da je krajnji cilj televizijske kuće donijeti odluku o tome hoće li kupiti opremu ili ne. U slučaju da televizijska kuća nije uzela dodatno istraživanje, sama treba odlučiti hoće li kupiti opremu (u tom slučaju, s obzirom na vjerojatnosti koje su zadane, televizijska kuća sama treba razmortiri karakteristike koje može imati željena oprema, a to su VK, SK, LK). U slučaju da se televizijska kuća odluči na kupnju/ne kupnju opreme nakon provedenog istraživanja (koje su dodatno tražili) prije nego se odluče hoće li kupiti ili ne, moraju vidjeti što kaže istraživanje (jer nema smisla tražiti dodatno istraživanje ukoliko ga neće uzeti u obzir), a jasno je da će angažirana *Agencija* istraživanje ocijeniti sa *zadovoljava* ili *ne zadovoljava.* Dakle, stablo odlučivanja možemo skicirati na sljedeći način:



Iz (5.9) također možemo lako dobiti i sljedeće vjerojatnosti:

$$P(\text{ne zadovoljava}|VK) = P(NZ|VK) = 1 - 0.8 = 0.2$$
$$P(\text{ne zadovoljava}|SK) = P(NZ|SK) = 1 - 0.4 = 0.6$$
$$P(\text{ne zadovoljava}|LK) = P(NZ|LK) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

1. Pogledajmo najprije što nam treba u čvoru G

$$P(VK|\text{zadovoljava}) = P(VK|Z)$$
$$P(SK|\text{zadovoljava}) = P(SK|Z)$$
$$P(LK|\text{zadovoljava}) = P(LK|Z)$$

te izračunajmo potrebne vjerojatnosti uz pomoć Bayesove formule, pri čemu je očito $\{VK, SK, LK\}$ potpun sustav događaja, što možemo primijetiti i iz

$$\Omega = VK \cup SK \cup LK, \quad P(\Omega) = P(VK) + P(SK) + P(LK) = 0.4 + 0.5 + 0.1 = 1.$$

Primijetimo i da će nam u svim prethodnim izrazima trebati sljedeća vjerojatnost, koju računamo uz pomoć Teorema 5.6.

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(Z|VK) \cdot P(VK) + P(Z|SK) \cdot P(SK) + P(Z|LK) \cdot P(LK) \\ &= 0.8 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.54. \end{aligned}$$

Sada je, prema Bayesovoj formuli,

$$P(VK|Z) = \frac{P(VK) \cdot P(Z|VK)}{P(Z)} = \frac{0.4 \cdot 0.8}{0.54} = 0.593$$
$$P(SK|Z) = \frac{P(SK) \cdot P(Z|SK)}{P(Z)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.54} = 0.37$$
$$P(LK|Z) = \frac{P(LK) \cdot P(Z|LK)}{P(Z)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.54} = 0.037$$

te je očekivana korisnost (uočimo da je bolje reći *korisnost* nego *dobit* jer se pitamo što je bolje, odnosno korisnije – kupiti ili ne kupiti opremu, kakvu opremu itd., odnosno što će donijeti više koristi za televizijsku kuću) u G

$$G = 0.593 \cdot 0.98 + 0.37 \cdot 0.25 + 0.037 \cdot 0 = 0.674.$$

- Pogledajmo sada sa stabla odlučivanja vrijednost u čvoru D:

odluka *kupiti* vodi nas u čvor G gdje smo izračunali očekivanu korisnost 0.674, dok su stručnjaci procijenili da je ta vrijednost kod grane *ne kupiti* 0.38; kako je

$$0.674 > 0.38,$$

odlučujemo kupiti opremu.

2. Izračunajmo vrijednost u čvoru H:

najprije sa stabla odlučivanja primijetimo da tom čvoru prethodi odluka *ne zadovoljava* nakon obavljenog istraživanja, odnosno izvještaj nije povoljan, pa će nam trebati sljedeća vjerojatnost:

$$\begin{aligned} P(NZ) &= P(NZ|VK) \cdot P(VK) + P(NZ|SK) \cdot P(SK) + P(NZ|LK) \cdot P(LK) \\ &= 0.2 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.1 = 0.46. \end{aligned}$$

Prema Bayesovoj formuli dobivamo

$$\begin{aligned} P(VK|NZ) &= \frac{P(VK) \cdot P(NZ|VK)}{P(NZ)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.46} = 0.174 \\ P(SK|NZ) &= \frac{P(SK) \cdot P(NZ|SK)}{P(NZ)} = \frac{0.5 \cdot 0.6}{0.46} = 0.652 \\ P(LK|NZ) &= \frac{P(LK) \cdot P(NZ|LK)}{P(NZ)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.46} = 0.174 \end{aligned}$$

te je očekivana korisnost u H

$$H = 0.174 \cdot 0.98 + 0.652 \cdot 0.25 + 0.174 \cdot 0 = 0.334.$$

- Pogledajmo nadalje čvor E:

odluka *kupiti* vodi nas u čvor H, a tu je očekivana korisnost 0.334, dok je odluka *ne kupiti* procijenjene vrijednosti 0.38; kako je

$$0.334 < 0.38,$$

odlučujemo ne kupiti opremu.

- Na potpuno isti način kao što smo do sada zaključivali, pogledajmo što se događa u čvoru F:

primijetimo da tu prethodi odluka *kupiti opremu*, ali nije angažirana *Agencija* kako bi provela istraživanje te tu nemamo izvještaje (ni povoljne ni nepovoljne) kao što smo imali u slučajevima **1.** i **2.** te je

$$F = P(VK) \cdot 0.99 + P(SK) \cdot 0.26 + P(LK) \cdot 0.01 = 0.4 \cdot 0.99 + 0.5 \cdot 0.26 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.527.$$

- Sa stabla odlučivanja zaključujemo o čvoru C:

odluka *kupiti* vodi nas u čvor F gdje je očekivana korisnost 0.527, dok nas odluka *ne kupiti* vodi do procijenjene vrijednosti 0.39, a kako je

$$0.527 > 0.39,$$

tu ponovno odlučujemo kupiti opremu.

- S obzirom da zaključujemo *unazad*, pogledajmo što se događa u čvoru B

gdje, prema prethodno izračunatim podacima, računamo očekivanu korisnost kao

$$B = 0.54 \cdot 0.674 + 0.46 \cdot 0.38 = 0.539.$$

- Napokon, pogledajmo početni korijen A.

U čvoru B (kojem prethodi *istraživanje*) izračunali smo očekivanu korisnost 0.539, a u čvoru C (kojem prethodi odluka *bez istraživanja*) izračunali smo očekivanu korisnost 0.527. Sada, kako je očito

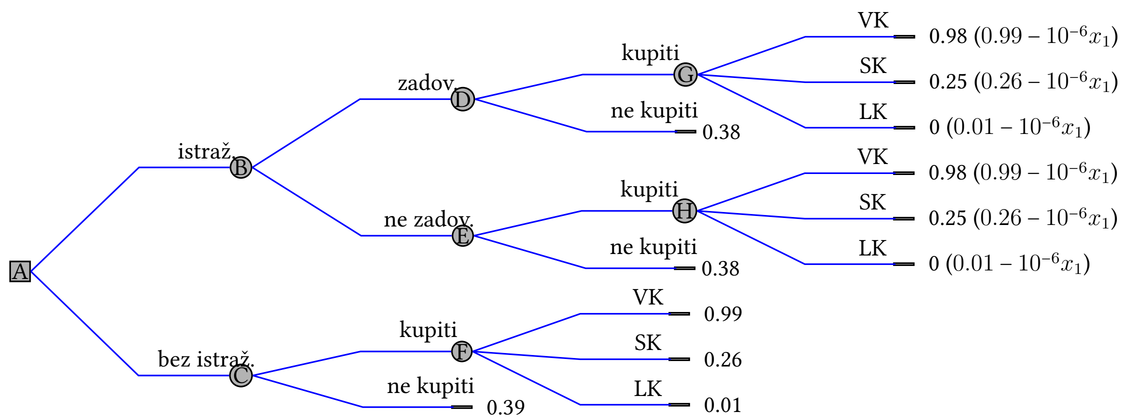
$$0.527 < 0.539,$$

odlučujemo se za istraživanje, odnosno treba angažirati Agenciju.

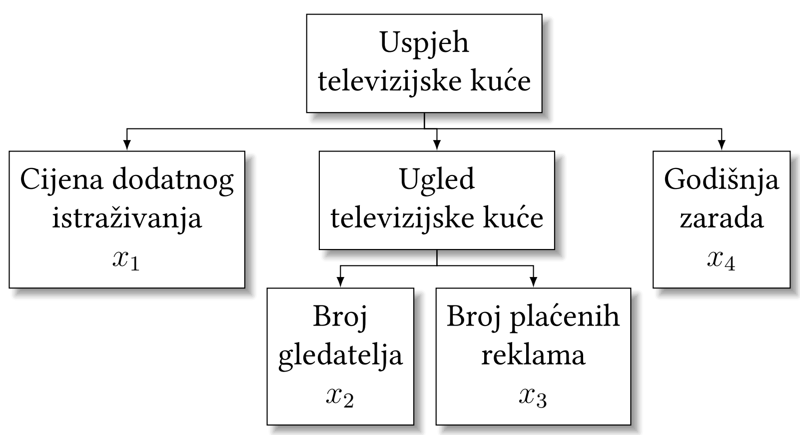
S obzirom na prethodno, možemo donijeti sljedeći zaključak: konačna odluka, donesena na osnovi izračunatih vrijednosti, jeste da treba angažirati Agenciju; ako njihov izvještaj bude povoljan (odnosno, donese li se odluka *zadovoljava*), što nas vodi do čvora D, treba kupiti opremu; ako njihov izvještaj bude nepovoljan (odnosno, donese li se odluka *ne zadovoljava*), što nas vodi u čvor E, ne treba kupiti opremu. □

5.1. Korisnost odluka

Pogledajmo u nastavku stablo odlučivanja iz prethodnog primjera, pri čemu smo na kraju svake grane naznačili dodatne vrijednosti koje ćemo uskoro detaljno objasniti:



Čitatelj može primijetiti da do sada nismo ništa detaljno rekli o korisnostima pojedinih odluka, osim da su to neke vrijednosti donesene s obzirom na procjene stručnjaka. U nastavku ćemo se pobliže upoznati s idejom kako stručnjaci do njih dolaze. Pri tome, imajmo na umu da često, u praksi, s obzirom na primjer koji promatramo, donositelju odluke moramo dati procjenu najveće cijene koju se isplati platiti za uslugu istraživanja. Promotrimo hijerarhiju kriterija koji utječu na korisnost, a uz pomoć kojih možemo opisati sve posljedice s našeg stabla:



Pretpostavit ćemo da su prethodno dani kriteriji zaista dovoljni za donošenje dobre konačne odluke. Donositelj odluke mora poznavati međusobnu ovisnost kriterija i njihov utjecaj na konačnu korisnost. Drugim riječima, s obzirom da su dana četiri kriterija, donositelj odluke treba poznavati funkciju $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

koju nazivamo **funkcija korisnosti**.

Kako se trenutno bavimo procjenom najveće prihvatljive cijene istraživanja x_1, pretpostavit ćemo da je ona neovisna o preostala tri kriterija x_2, x_3 i x_4; da korisnost ovisi linearno o cijeni te da način donošenja odluke odgovorne osobe ne ovisi o toj cijeni.

Prethodne pretpostavke imaju smisla jer se cijena istraživanja plaća iz postojećeg kapitala televizijske kuće i razmjerno je mala u odnosu na očekivane prihode, s obzirom da bi svi školarci u Hrvatskoj pratili program svakim radnim danom. Dakle, funkciju u možemo, na primjer, zapisati kao

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = k \cdot x_1 + w(x_2, x_3, x_4). \tag{5.10}$$

S obzirom da nas zanima samo cijena istraživanja x_1, trenutno nam oblik od $w(x_2, x_3, x_4)$ nije bitan te nadalje možemo pretpostaviti neku vrijednost koeficijenta k, odnosno faktora koji zadaje donositelj odluke; neka je

$$k = \frac{-1}{1\,000\,000} = -10^{-6}$$

te također pretpostavimo da je $w(x_2, x_3, x_4) = 0.99$, u slučaju kupnje opreme vrhunske kvalitete (uz pomoć istraživanja); odnosno, vrijednost odluke kupnje vrhunske opreme, uz pomoć istraživanja iznosi, prema (5.10) i danim vrijednostima,

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.99 - 10^{-6} \cdot x_1, \tag{5.11}$$

što je upravo, kao što čitatelj može primijetiti, prva vrijednost koju smo dodali na stablo odlučivanja iz Primjera 5.8. Na sličan način dobivene su i ostale vrijednosti zadane dodatno na krajevima stabla odlučivanja.

Ostalo su pretpostavljene vrijednosti bez istraživanja, pa je za njih očito cijena istraživanja (jer ga nije bilo) $x_1 = 0$. Primijetite također da smo u Primjeru 5.8. zadane korisnosti dobili tako što smo uzeli cijenu istraživanja od $10\,000$ kuna, tj. u (5.11) smo uvrstili $x_1 = 10^4$. Da bismo se u to uvjerili, pogledajmo nekoliko prvih vrijednosti na stablu odlučivanja, odnosno kako su to dobili stručnjaci:

$$\begin{aligned}
&0.99 - 10^{-6}x_1 = 0.99 - 10^{-6} \cdot 10^4 = 0.99 - 10^{-2} = 0.98\\
&0.26 - 10^{-6}x_1 = 0.26 - 10^{-2} = 0.25\\
&0.01 - 10^{-6}x_1 = 0.01 - 10^{-2} = 0\\
&0.39 - 10^{-6}x_1 = 0.39 - 0.01 = 0.38.
\end{aligned}$$

Vratimo se sada vrijednostima funkcije korisnosti u te pogledajmo očekivane korisnosti koje smo u Primjeru 5.8. izračunali u odgovarajućim čvorovima, samo ćemo sada umjesto vrijednosti koje su tada bile zadane na krajevima grana stabla odlučivanja, uvrštavati vrijednosti funkcije korisnosti (5.11) s cijenom istraživanja x_1, tj. vrijednosti dopisane na zadnjem stablu odlučivanja, tj. *nove* korisnosti.

- Očekivana korisnost u čvoru G:

$$G = 0.593 \cdot (0.99 - 10^{-6}x_1) + 0.37 \cdot (0.26 - 10^{-6}x_1) + 0.037 \cdot (0.01 - 10^{-6}x_1) = 0.684 - 10^{-6}x_1.$$

- U čvoru D:

kako nas *kupiti* vodi u G, gdje smo izračunali očekivanu korisnost $0.684 - 10^{-6}x_1$, dok su stručnjaci procijenili da je ta vrijednost kod grane *ne kupiti* $0.39 - 10^{-6}x_1$, očito je da odlučujemo kupiti opremu.

- U čvoru H dobivamo

$$H = 0.174 \cdot (0.99 - 10^{-6}x_1) + 0.652 \cdot (0.26 - 10^{-6}x_1) + 0.174 \cdot (0.01 - 10^{-6}x_1) = 0.344 - 10^{-6}x_1.$$

- Nadalje, pogledajmo čvor E:

odluka *kupiti* vodi nas u čvor H, gdje imamo vrijednost $0.344 - 10^{-6}x_1$, dok je odluka *ne kupiti* procijenjene vrijednosti $0.39 - 10^{-6}x_1$ te se ovdje odlučujemo ne kupiti opremu.

Istaknimo

Do sada se ništa nije promijenilo s obzirom na odluke donesene u rješenju Primjera 5.8. jer su sve odluke donesene pod istom pretpostavkom da ćemo platiti istraživanje.

Iz istog razloga neće se promijeniti vrijednost u F (tu smo izračunali očekivanu korisnost 0.527, a tu nemamo istraživanje), kao ni vrijednost i odluka u C gdje je, bez istraživanja, $0.527 > 0.39$ te tu odlučujemo kupiti opremu.

- U čvoru B dobivamo

$$B = 0.54 \cdot (0.684 - 10^{-6}x_1) + 0.46 \cdot (0.39 - 10^{-6}x_1) = 0.549 - 10^{-6}x_1.$$

- Kako bismo donijeli odluku u početnom korijenu A

uspoređujemo vrijednost u čvoru B, koja je $0.549 - 10^{-6}x_1$, te u čvoru C gdje vrijednost iznosi 0.527. Kako je

$$0.549 - 10^{-6}x_1 > 0.527 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 < 0.022 \cdot 10^6 = 22\,000,$$

zaključujemo da treba uzeti istraživanje ako ono košta manje od $22\,000$ kuna. Ako je izvještaj povoljan, treba kupiti opremu, u suprotnom treba odustati od kupnje (kao što smo i zaključili u Primjeru 5.8.). Ako istraživanje košta više od $22\,000$ kuna, treba odustati od istraživanja – i jednostavno kupiti opremu kako bi se pomoglo malim školarcima! □

Navedimo, u nastavku, preciznu definiciju očekivane korisnosti, koju smo već *neformalno* koristili u prethodnim primjerima.

5.9. Definicija
Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ skup posljedica s pripadnim vjerojatnostima $p_i = p(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ za koje vrijedi $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ te $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Ako je dana funkcija korisnosti $u : X \to \mathbb{R}$, onda je pripadna **očekivana korisnost** definirana s

$$E[u] = E(u) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)u(x_i). \tag{5.12}$$

Istaknimo

Zainteresirani čitatelj može uočiti vezu između prethodne formule i očekivanja diskretne slučajne varijable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je Ω konačan ili prebrojiv skup, odnosno, jednom riječju, diskretan, što je pojam s kojim smo se već sreli u Petrogradskom paradoksu (vidi Poglavlje 2.4.).
Također, prilikom računanja očekivane korisnosti (ukoliko funkciju korisnosti označimo s u), na primjer, u korijenu/čvoru A, to ćemo označavati s $E(A|u)$ kako bismo lakše pratili što računamo.

5.10. Primjer. Četiri dobro promiješane karte karo, tref, pik i srce raspoređene su na stolu licem okrenutim prema dolje. Ponuđen nam je sljedeći odabir:

A Slučajno odabrana karta će biti okrenuta. Ako je crvena, dobivamo 100 kuna, a ako je crna, gubimo 100 kuna ili

(B) Slučajno odabrana karta će biti okrenuta. Tada možemo odabrati platiti 35 kuna i povući se iz igre ili nastaviti igru. Ako nastavimo igru, jedna će od preostale tri karte biti nasumično odabrana i okrenuta. Ako je crvena, dobit ćemo 100 kuna, a ako je crna, izgubit ćemo 100 kuna. Skicirajte stablo odlučivanja. Što će napraviti donositelj odluke ako je zadana funkcija korisnosti

$$u(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{200}\right)?$$

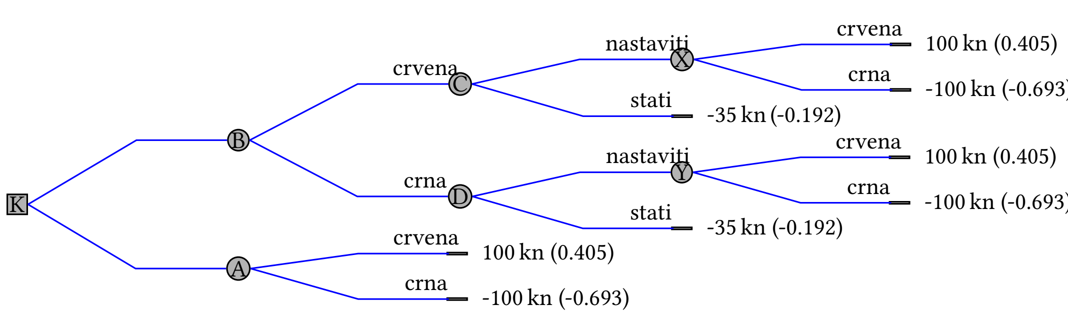
Rješenje. Imamo 4 karte: karo, tref, pik i srce; dakle, 2 su crne, a 2 crvene pa je vjerojatnost da je slučajno odabrana karta (od te 4 karte) crna $2/4 = 1/2 = 0.5$, a ista je vjerojatnost da je slučajno odabrana karta crvena. Razmislimo prije skiciranja stabla odlučivanja još malo o slučaju B. Ako je slučajno odabrana okrenuta karta bila crvena i odlučili smo nastaviti igru u kojoj odabiremo nasumično jednu od preostale 3 karte, kako su na početku bile 4 karte (2 crvene i 2 crne), a po strani smo ostavili 1 crvenu, pa su ostale 3 karte (1 crvena i 2 crne), to je vjerojatnost

- da je slučajno odabrana karta crvena $\frac{1}{3}$
- da je slučajno odabrana karta crna $\frac{2}{3}$.

Ako smo po strani ostavili 1 crnu kartu, ostale su 3 karte (2 crvene i 1 crna) te je vjerojatnost

- da je slučajno odabrana karta crvena $\frac{2}{3}$
- da je slučajno odabrana karta crna $\frac{1}{3}$.

