ANALITIČKA GEOMETRIJA

Željka Milin Šipuš i Mea Bombardelli

verzija 2.0

1 Uvod i povijesni osvrt

Analitička geometrija bavi se proučavanjem (klasične) euklidske geometrije ravnine i prostora koristeći algebarske metode. Njen tvorac, René Descartes (1596-1650, lat. Renatus Cartesius), u svom djelu [1] napisanom 1619., a objavljenom tek 1637. godine, nazvao ju je i **metodom koordinata**. Osnovna ideja analitičke geometrije je da se točke ravnine i prostora opisuju koordinatama, dakle, parovima ili trojkama realnih brojeva, a ostali objekti (pravci, ravnine, krivulje, plohe, itd.) jednadžbama. Prema tome, ispitivanje odnosa među objektima svodi se na rješavanje algebarskih jednadžbi.

Analitička geometrija je vrlo raširena metoda proučavanja euklidske geometrije i prisutna je u mnogim granama matematike. Povijesno, imala je velik utjecaj i na razvoj diferencijalnog računa.

Polazište za uvođenje analitičke geometrije su euklidska ravnina ili prostor koje ćemo označavati sa E^2 i E^3 i koji su aksiomatski zasnovani. Osnovne elemenate, točku i pravac za E^2, te još ravninu za E^3, *ne definiramo*, nego aksiomima, tj. prihvaćenim istinama, opisujemo njihove osnovne međusobne odnose. Ostale odnose dokazujemo koristeći aksiome. Starogrčki matematičar Euklid (330 - 275 pr. Kr.) još je u 3. stoljeću pr. Kr. u svom djelu *Elementi* aksiomatski zasnovao ravninu koju po njemu i nazivamo *euklidskom ravninom.* Euklid je pokušao 'definirati' i osnovne objekte u smislu da intuitivno objasni njihov smisao, pa je točku 'definirao' kao *ono što nema dijelova*, krivulju kao *duljinu bez širine*, pravac kao *krivulju kojoj su sve točke jednako raspoređene*, a plohu kao *ono što nema samo duljinu, već ima i širinu.* Euklidovi osnovni aksiomi su:

1. Od svake točke do svake druge točke može se povući pravac.
2. Omeđen dio pravca može se neprekidno produžiti po pravcu.
3. Iz svakog središta sa svakim polumjerom može se opisati kružnica.
4. Svi su pravi kutovi jednaki.
5. Ako dva pravca presječemo trećim pravcem i ako on s njima zatvara s jedne svoje strane unutrašnje kutove čiji je zbroj manji od dva pravca, onda se ta dva pravca dovoljno produžena sijeku, i to upravo s te strane.

Peti navedeni aksiom ima vrlo važno povijesno značenje - zbog svoje neobične duljine smatralo se da je možda već on posljedica ostalih aksioma. Taj je problem bio neriješen skoro 2000 godina, tek se u 19. stoljeću dokazalo da je on zaista aksiom karakterističan za

[1] *Rasprava o metodi pravilnog upravljanja umom i traženje istine u znanostima*, s dodatkom *Geometrija*

euklidsku geometriju, a njegovim negiranjem dobivamo nove geometrije, tzv. neeuklidske geometrije.

Danas postoje i preciznije aksiomatike, kao primjerice aksiomatika njemačkog matematičara Davida Hilberta (oko 1900. godine) i mnoge druge ekvivalente aksiomatike (vidi knjige Pavković, Veljan *Elementarna matematika 1, 2*).

Naše polazište je, dakle, aksiomatski zasnovana euklidska ravnina ili prostor, pri čemu koristimo bez dokaza neke činjenice klasične geometrije izvedene iz aksioma. Tek ćemo povremeno naznačiti posljedice korištenja nekih (Euklidovih) aksioma.

Recimo još par riječi o tvorcu metode koordinata - Renéu Descartesu. Osim što je bio vrstan i vrlo cijenjen matematičar, poznat je i po svom doprinosu filozofiji. Vrlo je čuvena njegova misao *Mislim, dakle jesam.* Predlagao je i *univerzalnu metodu rješavanja problema* koja se sastojala od sljedeća tri koraka:

1. Zadaću bilo koje vrste svesti na matematičku.
2. Matematičku zadaću svesti na algebarsku.
3. Algebarsku zadaću svesti na rješavanje jedinstvene jednadžbe.

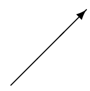
No, i sam je uviđao njene granice. Prilagođujući tu ideju, uvođenje metode koordinata zamislio je na sljedeći način:

1. Geometrijsku zadaću algebarski formulirati.
2. Algebarsku zadaću riješiti.
3. Algebarsko rješenje geometrijski interpretirati.

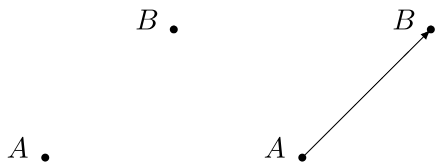
Uz metode analitičke geometrije u užem smislu, koje uvodimo od sedmog poglavlja, usko je vezan pojam vektora. Njega uvodimo u drugom poglavlju, a u sljedećim poglavljima definiramo i operacije s vektorima: zbrajanje, množenje skalarom, skalarno množenje, te vektorsko i mješovito množenje. U sedmom poglavlju određujemo razne oblike jednadžbe pravca u ravnini, a u narednom poglavlju jednadžbe pravca i ravnine u prostoru. Zatim definiramo elipsu, hiperbolu i parabolu i općenito krivulje zadane algebarskom jednadžbom drugog stupnja. Koristeći geometrijske transformacije, svaku krivulju drugog reda prevodimo na normalan oblik. Na kraju, ukratko razmatramo i plohe 2. reda.

2 Vektorski prostori V^1, V^2, V^3

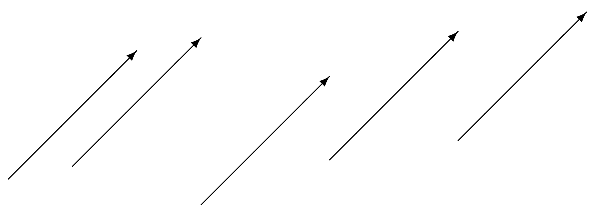
Vektor često zamišljamo kao dužinu sa strelicom:



Matematička definicija vektora je ipak nešto složenija, a ova intuitivna predodžba više odgovara pojmu usmjerene ili orijentirane dužine. No, i tu trebamo biti precizniji: **usmjerena ili orijentirana dužina** je uređen par točaka (A, B), $A, B \in E^3$, dakle, element skupa $E^3 \times E^3$. Tu usmjerenu dužinu označavamo sa $\overrightarrow{AB}$, točku A nazivamo početkom (početnom točkom), a točku B završetkom ili krajem (završnom ili krajnjom točkom) usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$. Usmjerenoj dužini pridružujemo i dužinu $\overline{AB}$ kojoj pri crtnji stavljamo i strelicu:



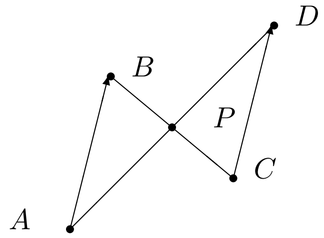
Iz pojma usmjerene dužine gradi se pojam vektora. Jednostavno rečeno, vektor je **skup** svih paralelnih usmjerenih dužina jednake duljine:

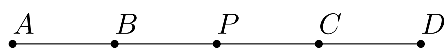


Da bismo precizno definirali pojam vektora, uvedimo najprije sljedeću relaciju na skupu svih usmjerenih dužina u $E^3 \times E^3$.