Idemo sada skicirati stablo odlučivanja, uz prethodne oznake A i B i zaključke o vjerojatnostima:



Izračunajmo pripadne vrijednosti pomoću funkcije korisnosti koja je zadana, a te vrijednosti zapisane su na krajevima stabla u zagradama

$$\begin{aligned}
\text{za } x = 100 \quad &\Longrightarrow \quad u(100) = \ln\left(1 + \frac{100}{200}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.405 \\
\text{za } x = -100 \quad &\Longrightarrow \quad u(-100) = \ln\left(1 - \frac{100}{200}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.693 \\
\text{za } x = -35 \quad &\Longrightarrow \quad u(-35) = \ln\left(1 - \frac{35}{200}\right) = \ln\left(\frac{33}{40}\right) = -0.192.
\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
E(A|u) &= 0.5 \cdot 0.405 + 0.5 \cdot (-0.693) = -0.144 \\
E(X|u) &= \tfrac{1}{3} \cdot 0.405 + \tfrac{2}{3} \cdot (-0.693) = -0.327 \\
E(Y|u) &= \tfrac{2}{3} \cdot 0.405 + \tfrac{1}{3} \cdot (-0.693) = 0.039.
\end{aligned}$$

- Sa stabla odlučivanja zaključujemo o čvoru C:

odluka *nastaviti* vodi nas u čvor X gdje je očekivana korisnost -0.327, dok nas odluka *stati* vodi do procijenjene vrijednosti -0.192, a kako je

$$-0.192 > -0.327,$$

tu odlučujemo stati.

- U čvoru D:

odluka *nastaviti* vodi nas u čvor Y gdje je očekivana korisnost 0.039, dok nas odluka *stati* ponovno vodi do procijenjene vrijednosti -0.192, a kako je

$$-0.192 < 0.039,$$

tu odlučujemo nastaviti.

- U čvoru B,

prema prethodno izračunatim podacima, računamo očekivanu korisnost kao

$$E(B|u) = 0.5 \cdot (-0.192) + 0.5 \cdot 0.039 = -0.077.$$

- Konačno, pogledajmo početni korijen K:

u čvoru B izračunali smo očekivanu korisnost -0.077, a u čvoru A očekivana je korisnost -0.144. Sada, kako je očito

$$-0.077 > -0.144,$$

odlučujemo se za opciju B. Ako je okrenuta karta crvena, treba stati, a ako je okrenuta karta crna, treba nastaviti. □

Problem odlučivanja može biti zadan i na način da prilikom donošenja odluke treba u obzir uzeti i vrijednost nepoznatog parametra, kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru. Također, u sljedećem ćemo primjeru objediniti sve prethodne pristupe obrađene kod *stabala odlučivanja*.

5.11. PRIMJER. Marko bi se želio prijaviti za posao taxi vozača kako bi dodatno zaradio.
Kako je trenutno za taj posao velika konkurencija, Marko razmatra mogućnost da najprije zatraži licencu (u svrhu dobivanja posla); dakle, pita se treba li se prijaviti za dobivanje licence, tj. treba li zatražiti licencu ili ne.
Ukoliko Marko zatraži licencu, ona može biti odobrena ili ne, a dobivanje licence ovisi o tome koliko je uspješno savladao vozački ispit u autoškoli. Zna se da je njega mogao položiti s *izvrsnim uspjehom*, *dobrim uspjehom* te s *lošim uspjehom*, a vjerojatnosti za to jesu redom 0.2, 0.3, 0.5. Budući da je komisija za davanje licence za taxi vozače sklonija kandidatima koji su pokazali bolje znanje na vozačkom ispitu, poznate su sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

- P(odobrena licenca | kandidat položio vozački s izvrsnim uspjehom) = 0.8
- P(odobrena licenca | kandidat položio vozački s dobrim uspjehom) = 0.6
- P(odobrena licenca | kandidat položio vozački s lošim uspjehom) = 0.3.

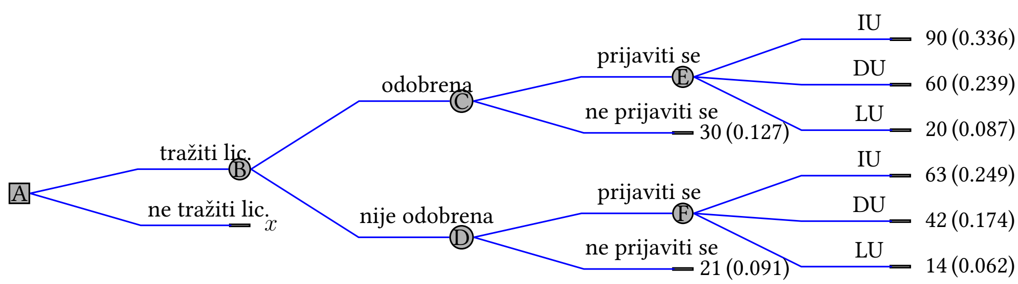
Štoviše, što je kandidat bio bolji na vozačkom ispitu, to je veća i korisnost. Stoga, pretpostavljamo da u slučaju traženja licence (u slučaju da je ona odobrena i da će se prijaviti za posao taxi vozača) korisnost iznosi 90 u slučaju izvrsnog uspjeha, 60 u slučaju dobrog uspjeha, 20 u slučaju lošeg uspjeha. Također, u slučaju traženja licence (u slučaju da je ona odobrena) neka korisnost kod odluke da se ipak ne prijavi za posao taxi vozača iznosi 30. Nadalje, u slučaju traženja licence (u slučaju da ona nije odobrena) neka su sve prethodno navedene korisnosti za 30% manje u odnosu na odgovarajuće korisnosti u slučaju odobrene licence.
U slučaju da se Marko ne prijavi za licencu, neka korisnost iznosi x, gdje je x realan broj.

a) Napravite/skicirajte stablo odlučivanja.

b) Obrazložite koliko treba iznositi parametar x da bi se Marko odlučio zatražiti licencu.

c) Ako je dodatno poznato da odluka o zahtjevu za licencu ima eksponencijalnu funkciju korisnosti $u(x) = 1 - e^{-x/220}$ te ako je $x = 0.13$, odredite što će Marko odlučiti.

Rješenje. a) Prije skiciranja stabla odlučivanja, primijetimo da se Marko najprije treba odlučiti hoće li podnijeti zahtjev za licencu ili ne i to su dvije polazne alternative o kojima treba donijeti odluku. Također, kao što je već rečeno, licenca može biti odobrena ili ne te se u svakom od ta dva slučaja Marko može odlučiti prijaviti ili ne prijaviti za posao. Dakle, stablo odlučivanja možemo skicirati na sljedeći način:



Dodatno, napomenimo da ćemo vrijednosti koje se na krajevima svake od grana na stablu odlučivanja nalaze u zagradama detaljnije objasniti i koristiti u dijelu c).
U nastavku provodimo račun koji će nas odvesti do odgovora koje tražimo. Najprije, zapišimo zadane vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(\text{izvrstan uspjeh}) &= P(IU) = 0.2 \\ P(\text{dobar uspjeh}) &= P(DU) = 0.3 \\ P(\text{loš uspjeh}) &= P(LU) = 0.5 \end{aligned} \tag{5.13}$$

te su dane sljedeće uvjetne vjerojatnosti

$$\begin{aligned} P(\text{odobrena licenca}|IU) &= P(OL|IU) = 0.8 \\ P(\text{odobrena licenca}|DU) &= P(OL|DU) = 0.6 \\ P(\text{odobrena licenca}|LU) &= P(OL|LU) = 0.3 \end{aligned} \tag{5.14}$$

iz kojih odmah iščitavamo

$$\begin{aligned} P(\text{nije odobrena licenca}|IU) &= P(NOL|IU) = 1 - 0.8 = 0.2 \\ P(\text{nije odobrena licenca}|DU) &= P(NOL|DU) = 1 - 0.6 = 0.4 \\ P(\text{nije odobrena licenca}|LU) &= P(NOL|LU) = 1 - 0.3 = 0.7. \end{aligned}$$

Izračunajmo najprije kolike su vjerojatnosti da je licenca odobrena te da nije odobrena:

$$\begin{aligned}
P(OL) &= P(OL|IU)\cdot P(IU) + P(OL|DU)\cdot P(DU) + P(OL|LU)\cdot P(LU)\\
&= 0.8\cdot 0.2 + 0.6\cdot 0.3 + 0.3\cdot 0.5 = 0.49\\
P(NOL) &= P(NOL|IU)\cdot P(IU) + P(NOL|DU)\cdot P(DU) + P(NOL|LU)\cdot P(LU)\\
&= 0.2\cdot 0.2 + 0.4\cdot 0.3 + 0.7\cdot 0.5 = 0.51.
\end{aligned}$$

Kako bismo dobili vrijednost u čvoru E, najprije prema Bayesovoj formuli računamo

$$\begin{aligned}
P(IU|OL) &= \frac{P(IU)\cdot P(OL|IU)}{P(OL)} = \frac{0.2\cdot 0.8}{0.49} = 0.327\\
P(DU|OL) &= \frac{P(DU)\cdot P(OL|DU)}{P(OL)} = \frac{0.3\cdot 0.6}{0.49} = 0.367\\
P(LU|OL) &= \frac{P(LU)\cdot P(OL|LU)}{P(OL)} = \frac{0.5\cdot 0.3}{0.49} = 0.306
\end{aligned}$$

te je očekivana korisnost u E

$$E = 0.327\cdot 90 + 0.367\cdot 60 + 0.306\cdot 20 = 57.57.$$

- Pogledamo li sada čvor C

odluka *prijaviti se* vodi nas u čvor E gdje smo izračunali očekivanu korisnost 57.57, dok je vrijednost kod grane *ne prijaviti se* 30; kako je

$$57.57 > 30,$$

u slučaju odobrenja licence treba se prijaviti za posao.

Kako bismo izračunali vrijednost u čvoru F, prema Bayesovoj formuli dobivamo

$$\begin{aligned}
P(IU|NOL) &= \frac{P(IU)\cdot P(NOL|IU)}{P(NOL)} = \frac{0.2\cdot 0.2}{0.51} = 0.078\\
P(DU|NOL) &= \frac{P(DU)\cdot P(NOL|DU)}{P(NOL)} = \frac{0.3\cdot 0.4}{0.51} = 0.235\\
P(LU|NOL) &= \frac{P(LU)\cdot P(NOL|LU)}{P(NOL)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.51} = 0.686
\end{aligned}$$

te je očekivana korisnost u F

$$F = 0.078\cdot 63 + 0.235\cdot 42 + 0.686\cdot 14 = 24.388.$$

- Pogledajmo nadalje čvor D:

odluka *prijaviti se* vodi u čvor F gdje je očekivana korisnost 24.388, dok je odluka *ne prijaviti se* procijenjene vrijednosti 21, iz čega zaključujemo da i u slučaju kada licenca nije odobrena, Marko se treba prijaviti za posao.
Napokon, možemo izračunati vrijednost u čvoru B koja iznosi

$$B = 0.49 \cdot 57.57 + 0.51 \cdot 24.388 = 40.647.$$

b) S obzirom na prethodno izračunatu vrijednost, možemo zaključiti da će se Marko odlučiti zatražiti licencu ako je

$$x < 40.647.$$

c) S obzirom na zadanu eksponencijalnu funkciju korisnosti, izračunajmo pripadne vrijednosti, što su upravo one koje su dane u zagradama na kraju svake od grana stabla odlučivanja:

$$\begin{aligned}
&\text{za } x = 90 &&\Longrightarrow && u(90) = 1 - \mathrm{e}^{-90/220} = 0.336\\
&\text{za } x = 60 &&\Longrightarrow && u(60) = 1 - \mathrm{e}^{-60/220} = 0.239\\
&\text{za } x = 20 &&\Longrightarrow && u(20) = 1 - \mathrm{e}^{-20/220} = 0.087\\
&\text{za } x = 30 &&\Longrightarrow && u(30) = 1 - \mathrm{e}^{-30/220} = 0.127\\
&\text{za } x = 63 &&\Longrightarrow && u(63) = 1 - \mathrm{e}^{-63/220} = 0.249\\
&\text{za } x = 42 &&\Longrightarrow && u(42) = 1 - \mathrm{e}^{-42/220} = 0.174\\
&\text{za } x = 14 &&\Longrightarrow && u(14) = 1 - \mathrm{e}^{-14/220} = 0.062\\
&\text{za } x = 21 &&\Longrightarrow && u(21) = 1 - \mathrm{e}^{-21/220} = 0.091.
\end{aligned}$$

Nadalje, uz već prethodno izračunate vjerojatnosti u dijelu a) dobivamo:

$$\begin{aligned}
E(E|u) &= 0.327 \cdot 0.336 + 0.367 \cdot 0.239 + 0.306 \cdot 0.087 = 0.224\\
E(F|u) &= 0.078 \cdot 0.249 + 0.235 \cdot 0.174 + 0.686 \cdot 0.062 = 0.103\,.
\end{aligned}$$

Provođenjem istog načina zaključivanja kao u dijelu a) možemo zaključiti da se Marko treba prijaviti za posao i u slučaju odobrenja licence (jer je tada $0.224 > 0.127$) i u slučaju kada ona nije odobrena (zbog $0.103 > 0.091$).
Također, kako je

$$E(B|u) = 0.49 \cdot 0.224 + 0.51 \cdot 0.103 = 0.162,$$

a

$$0.162 > 0.13 = x,$$

zaključujemo da Marko treba najprije zatražiti licencu. □

5.2. Stav prema riziku

5.12. Definicija
Sigurni ekvivalent (engl. *certain equivalent*) za alternativu je određeni iznos koji je preferiran za tu alternativu. Označavamo ga s x_c.

Kako bismo bolje razumjeli prethodnu definiciju, navodimo da je, na primjer, kod igara na sreću x_c vrijednost koju ćemo uložiti/platiti za sudjelovanje u igri. Također, primjer sigurnog ekvivalenta navodimo i u nastavku.

5.13. Primjer. Pretpostavimo da posjedujemo dionicu (alternativu) koja ima jednaku vjerojatnost osigurati nam profit od $10\,000$ kuna ili gubitak od $5\,000$ kuna. Ako smo spremni prodati tu dionicu za $1\,000$ kuna, onda sigurni ekvivalent iznosi $x_c = 1\,000$ kuna. Također, možemo uočiti da je očekivana vrijednost alternative

$$\frac{1}{2} \cdot 10\,000 + \frac{1}{2} \cdot (-5\,000) = 2\,500\,\text{kn}.$$

Kako je $x_c = 1\,000 < 2\,500$, možemo zaključiti da je donositelj odluke nesklon riziku. □

Odluku donesenu u prethodnom primjeru opravdava sljedeća definicija.

5.14. Definicija
[Stav prema riziku] Ako je sigurni ekvivalent za alternativu (u terminima profita)

- **manji** od očekivanog profita za alternativu, onda kažemo da je donositelj odluke **nesklon riziku**;
- **jednak** očekivanom profitu za alternativu, onda kažemo da je donositelj odluke **neutralan u odnosu na rizik**;
- **veći** od očekivanog profita za alternativu, onda kažemo da je donositelj odluke **sklon riziku**.

5.2.1. Sigurni ekvivalent kod lutrija

Lutriju je uobičajeno zapisivati s

$$l = \langle p_1,\, x_1;\, p_2,\, x_2;\, \ldots;\, p_n,\, x_n \rangle\,,$$

gdje s $p_i \geq 0$ označavamo vjerojatnost dobivanja x_i, $i = 1, \ldots, n$ te vrijedi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Istaknimo

Kod igara na sreću je donositelj odluke **indiferentan** između sigurnog ekvivalenta x_c i sudjelovanja u igri te vrijedi $u(x_c) = E[u]$, odnosno

$$x_c = u^{-1}(E[u]), \tag{5.15}$$

gdje je očekivana korisnost $E[u]$ definirana s (5.12).

5.15. DEFINICIJA
Premija za rizik definira se kod lutrija s

$$\pi = E[X] - x_c. \tag{5.16}$$

Na sljedećem primjeru ilustrirat ćemo prethodno uvedene pojmove.

5.16. PRIMJER. Prijatelj nas je pozvao na sudjelovanje u lutriji opisanoj s

$$l = \left\langle \frac{1}{2}, 100; \frac{1}{2}, 0 \right\rangle.$$

Kakva je, kao donositelju odluke, naša sklonost prema riziku ukoliko pretpostavimo da je sigurni ekvivalent

a) $x_c = 40$ kuna

b) $x_c = 51$ kuna?

Rješenje. Zadanu lutriju možemo interpretirati na sljedeći način: vjerojatnost za dobivanje 100 kuna jednaka je 0.5 te je ista vjerojatnost u slučaju dobivanja 0 kuna.

Sada je očekivana vrijednost dobitka

$$E[X] = \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 50 \,\text{kuna}$$

te uz pomoć formule (5.16) slijedi

a) $\pi = 50 - 40 = 10 > 0$ kuna, odnosno u ovom slučaju smo neskloni riziku.

b) $\pi = 50 - 51 = -1 < 0$ kuna, odnosno u ovom slučaju smo skloni riziku.

□

Iz Definicije 5.14. i formule (5.16) možemo zaključiti sljedeće:

5.17. Napomena

Premija za rizik π određuje stav prema riziku tako da je donositelj odluke

- **nesklon riziku** ako je $\pi > 0$
- **neutralan u odnosu na rizik** ako je $\pi = 0$
- **sklon riziku** ako je $\pi < 0$.

U sljedećoj propoziciji dokazat ćemo jedno bitno svojstvo funkcije korisnosti.

5.18. Propozicija

Pretpostavimo da osoba (donositelj odluke) sudjeluje u lutriji s dvije moguće nagrade x_1 i x_2 te neka vjerojatnost dobitka x_1 iznosi p. Ukoliko je donositelj odluke nesklon riziku, onda je funkcija korisnosti u konkavna, uz dodatnu pretpostavku da je strogo rastuća s obzirom da se odnosi na profit.

Dokaz. Kako je vjerojatnost dobitka x_1 jednaka p, onda je vjerojatnost dobitka x_2 jednaka $1 - p$. Opisanu lutriju sada možemo zapisati s $l = \langle p, x_1; 1 - p, x_2 \rangle$ te su očekivana dobit i očekivana korisnost jednake

$$\begin{aligned} E[X] &= px_1 + (1-p)x_2, \\ E[u] &= pu(x_1) + (1-p)u(x_2), \end{aligned}$$

redom. S obzirom na pretpostavku o nesklonosti riziku, za premiju za rizik vrijedi

$$\pi = E[X] - u^{-1}(E[u]) > 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} E[X] > u^{-1}(E[u]) &\iff \\ u(E[X]) > E[u] &\iff \\ u(px_1 + (1-p)x_2) > pu(x_1) + (1-p)u(x_2), &\qquad \forall\, x_1, x_2,\, p \in (0,1), \end{aligned}$$

što upravo znači da je funkcija u strogo konkavna. ∎

Kao što vidimo iz prethodne tvrdnje, sklonost riziku, odnosno negativna premija za rizik, za proizvoljnu lutriju daje, uz iste uvjete, konveksnu funkciju u.

5.19. PRIMJER. Promotrimo lutriju

$$l = \left\langle \frac{1}{3}, 100; \frac{2}{3}, -25 \right\rangle.$$

Odredite premiju za rizik ako je funkcija korisnosti $u(x) = \ln(x + 200)$. Provjerite konveksnost funkcije u i odredite stav prema riziku.

Rješenje. Očekivana dobit je

$$E[X] = \frac{1}{3} \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot (-25) = 16.667.$$

S obzirom na zadanu funkciju korisnosti u imamo da je

$$u(x_c) = E[u] = \frac{1}{3} \cdot u(100) + \frac{2}{3} \cdot u(-25) = \ln \sqrt[3]{300} + \ln \sqrt[3]{175^2} = 5.3445,$$

a kako je, s druge strane, i

$$u(x_c) = \ln(x_c + 200),$$

izjednačavanjem prethodnih dvaju izraza dobivamo da je sigurni ekvivalent $x_c = 9.443$. Dakle, premija za rizik iznosi

$$\pi = 16.667 - 9.443 = 7.224 > 0,$$

što znači da je donositelj odluke nesklon riziku te da je funkcija u konkavna. □

5.20. NAPOMENA

Čitatelj može uočiti da konkavnost funkcije korisnosti lako možemo provjeriti i pomoću druge derivacije (vidi [17, str. 215]). Vezano uz prethodni primjer, kako je

$$u''(x) = \frac{-1}{(x + 200)^2} < 0, \qquad \forall x,$$

funkcija u je očito strogo konkavna.

5.2.2. Eksponencijalna funkcija korisnosti

Za donositelje odluke nesklone riziku (pri čemu odluka uključuje profit) funkcija korisnosti je oblika

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{R}}, \qquad R > 0, \tag{5.17}$$

gdje je R konstanta koja određuje *toleranciju na rizik*; drugim riječima, predstavlja *stupanj nesklonosti prema riziku.*

Nadalje, primijetimo da je

$$u''(x) = -\frac{1}{R^2} e^{-\frac{x}{R}} < 0,$$

odnosno funkcija u je konkavna, što povlači da je donositelj odluke nesklon riziku. Za situacije koje uključuju trošak, funkcija korisnosti je oblika

$$u(x) = 1 - e^{\frac{x}{R}}, \qquad R > 0. \tag{5.18}$$

Kada $R \to \infty$, donositelj odluke teži ka neutralnosti.

U sljedećem primjeru opisat ćemo kako možemo približno odrediti R.

5.21. Primjer. Zamislimo situaciju u kojoj zamolimo donositelja odluke neka razmotri alternativu koja s jednakom vjerojatnošću može osigurati dobitak r_0 ili gubitak $r_0/2$. Zatim, donositelja odluke zamolimo da odredi r_0 za koji će biti indiferentan između dobivanja ili nedobivanja alternative (taj zahtjev implicira da je $x_c = 0$). Kada je r_0 određen, tada je R približno jednak r_0, tj.

$$R \approx r_0.$$

Očekivana vrijednost je

$$0.5 \cdot r_0 + 0.5 \cdot \left(\frac{-r_0}{2}\right) = 0.25\, r_0, \qquad r_0 > 0.$$

Nadalje, kako je inverz funkcije (5.17) dan s $u^{-1}(x) = -R \ln(1-x)$, to je odgovarajući sigurni ekvivalent

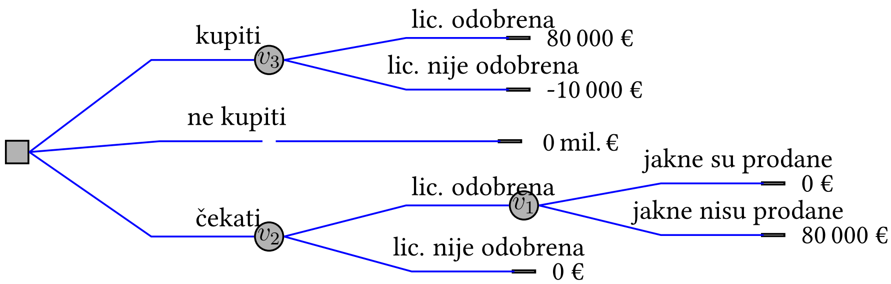
$$x_c = u^{-1}\left(E[u]\right) = -R \ln(1 - E[u]),$$

dok je sigurni ekvivalent za eksponencijalnu funkciju (5.18) koja uključuje trošak jednak

$$x_c = R \ln(1 - E[u]).$$

□

5.22. PRIMJER. Sjetimo se stabla odlučivanja koje smo imali u Primjeru 5.2. s tvrtkom *Kožarko*; preciznije, slučaja kada je analitičar u tvrtci predložio da se rizik treba smanjiti, odnosno da se tvrtka može prijaviti za dobivanje licence i pričekati s kupnjom dok ne vidi što će biti s licencom –hoće li biti odobrena ili ne. Sjetimo se, stablo je izgledalo ovako:



Pretpostavimo sada da je poznato da tvrtka *Kožarko* ima eksponencijalnu funkciju korisnosti. Nadalje, tvrtka je spremna prihvatiti ponudu da s jednakom vjerojatnošću zaradi 20 000 eura ili izgubi 10 000 eura. Što će *Kožarko* učiniti?

Rješenje. Iz danih podataka zaključujemo da je $r_0 = 20\,000$ eura, tj. $R = 20\,000$ jer smo u Primjeru 5.21. utvrdili da je $R \approx r_0$. Sada je pripadna funkcija korisnosti dana s

$$u(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2\cdot 10^4}}$$

te u nju uvrštavamo najprije $x = 80\,000 = 8 \cdot 10^4$, što bi dalo

$$u(8 \cdot 10^4) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{8\cdot 10^4}{2\cdot 10^4}} = 0.982,$$

itd.
Isto tako, za r_0 možemo odabrati $r_0 = 2$, odnosno $R = 2$ te dobivamo funkciju korisnosti

$$u(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/2},$$

no onda ćemo uvrštavati vrijednosti, najprije, $x = 8$, što daje

$$u(8) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{8}{2}} = 0.982,$$

odnosno dobivamo istu vrijednost; dakle samo moramo biti dosljedni kod odabira jedinica mjere koje koristimo.

Ostale vrijednosti funkcije korisnosti (vrijednosti koje su dane u zagradama, na krajevima stabla odlučivanja) su

$$u(-1) = 1 - \mathrm{e}^{1/2} = -0.649$$
$$u(0) = 1 - \mathrm{e}^{0} = 0.$$

Sada smo spremni na računanje očekivane korisnosti, po istom principu kao što smo računali očekivane vrijednosti u odgovarajućim čvorovima u Primjeru 5.2., samo sada s novim vrijednostima/korisnostima (usporedite sljedeći račun s računom u Primjeru 5.2.):

$$
\begin{aligned}
E(v_3|u) &= 0.5 \cdot 0.982 - 0.5 \cdot 0.649 = 0.167 \\
E(v_1|u) &= 0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.982 = 0.295 \\
E(v_2|u) &= 0.5 \cdot v_1 + 0.5 \cdot 0 = 0.5 \cdot 0.295 = 0.148.
\end{aligned}
$$

Kako bismo donijeli konačnu odluku, možemo primijetiti da nas odluka *kupiti* vodi u čvor v_3 gdje je očekivana korisnost 0.167, *ne kupiti* nas vodi do vrijednosti 0, dok odluka *čekati* vodi na čvor v_2 gdje je očekivana korisnosti 0.148; kako je

$$E(v_3|u) = 0.167 > \max\{0.148, 0\},$$

zaključujemo da treba kupiti jakne bez prethodne prijave za licencu. □

5.3. Zadaci za vježbu

5.1. Zadatak Ana i Cecilija sastale su se kako bi prošetale pored Dunava u Vukovaru. Cecilija je zatim zamolila Anu da autobusom odu na sladoled u *Petar Pan* u Osijeku. Ana želi ići na sladoled i uz to je sa sobom ponijela i kupone koje je osvojila u nagradnoj igri za besplatan sladoled u *Petru Panu* u neograničenim količinama pri jednom posjetu – dakle, ako odu u *Petar Pan*, neće ništa potrošiti na sladoled.
Ukoliko Ana i Cecilija odu u Osijek, Cecilija Ani treba platiti povratnu autobusnu kartu koja košta 47 kuna jer je Ana zaboravila novčanik (Cecilija ima studentsku kartu pa je za nju prijevoz besplatan). Pri tome, Ana Ceciliji predlaže sljedeću igru: *Ako odemo do Petra Pana, tamo u ovo doba godine ima* 8 *vrsta sladoleda:* 3 *različita voćna okusa i* 5 *različitih čokoladnih okusa. Reći ćemo slastičarki da nasumično odabere jednu vrstu sladoleda koji ćemo jesti (svaka od* 8 *vrsti sladoleda ima jednaku mogućnost biti odabrana). Ako slastičarka odabere čokoladni sladoled, kada se vratimo kući dat ću ti* 120 *kuna (pa da mi i sljedeći put imaš za posuditi novce), a ako odabere voćni sladoled, neću ti davati nikakve novce (dakle, ni za kartu ti neću vratiti).*
Ako ti ta igra nije dovoljno zanimljiva, predlažem ti i drugu opciju (naravno, ako mi daš novce za kartu i odemo u Petar Pan): nakon što slastičarka odabere jednu vrstu sladoleda (od ponuđenih 8*) možeš mi dati jos* 10 *kuna da kupim sok i idemo kući (u tom slučaju neću ti davati nikakve novce) ili se možemo nastaviti igrati na sljedeći način: možemo pitati slastičarku da nam nasumično da još jednu kuglu sladoleda od preostalih* 7 *vrsta: ako je odabrala čokoladni sladoled, ja ću ti dati* 120 *kuna, a ako je odabrala voćni, neću ti dati ništa.* Ukoliko Ana i Cecilija odu u Osijek, vjerojatnosti da Cecilija odabere jednu od dviju igara koje joj Ana nudi su podjednake.

a) Napravite/skicirajte stablo odlučivanja.

b) Što će odlučiti Cecilija, treba li ići u Osijek (ako za kriterij koristimo njezinu očekivanu zaradu na temelju danih podataka)?

5.2. Zadatak Tiskara *Skripta* treba odlučiti hoće li prihvatiti tiskanje plakata, a ako prihvati tiskanje, onda zbog vremenskog roka mora odabrati hoće li plakate printati ili za firmu F_1 ili za firmu F_2. Firme mogu naručiti tiskanje A_3 plakata (što donosi zaradu od $8\,000$ kuna) ili A_2 plakata (što donosi zaradu od $5\,000$ kuna). Ukoliko tiskara odbije tiskanje plakata, tada neka zarada iznosi $y \in \mathbb{R}$ kuna (zbog nekog drugog posla koji je u mogućnosti prihvatiti).
Poznato je da je vjerojatnost da firma naruči tiskanje A_2 plakata 0.6, a vjerojatnost da firma naruči tiskanje A_3 plakata iznosi 0.4. Nadalje, iz dosadašnje suradnje, tiskara procjenjuje sljedeće (uvjetne) vjerojatnosti:

- P(tiskara prihvati posao od firme F_1 | potreban je tisak A_3 plakata) = 0.8
- P(tiskara prihvati posao od firme F_1 | potreban je tisak A_2 plakata) = 0.3.

a) Napravite/skicirajte stablo odlučivanja.

b) Obrazložite koliko treba iznositi parametar y tako da firma prihvati tiskanje plakata ako za kriterij koristimo očekivanu zaradu na temelju danih podataka.

5.3. Zadatak Donositelj odluke posjeduje zemljište na kojem bi želio posaditi vinograd. Budući da je sadnja vinograda financijski zahtjevna, donositelj odluke razmatra mogućnost prijave za dobivanje poticaja. Dobivanje poticaja ovisi o kvaliteti zemljišta, a zemljište može imati ocjenu kvalitete: izvrsne (5), vrlo dobre (4), dobre (3) ili dovoljne (2). Prijava zahtijeva pripremu dokumentacije, a nakon recenzentskog postupka, donositelj odluke dobit će poticaj ili neće. Budući da su u sustavu poticaja skloniji odobravanju poticaja zemljištima koja su bolje kvalitete, neka su dane sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

- P(odobren poticaj | zemljište kvalitete 5) = 0.9
- P(odobren poticaj | zemljište kvalitete 4) = 0.7
- P(odobren poticaj | zemljište kvalitete 3) = 0.5
- P(odobren poticaj | zemljište kvalitete 2) = 0.4.

Nadalje, neka su procjenjene sljedeće vjerojatnosti da zemljište bude izvrsne, vrlo dobre, dobre i dovoljne kvalitete, redom: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4.
Štoviše, što je zemlja kvalitetnija, to je veća i korisnost. Stoga, pretpostavljamo da u slučaju traženja poticaja (u slučaju da je on odobren i da će se saditi vinograd) korisnost iznosi 100 u slučaju izvrsne kvalitete, 90 u slučaju vrlo dobre kvalitete, 60 u slučaju dobre kvalitete i 20 u slučaju dovoljne kvalitete. Također, u slučaju traženja poticaja (u slučaju da je on odobren) neka korisnost kod nesadnje iznosi 50. Nadalje, u slučaju traženja poticaja (u slučaju da on nije odobren) neka su korisnosti za 25% manje u odnosu na odgovarajuće korisnosti u slučaju odobrenog poticaja.
U slučaju da se donositelj odluke ne prijavi za poticaj, neka korisnost iznosi x, gdje je x realan broj.

a) Napravite/skicirajte stablo odlučivanja.

b) U ovisnosti o parametru x obrazložite odluku donositelja odluke.

5.4. Zadatak Student (donositelj odluke) bi želio ići u Sloveniju na Erasmus. Budući da je odlazak u Sloveniju financijski zahtjevan, student razmatra mogućnost prijave za dobivanje stipendije. Dobivanje stipendije ovisi o prosjeku ocjena studenta, a student može imati prosjek ocjena: izvrstan (5), vrlo dobar (4), dobar (3) ili dovoljan (2). Prijava zahtijeva pripremu dokumentacije, a nakon recenzentskog će postupka student dobiti stipendiju ili neće. Budući da su u komisiji za dodjelu stipendija skloniji davanju stipendije studentima koji imaju bolje prosječne ocjene, neka su dane sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

- P(odobrena stipendija | student ima prosjek 5) = 0.85
- P(odobrena stipendija | student ima prosjek 4) = 0.6
- P(odobrena stipendija | student ima prosjek 3) = 0.45
- P(odobrena stipendija | student ima prosjek 2) = 0.3.

Nadalje, neka su procjenjene sljedeće vjerojatnosti da student ima prosjek izvrstan, vrlo dobar, dobar i dovoljan, redom: 0.15, 0.2, 0.3, 0.35.
Štoviše, što student ima bolji prosjek, to je veća i korisnost. Stoga, pretpostavljamo da u slučaju traženja stipendije (u slučaju da je ona odobrena i da će se ići na Erasmus) korisnost iznosi 120 u slučaju izvrsnog prosjeka, 80 u slučaju vrlo dobrog prosjeka, 60 u slučaju dobrog prosjeka i 12 u slučaju dovoljnog prosjeka. Također, u slučaju traženja stipendije (u slučaju da je ona odobrena) neka korisnost kod neodlaska na Erasmus iznosi 40. Nadalje, u slučaju traženja stipendije (u slučaju da ona nije odobrena) neka su korisnosti za 20% manje u odnosu na odgovarajuće korisnosti u slučaju odobrene stipendije.

U slučaju da se student ne prijavi za stipendiju, neka korisnost iznosi x, gdje je x realan broj.

a) Napravite/skicirajte stablo odlučivanja.

b) U ovisnosti o parametru x obrazložite odluku donositelja odluke.

5.5. Zadatak Promotrimo lutriju
$$l = \left\langle \frac{1}{4}, 200; \frac{3}{4}, -50 \right\rangle.$$
Odredite premiju za rizik ako je funkcija korisnosti $u(x) = \mathrm{e}^{1+x/200}$. Provjerite konveksnost funkcije u i odredite stav prema riziku.

5.6. Zadatak Promotrimo lutriju
$$l = \left\langle \frac{1}{3}, 300; \frac{2}{3}, -100 \right\rangle.$$
Odredite premiju za rizik ako je funkcija korisnosti $u(x) = \mathrm{e}^{1+x/100}$. Provjerite konveksnost funkcije u i odredite stav prema riziku.

5.7. Zadatak Pretpostavimo da smo došli u priliku posjedovanja dionice koja ima jednaku vjerojatnost osigurati nam profit od $14\,000$ kuna ili gubitak od $7\,000$ kuna. Ako smo spremni prodati tu dionicu za $1\,500$ kuna, koliko iznosi sigurni ekvivalent, kakav je naš stav prema riziku te koliko bi približno iznosio R kod eksponencijalne funkcije korisnosti?

5.8. Zadatak Donositelj odluke sudjeluje u igri na sreću pri čemu se baca simetrična kockica i ako padne jedinica ili dvojka on mora platiti 10 kuna; ukoliko padne trojka, dobiva 15 kuna, a ako padne četvorka, petica ili šestica, on dobiva 4 kune. Napišite primjer funkcije korisnosti tako da je donositelj odluke nesklon riziku (obrazložite zašto je dana funkcija dobro definirana). Kako biste izračunali premiju za rizik za navedenu funkciju?

6. Hijerarhijsko odlučivanje

Tablice odlučivanja, s kojima smo se upoznali na samom početku ovog udžbenika, ponekad mogu biti nepraktične u situacijama kada treba dati *objektivne* ocjene većem broju alternativa te ćemo stoga u nastavku opisati još jednu bitnu vrstu odlučivanja, poznatu kao *hijerarhijsko odlučivanje*.

Sama riječ *hijerarhija* dolazi od grčke riječi *hierarkhia* te prema Hrvatskoj enciklopediji [100] označava *klasifikaciju ili poredak na temelju podređenosti, odnosno nadređenosti (vojna, crkvena hijerarhija, hijerarhija vrijednosti)*.

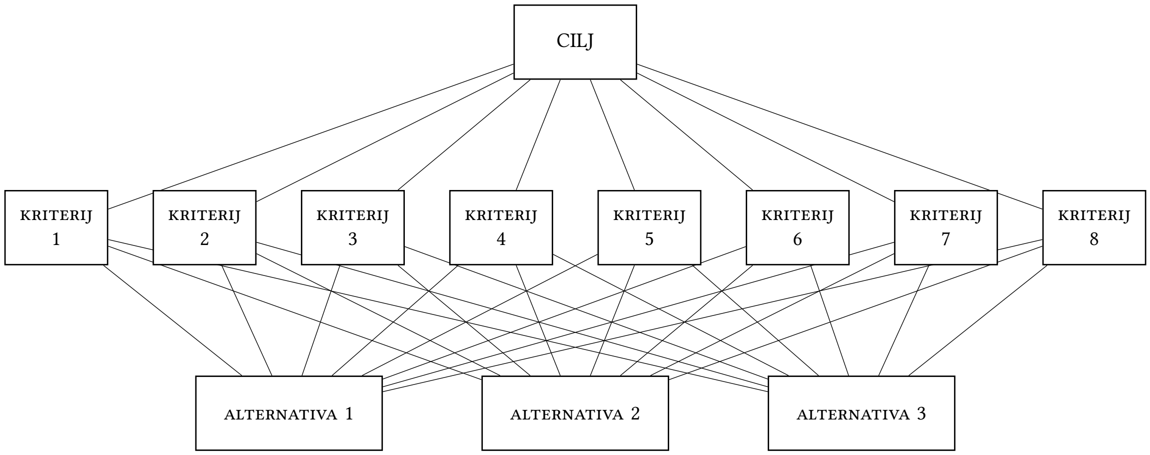
Na prvi pogled, ideja je, kao što smo to i prethodno napomenuli, slična stablu odlučivanja, pogotovo u tome što problem raščlanjujemo na manje potprobleme koji su međusobno hijerarhijski ovisni. No, ono što je ovdje bitno drugačije je da ovisnost o hijerarhiji označava *tko o kome odlučuje*, dok je stablo odlučivanja označavalo kronološku ovisnost odluka, novih spoznaja i stanja svijeta.

Dekompozicija u hijerarhiju složenih sustava jedna je od osnovnih ideja koju koriste pojedinci kako bi se nosili s različitostima jer se na taj način faktori organiziraju od općih (na vrhu hijerarhije) ka pojedinačnim (koji se nalaze na nižim nivoima). Nakon konstruiranja hijerarhije, potrebno je u obzir uzeti što je moguće više detalja kako bismo problem prikazali temeljito, ali, s druge strane, ne previše detaljno kako ne bismo izgubili osjetljivost na promjenu elemenata, o čemu će više riječi biti u Poglavlju 6.1.1. Precizno razmatranje ciljeva, kriterija, problema i dionika ima dvije svrhe [60]:

- ono daje širu sliku složenih veza među elementima u procesu procjenjivanja te
- daje odlučitelju procjenu o tome uspoređuje li elemente iste relativne veličine.

Naime, zamislimo da vodimo razgovor s kandidatima za neko radno mjesto. Ako pri tome koristimo tablicu odlučivanja, mi moramo ocijeniti sve kandidate nekom ocjenom (u nekoj skali, na primjer od 0 do 9). Psiholozi su pokazali da ljudski mozak bolje funkcionira na **razini usporedbe dvaju objekata**, jer je ponekad teško dati objektivne, odnosno *poštene* ocjene većem broju objekata. Problem se dodatno komplicira uvođenjem kriterija. Na primjer, ako tražimo novog kandidata za mjesto poštara, važni kriteriji mogu biti odnos prema ljudima, fizička spremnost, stav prema poštenom dostavljanju novca... Jedan od načina kako to riješiti (pošteno donijeti odluku pri izboru kandidata) je taj da za svaki kriterij damo ocjene svim kandidatima, ali takvo rješenje povlači početni problem: ocjenjivanje većeg broja alternativa u odnosu na jedan kriterij.

Za strukturiranje problema odlučivanja, najjednostavnija je forma hijerarhija koja se sastoji od tri nivoa: cilj na vrhu, zatim kriteriji te alternative na posljednjem nivou [60] (vidi Sliku 2).



Slika 2. Primjer hijerarhije s tri nivoa

Kriteriji mogu biti razni i njih određuju stručnjaci za određeno područje. Skup alternativa je jednoznačno određen –to su objekti o čijim preferencijama odlučujemo.

Kako interpretiramo hijerarhiju?

- **Cilj** je ono što želimo postići. Hijerarhija uvijek ima jedinstven cilj.
- **Kriteriji** su ono što moramo rangirati. Naime, rangirati ne znači samo poredati, nego i dodijeliti težine, pri čemu sume težina obično normiramo 1–normom.
- **Alternative** su ono što treba rangirati nakon rangiranja kriterija, jer njih rangiramo u odnosu na svaki kriterij posebno. Naglasimo da rangiranje alternativa po kriterijima ne mora biti *potpuno*, odnosno neke alternative možemo rangirati po jednom kriteriju, a neke po drugom. Kako u takvom slučaju dobiti odluku ovisit će o metodi odlučivanja koju primjenjujemo.

6.1. AHP metoda

AHP metodu, odnosno *analitički hijerarhijski proces* (engl. *The Analytic Hierarchy Process*) predložio je i razradio Thomas L. Saaty 1970–ih godina [7, str. 15]. Prema Saatyju (vidi [73, 77]) AHP je metoda koja se koristi kako bi osigurala bolju kvalitetu rješavanja složenih problema bilo u fizikalnim domenama (gdje se misli na materijalno te na neku vrstu objektivne stvarnosti izvan pojedinca koji provodi zaključivanje), bilo u psihološkim domenama (misli se na nematerijalno, odnosno na ideje, osjećaje i uvjerenja pojedinca koji donosi odluku te društva u cjelini). Dakle, radi se o procesu donošenja odluka na temelju iskustva, intuicije i heuristike struktura dobro definirane metodologije izvedene iz razumnih matematičkih principa.