Definicija 2.1 *Za usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da su* **ekvivalentne** *ako dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju zajedničko polovište. Pišemo $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.*

Na sljedećoj su slici prikazane ekvivalentne usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$. Moguće su situacije: točke A, B, C, D ne leže na istom pravcu ili točke A, B, C, D leže na istom pravcu.





U prvoj situaciji možemo primijetiti da je četverokut $ABDC$ paralelogram. Zaista, sjetimo se da je paralelogram četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima, a to je ako i samo ako se dijagonale tog četverokuta raspolavljaju. Prema tome, usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ su ekvivalentne ako i samo ako je četverokut $ABDC$ paralelogram ili ako i samo ako točke A, B, C, D leže na istom pravcu i dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju zajedničko polovište. Odavde slijedi da je definicija relacije $\sim$ dobra i na pravcu E^1, u ravnini E^2 i u prostoru E^3. Mi ćemo je razraditi samo za E^3.

Propozicija 2.2 *Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $E^3 \times E^3$.*

Dokaz. Refleksivnost i simetričnost relacije $\sim$ su očite. Pokažimo tranzitivnost. Neka je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$. Pretpostavimo da usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ leže na tri različita pravca u E^3. Koristimo i sljedeću karakterizaciju paralelograma: četverokut $ABDC$ paralelogram, ako i samo ako je $|AB| = |CD|$ i pravci AB i CD su paralelni ($|AB|$ označava duljinu dužine $\overline{AB}$, a AB pravac određen točkama A, B). Kako iz pretpostavke slijedi da je četverokut $ABDC$ paralelogram, to je pravac AB paralelan pravcu CD i duljina dužine $\overline{AB}$ je jednaka duljini dužine $\overline{CD}$. Analogno, iz pretpostavke slijedi da je četverokut $CDFE$ paralelogram, pa je $|CD| = |EF|$ i $CD \parallel EF$. No, kako su relacije paralelnosti i jednakosti duljina dužina tranzitivne, slijedi $|AB| = |EF|$ i $AB \parallel EF$, tj. četverokut $ABFE$ je paralelogram. Prema tome je $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$. Slično se pokazuje tranzitivnost i u ostalim slučajevima. $\square$

Svaka relacija ekvivalencije rastavlja skup na kojem je definirana na disjunktne podskupove koje nazivamo klasama ekvivalencije. Svaka klasa ekvivalencije sastoji se od elemenata skupa koji su međusobno ekvivalentini i od samo njih. Primijenimo li te činjenice na skup $E^3 \times E^3$, imamo sljedeću definiciju:

Definicija 2.3 **Vektor** *je klasa ekvivalencije po relaciji $\sim$ na skupu svih usmjerenih dužina $E^3 \times E^3$. Skup svih vektora označavamo sa V^3.*

Klasu ekvivalencije određenu usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$ označavat ćemo sa $[\overrightarrow{AB}]$. Dakle, vrijedi

$$[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} \in E^3 \times E^3 | \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Kažemo da je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ **predstavnik ili reprezentant** vektora $[\overrightarrow{AB}]$. Pišemo $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]$.

Vektore kraće označavamo i malim latinskom slovima sa strelicom $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \ldots, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$.

Napomena 2.4 *Promatrali smo prostor E^3 s točkovnom strukturom i u njemu definirali vektore. Da smo krenuli od E^1, odnosno E^2, i na njima podrazumijevali točkovnu strukturu, te da smo definirali usmjerene dužine i relaciju $\sim$ na isti način kao u E^3, definirali bismo vektore na pravcu, odnosno u ravnini. Odgovarajuće skupove vektora označavamo s V^1, V^2.*

Uvedimo sad neke istaknute vektore. Promotrimo najprije klasu $[\overrightarrow{AA}]$. Koje usmjerene dužine pripadaju toj klasi? Neka je $\overrightarrow{PQ} \in [\overrightarrow{AA}]$. Tada je $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{PQ}$, pa dužine $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$ imaju zajedničko polovište. To je moguće ako i samo ako je $P = Q$. Dakle,

$$[\overrightarrow{AA}] = \left\{ \overrightarrow{PP} | P \in E^3 \right\}.$$

Vektor $[\overrightarrow{AA}]$ nazivamo **nulvektorom** i označavamo $\overrightarrow{0}$.

Nadalje, za vektor $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$, definiramo vektor $-\overrightarrow{a}$ kao vektor s predstavnikom $\overrightarrow{BA}$. Vektor $-\overrightarrow{a}$ nazivamo **suprotnim vektorom** vektora $\overrightarrow{a}$. Očito vrijedi $-(-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$.

Vektorima možemo birati predstavnike. Vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 2.5 *Neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $C \in E^3$. Tada postoji jedinstvena točka $D \in E^3$ takva da je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{CD}]$.*

Dokaz. Ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, tada je $B = A$, pa je $D = C$. Neka je $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Ako točke A, B, C leže na istom pravcu, onda je točka D ona (jedinstvena) točka tog pravca takva da dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju zajedničko polovište. Ako točka C ne leži na pravcu AB, tada slijedi (po 5. Euklidovom aksiomu) da postoji jedinstveni pravac koji prolazi točkom C paralelno s pravcem AB i jedinstveni pravac koji prolazi točkom B paralelno s pravcem AC. Presjek tih pravaca je tražena točka D. Kako je zbog konstrukcije dobiveni četverokut $ABDC$ paralelogram, to je $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$. $\square$

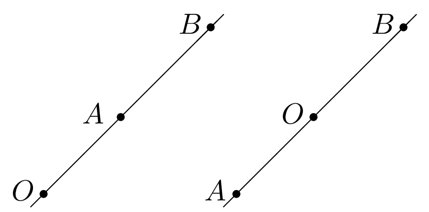
Za vektor $\overrightarrow{a}$ iz propozicije kažemo da smo ga *nanijeli iz točke $C \in E^3$*.

Za vektor definiramo i pojmove modula, smjera i orijentacije. Neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$. **Modul** ili **duljina** vektora $\overrightarrow{a}$ je duljina dužine $\overline{AB}$. Modul označavamo $|\overrightarrow{a}|$, dakle, $|\overrightarrow{a}| = |AB|$. Očito je definicija dobra, tj. ne ovisi o izboru predstavnika za vektor $\overrightarrow{a}$. Naime, ako je $\overrightarrow{CD}$ neki drugi predstavnik od $\overrightarrow{a}$, tada je četverokut $ABDC$ paralelogram, pa su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednakih duljina. Slično razmišljamo i ako točke A, B, C, D leže na jednom pravcu. Uočimo da je nulvektor jedini vektor modula 0.

Smjer vektora $\overrightarrow{a}$ je smjer pravca AB. Pritom je smjer pravca definiran kao klasa ekvivalencije na skupu svih pravaca u E^3 s obzirom na relaciju ekvivalencije "biti paralelan". Dakle, smjer pravca je klasa (skup) svih međusobno paralelnih pravaca. Očito definicija smjera vektora ne ovisi o izboru predstavnika vektora. Za nulvektor smjer ne definiramo (i to je jedini takav vektor).

Kažemo da su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ **kolinearni** ako su istog smjera. Dogovorom usvajamo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.