Ova je metoda vrlo rasprostranjena te najveću primjenu ima u višekriterijskom odlučivanju [75], u planiranju [76] te raspodjeli resursa [73, 74]; za više detalja vidi [7, 77].

Prilikom primjene AHP metode potrebno je odrediti hijerarhiju promatranog problema te uspostaviti usporedbe po parovima unutar prethodno spomenute hijerarhijske strukture. Preciznije, treba se voditi sljedećim koracima:

6.1.1. Koraci AHP metode

Kako bismo što ispravnije rangirali zadane kriterije i alternative u svrhu donošenja što bolje odluke o prioritetima koji nas zanimanju, prilikom procesa odlučivanja moramo raščlaniti proces donošenja odluke na sljedeće korake (vidi npr. [69, str. 85]):

1. **Definirati problem i razmotriti što treba odlučiti.**

2. **Strukturiranje hijerarhije odlučivanja** koja na vrhu ima cilj, nakon čega slijede kriteriji odlučivanja te se na zadnjoj razini hijerarhije nalaze alternative.
   Naš je zadatak odlučiti se za jednu od alternativa, pri čemu nam mogu pomoći razgovori s ekspertima u problemskoj domeni, pregled literature, detaljno promišljanje o problemu i slično.

3. **Uspoređivanje po parovima** odnosno konstrukcija skupa matrica usporedbi za spomenutu metodu uspoređivanja.

   U ovom koraku provode se usporedbe po parovima, poštujući hijerarhiju koja je kreirana u prethodnom koraku i korištenjem proširene fundamentalne skale koja će biti opisana nešto kasnije (vidi Tablicu 54). Svaka dva elementa nižeg nivoa treba usporediti po svakom od elemenata višeg nivoa (što će nam biti puno jasnije nakon što pogledamo konkretne primjere!).

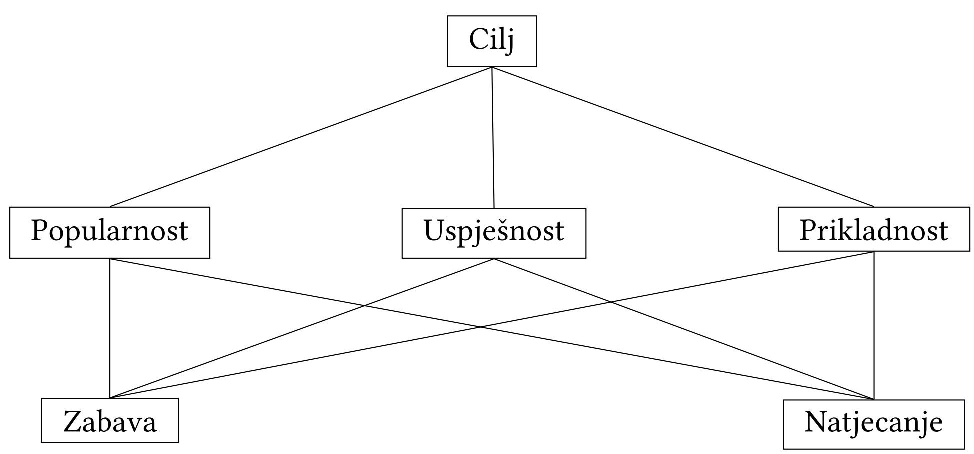
4. **Izračun prioriteta** alternativa i težina kriterija na temelju svake tablice usporedbi po parovima odabranim matematičkim postupkom.

Neki autori navode i sljedeći, dodatni korak (vidi npr. [46, str. 35]):

5. **Analiza osjetljivosti**
   Ponekad se u praksi radi ova analiza koja predstavlja ispitivanje osjetljivosti izlaznih varijabli (prioriteta alternativa) na temelju promjena ulaznih varijabli (težina kriterija i usporedbi). Ovdje se ispituje hoće li mala promjena u ulaznim procjenama (težinama kriterija) utjecati na konačni poredak i prioritete alternativa i koliko.

U sljedećem, otprije poznatom primjeru pokušat ćemo ilustrirati o kakvoj hijerarhijskoj strukturi je riječ, dok će u Poglavlju 6.2.1. biti detaljno objašnjen postupak uspoređivanja po parovima.

6.1. Primjer. U Poglavlju 2.1. upoznali smo se s paradoksom *Minimizacija gubitka*, u kojem smo se bavili odlukom koju smo donosili isključivo po kriteriju dobiti (odnosno gubitka) financijskih sredstava. U stvarnom svijetu, puno bi realističnije bilo uzeti u obzir POPULARNOST predloženih aktivnosti, PRIKLADNOST predloženih aktivnosti zbog očekivanih vremenskih (ne)prilika te očekivanu USPJEŠNOST, jer ukoliko je slična manifestacija bila nedavno, možda nova neće biti tako zanimljiva. Očito je da će i zabava i natjecanje po nekim kriterijima biti zanimljivi i značajni te se možemo upitati *koga preferirati u takvoj situaciji.* Kreirajmo hijerarhijsku strukturu. Najprije treba odrediti



Slika 3. Dekompozicija paradoksa *Minimizacija gubitka* u hijerarhiju

klase objekata koje uobičajeno zovemo **nivoi** i to će upravo biti **nivo kriterija** i **nivo alternativa** kao što smo već vidjeli na Slici 2. Za promatrani primjer, odgovarajući nivoi prikazani su na Slici 3, pri čemu možemo uočiti da će veze među čvorovima dočaravati stvarnu povezanost, odnosno nadređenost među objektima, što će nam pogotovo biti korisno u složenijim primjerima. □

Prije nego se detaljno upoznamo s prethodno navedenim koracima 3. i 4. koji se odnose na uspoređivanje po parovima i izračun prioriteta, potrebno je osvrnuti se na teorijske temelje AHP metode.

6.2. Teorijski temelji AHP metode

Neka su $a_1, \dots, a_n$ alternative koje dolaze u obzir prilikom zaključivanja o danom problemu odlučivanja. Kvantitativne procjene parova alternativa (a_i, a_j) s obzirom na odabrani kriterij možemo predstaviti matricom $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$. Cilj je AHP metode svakoj od n alternativa $a_1, \dots, a_n$ pridružiti težine $w_1, \dots, w_n$ koje će odražavati dane procjene.

Na primjer, *Aristarh sa Samosa* pokazao je da je udaljenost između Zemlje i Sunca 19 puta veća nego udaljenost između Zemlje i Mjeseca [32, 60], što bi značilo da je na dužini između Zemlje i Sunca moguće označiti 19 crtica. No, ako imamo apsolutnu skalu i mjerimo udaljenost između Zemlje i Mjeseca kao w_1 jedinica i w_2 jedinica između Zemlje i Sunca, onda su relativne udaljenosti (tj. recipročne vrijednosti)

$$\frac{w_2}{w_1} \quad \text{i} \quad \frac{w_1}{w_2},$$

redom. Takva je reprezentacija valjana samo ako w_1 i w_2 pripadaju istoj skali, tako da je $\frac{w_1}{w_2}$ neovisno o mjernoj jedinici [60, 78].

Pogledajmo sada kako izgleda matrica $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ čiji retci sadrže omjere mjerenja w_i za svaku od n alternativa u odnosu na ostalih $n-1$ alternativa:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{ij}. \tag{6.19}$$

Kako bismo pobliže opisali matricu W koja će nam biti od interesa, u nastavku navodimo određene pojmove i tvrdnje koji će nam biti ključni za bolje razumijevanje materije koja slijedi.

6.2. DEFINICIJA
Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, čiji elementi zadovoljavaju uvjet

$$a_{ij} > 0, \quad za\,sve \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

kažemo da je **pozitivna**.

6.3. DEFINICIJA
Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, čiji elementi zadovoljavaju uvjet

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}, \quad za\,sve \quad i,j = 1,\ldots,n, \tag{6.20}$$

kažemo da je **recipročna**.

Istaknimo

Ukoliko se radi o pozitivnoj recipročnoj matrici, iz jednakosti (6.20) je jasno da ona na dijagonali ima elemente $a_{ii} = 1$, $i = 1,\ldots,n$. Dakle, možemo uočiti da je svaka pozitivna recipročna matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oblika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

6.4. DEFINICIJA
Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, čiji elementi zadovoljavaju uvjet

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik},\ i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{6.21}$$

kažemo da je (Saaty) **konzistentna**.

Istaknimo

Konzistentnost izražava dosljednost i preciznost donositelja odluke u uspoređivanju; pod dosljednosti smatramo da se donositelj odluke pridržava svojih stavova, dok preciznost znači da donositelj odluke s velikom točnošću i jasnoćom izražava svoje stavove i preferencije o danom problemu odlučivanja.
Broj a_{ij} izražava **težinu alternative** i mjerenu na odgovarajućoj skali j.
Zahtjev

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

iz definicije konzistentnosti, govori o proporcionalnosti j−te i k−te skale, a faktor proporcionalnosti je a_{jk}.

U nastavku navodimo još neke bitne tvrdnje koje povezuju prethodne pojmove vezane uz kvadratne matrice.

6.5. Teorem
Pozitivna matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$, je **konzistentna** *ako i samo ako postoje pozitivni brojevi w_i, $i = 1, \dots, n$ takvi da vrijedi*

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \; i, j = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da vrijedi

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \; i, j = 1, \dots, n$$

te pokažimo da je matrica A konzistentna. Iz danog je uvjeta očito

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik}, \; i, j, k = 1, \dots, n$$

te vrijedi jednakost (6.21), što je ekvivalentno traženoj tvrdnji.
Pretpostavimo sada da je matrica A konzistentna te treba pokazati da postoje $w_i > 0$ takvi da je

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Definirajmo pozitivne brojeve

$$w_i = \frac{a_{ij}}{a_{sj}}, \text{ za fiksni } s.$$

Kako je matrica A konzistentna, iz jednakosti (6.21) slijedi

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik},$$

što zbog definicije od w_i daje

$$a_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \cdot \frac{a_{sk}}{a_{sk}} = \frac{\frac{a_{ik}}{a_{sk}}}{\frac{a_{jk}}{a_{sk}}} = \frac{w_i}{w_j},$$

odnosno vrijedi željena tvrdnja. ∎

U nastavku će čitatelj moći uočiti kako će svojstvene vrijednosti i pripadni svojstveni vektori igrati važnu ulogu u postavljanju teorijskih temelja AHP metode za promatranu (konzistentnu) matricu te ćemo se stoga, u nastavku, najprije prisjetiti same definicije svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora (za više detalja vidi [1, 45]).

6.6. Definicija
Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Za skalar $\lambda_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kažemo da je svojstvena (karakteristična ili vlastita) vrijednost matrice A ako postoji vektor $w \neq 0$ takav da je $Aw = \lambda_0 w$. Nadalje, za takav vektor $w \neq 0$ kažemo da je svojstveni (karakteristični ili vlastiti) vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0.

Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se *spektar od* A i označava sa $\sigma(A)$.

6.7. Definicija
Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se svojstveni (karakteristični ili vlastiti) polinom matrice A.

Primijetimo da je svojstveni polinom matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ upravo n−tog stupnja te su njegove nultočke zapravo svojstvene vrijednosti matrice A; također, može se pokazati [92, str. 124] da za svaki polinom možemo naći matricu kojoj je taj polinom svojstveni, što povlači da je problem određivanja svojstvenih vrijednosti ekvivalentan problemu određivanja nultočaka polinoma.

Prije nego pogledamo rezultate koji se odnose na svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore konzistentne matrice, navedimo još jedan bitan rezultat vezan uz slične matrice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, odnosno matrice za koje postoji regularna matrica $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tako da je

$$B = S^{-1}AS;$$

ili ekvivalentno

$$A = SBS^{-1}.$$

6.8. TEOREM
Slične matrice imaju jednake svojstvene vrijednosti.

Dokaz. Vidi [1, str. 144, Propozicija 5.5.6]. ∎

U nastavku pogledajmo kako možemo konstruirati proizvoljnu konzistentnu matricu.

6.9. NAPOMENA
Svaka konzistentna matrica $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ produkt je jednostupčaste matrice $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ i matrice $w' = \begin{bmatrix} 1/w_1 \cdots 1/w_n \end{bmatrix}$, pri čemu su svi $w_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Drugim riječima, konzistentnu matricu W možemo prikazati u obliku

$$W = w \cdot w' = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/w_1 \cdots 1/w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)_{ij}, \tag{6.22}$$

s kojim smo se već sreli u (6.19).
Nadalje, promotrimo umnožak konzistentne matrice W i jednostupčaste matrice w:

$$W \cdot w = w \cdot w' \cdot w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/w_1 \cdots 1/w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \cdot n = n \cdot w.$$

- Iz prethodnog je razmatranja lako uočiti da je rang matrice W jednak 1, jer se svaki redak te matrice može dobiti množenjem prvog retka s odgovarajućim skalarom. Prethodno povlači da su sve svojstvene vrijednosti matrice W (osim jedne) jednake nula, odnosno nula je svojstvena vrijednost matrice W kratnosti $n - 1$.

- Suma svojstvenih vrijednosti matrice jednaka je njenom tragu, odnosno, ako sa λ_i, $i = 1, \ldots, n$ označimo svojstvene vrijednosti matrice W, vrijedi

  $$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr}W = 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

  što povlači da je n svojstvena vrijednost matrice W kratnosti 1, kojoj pripada svojstveni vektor w; to je očito i najveća svojstvena vrijednost konzistentne matrice W, koju ćemo u nastavku, zbog jednostavnosti zapisivanja, označavati s $\lambda_{\max}$. Dakle, $\lambda_{\max} = n$.

Sljedeći teorem daje bitnu karakterizaciju konzistentnosti pozitivne recipročne matrice (kakva će nam biti od interesa prilikom konstrukcije matrice usporedbi alternativa), preko njezine svojstvene vrijednosti.

6.10. TEOREM
Pozitivna recipročna matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, je konzistentna ako i samo ako je njena maksimalna (po modulu) svojstvena vrijednost

$$\lambda_{\max} = n.$$

Dokaz. Iz prethodne napomene odmah slijedi da ako je matrica A konzistentna, onda je $A = W$, što daje $\lambda_{\max} = n$.

Obratno, neka je $\lambda_{\max} = n$ maksimalna, po modulu, svojstvena vrijednost i w pripadni svojstveni vektor. Tada vrijedi

$$Aw = \lambda_{\max} w, \qquad w \neq 0,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\max} w_1 \\ \lambda_{\max} w_2 \\ \vdots \\ \lambda_{\max} w_i \\ \vdots \\ \lambda_{\max} w_n \end{bmatrix}.$$

Sada je i–ta komponenta prethodne jednakosti

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda_{\max} w_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

te kada je pomnožimo s w_i^{-1} i zatim sumiramo po svim indeksima $i = 1, \ldots, n$, dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\max} \frac{w_i}{w_i} = n\lambda_{\max}.$$

Primijetimo da izraz s lijeve strane možemo raspisati na sljedeći način:

$$n\lambda_{\max} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + n,$$

što daje

$$
\begin{aligned}
n(\lambda_{\max} - 1) &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ji}\frac{w_i}{w_j} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i} + a_{ji}\frac{w_i}{w_j} \right).
\end{aligned} \tag{6.23}
$$

Uvedemo li oznaku

$$x = a_{ij}\frac{w_j}{w_i},$$

gdje je $x > 0$ jer se radi o pozitivnoj recipročnoj matrici A, zbog svojstva konzistentnosti matrice A zaključujemo

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a_{ij}}\frac{w_i}{w_j} = a_{ji}\frac{w_i}{w_j}$$

te izraz (6.23) možemo zapisati u obliku

$$n(\lambda_{\max} - 1) = \sum_{i<j}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sum_{i<j} f(x), \quad x > 0, \tag{6.24}$$

gdje je $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Uz pomoć diferencijalnog računa (vidi [17, Poglavlje 6.7]) lako je odrediti stacionarne točke funkcije f, odnosno $x_s = \pm 1$, no zbog uvjeta na domenu funkcije f imamo samo jednu stacionarnu točku $x_s = 1$ u kojoj funkcija f postiže minimum, tj.

$$f(x) \geq f(1) = 2, \qquad \text{za sve } x > 0. \tag{6.25}$$

Kombinacijom (6.24) i (6.25) dolazimo do ocjene

$$n(\lambda_{\max} - 1) \geq \sum_{i<j} 2 = 2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1), \tag{6.26}$$

što nakon sređivanja postaje $\lambda_{\max} \geq n$. Ako je $\lambda_{\max} = n$, onda u (6.26) vrijedi jednakost, što vodi i na jednakost u (6.25), odnosno

$$1 = x = a_{ij}\frac{w_j}{w_i} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{ij} = \frac{w_i}{w_j},$$

što znači da je matrica A konzistentna (vidi Teorem 6.5.). ∎

Istaknimo

Iz dokaza prethodnog teorema možemo uočiti da za maksimalnu (po modulu) svojstvenu vrijednost pozitivne recipročne matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uvijek vrijedi

$$\lambda_{\max} \geq n,$$

dok je jednakost zadovoljena ako i samo ako je matrica i konzistentna.

6.2.1. Uspoređivanje po parovima

Pojam **uspoređivanja po parovima** ključan je za višekriterijsko odlučivanje pomoću hijerarhija. Naime, željene prioritete, o kojima će biti više riječi u Poglavlju 6.3., dobit ćemo upravo uz pomoć uspoređivanja po parovima koji će biti zapisani u pozitivnu recipročnu matricu A, pri čemu će a_{ij} predstavljati prosudbu o *odnosu prioriteta* elemenata i i j, dok iskazani prioriteti mogu predstavljati važnost, preferencije (kažemo još i preference ili sklonost) ili vjerodostojnost, ovisno o tome koji se aspekti odluke razmatraju prilikom rješavanja problema odlučivanja. U tu svrhu, bitno je definirati sljedeće:

6.11. Definicija

Neka su a_i i a_j alternative koje želimo usporediti u odnosu na kriterij c_k. Tada postoje sljedeće mogućnosti:

- donositelj odluke je **indiferentan**, tj. alternative a_i i a_j su jednako preferirane u odnosu na kriterij c_k;
- donositelj odluke **preferira** alternativu a_i pred a_j u odnosu na kriterij c_k;
- donositelj odluke **preferira** alternativu a_j pred a_i u odnosu na kriterij c_k.

Dodatno, nije dovoljno reći koju alternativu preferiramo nego je potrebno odrediti i **težinu preference**. Saaty je predložio sljedeće vrste preferencija s obzirom na težinu: slaba, jaka, vrlo jaka i apsolutna prednost.
Preferencama pridružujemo odgovarajuću skalu (numeričku reprezentaciju) koristeći sljedeće oznake: u usporedbi alternativa a_i i a_j u odnosu na kriterij c_k, pridružujemo broj $a_{ij}^{(c_k)}$ ili samo a_{ij} ako je iz konteksta jasno o kojem kriteriju c_k je riječ.

U nastavku navodimo **fundamentalnu skalu** vrijednosti koja predstavlja intenzitet prosudbi te uz pomoću koje zapisujemo preferencije koje predstavljaju vrijednosti matrice usporedbi, a punim je nazivom zovemo **fundamentalna skala apsolutnih brojeva** (vidi [73, str. 3, Tablica 1]).

Intenzitet važnosti	Definicija	Objašnjenje
1	ako su a_i i a_j **jednako preferirane**	dvije alternative jednako doprinose s obzirom na kriterij
3	ako alternativa a_i ima **slabu prednost** pred a_j	iskustvo i prosudba blago favoriziraju jednu alternativu pred drugom
5	ako alternativa a_i ima **jaku prednost** pred a_j	iskustvo i prosudba jako favoriziraju jednu alternativu pred drugom
7	ako alternativa a_i ima **vrlo jaku prednost** pred a_j	jedna je alternativa vrlo jako favorizirana u odnosu na drugu; dominantnost je vidljiva u praksi
9	ako alternativa a_i ima **apsolutnu prednost** pred a_j	favoriziranje jedne alternative u odnosu na drugu je na najvećoj mogućoj razini

Tablica 53. Fundamentalna skala

Iz prethodne skale možemo primijetiti da nije zadana skala koja *mjeri* prednost a_j nad a_i, no taj je dio skale jednoznačno određen na temelju danih vrijednosti, što ćemo opravdati u nastavku.

Istaknimo

Bez obzira na odabranu skalu, uspoređivanje po parovima mora zadovoljavati dva osnovna principa:

- **Recipročnost**: Donositelj odluke mora biti u stanju uspoređivati alternative i iskazati snagu svojih prioriteta. Jačina tih prioriteta mora zadovoljavati uvjet

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}.$$

- **Homogenost**: Prioriteti su predstavljeni ograničenom skalom te ako je donositelju odluke potrebna dodatna preciznost u izražavanju, možemo uvesti i međuvrijednosti $2, 4, 6, 8$ elemenata a_{ij}, što nas vodi na ideju o proširenju fundamentalne skale.

Dakle, Tablica 53 može se proširiti na sljedeći način (vidi npr. [60, str. 8], [69, str. 86], [73, str. 3, Tablica 1]):

Intenzitet važnosti	Definicija
1	ako su a_i i a_j **jednako preferirane**
2	ako alternativa a_i ima **jednaku do slabu prednost** pred a_j
3	ako alternativa a_i ima **slabu prednost** pred a_j
4	ako alternativa a_i ima **slabu do jaku prednost** pred a_j
5	ako alternativa a_i ima **jaku prednost** pred a_j
6	ako alternativa a_i ima **jaku do vrlo jaku prednost** pred a_j
7	ako alternativa a_i ima **vrlo jaku prednost** pred a_j
8	ako alternativa a_i ima **vrlo jaku do apsolutnu prednost** pred a_j
9	ako alternativa a_i ima **apsolutnu prednost** pred a_j

Tablica 54. Proširena fundamentalna skala

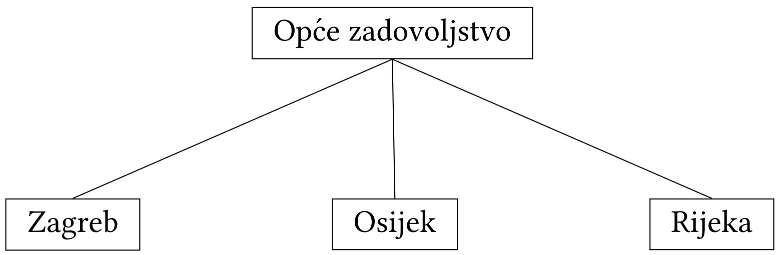
Kao što smo naveli, donositelj odluke, prema Saatyju, svoje preference može zapisati pomoću ograničene skale s numeričkim vrijednostima 1–9. Iako je ta skala u velikoj mjeri prihvaćena i zastupljena u literaturi, pojedini autori predložili su i druge numeričke skale [22, str. 166] koje navodimo u Tablici 55, pri čemu *matematički opis* predstavlja veze među alternativama:

Tip skale	Matematički opis	Parametri	Aproksimativne vrijednosti skale
Linearna (Saaty, 1997.)	x	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
Kvadratna (Harker, Vargas, 1987.)	x^2	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81
Kvadratni korijen (Harker, Vargas, 1987.)	$\sqrt{x}$	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	1; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 2; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; 3
Geometrijska (Lootsma, 1989.)	2^{x-1}	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256
Inverzna linearna (Ma, Zheng, 1991.)	$\dfrac{9}{10-x}$	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	1; 1.13; 1.29; 1.5; 1.8; 2.25; 3; 4.5; 9
Asimptotska (Dodd, Donegan, 1995.)	$\tanh^{-1}\left(\dfrac{x-1}{3^{-1/2} \cdot 14}\right)$	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	0; 0.12; 0.24; 0.36; 0.46; 0.55; 0.63; 0.7; 0.76
Balansirana (Sal Hamalainen, 1997.)	$\dfrac{w}{1-w}$	$w = \{0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 9\}$	1; 1.22; 1.5; 1.86; 2.33; 3; 4; 5.67; 9
Logaritamska (Ishizaka, Balkenborg, Kaplan, 2010.)	$\log_2(x+1)$	$x = \{1, 2, \ldots, 9\}$	1; 1.58; 2; 2.32; 2.58; 2.81; 3; 3.17; 3.32

Tablica 55. Numeričke skale korištene u AHP metodi

Pogledajmo sada ilustraciju novouvedenih pojmova te proširene fundamentalne skale.

6.12. PRIMJER. Marija je maturantica i razmišlja u kojem gradu upisati studij. Ona bira između Zagreba, Osijeka i Rijeke, u odnosu na kriterij opće zadovoljstvo. S obzirom na Marijine



Slika 4. Problem odabira mjesta studiranja

preferencije, Zagreb ima vrlo jaku prednost nad Osijekom te apsolutnu prednost pred Rijekom, a Osijek ima slabu prednost u odnosu na Rijeku. Napravimo matricu usporedbi.

Rješenje. Iz fundamentalne skale (vidi Tablicu 53), svojstva recipročnosti koje mora zadovoljavati matrica usporedbi i podataka poznatih iz danog primjera, dobivamo pripadnu matricu usporedbi

$$A = \begin{array}{c} \\ \mathrm{ZG} \\ \mathrm{OS} \\ \mathrm{RI} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{ZG} & \mathrm{OS} & \mathrm{RI} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1/7 & 1 & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Uočimo da je bilo dovoljno

$$\binom{3}{2} = 3$$

usporedbe kako bismo popunili cijelu matricu, pri čemu je očito $n = 3$ broj alternativa.

Nadalje, možemo uočiti da je A pozitivna recipročna matrica, ali nije konzistentna; na primjer

$$a_{12} \cdot a_{23} = 7 \cdot 3 = 21 \neq a_{13} = 9.$$

Uvjerimo se u nastavku da je, prema Teoremu 6.10., zaista $\lambda_{\max} \geq 3$.

U tu svrhu, prisjetimo se da su svojstvene vrijednosti matrice nultočke karakterističnog polinoma, odnosno dobivamo ih kao rješenje jednadžbe

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & 9 \\ 1/7 & 1-\lambda & 3 \\ 1/9 & 1/3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{16}{21} = 0.$$

U nastavku ćemo, radi ilustracije, pokazati kako možemo pronaći nultočke polinoma 3. stupnja, dok ćemo numeričku proceduru dati naknadno u okviru metode potencija. Prethodnu jednadžbu nije jednostavno riješiti s obzirom da nisu svi njezini koeficijenti cijeli brojevi; naime, poznato je da ako su svi koeficijenti algebarske jednadžbe cijeli brojevi, α korijen te jednadžbe i $\alpha \neq 0$ cijeli broj, onda je α djelitelj njezinog slobodnog člana. Ipak, rješenje možemo dobiti, npr., uz pomoć takozvane Cardanove formule za jednadžbe trećeg stupnja (pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je ona normirana)

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

na način da uz uvedenu supstituciju $x = y - \frac{a}{3}$ ona poprima oblik

$$y^3 + py + q = 0,$$

gdje je $p = b - \frac{1}{3}a^2$ i $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$; može se pokazati da su rješenja prethodne jednadžbe dana formulom

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

koja se naziva *Cardanova formula*; dodatni uvjet

$$3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + p = 0$$

koji mora biti zadovoljen garantira da iz Cardanove formule dobivamo tri rješenja; dana je formula ponekad komplicirana za računanje te se u literaturi može naći i njezina modifikacija (za više detalja vidi npr. [48, 86]).

Našu jednadžbu $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \frac{16}{21} = 0$ lako možemo zapisati u normiranom obliku

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{16}{21} = 0,$$

pa uz supstituciju $\lambda = y + 1$ ona prelazi u oblik

$$y^3 - 3y - \frac{58}{21} = 0;$$

uvrštavanjem u Cardanovu formulu dobivamo

$$y = \sqrt[3]{\frac{29}{21} + \sqrt{\left(\frac{29}{21}\right)^2 - 1}} + \sqrt[3]{\frac{29}{21} - \sqrt{\left(\frac{29}{21}\right)^2 - 1}}$$

iz čega (koristeći kalkulator) dobivamo rješenja $y_1 = 2.0803$, $y_{2,3} = -1.04 \pm 0.496i$, odnosno $\lambda_1 = 3.0803$ i $\lambda_{2,3} = -0.04 \pm 0.496i$, pri čemu je $|\lambda_{2,3}| = 0.498$ te je zaista

$$\lambda_{\max} = 3.0803 > n = 3.$$

Danu smo jednadžbu, umjesto uz pomoć Cardanove formule, mogli riješiti u nekom od paketa numeričke matematike. □

6.13. Primjer. Promotrimo pozitivnu recipročnu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & x \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/x & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

te odredimo vrijednost varijable x tako da ona bude konzistentna.

Rješenje. Kako bi dana matrica bila konzistentna, prema definiciji mora vrijediti

$$a_{12} \cdot a_{23} = 3 \cdot \frac{1}{5} = x = a_{13},$$

što daje vrijednost $x = \frac{3}{5}$. Dakle, polazna je matrica oblika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3/5 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 5/3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da ni $x = 3/5$ ni $1/x = 5/3$ nisu elementi fundamentalne skale. Drugim riječima, možemo zaključiti da, koristeći čak i proširenu fundamentalnu skalu, odnosno Tablicu 54, često nije moguće postići konzistentnost.

Nadalje, lako je odrediti svojstvene vrijednosti matrice A. Rješavanjem jednadžbe

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3/5 \\ 1/3 & 1-\lambda & 1/5 \\ 5/3 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$$

dobivamo $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 0$ te je zaista (vidi Teorem 6.10.)

$$\lambda_{\max} = 3 = n.$$

□

6.2.2. Indikatori konzistentnosti

Kako bismo bolje razumjeli pojam konzistentnosti, promotrimo sljedeća dva primjera.

6.14. PRIMJER. Marko više voli banane (B) nego jabuke (J), a također više voli jabuke nego trešnje (T). Branka je pitala Marka preferira li onda više banane od trešanja i on je rekao: *Da!*.
Dakle, kako je iz prethodnog

$$B > J \quad \text{i} \quad J > T \quad \text{te} \quad B > T,$$

mogli bismo zaključiti da je Markova prosudba konzistentna.

Da je Marko kojim slučajem odgovorio kako više voli trešnje od banana $(T > B)$, onda njegova odluka ne bi bila konzistentna. □

Problemi se javljaju zbog toga što naše procjene često nisu konzistentne. Naime, iz prethodnog primjera mogli bismo naslutiti da je tranzitivnost nužan uvjet za konzistentnost. Pokažimo da je zaista tako (vidi, na primjer, [60]). Promotrimo pozitivnu recipročnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je

$$a_{ij} \geq 1, \quad \text{za sve} \quad i \leq j\,.$$

Dakle, za $i \leq j$ je $a_{ij} \geq 1$ i za $j \leq k$ je $a_{jk} \geq 1$ te prema definiciji konzistentnosti (vidi Definiciju 6.4.) slijedi da je

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \geq 1$$

te je očito i $i \leq k$, iz čega dolazimo do željene tvrdnje.

Iako se može pokazati da tranzitivnost nije i dovoljan uvjet za konzistentnost, to se ne kosi s principima AHP metode jer ona ne zahtijeva da prosudbe budu konzistentne pa čak ni tranzitivne [60, 70].

Promotrimo i sljedeći primjer:

6.15. PRIMJER. Ako Dunja preferira bicikl kao prijevozno sredstvo trostruko više od automobila, a automobil preferira dvostruko više od autobusa, koliko ona preferira bicikl u odnosu na autobus?

Rješenje. Ako želimo biti potpuno matematički konzistentni, odgovor bi trebao biti da Dunja preferira bicikl šesterostruko u odnosu na autobus. □

Zaključak donesen u prethodnom primjeru nije uvijek moguće postići, što zbog samog misaonog procesa prilikom usporedbe postojećih alternativa, što zbog same fundamentalne skale koja ne garantira konzistentnost (vidi Primjer 6.12.).

Na sreću donositelja odluke, doza **nekonzistentnosti** (kažemo još i **inkonzistentnosti**, **nedosljednosti**) dozvoljena je i očekivana u AHP metodi. Naime, budući da su numeričke vrijednosti izvedene iz subjektivnih preferencija pojedinaca, teško je izbjeći neke nedosljednosti u konačnoj matrici usporedbi.

Prirodno pitanje je u kojoj je mjeri nedosljednost prihvatljiva. U tu svrhu, većina metoda daje neki način mjerenja **(in)konzistentnosti**, pri čemu se interpretacija te mjere ostavlja na slobodu samoj metodi, no mora vrijediti sljedeći uvjet:

Istaknimo

Inkonzistentnost je jednaka nuli ako i samo ako je matrica usporedbi konzistentna.

Ipak, mjeru inkonzistentnosti precizno je definirati na sljedeći način:

6.16. Definicija
Mjera inkonzistentnosti matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, s najvećom (po modulu) svojstvenom vrijednosti $\lambda_{\max}$, definira se kao razlika

$$\lambda_{\max} - n.$$

Uočimo da je mjera inkonzistentnosti $\lambda_{\max} - n = 0$ ako i samo ako je matrica konzistentna.

Također, možemo uočiti da što je $\lambda_{\max}$ bliža dimenziji matrici n, kažemo da je prosudba **konzistentnija**.

Istaknimo

Razliku $\lambda_{\max} - n$ možemo shvatiti kao mjeru odstupanja recipročne matrice od konzistentnosti.

Kako bi odgovorio na pitanje o *dopustivoj mjeri nekonzistentnosti*, Saaty je definirao nešto drugačiju mjeru od prethodne, koja se često koristi u praksi, a naziva se **omjer konzistentnosti**.

Naime, AHP metoda izračunava omjer konzistentnosti (CR) uspoređujući takozvani indeks konzistentnosti (CI) promatrane matrice usporedbi s prosječnim indeksom konzistentnosti (RI), kao što ćemo opisati u nastavku.

6.17. Definicija
Indeks konzistentnosti (engl. *consistency index*), u oznaci CI, matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, s najvećom (po modulu) svojstvenom vrijednosti $\lambda_{\max}$, definira se kao omjer

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}. \tag{6.27}$$

Prosječni indeks konzistentnosti (engl. *random consistency index*), u oznaci RI, izračunao je Ernest H. Forman [21] za dimenzije matrice $n \le 7$ na način da je slučajnim odabirom generirao velik broj matrica usporedbi, preciznije pozitivnih recipročnih matrica reda $n \ge 3$ koristeći fundamentalnu skalu te je zatim računao aritmetičku sredinu njihovih najvećih svojstvenih vrijednosti. Na isti je način RI moguće izračunati i za matrice dimenzije $n > 7$ [60].

U literaturi postoji nekoliko tablica u kojima su, do na razliku u decimalama, dane vrijednosti prosječnih indeksa konzistentnosti, no u upotrebi je u velikoj mjeri zastupljena sljedeća tablica (vidi [62, 99]):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Tablica 56. Formanova tablica vrijednosti RI

Iz Tablice 56 možemo iščitati da je $RI = 0$, za $n = 1, 2$. Naime, pozitivna recipročna matrica dimenzije 1 je trivijalno konzistentna te je stoga i indeks konzistentnosti $CI = 0$.

Također vrijedi i sljedeća bitna tvrdnja:

6.18. Teorem
Svaka pozitivna recipročna matrica $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je konzistentna.

Dokaz. Neka je A proizvoljna pozitivna recipročna matrica reda 2. Tada je A oblika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1/x & 1 \end{bmatrix}, \qquad x > 0$$

te je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & x \\ 1/x & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - x \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

Iz prethodne jednadžbe dobivamo da su svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$, odnosno

$$\lambda_{\max} = n = 2,$$

što znači da je A konzistentna matrica (vidi Teorem 6.10.). ∎

Napokon, Saaty promatra *omjer konzistentnosti* (engl. *consistency ratio*), u oznaci CR.

6.19. DEFINICIJA
Omjer konzistentnosti definira se kao kvocijent

$$CR = \frac{CI}{RI}. \tag{6.28}$$

Jasno je da, ako je osoba dosljedna, onda bi promatrani omjer konzistentnosti trebao biti manji nego što bismo dobili u slučaju kada su u matricu usporedbi uneseni podaci doneseni nasumičnim odabirom preferencija pojedinaca. Saaty tvrdi da bi prihvatljiv omjer konzistentnosti trebao biti manji od 0.1, premda se prema mnogim autorima i omjer konzistentnosti manji od 0.2 smatra prihvatljivim [99].

Istaknimo

- Prema Saatyju, podatke ćemo smatrati konzistentnima ako je $CR < 0.1$. Stoga, ako je $CR < 0.1$ kažemo još da su podaci (Saaty) konzistentni.
- Nekonzistentnost može biti znak da treba prilagoditi prosudbe. No, prilagodbe ne bi smjele biti toliko velike da sama prosudba gubi smisao, ali ni premale da nemaju učinka.

6.20. PRIMJER. Odredimo indeks konzistentnosti i omjer konzistentnosti za matricu A iz Primjera 6.12.

Rješenje. U Primjeru 6.12. već smo odredili $\lambda_{\max} = 3.08$ te je prema formulama (6.27) i (6.28) indeks konzistentnosti

$$CI = \frac{3.08 - 3}{3 - 1} = 0.04,$$

a omjer konzistentnosti

$$CR = \frac{0.04}{0.58} = 0.069 < 0.1$$

te naše podatke smatramo konzistentnima. □

6.3. Izračun prioriteta: Saatijeva metoda svojstvenog vektora

Kao što smo već spomenuli, u procesu zaključivanja kod AHP metode javlja se matrica usporedbi po parovima koja je pozitivna i recipročna. Bitno je istaknuti da ako imamo n alternativa, uz pretpostavke pozitivnosti i recipročnosti promatrane matrice usporedbi, koja je tada tipa $n \times n$, trebamo točno $\binom{n}{2}$ usporedbi.

6.21. Primjer. Ukoliko promotrimo matricu

$$A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & & \bullet \end{bmatrix},$$

gdje je $n = 4$, možemo primijetiti da je broj usporedbi, prilikom uspoređivanja po parovima, jednak

$$\binom{n}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6,$$

koliko *kružića* • imamo na mjestima čiji podaci su zadani. □

Bitno je istaknuti i da rezultat uspoređivanja i–te alternative a_i s j–tom alternativom a_j izražavamo pozitivnim brojem a_{ij} koji iskazuje preferenciju jedne od alternativa, kao što je već opisano u Poglavlju 6.2.1.
Na primjer, ako je u matrici A element $a_{ij} = 5$, to znači da i–ta alternativa a_i ima jaku prednost pred j–tom alternativom a_j (vidi skalu prikazanu u Tablici 54).

AHP metoda procjenjuje vektor prioriteta promatranih faktora oslanjajući se na matricu usporedbi. Određivanje takvog vektora bazira se na takozvanoj *Saatijevoj metodi svojstvenog vektora* [82, str. 404].

Već smo ponovili da se određivanje svojstvenih vrijednosti matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ svodi na traženje nultočki (svojstvenog) polinoma n–tog reda

$$k_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I\right),$$

a one, općenito, mogu biti i realne i kompleksne (u tom slučaju dolaze u kompleksno konjugiranim parovima), što smo mogli i vidjeti na Primjeru 6.12. Sa stajališta AHP metode zanimaju nas upravo realna rješenja te koji su uvjeti njihove egzistencije [46, str. 40], a kao odgovor na to pitanje nameće se Perron–Frobeniusov teorem koji navodimo u nastavku.

6.22. Teorem (Perron–Frobeniusov teorem)
Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = (a_{ij})$, pozitivna matrica. Tada A ima svojstvenu vrijednost $\lambda_{\max} > 0$ koja zadovoljava i

$$\lambda_{\max} > |\lambda_k|, \quad \textit{za sve} \quad k \neq \max\,.$$

Nadalje, postoji jedinstveni svojstveni vektor $w' = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_{\max}$ te za njega vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\; w_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Vidi [35]. ∎

Lako uočavamo da matrica usporedbi alternativa zadovoljava pretpostavke Teorema 6.22. iz čega slijedi da je svojstveni vektor w pridružen najvećoj svojstvenoj vrijednosti takve matrice pozitivan. Dakle, iz prethodnog razmatranja zaključujemo da je vektor težina matrice usporedbi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rješenje sustava

$$\begin{cases} Aw = \lambda_{\max} w \\ w^T I_{1\times n} = 1 \end{cases}, \tag{6.29}$$

pri čemu je $I_{1\times n} = [1 \;\dots\; 1]^T$.

U kontekstu AHP metode **vektor težina** nazivamo i **vektor težina kriterija**, **vektor prioriteta** ili čak **Perron–Frobeniusov vektor** [82].

Jasno je da ponekad nije jednostavno naći rješenje sustava (6.29) jer se ono često odnosi na rješavanje algebarske jednadžbe višeg reda. S druge strane, tom problemu prethodi određivanje svojstvenih vrijednosti, što također povlači određene komplikacije za matrice višeg reda, kao što tvrdi sljedeći teorem (vidi [92, str. 124]):

6.23. Teorem (Abel, 1824)
Za svaki $n \geq 5$ postoji polinom p stupnja n s racionalnim koeficijentima koji ima realnu nultočku koja se ne može izraziti koristeći samo racionalne brojeve, zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i vađenje n–tog korijena.

Naime, iz prethodnog je teorema očito da svaki algoritam za određivanje svojstvenih vrijednosti matrice reda $n \geq 5$ mora biti iterativan, budući da će se rješenje, bilo ono izračunato uz pomoć *olovke i papira* ili pomoću računala, temeljiti na operacijama spomenutim u teoremu te stoga, u tim slučajevima, nije moguće naći algoritam koji će izračunati svojstvene vrijednosti u konačno mnogo koraka.

Budući da Saatyjeva metoda svojstvenog vektora zahtijeva samo svojstveni vektor koji pripada najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice usporedbi, najčešće se u tu svrhu koristi **metoda potencija**, koja pretpostavlja da je matrica s kojom radimo dijagonalizibilna, drugim riječima, da se može dijagonalizirati te da je najveća svojstvena vrijednost jedinstvena o čemu će biti riječi u sljedećem poglavlju (vidi Poglavlje 6.4.). Specijalno, bitno je naglasiti da su i simetrične, antisimetrične te unitarne matrice dijagonalizibilne. Više o metodi potencija zainteresirani čitatelj može pogledati u [26, 60, 84, 89, 92].