Orijentacija vektora je "relativan" pojam, tj. definiramo je s obzirom na druge vektore (kolinearne s promatranim vektorom). Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ kolinearni vektori. Po propoziciji (2.5) možemo odabrati njihove predstavnike s početkom u istoj točki O, $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Kažemo da su vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ **jednako orijentirani** ako točke A, B leže s iste strane točke O, a **suprotno orijentirani** ako leže s različitih strana.



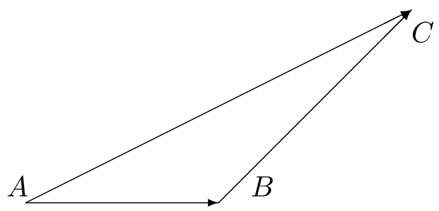
Očito vrijedi sljedeća tvrdnja:

Propozicija 2.6 *Vektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.*

Sljedeći nam je cilj definirati neke operacije s vektorima - pritom definiramo novi vektor kojeg opisujemo na jedan od dva moguća načina, ili preko predstavnika (koristeći definiciju vektora), ili modulom, smjerom i orijentacijom (koristeći propoziciju (2.6)).

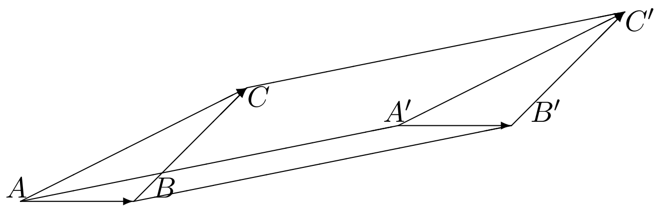
Definicija 2.7 *Neka su* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$, $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{BC}]$. **Zbroj vektora** $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ *određen predstavnikom* $\overrightarrow{AC}$*:*

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{AC}]$$



Kažemo da smo vektore zbrojili **po pravilu trokuta**.

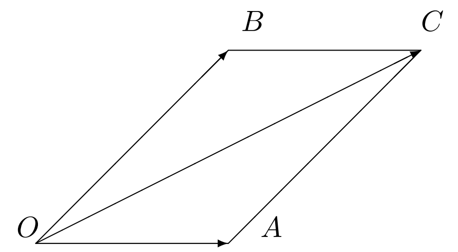
Pokažimo da definicija zbroja ne ovisi o izboru predstavnika. Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ dani i svojim predstavnicima $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$. Tada su četverokuti $ABB'A'$ i $BCC'B'$ paralelogrami



pa su dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ paralelne i jednake duljine. Dakle, i dužine $\overline{AA'}$ i $\overline{CC'}$ su paralelne i jednake duljine. Stoga je četverokut $ACC'A'$ paralelogram. Odavde je $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$. Slično se tvrdnja pokazuje i u slučaju kad izabrane točke leže na pravcu.

Zbrajanje vektora može se definirati i na sljedeći način: neka je $O \in E^3$ po volji izabrana točka i neka su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ dani svojim predstavnicima s početkom u točki O, $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Zbroj vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je vektor $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}]$, pri čemu je C jedinstvena točka u E^3 takva da je četverokut $OACB$ paralelogram:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OC}]$$



Ovakav način zbrajanja vektora nazivamo **zbrajanje vektora po pravilu paralelograma**.

Ni ova definicija zbrajanja vektora ne ovisi o izboru predstavnika za vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Dokaz se provodi na analogan način kao za pravilo trokuta.

Nadalje, izborom drugog predstavnika za vektor $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{AC}]$, lako se je uvjeriti da su definicije zbrajanja vektora po pravilu trokuta i paralelograma ekvivalentne.

Sljedeća operacija koju definiramo je množenje vektora skalarom:

Definicija 2.8 **Množenje vektora skalarom** *je operacija* $: \mathbb{R} \times V^3 \to V^3$ *koja uređenom paru* $(\alpha, \overrightarrow{a})$ *pridružuje vektor u oznaci* $\alpha\overrightarrow{a}$ *kojemu je*

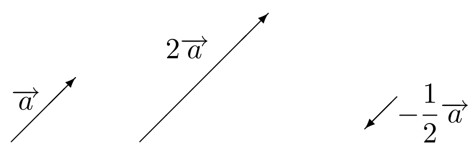
1. *modul:* $|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha||\overrightarrow{a}|$,
2. *smjer: isti kao smjer od* $\overrightarrow{a}$*, ako su oba vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\alpha\overrightarrow{a}$ *različiti od nulvektora,*
3. *orijentacija: jednaka kao* $\overrightarrow{a}$ *ako je* $\alpha > 0$ *i suprotna od* $\overrightarrow{a}$ *ako je* $\alpha < 0$.

Primijetimo da vrijedi: $\alpha\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Zaista, ako je $\alpha = 0$ ili $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, iz definicije odmah slijedi

$$|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha||\overrightarrow{a}| = 0. \tag{2.1}$$

Obratno, ako vrijedi (2.1), tada je jedan ili drugi faktor tog izraza jednak 0, tj. $|\alpha| = 0$ ili $|\overrightarrow{a}| = 0$. Iz prve relacije slijedi $\alpha = 0$, a iz druge $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

U ovom kontekstu, realne brojeve nazivamo **skalarima**.



Propozicija 2.9 $(-1)\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$.

Dokaz. Kako je vektor jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom, usporedimo te veličine za vektore $(-1)\overrightarrow{a}$ i $-\overrightarrow{a}$: modul vektora $(-1)\overrightarrow{a}$ je $|-1||\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|$, smjer vektora $(-1)\overrightarrow{a}$ jednak je smjeru od $\overrightarrow{a}$, a orijentacija je suprotna, jer je $-1 < 0$. Prema tome, navedeni vektori su jednaki. $\square$

Napomena 2.10 *Razliku vektora* $\vec{a} - \vec{b}$ *definiramo kao* $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Napomena 2.11 *Uočimo da su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ *kolinearni, što slijedi iz definicije množenja vektora skalarom. Pokazat ćemo i obrat: ako su vektori* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *i* $\vec{b}$ *kolinearni, tada postoji jedinstveni skalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *takav da je* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

Teorem 2.12 *Ako su vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *po volji izabrani vektori iz* V^3, α, β *realni brojevi, tada vrijedi*

1. $\vec{a} + \vec{b} \in V^3$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, *asocijativnost*
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\vec{0}$ *je neutralni element za zbrajanje*
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$, $-\vec{a}$ *je suprotni element od* $\vec{a}$ *za zbrajanje*
5. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, *komutativnost*
6. $\alpha\vec{a} \in V^3$
7. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$, *kvaziasocijativnost*
8. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, *distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora*
9. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, *distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara*
10. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Uz navedena svojstva zbrajanja i množenja skalarom na skupu V^3, kažemo da je V^3 jedan **vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.** Općenito, skup na kojemu su definirane operacije zbrajanja elemenata i množenja elemenata skalarima iz $\mathbb{R}$ koje zadovoljavaju svojstva teorema 2.12 nazivamo **vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.** Takve apstaktne strukture proučavat će se u kolegiju **Linearna algebra**.

Dokaz. Tvrdnje 1. i 6. su posljedice definicije.

2. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$, $\vec{c} = [\overrightarrow{CD}]$. Tada po pravilu trokuta imamo

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = ([\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}]) + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AD}],$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = [\overrightarrow{AB}] + ([\overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{CD}]) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AD}].$$

3. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{0} = [\overrightarrow{AA}]$. Tada je

$$\vec{0} + \vec{a} = [\overrightarrow{AA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{a}.$$

Slično, za drugi dio tvrdnje uzimamo $\vec{0} = [\overrightarrow{BB}]$, pa je

$$\vec{a} + \vec{0} = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}] = \vec{a}.$$

4. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $-\vec{a} = [\overrightarrow{BA}]$. Tada je

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{AA}] = \vec{0},$$

$$-\vec{a} + \vec{a} = [\overrightarrow{BA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{BB}] = \vec{0}.$$

5. Neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{BC}]$. Tada je

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{AC}].$$

S druge strane, neka je $D \in E^3$ točka takva da je $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{BC}$. Tada je i $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{DC}$, pa je

$$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = [\overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{DC}] = [\overrightarrow{AC}].$$

7. Ako je α ili β jednako 0 ili $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, tvrdnja je očita. Stoga, neka su α i β različiti od 0, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tvrdnju ćemo pokazati tako da ispitamo modul, smjer i orijentaciju vektora s lijeve i desne strane jednakosti:

   (i) Modul: $|\alpha(\beta\overrightarrow{a})| = |\alpha||\beta\overrightarrow{a}| = |\alpha|(|\beta||\overrightarrow{a}|) = (|\alpha||\beta|)|\overrightarrow{a}| = (|\alpha\beta|)|\overrightarrow{a}|$;

   (ii) Smjer: po definiciji, smjer oba vektora jednak je smjeru vektora $\overrightarrow{a}$;

   (iii) Orijentacija: Postoje četiri mogućnosti

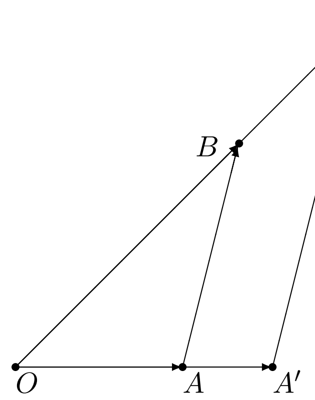
      (a) Ako je $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tada je $\beta\overrightarrow{a}$ orijentiran kao $\overrightarrow{a}$, pa je $\alpha(\beta\overrightarrow{a})$ orijentiran kao $\overrightarrow{a}$. S druge strane je $\alpha\beta > 0$, pa je vektor $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ orijentiran kao $\overrightarrow{a}$.

      (b) Ako je $\alpha > 0$, $\beta < 0$, tada su vektori $\alpha(\beta\overrightarrow{a})$ i $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ orijentirani suprotno od $\overrightarrow{a}$.

      (c) Ako je $\alpha < 0$, $\beta > 0$, tada su vektori $\alpha(\beta\overrightarrow{a})$ i $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ orijentirani suprotno od $\overrightarrow{a}$.

      (d) Ako je $\alpha < 0$, $\beta < 0$, tada su vektori $\alpha(\beta\overrightarrow{a})$ i $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}$ orijentirani jednako kao $\overrightarrow{a}$.

8. Ako je $\alpha = 0$, tvrdnja je očita. Neka je stoga $\alpha \neq 0$. Pretpostavimo najprije da $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nemaju isti smjer. Neka je $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{AB}]$. Tada je $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$. Neka je nadalje $\alpha\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA'}]$. Kako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\alpha\overrightarrow{a}$ istog smjera, to su točke O, A, A' na istom pravcu. Odaberimo točku B' na pravcu OB tako da su trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B'$ slični.



Iz sličnosti slijedi da je $AB \parallel A'B'$ i $|A'B'| = |\alpha||AB|$, te zaključujemo $[\overrightarrow{A'B'}] = \alpha[\overrightarrow{AB}] = \alpha\overrightarrow{b}$. S druge strane također je $|OB'| = |\alpha||OB|$ i točke O, B, B' leže na istom pravcu, pa je $[\overrightarrow{O'B'}] = \alpha[\overrightarrow{OB}]$. Prema tome, dobili smo

$$\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha[\overrightarrow{OB}],$$

$$\alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OA'}] + [\overrightarrow{A'B'}] = [\overrightarrow{OB'}] = \alpha[\overrightarrow{OB}].$$

9. U dokazu ove tvrdnje, opet razmatramo različite mogućnosti za predznake od α, β. Primjerice, pokažimo tvrdnju u slučaju $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $|\alpha| > |\beta|$, te je $\alpha + \beta > 0$. Neka je $\alpha\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\beta\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{BC}]$. Kako su ti vektori kolinearni, točke A, B, C leže na istom pravcu. Nadalje, jer je $\alpha > 0$, $\beta < 0$, ti su vektori suprotnih orijentacija. Kako je $|\alpha| > |\beta|$, to je

$$|AB| = |\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha||\overrightarrow{a}| > |\beta||\overrightarrow{a}| = |\beta\overrightarrow{a}| = |BC|,$$

pa točka C leži između točaka A i B.

Stoga je $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AC}]$ i vrijedi da se sljedeće veličine podudaraju:

(i) moduli vektora: $|\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}| = |AC| = |\alpha||\overrightarrow{a}| - |\beta||\overrightarrow{a}| = \alpha|\overrightarrow{a}| + \beta|\overrightarrow{a}| = (\alpha + \beta)|\overrightarrow{a}| = |\alpha + \beta||\overrightarrow{a}| = |(\alpha + \beta)\overrightarrow{a}|$,

(ii) smjerovi vektora: $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$ i $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a}$,

(iii) orijentacije vektora: $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$ i $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a}$, jer su jednako orijentirani kao $\overrightarrow{a}$.

10. Vektori $1\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{a}$ očito imaju isti modul, smjer i orijentaciju.

$\square$

3 Baza vektorskog prostora V^3. Koordinatizacija

Već smo definirali kolinearne vektore kao vektore istog smjera. Uočili smo i da su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\alpha\overrightarrow{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ kolinearni. Vrijedi i ovakav obrat:

Propozicija 3.1 *Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in V^3$ kolinearni vektori, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Tada postoji jedinstven skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.*

Dokaz. Ako je $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, stavimo $\lambda = 0$. Očito je $\lambda = 0$ jedini takav skalar.

Ako $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, uočimo skalar $\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|} \neq 0$ i usporedimo vektore $\overrightarrow{b}$ i $\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$. Oni imaju jednak modul

$$|\frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}|\overrightarrow{a}|| = \frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|,$$

i jednak smjer, jer je vektor $\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$ po definiciji množenja vektora skalarom kolinearan s $\overrightarrow{a}$.