6.4. Metoda potencija

I ovdje ćemo, zbog jednostavnosti i za potrebe naših primjera, pretpostaviti da je matrica A koju promatramo realna. Materija iz ovog poglavlja preuzeta je, gotovo u potpunosti, iz [84], što su materijali s kojima su se studenti 1. godine diplomskog studija Odjela za matematiku, smjera *Matematika i računarstvo* već upoznali na kolegiju *Primijenjena linearna algebra i znanstveno računarstvo.*

Pretpostavimo, zatim, dodatno da je matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dijagonalna, odnosno

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

uz uvjet da za svojstvene vrijednosti matrice A vrijedi

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Kako je

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

gdje je S regularna matrica čiji su stupci svojstveni vektori matrice A, a Λ matrica koja na dijagonali ima pripadne svojstvene vrijednosti (sjetimo se Teorema 6.8.)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

lako je uočiti da su, s obzirom na dijagonalnu formu matrice, njezini svojstveni vektori zapravo vektori e_i, $i = 1, \dots, n$, tj. svi vektori kanonske baze.

Uz pretpostavku da je zadan polazni vektor x_0,

$$x_0 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

pri čemu zahtijevamo da je $\xi_1 \neq 0$, pogledajmo što možemo zaključiti o normiranim vektorima (kako ne bismo imali problem s *velikim* vrijednostima, vektor ćemo uvijek normirati)

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} .$$

Naime, kako bismo opravdali naziv *Metoda potencija* promotrit ćemo kako neka potencija matrice A djeluje na proizvoljan vektor x_0.
Iz dijagonalne forme matrice A zaključujemo da je

$$A^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$$

te je očito

$$A^k x_0 = A^k \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^k \xi_1 \\ \lambda_2^k \xi_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^k \xi_n \end{bmatrix} = \lambda_1^k \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \frac{\xi_2}{\xi_1} \\ \vdots \\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \frac{\xi_n}{\xi_1} \end{bmatrix} .$$

Po pretpostavci da je svojstvena vrijednosti λ_1 jedinstvena najveća po apsolutnoj vrijednosti, iz prethodnog zaključujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \frac{\xi_i}{\xi_1} = 0, \quad \textit{za sve} \quad i = 2, \ldots, n .$$

Drugim riječima,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} = e_1,$$

što znači da $A^k x_0$ konvergira prema svojstvenom vektoru koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_1.

Pogledajmo u nastavku **općeniti slučaj**, odnosno umjesto pretpostavke da je A dijagonalna, pretpostavimo da se A može dijagonalizirati, odnosno da vrijedi

$$A = S \Lambda S^{-1}, \tag{6.31}$$

pri čemu stupci matrice S (označimo ih sa $s_1,\ s_2\ \ldots, s_n$) predstavljaju svojstvene vektore od A, a elementi od Λ pripadne su svojstvene vrijednosti poredane kao prije, tj.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|;$$

dakle,

$$A\left[s_1\, s_2\, \ldots\, s_n\right] = \left[s_1\, s_2\, \ldots\, s_n\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

tj. $As_i = \lambda_i s_i$, $i = 1, \ldots n$ što je i jasno iz forme 6.31.
U nastavku ćemo ponovno promotriti iterativni postupak u kojem promatramo potencije matrice A te kako one djeluju na neki proizvoljni vektor x_0 te ćemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su stupci matrice S **normirani**.
Pretpostavimo da smo izabrali

$$x_0 = Sy, \quad \text{gdje je} \quad y = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \xi_1 \neq 0;$$

napomenimo da pretpostavku $\xi_1 \neq 0$ u praksi možemo lako zadovoljiti; također, primijetimo da je matrica S regularna te stoga Sy ne umanjuje proizvoljnost od y, tj. za svaki y možemo pronaći S tako da je $x_0 = Sy$.
Tada je

$$x_0 = Ix_0 = (SS^{-1})x_0 = S(S^{-1}x_0) = S\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti (6.31) zaključujemo da je

$$A^k = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^k S^{-1}$$

te promotrimo što se događa s potencijama matrice A, tj. ponovimo isti postupak kao u prethodnom slučaju kada smo imali dijagonalnu matricu:

$$A^k x_0 = (S\Lambda^k S^{-1})S\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} \lambda_1^k \xi_1 \\ \lambda_2^k \xi_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^k \xi_n \end{bmatrix} = \lambda_1^k \xi_1 S \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \frac{\xi_2}{\xi_1} \\ \vdots \\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \frac{\xi_n}{\xi_1} \end{bmatrix}$$

te opet zaključujemo da će posljednji vektor konvergirati prema e_1, odnosno

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} = Se_1 = s_1,$$

jer je

$$Se_1 = \left[s_1\, s_2\, \ldots\, s_n\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = s_1\,.$$

Iz prethodnog zaključujemo da potencije ponovno konvergiraju prema svojstvenom vektoru koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_1.

Dakle, metodom potencija uspjeli smo izračunati svojstveni vektor koji pripada jedinstvenoj, po apsolutnoj vrijednosti najvećoj svojstvenoj vrijednosti matrice A. Nadalje, kao što je prije opisano, ukoliko je svojstveni polinom stupnja manjeg od 5, svojstvene vrijednosti (pa tako i najveću po apsolutnoj vrijednosti λ_1) pronaći ćemo kao nultočke svojstvenog polinoma, dok u suprotnom λ_1 nalazimo kao rješenje jednadžbe

$$As_1 = \lambda_1 s_1,$$

jer, budući da je s_1 normiran, množenjem prethodne jednakosti slijeva sa s_1^T dobivamo

$$s_1^T A s_1 = \lambda_1 s_1^T s_1 = \lambda_1 \|s_1\|_2^2 = \lambda_1.$$

Istaknimo:

nekoliko osobina metode potencija:

- prethodna analiza neće *raditi* ako je najveća (po apsolutnoj vrijednosti) svojstvena vrijednost promatrane matrice kompleksna; naime, tada ona ima svoj kompleksno–konjugirani par

$$\lambda_1 = a + \mathrm{i}b, \quad \lambda_2 = a - \mathrm{i}b$$

  te je

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| > \cdots,$$

  odnosno ne možemo provesti prethodno opisan postupak;

- brzina konvergencije ovisi o omjeru λ_2/λ_1 te je sporija što je taj omjer veći; dakle, ako je

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \simeq 1,$$

  onda će metoda biti spora;

- metoda uvijek konvergira samo prema (po apsolutnoj vrijednosti) najvećoj svojstvenoj vrijednosti (što upravo odgovara teoriji koja stoji iza AHP metode te to u našem slučaju ne uzimamo kao problem).

Dodatno

Istaknimo, također, da bismo korištenjem realnog pomaka σ (engl. *shift*) za matricu A mogli dobiti samo još po apsolutnoj vrijednosti najmanju svojstvenu vrijednost, ali ne i one između, jer naime, svojstvene vrijednosti matrice $A-\sigma I$ su upravo $\lambda_i-\sigma$.

Sada smo spremni navesti algoritam *metode potencija* za matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ koja nije nužno simetrična te ćemo njega koristiti prilikom određivanja vektora težina za matrice usporedbi koje će nam biti od interesa.

Algoritam: Metoda potencija

ulaz: matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, početni vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i dana tolerancija ε
izlaz: aproksimacija svojstvenog para (λ, x)
$y = x_0$;
$\lambda = \langle y, x_0 \rangle = y^T x_0$;
converged=false
while *not converged* **do**
  $x = y / \|y\|_2$;
  $y = Ax$;
  $\lambda = \langle x, y \rangle$;
  converged $= (\|y - \lambda x\|_2 < \varepsilon)$
end

6.24. NAPOMENA
Primijetimo da prethodni algoritam kao rezultat daje aproksimaciju svojstvenog para (λ, x), pri čemu je vektor x k−ta aproksimacija svojstvenog vektora, dok vektor y, također dobiven u prethodnom algoritmu, predstavlja $(k+1)$−vu aproksimaciju.

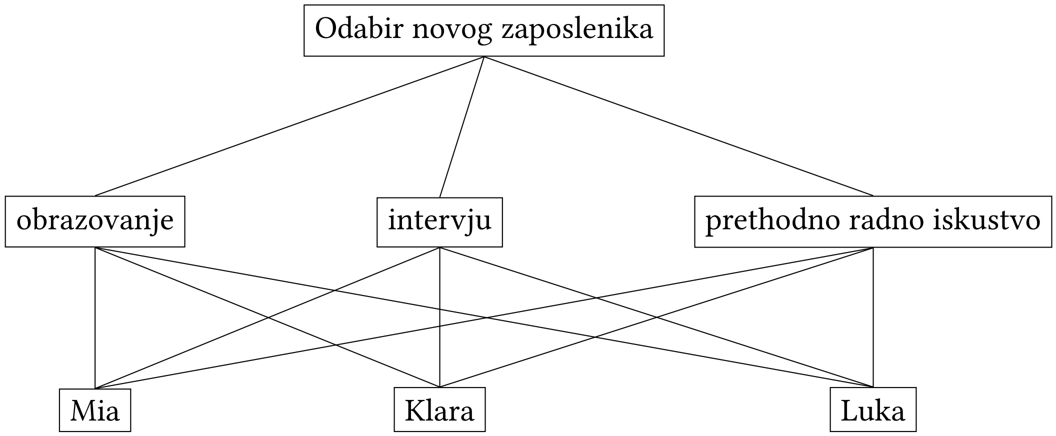
6.4.1. Implementacija AHP metode uz pomoć *Metode potencija*

U ovom poglavlju ilustrirat ćemo, kroz nekoliko primjera, AHP metodu uz pomoć *Metode potencija*, koju je lako implementirati u nekom od paketa numeričke matematike poput C–a, Python–a itd.

Prvi dio sljedećeg primjera riješit ćemo korak–po–korak, promatrajući svaku pojedinu iteraciju, kako bismo se bolje upoznali s prethodno navedenim algoritmom *Metode potencija*, dok ćemo nadalje rješenja pronaći uz pomoć implementacije u nekom od lako dostupnih programa.

6.25. Primjer. Jedna poslovna banka raspisala je natječaj za posao. S obzirom na iskustva i stavove donositelja odluke, kriteriji prema kojima će vrednovati kandidate su sljedeći: *obrazovanje i dodatne kvalifikacije*, *intervju* te *duljina prethodnog radnog iskustva*. Pri tome, obrazovanje i dodatne kvalifikacije imaju jaku prednost nad intervjuom te vrlo jaku prednost nad duljinom radnog iskustva, a intervju ima slabu prednost nad duljinom radnog iskustva. Za posao se prijavilo tri kandidata: *Mia*, *Klara* i *Luka* te su nakon svih prikupljenih podataka i razgovora za posao donositelji odluke donijeli određene zaključke koje navodimo u nastavku.
S obzirom na obrazovanje i dodatne kvalifikacije: Mia je završila studij Financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku te ima položen tečaj programiranja, što je dodatna prednost jer bi na tom poslu trebala i programirati. Klara je također završila studij Financijske matematike i statistike te govori tri strana jezika, što bi banci moglo biti korisno jer imaju međunarodne klijente. Luka je završio preddiplomski studij Matematike i preddiplomski studij Ekonomije. Donositelji odluke donijeli su sljedeće zaključke: Mia ima jaku prednost pred Klarom i apsolutnu prednost pred Lukom, dok Klara ima slabu do jaku prednost pred Lukom.
S obzirom na intervju: Mia je imala tremu pa nije ostavila najbolji dojam, Klara se pokazala iznimno proaktivnom i spremnom na daljnje učenje i obrazovanje, dok je Luka pokazao kako ima ideje kojima može poboljšati profitabilnost firme. S obzirom na prethodno, donositelji odluke odlučili su da Klara ima vrlo jaku do apsolutnu prednost nad Miom te slabu do jaku prednost nad Lukom, a Luka ima vrlo jaku prednost nad Miom.
S obzirom na duljinu prethodnog radnog iskustva: Mia je odradila stručnu praksu u jednoj firmi za vrijeme studija, koja je trajala mjesec dana, Klara je pola godine radila u jednoj firmi, dok je Luka radio godinu i pol.
Uz pomoć *Metode potencija* odgovorite za kojeg kandidata se banka treba odlučiti. Pri tome, neka je zadana tolerancija $\varepsilon = 0.1$. Također, odgovorite jesu li u banci konzistentni pri uspoređivanju kriterija.

Rješenje. Na Slici 5 prikazana je struktura hijerarhije odlučivanja.



Slika 5. Dekompozicija problema iz Primjera 6.25. u hijerarhiju

Odredimo najprije najznačajniji kriterij:

Iz danih podataka i fundamentalne skale, odnosno Tablice 53, dobivamo sljedeću matricu usporedbi kriterija

$$A = \begin{array}{c} \\ \textit{obrazovanje} \\ \textit{intervju} \\ \textit{radno iskustvo} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{obrazovanje} & \textit{intervju} & \textit{radno iskustvo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

U nastavku ćemo, imajući na umu zadanu toleranciju $\varepsilon = 0.1$, pronaći aproksimaciju najveće svojstvene vrijednosti i pripadnog svojstvenog vektora *metodom potencija*:

1. iteracija

$$
\begin{aligned}
x_0 &= [1\ 1\ 1]^T \\
\varepsilon &= 0.1 \\
y &= x_0 \\
\lambda &= \langle y, x_0 \rangle = 3 \\
x &= \frac{y}{\|y\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix} \\
y &= Ax = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.501 \\ 2.423 \\ 0.852 \end{bmatrix} \\
\lambda &= \langle y, x \rangle = 6.218 \\
\|y - \lambda x\|_2 &= \|(3.913, -1.165, -2.736)\|_2 = 4.915 > 0.1,
\end{aligned}
$$

stoga pogledajmo i sljedeću iteraciju.

2. iteracija

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{y}{\|y\|_2} = \frac{1}{7.929} \begin{bmatrix} 7.501 \\ 2.423 \\ 0.852 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.946 \\ 0.306 \\ 0.107 \end{bmatrix} \\
y &= Ax = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.946 \\ 0.306 \\ 0.107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.225 \\ 0.816 \\ 0.344 \end{bmatrix} \\
\lambda &= \langle y, x \rangle = 3.337 \\
\|y - \lambda x\|_2 &= \|(0.068, -0.205, -0.013)\|_2 = 0.216 > 0.1
\end{aligned}
$$

te je potrebno promotriti i treću iteraciju.

3. iteracija

$$x = \frac{y}{\|y\|_2} = \frac{1}{3.344}\begin{bmatrix}3.225\\0.816\\0.344\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.964\\0.244\\0.103\end{bmatrix}$$

$$y = Ax = \begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ \frac{1}{5} & 1 & 3\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.964\\0.244\\0.103\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.905\\0.746\\0.322\end{bmatrix}$$

$$\lambda = \langle y, x\rangle = 3.016$$

$$\|y - \lambda x\|_2 = \|(-0.002, 0.01, 0.011)\|_2 = 0.015 < 0.1.$$

Zaključujemo da je aproksimacija svojstvenog vektora $[0.964\ 0.244\ 0.103]^T$, odnosno

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \mathit{obrazovanje} & \mathit{intervju} & \mathit{radno\ iskustvo}\end{array} \\ \begin{array}{r}\mathit{obrazovanje}\\ \mathit{intervju}\\ \mathit{radno\ iskustvo}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ \frac{1}{5} & 1 & 3\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}0.964\\0.244\\0.103\end{bmatrix},$$

iz čega možemo zaključiti da kriterij *obrazovanje i dodatne kvalifikacije* ima najveći prioritet.

Također, treba odgovoriti jesu li u banci konzistentni pri uspoređivanju kriterija. S obzirom na izračunatu svojstvenu vrijednost $\lambda_{\max} = 3.016$, dobivamo indeks konzistentnosti

$$CI = \frac{3.016 - 3}{3 - 1} = 0.008$$

i omjer konzistentnosti

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.008}{0.58} = 0.014 < 0.1$$

te možemo zaključiti da su podaci (Saaty) konzistentni.

Odredimo najznačajniju alternativu:

<u>S obzirom na obrazovanje i dodatne kvalifikacije</u>, matrica usporedbi je sljedeća:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \mathit{Mia} & \mathit{Klara} & \mathit{Luka}\end{array} \\ \begin{array}{r}\mathit{Mia}\\ \mathit{Klara}\\ \mathit{Luka}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 5 & 9\\ \frac{1}{5} & 1 & 4\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

Implementacijom algoritma *Metode potencija* u nekom od paketa numeričke matematike uz $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$ i zadanu točnosti $\varepsilon = 0.1$, nakon 4 iteracije pogreška je 0.014, dok su aproksimacije svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora

$$\lambda_{max} = 3.0157, \quad x = [0.966\ 0.247\ 0.079]^T,$$

odnosno

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Mia & Klara & Luka \end{array} \\ \begin{array}{c} Mia \\ Klara \\ Luka \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.966 \\ 0.247 \\ 0.079 \end{bmatrix},$$

iz čega zaključujemo da je Mia najbolji izbor s obzirom na obrazovanje i dodatne kvalifikacije.

S obzirom na intervju, matrica usporedbi dana je sa

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Mia & Klara & Luka \end{array} \\ \begin{array}{c} Mia \\ Klara \\ Luka \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} \\ 8 & 1 & 4 \\ 7 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

te uz iste ulazne podatke početnog vektora x_0 i tolerancije ε nakon 4 iteracije pogreška je 0.033 te dobivamo aproksimacije $\lambda_{max} = 3.04$ i $x = [0.068\ 0.938\ 0.34]^T$; sada prema

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Mia & Klara & Luka \end{array} \\ \begin{array}{c} Mia \\ Klara \\ Luka \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} \\ 8 & 1 & 4 \\ 7 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.938 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

slijedi da je Klara najbolji izbor s obzirom na intervju.

S obzirom na duljinu prethodnog radnog iskustva (u mjesecima rada), imamo sljedeću matricu usporedbi:

$$\begin{array}{c} Mia \\ Klara \\ Luka \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$$

te ukoliko svaki element podijelimo 1−normom prethodnog vektora, dobivamo vektor težina $[0.04\ 0.24\ 0.72]^T$, odnosno prema duljini radnog iskustva Luka ima najveći prioritet.

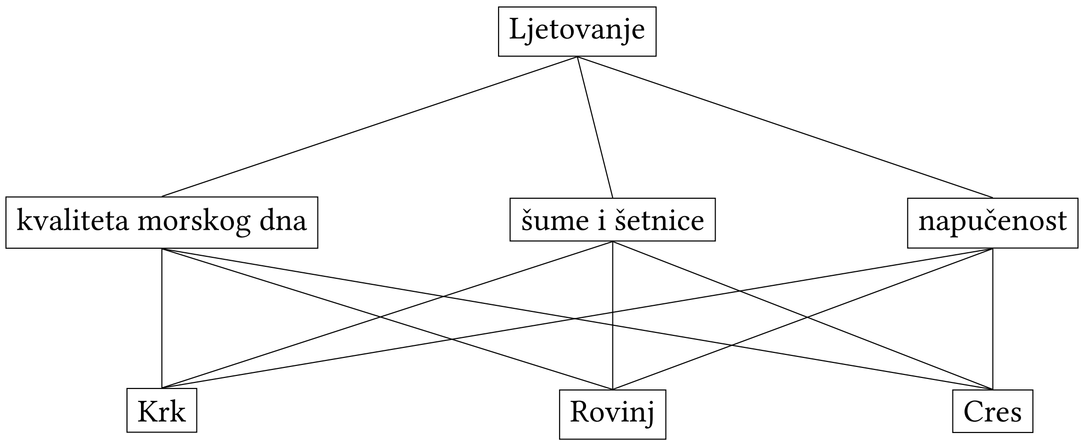
Na kraju, vektore težina alternativa, s obzirom na svaki od kriterija, trebamo poredati u matricu (kao stupce) te tu matricu pomnožiti s vektorom težina kriterija, pa onda dobivamo sljedeće:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} obrazovanje & intervju & radno\ iskustvo \end{array} \\ \begin{array}{c} Mia \\ Klara \\ Luka \end{array} & \begin{bmatrix} 0.966 & 0.068 & 0.04 \\ 0.247 & 0.938 & 0.24 \\ 0.079 & 0.34 & 0.72 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.964 \\ 0.244 \\ 0.103 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.952 \\ 0.492 \\ 0.233 \end{bmatrix}.$$

Iz prethodnih rezultata vidimo da se donositelji odluke trebaju odlučiti za Miu. □

6.26. PRIMJER. Lucija želi otići na ljetovanje sa svojom prijateljicom Majom koja jako voli roniti. Trebaju se odlučiti gdje će otići tako da im objema bude odlično i da se dobro odmore. Lucija je osmislila tri kriterija koja su joj najznačajnija: *kvaliteta morskog dna pogodnog za ronjenje* (laka dostupnost, postojanje koraljnih grebena, prisustvo najfascinantnijih životinjskih vrsta), *postojanje šuma i šetnica* (priroda) i *napučenost*.
Njezine su preferencije: postojanju šuma i šetnica daje slabu prednost pred kvalitetom morskog dna te vrlo jaku prednost pred napučenosti, a kvaliteti morskog dna daje jaku do vrlo jaku prednost pred napučenosti.
Nakon što je Lucija pretražila veliku većinu destinacija, svidjele su joj se tri alternative: *Rovinj*, *Krk* i *Cres*.
S obzirom na postojanje šuma i šetnica, Krk ima vrlo jaku prednost pred Rovinjom te jaku prednost pred Cresom, dok Cres ima slabu prednost pred Rovinjom.
S obzirom na kvalitetu morskog dna, Krk ima vrlo jaku prednost pred Cresom te slabu do jaku prednost pred Rovinjom, a Rovinj ima jaku prednost pred Cresom.
S obzirom na napučenost, Krk ima slabu prednost pred Rovinjom te jaku prednost pred Cresom, a Rovinj ima slabu do jaku prednost pred Cresom.
S obzirom na dane podatke, gdje bi Lucija i Maja trebale otići na ljetovanje? Je li Lucija konzistentna pri uspoređivanju kriterija?
Također, neka je zadana tolerancija $\varepsilon = 0.00001$.

Rješenje. Hijerarhija odlučivanja ima strukturu prikazanu na Slici 6.



Slika 6. Dekompozicija problema iz Primjera 6.26. u hijerarhiju

Najprije određujemo najznačajniji kriterij:

Matrica usporedbi kriterija dana je sa

$$A = \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \scriptstyle morsko\ dno & \scriptstyle šuma & \scriptstyle napučenost \end{array} \\ \begin{array}{r} \scriptstyle morsko\ dno \\ \scriptstyle šuma \\ \scriptstyle napučenost \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Kako bismo pronašli aproksimacije najveće svojstvene vrijednosti te pripadnog svojstvenog vektora, uz pomoć algoritma *Metode potencija*, kao polazni vektor ponovo odabiremo $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$, dok je zadana tolerancija $\varepsilon = 0.00001$; nakon 10 iteracija pogreška je 1.8773×10^{-6}, dok su željene aproksimacije

$$\lambda_{max} = 3.0999, \quad x = [0.4135\ 0.9056\ 0.0944]^T,$$

odnosno

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \scriptstyle morsko\ dno & \scriptstyle šuma & \scriptstyle napučenost \end{array} \\ \begin{array}{r} \scriptstyle morsko\ dno \\ \scriptstyle šuma \\ \scriptstyle napučenost \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4135 \\ 0.9056 \\ 0.0944 \end{bmatrix} \end{array}$$

te iz dobivenih vrijednosti možemo zaključiti da je kriterij *postojanje šuma i šetnica* preferiran nad ostalim kriterijima.
Nadalje, kako je $CI = \frac{3.0999-3}{3-1} = 0.0499$ te $CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.0499}{0.58} = 0.086 < 0.1$, možemo

zaključiti da je Lucija (Saaty) konzistentna pri uspoređivanju kriterija.

Odredimo najznačajniju alternativu:

S obzirom na kvalitetu morskog dna matrica usporedbi dana je sa

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Krk & Rovinj & Cres \end{array} \\ \begin{array}{c} Krk \\ Rovinj \\ Cres \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \frac{1}{4} & 1 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}; \end{array}$$

te uz $x_0 = [1\ 1\ 1]^T$ i $\varepsilon = 0.00001$ nakon 10 iteracije pogreška je 3.9418×10^{-6}, a aproksimacije svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora $\lambda_{max} = 3.1237$, $x = [0.9382\ 0.3328\ 0.0945]^T$. Dakle, s obzirom na kvalitetu morskog dna, Krk je najbolja alternativa.

S obzirom na postojanje šuma i šetnica, matrica usporedbi je

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Krk & Rovinj & Cres \end{array} \\ \begin{array}{c} Krk \\ Rovinj \\ Cres \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 3 & 1 \end{bmatrix}; \end{array}$$

uz isti x_0 i ε kao prije, nakon 8 iteracija pogreška je 9.2797×10^{-6}, dok su aproksimacije $\lambda_{max} = 3.0649$ i $x = [0.9628\ 0.1067\ 0.2483]^T$; s obzirom na postojanje šuma i šetnica, Krk je opet najbolja alternativa.

S obzirom na napučenost, iz zadanih podataka iščitavamo matricu

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} Krk & Rovinj & Cres \end{array} \\ \begin{array}{c} Krk \\ Rovinj \\ Cres \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}; \end{array}$$

nakon 9 iteracija pogreška je 6.1489×10^{-6} te su aproksimacije $\lambda_{max} = 3.0858$, $x = [0.9048\ 0.4038\ 0.1352]^T$. Prema dobivenim vrijednostima, s obzirom na napučenost, ponovno je Krk najbolja alternativa.

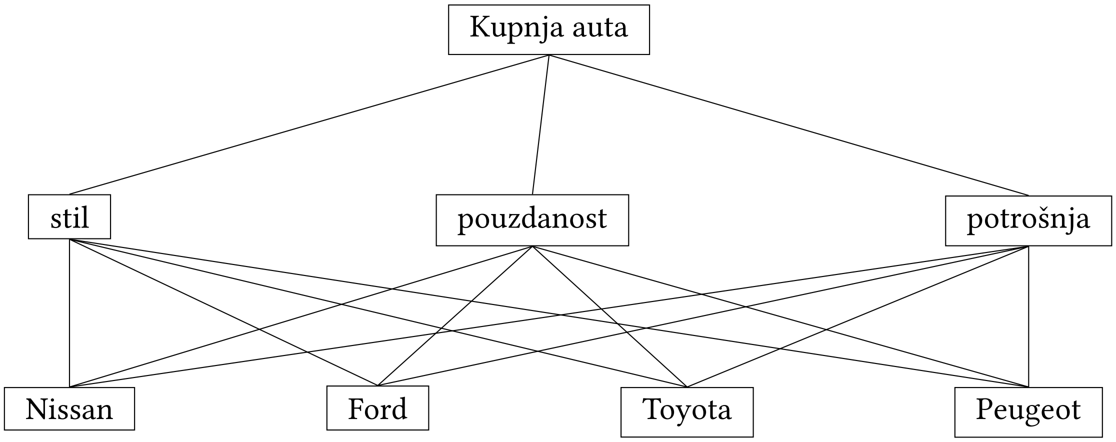
Ukoliko pogledamo krajnju matricu, zajedno s vektorom težina kriterija

$$\begin{array}{c} \\ Krk \\ Rovinj \\ Cres \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle morsko\ dno & \scriptstyle šuma & \scriptstyle napučenost \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9382 & 0.9628 & 0.9048 \\ 0.3328 & 0.1067 & 0.4038 \\ 0.0945 & 0.2483 & 0.1352 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.4135 \\ 0.9056 \\ 0.0944 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3453 \\ 0.2724 \\ 0.2767 \end{bmatrix},$$

možemo zaključiti da bi Lucija i Maja trebale ljetovati na Krku. □

6.27. Primjer. Kako bi potisnuo razočarenje zbog diskvalifikacije na natjecanju u amaterskom slikanju, iako je od tada prošlo puno godina, Cvjetko se prijavio na natjecanje *Artists Magazine Annual Art Competition* na kojem novčana nagrada za 1. mjesto iznosi 24 000$ te je pobijedio! Kako je osvojio veliku svotu novca, odlučio je kupiti auto. Prilikom kupnje, u obzir je uzeo tri kriterija: *stil*, *pouzdanost* i *potrošnju*. Poučen iskustvima poznanika koji su kupovali auto, on ima sljedeće preferencije: stil ima slabu prednost pred potrošnjom, pouzdanost ima jednaku do slabu prednost pred stilom, a također i slabu do jaku prednost pred potrošnjom. U odnosu na dane kriterije, Cvjetko promatra četiri marke vozila: *Ford*, *Nissan*, *Toyota* i *Peugeot*, pri čemu, s obzirom na savjete stručnih osoba iz autosalona s kojima je razgovarao, ima sljedeće preferencije:
s obzirom na stil, Ford ima slabu do jaku prednost pred Toyotom, Nissan ima slabu do jaku prednost pred Fordom i Toyotom, dok Peugeot ima jaku do vrlo jaku prednost pred Fordom, slabu do jaku prednost pred Nissanom i, također, jaku prednost pred Toyotom.
S obzirom na pouzdanost, Ford ima jednaku do slabu prednost pred Nissanom, jaku prednost pred Toyotom te je jednako preferiran kao Peugeot. Nadalje, Nissan ima slabu prednost pred Toyotom te jednaku do slabu prednost pred Peugeotom, dok Peugeot ima slabu do jaku prednost pred Toyotom.
Što se tiče potrošnje goriva, za 10 litara goriva Ford može prijeći 150 kilometara, Nissan 170, Toyota 162 te Peugeot 185 kilometara.
S obzirom na dane podatke, za koji bi se auto Cvjetko trebao odlučiti? Obrazložite je li Cvjetko konzistentan pri uspoređivanju kriterija. Pri tome, neka je zadana točnost $\varepsilon = 0.00005$.

Rješenje. Hijerarhija odlučivanja ima strukturu prikazanu na Slici 7.



Slika 7. Dekompozicija problema iz Primjera 6.27. u hijerarhiju

Odredimo najznačajniji kriterij:

Matrica usporedbi kriterija dana je sa

$$A = \begin{array}{r} \\ stil \\ pouzdanost \\ potrošnja \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} stil & pouzdanost & potrošnja \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Uz pomoć *Metode potencija*, pri čemu za toleranciju odabiremo $\varepsilon = 0.00005$, a za $x_0 = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ nakon 6 iteracija pogreška je 4.5186×10^{-5} te kao rješenje dobivamo sljedeće aproksimacije svojstvenog vektora i svojstvene vrijednosti:

$$x = [1.4731\ 2.5738\ 0.5621]^T, \quad \lambda_{max} = 3.0183,$$

dok je $CI = 0.0092$ te $CR = 0.0158 < 0.1$, odnosno podatke smatramo (Saaty) konzistentnima. Nadalje,

$$\begin{array}{r} \\ stil \\ pouzdanost \\ potrošnja \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} stil & pouzdanost & potrošnja \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1.4731 \\ 2.5738 \\ 0.5621 \end{bmatrix} \end{array}$$

te iz dobivenih vrijednosti možemo zaključiti da je kriterij *pouzdanost* preferiran nad ostalim kriterijima.

Odredimo najznačajniju alternativu:

S obzirom na stil, iz pripadne matrice usporedbi

$$\begin{array}{c} \\ Ford \\ Nissan \\ Toyota \\ Peugeot \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Ford & Nissan & Toyota & Peugeot \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 4 & \frac{1}{6} \\ 4 & 1 & 4 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{5} \\ 6 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

nakon 11 iteracija pogreška je 1.8669×10^{-5} te dobivamo

$$x = [0.8013\ 1.7071\ 0.415\ 3.9922]^T, \quad \lambda_{max} = 4.4346.$$

Dakle, iz

$$\begin{array}{c} \\ Ford \\ Nissan \\ Toyota \\ Peugeot \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Ford & Nissan & Toyota & Peugeot \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 4 & \frac{1}{6} \\ 4 & 1 & 4 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{5} \\ 6 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 0.8013 \\ 1.7071 \\ 0.415 \\ 3.9922 \end{bmatrix}$$

zaključujemo da Peugeot ima najveći prioritet s obzirom na stil.

S obzirom na pouzdanost, matrica usporedbi je

$$\begin{array}{c} \\ Ford \\ Nissan \\ Toyota \\ Peugeot \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Ford & Nissan & Toyota & Peugeot \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

te je nakon 9 iteracija pogreška 2.7901×10^{-5}, a aproksimacije svojstvenog vektora i svojstvene vrijednosti

$$x = [2.9014\ 2.2235\ 0.5684\ 1.97]^T, \quad \lambda_{max} = 4.1913,$$

što znači da je *Ford* preferiran nad ostalim alternativama s obzirom na pouzdanost.

S obzirom na potrošnju iz danih podataka dobivamo matricu usporedbi

$$\begin{array}{c} Ford \\ Nissan \\ Toyota \\ Peugeot \end{array} \begin{bmatrix} 150 \\ 170 \\ 162 \\ 185 \end{bmatrix}$$

te ukoliko svaki element podijelimo 1−normom prethodnog vektora, dobivamo vektor težina $x = [0.2249\ 0.2549\ 0.2429\ 0.2774]^T$, odnosno Peugeot ima najveći prioritet s obzirom na potrošnju. Iako se kao prirodan odabir, iz prethodno dobivenih zaključaka, nameće Peugeot, pogledajmo i *krajnju matricu*

$$\begin{array}{c} \\ Ford \\ Nissan \\ Toyota \\ Peugeot \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Stil & Pouzdanost & Potrošnja \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8013 & 2.9014 & 0.2249 \\ 1.7071 & 2.2235 & 0.2549 \\ 0.415 & 0.5684 & 0.2429 \\ 3.9922 & 1.97 & 0.2774 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1.4731 \\ 2.5738 \\ 0.5621 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.7744 \\ 8.3809 \\ 2.2108 \\ 11.1072 \end{bmatrix},$$

što znači da bi se, prema opisanim preferencijama, Cvjetko trebao odlučiti za kupnju Peugeota. □

6.5. Zadaci za vježbu

6.1. Zadatak Ana više voli ići u toplice nego na more te više voli ići na more nego u planine. Voli li Ana više ići u toplice ili u planine ako je ona konzistentna pri donošenju odluka?

6.2. Zadatak Navedite primjer jedne pozitivne recipročne matrice (reda 3) koja nije konzistentna te jedan primjer pozitivne recipročne matrice (reda 3) koja jeste konzistentna te za svaku od njih izračunajte svojstvene vrijednosti i objasnite jesu li rješenja (tj. dobivene svojstvene vrijednosti) opravdana nekom prethodno dokazanom tvrdnjom (navedite tvrdnju koju koristite).

6.3. Zadatak Magdalena razmišlja gdje ići na more: u Pulu, Rijeku ili Makarsku. Makarska ima vrlo jaku do apsolutnu prednost pred Rijekom i slabu prednost pred Pulom, dok Pula ima vrlo jaku prednost pred Rijekom. Napravite matricu usporedbi. Jesu li dani podaci konzistentni?

6.4. Zadatak Cvjetko razmišlja hoće li ići na ispit iz Teorije odlučivanja (TO), Konveksnih funkcija (KF), Linearnog programiranja (LP) ili Statističkog praktikuma (SP). Cvjetko daje apsolutnu prednost TO pred KF te jaku prednost nad LP i vrlo jaku prednost pred SP. Također, on je indiferentan između ispita iz KF i LP te ispitima iz KF i LP daje slabu prednost pred SP. Napravite matricu usporedbi. Jesu li dani podaci konzistentni?

6.5. Zadatak Grupa studenata odlučila je otići na apsolventsko putovanje.
Kriteriji s obzirom na koje donose odluku su *troškovi*, *mogućnost zabave* i *ostali sadržaji*. Studenti troškovima daju slabu prednost pred zabavom i jaku prednost pred ostalim sadržajima, dok zabavi daju slabu prednost pred ostalim sadržajima.
Također, oni razmatraju tri destinacije: *Španjolsku*, *Grčku* i *Italiju*. U Španjolskoj studenti žele posjetiti poznato odredište Lloret de Mar, u kojem su brojne mogućnosti zabave po pristupačnim cijenama, ali da bi se doživjelo nešto drugo, treba planirati dodatne troškove puta u Barcelonu ili druga mjesta s više kulturnih sadržaja. Odredište na koje se putuje u Grčku je Atena koja je skuplja od prethodne destinacije, ali ima više kulturnih sadržaja. Putovanje u Italiju uključuje boravak u Rimu i Firenci - mogućnosti zabave postoje, ali su najslabije u odnosu na ostale razmatrane destinacije, dok ovaj aranžman odskače po velikoj ponudi kulturnih sadržaja.
Dakle, s obzirom na troškove, studenti daju jaku prednost Španjolskoj i Italiji pred Grčkom te Italija ima jednaku do slabu prednost pred Španjolskom.
S obzirom na mogućnosti zabave, Španjolska ima jaku prednost pred Grčkom i vrlo jaku prednost pred Italijom, dok Grčka ima slabu prednost pred Italijom.
Što se tiče ostalih sadržaja, studenti Grčkoj daju jaku prednost pred Španjolskom, a Italiji daju vrlo jaku prednost pred Španjolskom i slabu prednost pred Grčkom.

a) Skicirajte strukturu hijerarhije odlučivanja.

b) S obzirom na dane podatke, koju bi destinaciju studenti trebali odabrati?

c) Obrazložite jesu li studenti konzistentni pri uspoređivanju kriterija.

Također, putovanje će se realizirati u doba kada nema korone i sigurno je putovati! ☺

7. O višekriterijskom odlučivanju

U ovom, zadnjem poglavlju, dat ćemo kratak osvrt na sam pojam višekriterijskog odlučivanja te pregled, u današnje vrijeme, najčešće korištenih metoda za višekriterijsko odlučivanje, s pripadnim referencama koje mogu poslužiti zainteresiranom čitatelju ukoliko poželi saznati više o ovom području.

Višekriterijsko odlučivanje (engl. *Multi-criteria decision making – MCDM*), poznato je i kao analiza višestrukih kriterija (engl. *Multiple-criteria decision analysis - MCDA*). S. Zionts je 1979. godine u velikoj mjeri popularizirao kraticu *MCDM* svojim člankom za menadžere: *MCDM - Ako ne rimski broj, što onda?* (engl. *MCDM – If not a Roman numeral, then what?*) [97].

R. A. Howard je 1966. godine [36] prvi upotrijebio pojam *analiza odluke*, zbog čega ga se često naziva *ocem analize odluka* [101] te je poznat njegov rad o postupcima uzastopnog odlučivanja [44]. U Americi su R. Keeney i H. Raiffa 1976. objavili knjigu *Odluke s više objekata: preferencije i vrijednosni kompromisi* koja je postala standardna referenca za sve buduće generacije koje se bave analizom odluka i višekriterijskim odlučivanjem.

S druge strane, europski predstavnik B. Roy je sa suradnicima sredinom 1960-ih razvio i danas vrlo zastupljenu obitelj ELECTRE metoda o kojoj će biti nešto više rečeno kasnije te je 1975. osnovao i Europsku radnu skupinu s ciljem pomoći pri višekriterijskom odlučivanju (engl. *EURO Working Group on Multicriteria Decision Aiding*) koja svoje sastanke ima i danas [102].

Metode za višekriterijsko odlučivanje objedinjuju matematiku, menadžment, informatiku, psihologiju, društvene znanosti i ekonomiju te njihova primjena seže u bilo koju od navedenih grana gdje postoji problem vezano uz koji treba donijeti značajnu odluku [39]. Razvoj tih metoda konstantno je prisutan te svakim danom potencijalni donositelj odluke može pronaći nove znanstvene članke na tu temu, dok su i postojeći softveri, dostupni na webu ili u obliku aplikacija za pametne telefone, učinili te metode dostupnijima, što je svakako doprinijelo njihovom razvoju.

S obzirom na velik broj metoda za višekriterijsko odlučivanje, donositelj odluke se ponekad suočava s ne tako lakim zadatkom *koju metodu primjeniti?* jer ni jedna od metoda nije savršena i ne može se primijeniti na sve moguće probleme; naime svaka metoda ima svoja ograničenja i posebnosti [39, str. 6]. A. Guitouni i suradnici [29] predlažu donositelju odluke da prije odabira metode napravi kratko istraživanje o tome koja bi metoda bila najprikladnija, no taj je pristup namijenjen iskusnim istraživačima.

Pored AHP metode, koju smo detaljno obradili u Poglavlju 6.1., u nastavku navodimo neke od popularnijih i danas najčešće korištenih metoda za višekriterijsko odlučivanje o kojima zainteresirani čitatelj može pronaći više, npr., u ([3, 34, 44]).

- MAUT – višekriterijska teorija korisnosti (engl. *Multi-Attribute Utility Theory*)

Ako je, za svaki od zadanih kriterija, poznata funkcija korisnosti, onda se preporučuje koristiti metodu MAUT. Ta je metoda široko zastupljena u anglosaksonskom dijelu i temelji se na glavnoj hipotezi da svaki donositelj odluke pokušava svjesno ili implicitno optimizirati funkciju koja objedinjuje sva njegova stajališta o danom problemu. Preciznije, to znači da donositelj odluke svoje preferencije može predstaviti funkcijom koja se naziva funkcija korisnosti i ona nije nužno poznata na početku postupka odlučivanja te je on najprije mora konstruirati.

- MAVT – višekriterijska teorija vrijednosti (engl. *Multi-Attribute Value Theory*)

Usko povezana teorija s MAUT-om je MAVT, metoda koja se najčešće koristi za rješavanje problema koji uključuju konačan ili prebrojiv skup alternativa koje se moraju evaluirati na temelju konfliktnih ciljeva [3, 34]. Za bilo koji dani cilj, odnosno problem o kojem treba donijeti odluku, promatra se kako jedan ili više različitih kriterija (atributa) utječe na njega, pri čemu se procjene donose uz pomoć različitih mjernih skala te se zapisuju u takozvane *tablice procjene* koje olakšavaju donošenje odluke. Ova metoda nalazi na teškoće ukoliko je u danom problemu uključen veliki broj kriterija različitog tipa.