Njihove orijentacije ne moraju biti jednake, vektor $\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$ ima istu orijentaciju kao $\overrightarrow{a}$, dok vektor $\overrightarrow{b}$ ne mora imati. No, izborom predznaka skalara $\lambda = \pm\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, postižemo da su vektori $\overrightarrow{b}$ i $\lambda\overrightarrow{a}$ i jednako orijentirani. Iz svega navedenog zaključujemo da se oni podudaraju

$$\overrightarrow{b} = \pm\frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}.$$

Pokažimo još da je skalar λ iz tvrdnje jednoznačno određen. Pretpostavimo da postoje dva takva skalara, $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} = \lambda'\overrightarrow{a}$. Tada vrijedi $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda'\overrightarrow{a}$, odnosno $(\lambda - \lambda')\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, iz čega slijedi, zbog $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\lambda - \lambda' = 0$. □

Sad smo kolinearnost vektora (geometrijski pojam) uspjeli realizirati algebarski. Malu smetnju u prethodnoj propoziciji čini nesimetričnost pretpostavke $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. No, to možemo riješiti na sljedeći način. Uvjet iz prethodne propozicije možemo zapisati i kao

$$\lambda\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}. \tag{3.2}$$

Ako vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ zamijenimo uloge, tada imamo

$$-\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}. \tag{3.3}$$

Ovo vodi na promatranje općenitije jednadžbe za zadane vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}. \tag{3.4}$$

Tražimo skalare α, β za koje je ta jednadžba ispunjena. Jedna mogućnost kada je ta jednadžba svakako ispunjena je $\alpha = \beta = 0$. Takav izbor skalara nazivamo trivijalnim. Iz jednakosti (3.2), (3.3) slijedi da je u slučaju kad su vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ kolinearni jednakost ispunjena i za $\alpha = \lambda$, $\beta = -1$ za (3.2), odnosno $\alpha = -1$, $\beta = \lambda$ za (3.3). Dakle, u slučaju kad su vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ kolinearni, jednakost je ispunjena i za netrivijalni izbor skalara.

Obratno, ako je primjerice $\alpha \neq 0$, tada je moguće pisati

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b},$$

iz čega slijedi da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni. Analogno vrijedi u situaciji ako je $\beta \neq 0$. Time smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.2 *Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji netrivijalan izbor skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$.*

Definicija 3.3 *Izraz oblika $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ zove se* **linearna kombinacija** *vektora $\vec{a}, \vec{b}$ s koeficijentima α, β. Analogo i za k vektora, izraz oblika $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$ zove se* **linearna kombinacija** *vektora $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.*

Definicija 3.4 *Za vektore $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ kažemo da su* **nekolinearni** *ako nisu kolinearni.*

Iz prethodnih propozicija slijedi:

Propozicija 3.5 *Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako je jednakost $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ ispunjena* **samo** *za trivijalan izbor skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Drugačije rečeno:

Propozicija 3.6 *Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako iz jednakosti $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ slijedi $\alpha = \beta = 0$.*

Ili:

Propozicija 3.7 *Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako jednadžba $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ ima* **jedinstveno** *rješenje $\alpha = \beta = 0$.*

Definicija 3.8 *Kažemo da je vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$* **paralelan** *s ravninom $\Pi \subset E^3$, $\vec{a} \parallel \Pi$, ako je pravac AB paralelan sa Π (pravac je paralelan s ravninom ako je paralelan s nekim pravcem u ravnini). Za vektore koji su paralelni s istom ravninom, kažemo da su* **komplanarni**.

Definicija parelelnosti vektora očito ne ovisi o izboru predstavnika.

Propozicija 3.9 *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i neka je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Tada su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.*

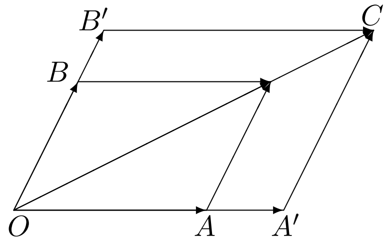
Dokaz. Po definiciji zbrajanja vektora (pravilom trokuta ili paralelograma) slijedi da je zbroj vektora paralelan s ravninom određenom zadanim vektorima. □

Zanimljiv je obrat prethodne propozicije:

Propozicija 3.10 *Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ nekolinearni vektori, te neka je $\overrightarrow{c} \in V^3$ s njima komplanaran vektor. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}.$$

Dokaz. Neka je $O \in E^3$ bilo koja točka, $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}]$. Kako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ komplanarni, točke O, A, B, C leže u istoj ravnini, a jer $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nisu kolinearni, točke O, A, B ne leže na istom pravcu.



Projicirajmo paralelno točku C na pravac OA i na pravac OB. Dobivamo točke A' na pravcu OA i B' na pravcu OB. Iz definicije zbrajanja vektora po pravilu paralelograma slijedi

$$[\overrightarrow{OC}] = [\overrightarrow{OA'}] + [\overrightarrow{OB'}].$$

Vektor $[\overrightarrow{OA'}]$ je kolinearan s vektorom $[\overrightarrow{OA}]$, pa primjenom propozicije 3.1 zaključujemo da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $[\overrightarrow{OA'}] = \alpha[\overrightarrow{OA}]$. Analogno postoji $\beta \in \mathbb{R}$ takav da je $[\overrightarrow{OB'}] = \beta[\overrightarrow{OB}]$. Time smo dobili

$$\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}.$$

Dokažimo još jedinstvenost prikaza. Neka je također $\overrightarrow{c} = \alpha' \overrightarrow{a} + \beta' \overrightarrow{b}$. Tada slijedi $(\alpha - \alpha')\overrightarrow{a} + (\beta - \beta')\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. Kako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nekolinearni vektori, to je moguće jedino ako je $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ (propozicija 3.6). □

Osvrnimo se na trenutak na V^2. Uočimo da u V^2 uvijek možemo naći dva nekolinearna vektora (posljedica aksioma, u ravnini postoje tri nekolinearne točke). Prethodna propozicija, adaptirana za V^2 glasi:

Propozicija 3.11 *Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2$ nekolinearni vektori, te neka je $\overrightarrow{c} \in V^2$ po volji odabran vektor. Tada postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}.$$

Uočimo dva momenta: **postojanje** (egzistencija) rastava i **jedinstvenost** rastava. Ako bismo odabrali tri vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^2$ (mogu li oni biti nekolinearni?) i vektor $\overrightarrow{d}$ kojeg želimo napisati kao njihovu linearnu kombinaciju, tada bi prikaz postojao, ali ne bi bio jedinstven (ispitajte na primjeru). Slično, samo s jednim vektorom ne bismo mogli prikazati sve druge vektore iz V^2, prikaz ne bi postojao. Dakle, skup od dva kolinearna vektora je najmanji mogući koji zadovoljava oba svojstva. U tom smislu definiramo:

Definicija 3.12 **Baza** *vektorskog prostora V^2 je skup $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ od dva nekolinearna vektora.*

Uočimo da postoje mnoge različite baze, ali svima je zajedničko da sadrže točno dva vektora. Kažemo da je V^2 dvodimenzionalan vektorski prostor. Pišemo $\dim V^2 = 2$.

U V^3 dva vektora nisu dovoljna za prikaz po volji odabranog vektora. Uočimo i da u V^3 uvijek možemo naći tri nekomplanarna vektora.

Propozicija 3.13 *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ tri nekomplanarna vektora. Ako je $\vec{d} \in V^3$ bilo koji vektor, onda postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Dokaz. Neka je $O \in E^3$ bilo koja točka, $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$, $\vec{d} = [\overrightarrow{OD}]$. Kako $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nisu komplanarni, točke O, A, B, C ne leže u istoj ravnini. Uočimo i da nikoja dva među vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nisu kolinearna.

Projicirajmo točku D paralelno s pravcem OC na ravninu OAB i označimo projiciranu točku s D'. Projicirajmo još točku D paralelno s ravninom OAB na pravac OC i označimo projiciranu točku sa C'. Očito je

$$[\overrightarrow{OD}] = [\overrightarrow{OD'}] + [\overrightarrow{OC'}].$$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\overrightarrow{OD'}]$ su komplanarni, te po propoziciji 3.10 postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$[\overrightarrow{OD'}] = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Nadalje, vektor $[\overrightarrow{OC'}]$ je kolinearan s vektorom $[\overrightarrow{OC}]$, pa po propoziciji 3.1 postoji skalar $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\overrightarrow{OC'}] = \gamma\vec{c}.$$

Prethodna tri zaključka, daju tvrdnju. Dokažimo još jedinstvenost prikaza. Ako vrijedi i $\vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}$ i kad bi bilo $\gamma \neq \gamma'$, slijedilo bi

$$\vec{c} = \frac{1}{\gamma' - \gamma}\left((\alpha - \alpha')\vec{a} + (\beta - \beta')\vec{b}\right),$$

što bi značilo da su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni, suprotno pretpostavci. Analogno se isključuju mogućnosti $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$. $\square$

Sada definiramo:

Definicija 3.14 *Bilo koji skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ od tri nekomplanarna vektora nazivamo* **bazom** *od V^3. Kažemo da je V^3 trodimenzionalan vektorski prostor.*

Zadatak. Što je baza vektorskog prostora V^1? Kolika je njegova dimenzija?

Pogledajmo još jednom propoziciju 3.10. Jednakost iz te propozicije možemo zapisati i na sljedeći način

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - 1\vec{c} = \vec{0}.$$

Dakle, u ovom je slučaju jednadžba

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

ispunjena na netrivijalan način. Sličnim razmatranjem kao i u slučaju dva nekolinearna vektora, pokazat ćemo:

Propozicija 3.15 *Vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ su nekomplanarni ako i samo ako jednakost*

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \tag{3.5}$$

povlači $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ nekomplanarni. Dakle, oni čine bazu za V^3. Tada se svaki vektor, pa i $\overrightarrow{0}$, može na jedinstveni način prikazati kao njihova linearna kombinacija. Kako je za $\overrightarrow{0}$ svakako jedan prikaz

$$0\overrightarrow{a} + 0\overrightarrow{b} + 0\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0},$$

jedinstvenost nam daje da je to upravo traženi prikaz, dakle, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Obratno, neka je ispunjen uvjet propozicije, iz jednadžbe (3.5) slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Uočimo najprije da je svaki od vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ različit od nulvektora. Naime, kad bi neki bio nulvektor, npr. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, tada bismo mogli uzeti bilo koji skalar različit od 0 i pritom bi jednadžba (3.5) i dalje bila ispunjena, ali uvjet da iz nje slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ne bi bio ispunjen, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Slično, nikoja dva vektora nisu kolinearna. Naime, kad bi $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ bili kolinearni, tada bi postojao $\lambda \neq 0$, takav da je $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$, pa bi uz $\gamma = 0$ mogli naći netrivijalne skalare α, β tako da je jednadžba (3.5) zadovoljena, ali uvjet iz propozicije opet ne.

Pretpostavimo još na kraju da je $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$ komplanaran s $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$. Tada bi postojali skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji nisu istovremeno 0, te bismo mogli pisati

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + (-1)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0},$$

što je opet kontradikcija s pretpostavkom. □

Napomena 3.16 *U kolegiju Linearna algebra definirat će se: Skup vektora $\{\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_k\}$ je* **linearno nezavisan** *ako $\alpha_1\overrightarrow{a}_1 + \ldots + \alpha_k\overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}$ povlači $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. U suprotnom se kaže da je skup* **linearno zavisan** *(dakle, vrijedi prva jednadžba i postoje netrivijalni skalari za koje je ispunjena). Specijalizacijom te definicije za $k = 2$ dobivamo da je skup vektora u V^2 linearno nezavisan ako i samo ako su vektori nekolinearni, a za $k = 3$ skup vektora u V^3 je linearno nezavisan ako i samo ako su vektori nekomplanarni. U V^2 skup od bilo koja tri vektora je linearno zavisan, a u V^3 skup od bilo koja četiri vektora je linearno zavisan.*

Neka je u V^3 zadana baza $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$ i neka je $\overrightarrow{a} \in V^3$ neki vektor. Tada po propoziciji 3.11 postoje jedinstveni skalari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{a}_1 + \alpha_2\overrightarrow{a}_2 + \alpha_3\overrightarrow{a}_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\overrightarrow{a}_i.$$

Sljedeće preslikavanje nazivamo **koordinatizacija** prostora V^3

$$k : V^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; k(\overrightarrow{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

gdje je $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ skup svih uređenih trojki realnih brojeva.

Očito vrijedi:

Propozicija 3.17 *Preslikavanje k je bijekcija.*

Ovim je postupkom vektor predstavljen (na jednoznačan način) kao uređena trojka realnih brojeva. Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nazivamo **koordinatama** vektora $\overrightarrow{a}$ u odnosu na zadanu bazu, a uređenu trojku $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ **koordinatnim prikazom** vektora $\overrightarrow{a}$. Uočimo da koordinate odnosno koordinatni prikaz vektora ovisi o zadanoj bazi! Pišemo $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ kad znamo s obzirom na koju bazu smo koordinatizirali V^3.

Slično bismo koordinatizirali V^1 i V^2. Za V^2 definiramo

$$k : V^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ k(\overrightarrow{a}) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

gdje je $\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a}_2$ za bazu $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2\}$, a $\mathbb{R}^2$ je skup svih uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
Za V^1 definiramo

$$k : V^1 \to \mathbb{R}, \ \ k(\overrightarrow{a}) = \alpha_1,$$

gdje je $\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{a}_1$, a $\{\overrightarrow{a}_1 \neq \overrightarrow{0}\}$ baza od V^1.

Promotrimo kako se zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom realiziraju u njihovim koordinatnim prikazima. Neka je u V^3 zadana baza $\{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3\}$ i neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{a}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{a}_3 + \beta_1 \overrightarrow{a}_1 + \beta_2 \overrightarrow{a}_2 + \beta_3 \overrightarrow{a}_3 =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{a}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{a}_3,$$

te je koordinatni prikaz vektora $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ jednak

$$(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3).$$

Slično $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda\alpha_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda\alpha_2 \overrightarrow{a}_2 + \lambda\alpha_3 \overrightarrow{a}_3$, te je koordinatni prikaz vektora $\lambda\overrightarrow{a}$ jednak

$$(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3).$$

Specijalno $-\overrightarrow{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3)$.
Kada su vektori kolinearni? Po propoziciji 3.1 za kolinearne vektore $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b}$ postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ iz čega slijedi da za koordinate vektora dobivamo

$$\beta_i = \lambda\alpha_i, \ \ i = 1, 2, 3.$$

Dakle, vektori su kolinearni ako za njihove koordinate vrijedi $\beta_1 : \alpha_1 = \beta_2 : \alpha_2 = \beta_3 : \alpha_3$ ili drugačije zapisano $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$.

Napomena 3.18 *Ako u $\mathbb{R}^3$ definiramo zbrajanje uređenih trojki i množenje uređene trojke skalarom formulama*

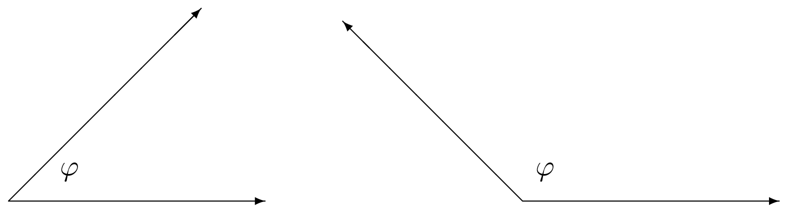
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

$$\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3),$$

tada $\mathbb{R}^3$ ispunjava uvjete teorema 2.12, te postaje vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Slično vrijedi za $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$.