- MACBETH – mjerenje atraktivnosti tehnikom kategoriziranja na temelju evaluacije (engl. *Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*)

Radi se o metodi koja je kao i AHP bazirana na usporedbi po parovima između danih kriterija i alternativa, dok je glavna razlika između tih metoda što MACBETH koristi takozvanu *intervalnu skalu* [39, Chapter 5], a AHP metoda koristi (proširenu) fundamentalnu skalu s kojom smo se već detaljno upoznali.

- ANP – analitički mrežni proces (engl. *The analytic network process*)

ANP je generalizacija AHP metode, koja se bavi ovisnostima [39, Chapter 3]. Naime, dok kod AHP metode pretpostavljamo da su kriteriji neovisni, ANP metoda dopušta ovisnosti među kriterijima; na primjer, ako želimo kupiti automobil, kriteriji brzine i snage motora su ovisni, odnosno kažemo da su oni u korelaciji.

- WSM - model ponderiranog zbroja (engl. *Weighted Sum Model*)

Radi se o jednostavnoj metodi koja se temelji na ponderiranom prosjeku, korištenjem aritmetičkih sredina svake od danih alternativa (za više detalja vidi [16]).

- TOPSIS - tehnika poretka preferencija slična idealnom rješenju (engl. *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*)

Ovu su metodu razvili C.–L. Hwang i K. Yoon 1981. godine [38] te ona pretpostavlja da se kriteriji unutar nje jednoliko povećavaju ili smanjuju, što dovodi do definiranja *idealnog* i *negativnog idealnog rješenja*, a temelji se na konceptu da je najbolja alternativa ona koja je najsličnija idealnoj, a najmanje slična onoj koja nije idealna (tzv. negativno idealno rješenje) [30]. Pri tome su se autori, u analizi odluke uz pomoć te metode, odlučili uvesti negativno idealno rješenje zbog nastojanja da se u poslovnom odlučivanju donose odluke kojima se maksimizira profit, a minimizira rizik.

- GP – ciljno programiranje (engl. *Goal Programming*)

GP metoda koristi se u specijalnim slučajevima jer je glavna ideja te metode da postoji idealan cilj koji se treba postići, dok se istovremeno trebaju ispoštovati zahtjevna ograničenja. Spomenuti se cilj također sastoji od nekoliko povezanih ciljeva koji mogu biti međusobno konfliktni te je zapravo najveća poteškoća u samom modeliranju problema pronaći koji je cilj i pripadna ograničenja [39].

Za kraj navodimo metode koje se, uz AHP, najčešće koriste u praksi, zbog svoje prilagodljivosti stvarnim problemima i zbog činjenice da su razumljivije donositelju odluke, u usporedbi s ostalim metodama [33].

- ELECTRE – eliminacija i izbor izražavanja stvarnosti (franc. *Elimination Et Choix Traduisant la Realite*, engl. *Elimination and Choice Translating Reality*)

ELECTRE metode [11, 65, 67] pojavile su se kao odgovor na poteškoće na koje su donositelji odluke nailazili korištenjem ordinalne funkcije vrijednosti (vidi Poglavlje 4.). Stoga, kao i u pristupu koji smo upoznali u Poglavlju 4., te metode uključuju relaciju preferencije među alternativama, koja se u ovom slučaju naziva *relacija višeg ranga* (engl. *outranking relation*) te se stoga i same metode ponekad nazivaju *metode višeg ranga* (engl. *outranking methods*). Kod tih se metoda pripadna relacija gradi na osnovu uspoređivanja po parovima, kao što je bio slučaj i kod AHP metode [43, 66, 93].
Metoda ELECTRE razvila se 1965. godine kao metoda koja bira najbolju akciju iz danog skupa akcija te je ubrzo preimenovana u ELECTRE I (electre one); od početka se pokazala dobrom u praksi, a postala je poznata tek 1968. objavljivanjem u časopisu RIRO [64] od kada se razvila i do neslužbene verzije ELECTRE Iv (electre one vee) te zatim i do ELECTRE IS (electre one esse) koja je korištena u svrhu modeliranja situacija u kojima su podaci *nesavršeni* (engl. *imperfect*). ELECTRE IS je i danas najzastupljenija među svim metodama iz ELECTRE obitelji. U međuvremenu se pojavilo još metoda iz te obitelji: kasnih 60–ih godina javila se potreba rješavanja problema odlučivanja u medijskom planiranju, što je dovelo do pojave ELECTRE II (electre two), a nekoliko godina kasnije

osmišljen je novi način rangiranja akcija ELECTRE III (electre tree), koji koristi nove ideje kao što su pseudo–kriteriji [63] i *fuzzy* binarne relacije višeg ranga [28, str. 157]. Zatim, iz potrebe za rješavanjem problema vezanog uz mrežu podzemnih željeznica u Parizu, razvila se metoda ELECTRE IV (electre four), a nešto kasnije, kako bi se pomoglo u donošenju odluka u velikoj banci, i metoda ELECTRE TRI (electre tri). O primjeni metoda iz obitelji ELECTRE čitatelj može pogledati u [11, 28], gdje može pronaći i algoritme koji opisuju implementaciju svake od navedenih metoda.

- PROMETHEE - metoda organizacije rangiranja preferencija za obogaćivanje procjene (engl. *Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation*)

PROMETHEE metode se također baziraju na usporedbi po parovima te se smatraju metodama višeg ranga jer uključuju tzv. *relaciju preferencije višeg ranga* među alternativama [28]. Obitelj PROMETHEE metoda ima nekoliko inačica koje su u stalnoj upotrebi prilikom procesa donošenja odluka u višekriterijskom odlučivanju. J. P. Brans je 1982. predstavio metodu PROMETHEE I, koja se koristi za parcijalno rangiranje alternativa i PROMETHEE II koja služi za potpuno rangiranje, a nekoliko godina kasnije J. P. Brans i B. Mareschal razvili su metodu PROMETHEE III koja se temelji na intervalnom rangiranju alternativa i PROMETHEE IV koja predstavlja određeno proširenje prethodne metode na neprekidne skupove alternativa; npr. dimenzije nekog proizvoda, vrijednosti ulaganja itd. [49, str. 36]. Isti su autori 1988. godine predstavili vizualni interaktivni modul GAIA (engl. *Geometrical Analysis for Interactive Aid*) koji daje geometrijsku prezentaciju rezultata PROMETHEE metode te osigurava dovoljno informacija kako bi donositelj odluke mogao bolje sagledati dani problem i dobiti potpuni uvid u odnose između alternativa i kriterija.

Nadalje, godine 1992. te 1994. spomenuti autori predložili su dva proširenja prethodnih metoda: PROMETHEE V, koja podržava višekriterijsko odlučivanje temeljeno na tzv. segmentacijskim ograničenjima, i PROMETHEE VI, nastala kao odgovor na pitanja koja se tiču ljudskog mozga. Poznat je znatan broj uspješno riješenih problema uz pomoć PROMETHEE metodologije i to u raznim poljima kao što su bankarstvo, industrija, vodeni resursi, investicije, medicina itd. (za više detalja vidi [28, str. 189]).

Na kraju, spomenimo da su i PROMETHEE metode i GAIA implementirane u softwerima PROMCALC, D-Sight i Decision Lab (vidi [28, str. 193]), od kojih je najzastupljeniji posljednji, razvijen od strane kanadske kompanije Visual Decision u suradnji s autorima PROMETHEE metoda [52], kao naprednija verzija softvera PROMCALC kojeg su prethodno razvili Brans i Mareschal. Mnoštvo primjera iz svakodnevnog života, riješenih u Decision Lab-u, zainteresirani čitatelj može pronaći u [33, 52, 54, 90].

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra, drugo izdanje*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[2] E. Ballestero, *Strict Uncertainty: A Criterion for Moderately Pessimistic Decision Makers*, Decision Sciences, **33(1)**, 87–108, 2002.

[3] E. Beinat, P. Nijkamp, *Multicriteria Analysis for Land–Use Management*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[4] D. E. Bell, H. Raiffa, A. Tverski, *Decision making: Decriptive, normative, and prescriptive interactions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[5] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[6] D. Bernoulli, *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, Econometrica, **22(1)**, 23–36, 1954.

[7] N. Bhushan, K. Rai, *Strategic Decision Making Applying the Analytic Hierarchy Process*, Springer–Verlag, London, 2004.

[8] C. Bicchieri, *Decision and game theory*, Routledge Encyclopedia of Philosophy, Taylor and Francis, 1998, doi:10.4324/9780415249126-Q023-1
dostupno na:
https://www.rep.routledge.com/articles/thematic/
decision-and-game-theory/v-1

[9] K. Binmore, *Playing for Real: A Text on Game Theory*, Oxford University Press, New York, 2007.

[10] D. Black, *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958.

[11] D. Bouyssou, *Outranking Methods*, 2021. DOI; 10.1007/978-0-387-74759-0_495

[12] J.–P. Brans, B. Mareschal, *PROMETHEE methods*, Chapter 5
dostupno na:
https://www.cin.ufpe.br/ if703/aulas/promethee.pdf

[13] F. M. Brückler, *Povijest Matematike II*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[14] D. Butković, *Predavanja iz linearne algebre*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.

[15] S. J. Chen, C. L. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 375, Springer–Verlag, Berlin, Germany, 1991.

[16] Z. Chourabi, F. Khedher, A. Babay, M. Cheikhrouhou, *Multi–criteria decision making in workforce choice using AHP, WSM and WPM*, The Journal of The Textile Institute, 1—10, 2018. doi:10.108000405000.2018.1541434

[17] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Osijek, 1994.

[18] L. Cvitan, *Početne naznake o prostornoj raznolikosti klime šireg područja parka prirode Kopački rit*, Hrvatski meteorološki časopis, **48/49**, 63–91, 2013./2014.

[19] L. Čaklović, *Teorija vrednovanja s naglaskom na metodu potencijala, principi, metode, primjene*, Naklada Slap, Zagreb, 2014.

[20] P. C. Fishburn, W. V. Gehrlein, *Borda's rule, positional voting, and Condorcet's simple majority principle*, Public Choice, **28**, 79–88, 1976.

[21] E. H. Forman, *Random indices for incomplete pairwise comparison matrices*, European Journal of Operational Research **48**, 153–155, 1990.

[22] J. Franek, A. Kresta, *Judgment scales and consistency measure in AHP*, Procedia Economics and Finance **12**, 164–173, 2014.

[23] S. French, *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1986.

[24] T. Gal, T. J. Stewart, T. Hanne, *Multicriteria Decision Making; Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory, and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston–Dordrecht–London, 1999.

[25] N. Giocoli, *Savage vs. Wald: Was Bayesian Decision Theory the Only Available Alternative for Postwar Economics?*, Department of Economics, University of Pisa, 2006. dostupno na:
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=910916

[26] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Fourth Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.

[27] D. Grabić, *Implementacija Petrogradskog paradoksa u programskom jeziku C*, Završni rad, Sveučilište J. J. Strossmayera, Elektrotehnički fakultet, Osijek, 2016.

[28] S. Greco, M. Ehrgott, J. R. Figueira (editors), *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys: vol. 1*, Second Edition, Springer, New York, 2016.

[29] A. Guitouni, J. Martel, P. Vincke, *A framework to choose a discrete multicriterion aggregation procedure*, Technical Report, 1999.

[30] L. Guštin-Predolac, *Donošenje odluka: utjecajni čimbenici i uloga kvantitativnih metoda na primjeru odluke o sezonskom poslu*, Završni rad, Fakultet ekonomije i turizma "Dr. Mijo Mirković", Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Pula, 2019.

[31] S. P. Hargreaves Heap, Y. Varoufakis, *Game Theory: A Critical Introduction*, Taylor & Francis, London, 1995.

[32] T. Heath, *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus: A History of Greek Astronomy to Aristarchus, Together with Aristarchus's Treatise on the Sizes and Distances of the Sun and Moon*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[33] H. Herceg, *Primjena PROMETHEE metode u višekriterijalnom odlučivanju*, Završni rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2011.
dostupno na:
http://repozitorij.fsb.hr/1223/

[34] M. van Herwijnen, *Multiple-attribute value theory (MAVT)*
dostupno na:
http://www.ivm.vu.nl/en/Images/MCA1_tcm234161527.pdf

[35] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[36] R. A. Howard, *Decision Analysis: Applied Decision Theory*, Proceedings of the Fourth International Conference on Operational Research, Wiley-Interscience, 1966.

[37] R. A. Howard, *The foundations of decision analysis*, IEEE Transactions on Systems, Science and Cybernetics, SSC-4, 211–19, 1968.

[38] C. L. Hwang, K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[39] A. Ishizaka, P. Nemery, *Multi-Criteria Decision Analysis, Methods and Software*, John Wiley & Sons, United Kingdom, 2013.

[40] D. Jankov Maširević, N. Keglević, *Čebiševljeva i Markovljeva nejednakost u teoriji vjerojatnosti*, Osječki matematički list, **172**, 125–137, 2017.

[41] A. Ileković, *Evolucijska teorija igara*, Diplomski rad (voditelj: L. Čaklović), PMF–Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2017.
dostupno na:
https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:3246

[42] D. Jankov Maširević, M. Mikić, *Kombinatorika i vjerojatnost – zajedno kroz ples*, Osječki matematički list **19**, 123–136, 2019.

[43] A. Jaszkiewicz, R. Slowinski, *The light beam search: outranking based interactive procedure for multiple-objective mathematical programming*; in P.M. Pardalos, Y. Siskos, and C. Zopounidis (editors), Advances in multicriteria analysis, pages 129–146, Kluwer, 1995.

[44] V. Jašarević, *Metode višekriterijalnog odlučivanja*, Diplomski rad, Fakultet informatike, Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Pula, 2020.

[45] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I* (*prepravljeno izdanje*), Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[46] N. Kadoić, *Nova metoda za analizu složenih problema odlučivanja temeljena na analitičkom mrežnom procesu i analizi društvenih mreža*, Doktorski rad, Fakultet organizacije i informatike, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2018.

[47] R. L. Keeney, H. Raiffa, *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*, Wiley, New York, 1976.

[48] J. Kiš, *Nestandardne jednadžbe*, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.
dostupno na:
http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/KIš05.pdf

[49] B. Kovačić, *Višekriterijsko odlučivanje u prometu*, Magistarski znanstveni rad, Fakultet prometnih znanosti, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2004.

[50] D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes, A. Tversky, *Foundations of Measurement*, vol. 1, Academic Press, 1971.

[51] P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilites* $5th$ *ed.*, Paris, 1825.
(A philosophical essay on probabilities, Dover, New York, 1952.)

[52] M. Lolić, *Primjena višekriterijalne analize na problem lokacije za izgradnju hotela*, Završni rad, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Splitu, Split, 2019.

[53] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir, *Game Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[54] M. Mladineo, *Odlučivanje u upravljanju projektima*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Splitu, Split
dostupno na:
https://elearning.fesb.unist.hr/pluginfile.php/26491/mod_resource/content/0/PM-3%20Odlu%C4%8Divanje%20u%20upravljanju%20projektima.pdf

[55] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.

[56] N. Okičić, *Teorija skupova*, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2014.

[57] K. Pažek, Č. Rozman, *Decision making under conditions of uncertainty in agriculture: a case study of oil crops*, Poljoprivreda **15(1)**, 45–50, 2009.

[58] Z. Pažin, *Odlučivanje u uvjetima nesigurnosti u logističkim procesima*, Diplomski rad, Fakultet prometnih znanosti, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2018.

[59] M. Peterson, *The St. Petersburg Paradox, The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta (editor), 2020.
dostupno na:
https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/paradox-stpetersburg

[60] Ž. Piljić, *Hijerarhijsko odlučivanje pomoću AHP metode*, Diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera, Osijek, 2019.

[61] B. Popović, A. Nastić, M. Đorđević, *Zbirka zadataka iz matematičke statistike*, Prirodno–matematički fakultet, Univerzite u Nišu, Niš, 2014.

[62] N. Praščević, Ž. Praščević, *Application of fuzzy AHP method based on eigenvalues for decision making in construction industry*, Tehnički vjesnik **23(1)**, 57–64, 2016.

[63] A. Rico, M. Grabisch, C. Labreuche, A. Chateauneuf, *Preference modeling on totally ordered sets by the Sugeno integral*, Discrete Appl. Math. **147(1)**, 113-124, 2005.

[64] B. Roy, *Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)*, La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationelle (RIRO) **8**, 57–75, 1968.

[65] B. Roy, *The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. Theory and Decision*, **31**, 49–73, 1991.

[66] B. Roy, D. Bouyssou, *Aide multicritére á la décision: Méthodes et cas*, Economica, Paris, 1993.

[67] B. Roy, D. Vanderpooten, *The european school of MCDA: emergence, basic features and current works*, Journal of Multiple Criteria Decision Analysis, **5**, 22–37, 1996.

[68] T. L. Saaty, *A scaling method for priorities in hierarchical structures*, Journal of Mathematical Psychology **15(3)**, 234–281, 1977.

[69] T. L. Saaty, *Decision making with the analytic hierarchy process*, Int. J. Services Sciences, **1(1)**, 83–98, 2008.

[70] T. L. Saaty, *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, Pittsburgh, 2013.

[71] T. L. Saaty, *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, Pittsburgh, PA, 1990.

[72] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw HilI, New York, 1980.

[73] T. L. Saaty, *The Analytic Network Process. In: Decision Making with the Analytic Network Process*, International Series in Operations Research & Management Science, vol 95. Springer, Boston, MA, 2006.

[74] T. L. Saaty, *Theory and Applications of the Analytic Network Process*, Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA 15213, 2005.

[75] T. L. Saaty, J. Alexander, *Conflict Resolution: The Analytic Hierarchy Process*, Praeger, New York, 1989.

[76] T. L. Saaty, K. Keams, *Analytical Planning; The Organization of Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1985. Translated to Russian. Paperback edition, RWS Publications, Pittsburgh, 1991.

[77] T. L. Saaty, L. G. Vargas, *Decision Making with the Analytic Network Process*, 2nd edition, Springer, New York, 2006.

[78] T. L. Saaty, L. G. Vargas, *Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process*, Springer, New York, 2012.

[79] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[80] L. J. Savage, *The foundations of Statistics*, New York: Dover Publications, 1972.

[81] P. J. H. Schoemaker, *The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations*, Journal of Economic Literature, **20(2)**, 529–563, 1982.

[82] S. Shiraishi, T. Obata, M. Daigo, *Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP*, Journal of the Operations Research Society of Japan, **41(3)**, 404–414, 1998.

[83] P. Sikavica, T. Hunjak, N. Begičević Ređep, T. Hernaus, *Poslovno odlučivanje*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[84] S. Singer, *Svojstveni problem, predavanja*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb (nerecenzirani materijal)
dostupno na:
https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/PA2/eig_val.pdf

[85] K. Steele, H. Orri Stefánsson, *Decision Theory, The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. N. Zalta (editor), 2020.
dostupno na:
https://plato.stanford.edu/archives/win2020/entries/decision-theory

[86] T. Strmečki, B. Kovačić, *Matematičke konstante*, Poučak, **15(58)**, 37–48, 2014.

[87] M. Suknović, B. Delibašić, M. Jovanović, M. Vukićević, S. Radovanović, *Odlučivanje –praktikum*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2019.

[88] D. Tipurić, *Odlučivanje*, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb (nerecenzirani materijal)
dostupno na:
https://www.efzg.unizg.hr/userdocsimages/pds/
organizacijaimanagement/pds%20org-odlucivanje1.pdf

[89] K. Tone, *The Analytic Hierarchy Process: Decision Making* (in Japanese), Japanese Science and Technology Press, 1986.

[90] J.–M. Topić, *Gospodarske razlike županija RH –višekriterijalna analiza*, Diplomski rad, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Splitu, Split, 2018.

[91] E. Triantaphyllou, *Multi–Criteria Decision Making Methods: Comparative Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.

[92] N. Truhar, *Numerička linearna algebra*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[93] D. Vanderpooten, *The construction of prescriptions in outranking methods*; in C.A. Bana e Costa (editor), Readings in Multiple Criteria Decision Aid, pages 184–215. Springer-Verlag, 1990.

[94] A. Vazsonyi, *Decision Making: Normative, Descriptive and Decision Counseling*, Managerial and Decision Economics, **11(5)**, Special Issue: Decision Sciences Perspectives, 317–325, 1990.

[95] D. Vinovrški, *Primjena metode višekriterijske analize pri donošenju odluka*, Diplomski rad, Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Pula, 2016.

[96] H.–J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Third Revised Edition, Boston, MA, USA, 1996.

[97] S. Zionts, *MCDM—If Not a Roman Numeral, Then What?*, Interfaces **9(4)**, 94–101, 1979.

[98] S. R. Watson, D. E. Buede, *Decision Synthesis: The Principles and Practice of Decision Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[99] W. C. Wedley, *Consistency prediction for incomplete AHP matrices*, Mathl. Comput. Modelling **17(4/5)**, 151–161, 1993.

[100] https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=25487

[101] https://www.informs.org/Explore/History-of-O.R.-Excellence/Biographical-Profiles/Howard-Ronald-A

[102] http://www.cs.put.poznan.pl/ewgmcda/

[103] https://www.investopedia.com/terms/p/prisoners-dilemma.asp

Kazalo