4 Skalarni produkt. Ortonormirana baza

Da bismo definirali skalarni produkt dvaju vektora, prvo trebamo uvesti pojam kuta. Pod kutom dvaju ne-nulvektora podrazumijevamo mjerni broj manjeg od dva kuta polupravaca određenim tim vektorima. Prema tome, kut dvaju vektora je element segmenta $[0, \pi]$.



Ako je jedan od vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nulvektor, tada kut između njih ne definiramo.

Očito je kut dvaju vektora dobro definiran pojam, tj. ne ovisi o izboru predstavnika vektora (kutovi s paralelnim kracima!). Nadalje vrijedi i $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$. Ako je $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/2$, tada kažemo da su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ okomiti, pišemo $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Uočimo da su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ kolinearni ako i samo ako je $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$ ili $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi$. U prvom su slučaju vektori jednako, a u drugom suprotno orijentirani.

Definicija 4.1 **Skalarno množenje** *vektora je operacija* $\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ *koja vektorima* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *različim od nulvektora pridružuje skalar*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

Ako je neki od vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *nulvektor, tada definiramo* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

Vrijednost $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}$ *nazivamo* **skalarnim umnoškom** *ili* **produktom** *vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$.

Pomoću skalarnog produkta možemo karakterizirati okomitost vektora:

Propozicija 4.2 *Neka su* $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \in V^3$. *Vektori* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *su okomiti ako i samo ako je* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

Dokaz. Kako su $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, očito je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$$

ako i samo ako je $\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$, što znači $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/2$. □

Pomnožimo li skalarno vektor $\overrightarrow{a}$ sa samim sobom, dobivamo **skalarni kvadrat** vektora $\overrightarrow{a}$, pišemo $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^2$.

Skalarno množenje ima sljedeća svojstva:

Teorem 4.3 *Za sve* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

1. $\overrightarrow{a}^2 \geq 0$,

2. $\vec{a}^2 = 0$ *ako i samo ako je* $\vec{a} = \vec{0}$,

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, *komutativnost*

4. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, *kvaziasocijativnost*

5. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, *distributivnost prema zbrajanju.*

Prva dva svojstva skalarnog produkta nazivaju se *pozitivna definitnost.*

Dokaz.

1. $\vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0.$
2. $\vec{a}^2 = 0$ ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, dakle, ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}||\vec{a}| \cos\angle(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}.$
4. Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tvrdnja je očita.
   Uzmimo zato $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Ako je $\lambda > 0$, tada je $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$ i $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

   $$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

   Ako je $\lambda < 0$, tada je $|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$ i $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

   $$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

□

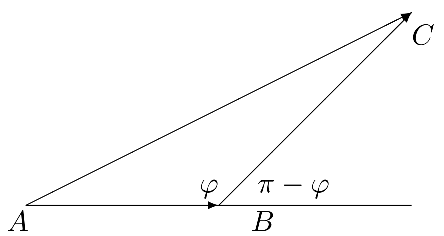
Za dokaz tvrdnje 5. treba nam sljedeća lema:

Lema 4.4 *Za sve* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

(a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$,

(b) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Dokaz. (a) Uzmimo da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$, tada je $\vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$.



Primjenom kosinusovog poučka na trokut $\triangle ABC$ dobivamo

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi =$$

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\varphi) = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori iste orijentacije, $\vec{a}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b}=[\overrightarrow{BC}]$, $\vec{a}+\vec{b}=[\overrightarrow{AC}]$, tada je

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{c}^{\,2} = |\vec{c}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Slično se pokazuje ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori suprotne orijentacije.
(b) Tvrdnja se dokazuje analogno. $\square$

Dokaz. Nastavak dokaza Teorema 4.3, tvrdnja 5:

$$4(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = 4\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (2\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}))^2 - 4\vec{c}^{\,2} - (\vec{a}+\vec{b})^2 =$$
$$(2\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}))^2 - 4\vec{c}^{\,2} + (\vec{a}-\vec{b})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 =$$
$$((\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c}))^2 + ((\vec{a}+\vec{c})-(\vec{b}+\vec{c}))^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^{\,2} =$$
$$2(\vec{a}+\vec{c})^2 + 2(\vec{b}+\vec{c})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^{\,2} = 4\vec{a}\cdot\vec{c} + 4\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

$\square$

Iz tvrdnji prethodne propozicije odmah slijedi i:

Korolar 4.5 *Za sve $\vec{a},\vec{b}\in V^3$ i $\lambda\in\mathbb{R}$ vrijedi*

4.' $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

5.' $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Dokaz. Iz teorema 4.3 slijedi

$$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{b})\cdot\vec{a} = \lambda(\vec{b}\cdot\vec{a}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Analogno se dokazuje tvrdnja 5'. $\square$

Ako u nekom vektorskom prostoru nad $\mathbb{R}$ definiramo množenje vektora s vrijednostima u $\mathbb{R}$ koje zadovoljava svojstva 1 do 5 teorema 4.3, tada se taj vektorski prostor naziva **unitarni prostor**. Prema tome, V^3 je jedan unitarni prostor.

Definicija 4.6 *Neka je $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ baza vektorskog prostora V^3 sa svojstvom da su vektori baze jedinični i međusobno okomiti (ortogonalni) tj. vrijedi*

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k} = 0.$$

Takvu bazu nazivamo **ortonormiranom**.

Navedimo još jednom: vektor $\vec{a}$ za koji je $|\vec{a}|=1$ nazivamo **jediničnim** ili **normiranim** vektorom.

Koordinate vektora u odnosu na ortonormiranu bazu nazivamo **ortogonalnim** ili **pravokutnim** koordinatama.

Izvedimo sada formulu za skalarni produkt vektora koji su zadani svojim koordinatnim prikazima u ortonormiranoj bazi.

Propozicija 4.7 *Neka je* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *ortonormirana baza za* V^3*, a koordinatni prikazi vektora* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$*,* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$*. Tada je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\beta_i.$$

Dokaz. Iz tablice množenja

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

i svojstava skalarnog množenja slijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \cdot (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

□

Sljedeći korolari vrijede za vektore zadane pravokutnim koordinatama:

Korolar 4.8 *Ne-nulvektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su okomiti ako i samo ako je*

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

Korolar 4.9 $|\vec{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

Korolar 4.10 $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$.

Posebno, pogledajmo kosinuse kutova što ga vektor zatvara s vektorima ortonormirane baze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\alpha_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\angle(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\alpha_2}{|\vec{a}|}, \quad \cos\angle(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{\alpha_3}{|\vec{a}|}. \tag{4.6}$$

Te vrijednosti nazivamo **kosinusi smjera** vektora $\vec{a}$. Za kosinuse smjera vrijedi:

Korolar 4.11 *Neka je* $\vec{a} \in V^3$*. Tada je*

$$\cos^2\angle(\vec{a}, \vec{i}) + \cos^2\angle(\vec{a}, \vec{j}) + \cos^2\angle(\vec{a}, \vec{k}) = 1.$$

Dokaz. Zbrajanjem formula (4.6). □

Zadatak. Dokažite nejednakost **Schwarz-Cauchy-Bunjakowskog**: Za $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}.$$

Rješenje. Uvedimo vektore $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ kojima su prikazi u nekoj ortonormiranoj bazi dani s

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, tvrdnja očito vrijedi. Za $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ imamo

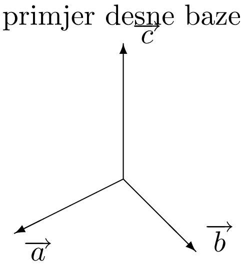
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

jer je $|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})| \leq 1$.

Uočimo da u prethodnoj tvrdnji jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori kolinearni.

5 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektora definiramo samo u vektorskom prostoru V^3. Operacijom vektorskog množenja dva vektora opet dobivamo vektor kojeg opisujemo pomoću njegovog *modula, smjera i orijentacije.* Da bismo definirali orijentaciju vektorskog produkta, uvodimo pojam **desno orijentirane ili desne baze** prostora V^3. Za bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ od V^3 kažemo da je desno orijentirana ili desna ako promatrajući s vrha vektora $\vec{c}$ uočavamo obilazak od vektora $\vec{a}$ do vektora $\vec{b}$ kraćim putom kao obilazak u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Za baze za koje je taj obilazak u smjeru kazaljke na satu, kažemo da su **lijevo orijentirane ili lijeve**. Tipičan primjer desne baze prikazan je na slici



Je li baza desna ili lijeva možemo odrediti i pravilom desne ruke odnosno desnog vijka. Kod **pravila desne ruke** ispruženi palac pokazuje prvi vektor, ispruženi kažiprst pokazuje drugi vektor, a savinuti srednji prst treći vektor. Kod **pravila desnog vijka** zaokruženim prstima od kažiprsta do malog prsta pokazujemo obilazak od prvog do drugog vektora, a treći vektor je određen ispruženim palcom.

Vektorsko množenje definiramo na sljedeći način:

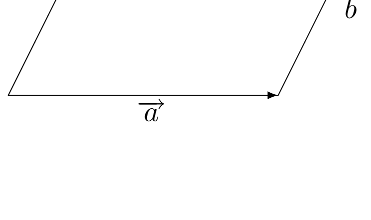
Definicija 5.1 Vektorsko množenje *je operacija* $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$ *koja paru vektora* $(\vec{a}, \vec{b})$ *pridružuje vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *definiran na sljedeći način:*

1. *ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *kolinearni, tada je* $\vec{c} = \vec{0}$*;*
2. *ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *nekolinearni, tada je*
   (a) *modul* $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
   (b) *smjer od* $\vec{c}$ *je smjer okomit na smjer od* $\vec{a}$ *i na smjer od* $\vec{b}$,
   (c) *orijentacija od* $\vec{c}$ *je takva da je uređena trojka* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *jedna desna baza od* V^3.

Sliku $\vec{a} \times \vec{b}$ *vektora* $\vec{a}, \vec{b}$ *nazivamo* **vektorskim umnoškom** *ili* **produktom** *vektora* $\vec{a}, \vec{b}$.

Zadatak. Zašto vektori $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ čine bazu?

Modul vektorskog produkta nekolinearnih vektora ima i **geometrijsku interpretaciju**: skalar $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednak je površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$.



Zaista, $P = |\vec{a}|v = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Propozicija 5.2 *Vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni.*

Dokaz. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni, tada je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ po definiciji. Obratno, neka je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Pretpostavimo da $\vec{a}, \vec{b}$ nisu kolinearni. Tada bi bilo

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0,$$

odakle je $|\vec{a}| = 0$ ili $|\vec{b}| = 0$ ili $\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Iz prve jednakosti slijedi $\vec{a} = \vec{0}$, iz druge $\vec{b} = \vec{0}$, a iz treće $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ ili π. Svaka od tih mogućnosti suprotna je pretpostavci. □

Korolar 5.3 *Za svaki $\vec{a} \in V^3$ vrijedi $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.*

Vektorsko množenje ima ova svojstva:

Teorem 5.4 *Za svaki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, *antikomutativnost*
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, *kvaziasocijativnost*
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, *distributivnost prema zbrajanju.*

Dokaz.

1. Slijedi direktno iz definicije.
2. Za $\lambda = 0$ tvrdnja očito vrijedi. Neka je sad $\lambda > 0$. Tada su vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ jednako orijentirani, pa je $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Sada za modul vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ vrijedi

$$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})) =$$

$$\lambda|\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|.$$

   Nadalje, smjer vektora $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ jednak je smjeru vektora $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, naime oba vektora imaju smjer kao vektor $\vec{a} \times \vec{b}$. Također, orijentacije tih vektora su jednake, vektori su jednako orijentirani kao vektor $\vec{a} \times \vec{b}$.

   Ako je $\lambda < 0$, uočimo da je $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$, te tvrdnju dokazujemo na sličan način.
3. Vidi knjigu: Horvatić *Linearna algebra*.

□

Za vektorsko množenje također vrijedi:

Korolar 5.5 *Za sve ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$) vrijedi:*

2' $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ *kvaziasocijativnost*

3' $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ *distributivnost prema zbrajanju.*

Dokaz.

2' Koristeći antikomutativnost vektorskog množenja zaključujemo

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -(\lambda \vec{b}) \times \vec{a} = -\lambda(\vec{b} \times \vec{a}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3' Analogno, koristeći antikomutativnost vektorskog množenja.

□

Vektorsko množenje nije asocijativno, tj. općenito vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ nisu jednaki. Pokažimo to primjerom: neka su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni (označimo s Π ravninu s kojom su paralelni) i neka $\vec{a}, \vec{c}$ nisu kolinearni. Tada su vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$ okomiti na Π, te su vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ paralelni s Π. No vektor $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ okomit je na $\vec{c}$, dok je vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ okomit na $\vec{a}$.

Nadalje, vektorsko množenje ne posjeduje neutralni element tj. vektor $\vec{e} \in V^3$ za koji bi bilo

$$\vec{a} \times \vec{e} = \vec{e} \times \vec{a} = \vec{a}, \quad \vec{a} \in V^3.$$

Naime, zbog antikomutativnost ne može biti $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{e} \times \vec{a}$, a $\vec{a} \times \vec{e} = \vec{a}$ ne može vrijediti za svaki $\vec{a} \in V^3$ jer je $\vec{a} \times \vec{e} \perp \vec{a}$.

Propozicija 5.6 *Za $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi*

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju 1. Neka je $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. To znači

$$\vec{d} \perp \vec{a} \times \vec{b}, \quad \vec{d} \perp \vec{c}.$$

Iz prve relacije slijedi da je $\vec{d}$ komplanaran s vektorima $\vec{a}, \vec{b}$. Tada prema propoziciji 3.10 postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da je $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Da dokažemo tvrdnju, trebamo odrediti skalare α, β. Kako je $\vec{d} \perp \vec{c}$, to je $\vec{d} \cdot \vec{c} = (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, pa je

$$\alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0.$$

Dakle, vrijedi $\alpha = -\lambda(\vec{b} \cdot \vec{c})$, $\beta = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{c})$, za neki skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Treba još pokazati $\lambda = 1$. Vidi knjigu Horvatić *Linearna algebra.* □

Korolar 5.7 *(Jacobijev identitet) Za $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dokaz. Iz propozicije 5.6 slijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a},$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b},$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo tvrdnju. $\square$

Uočimo da prethodni identitet pokazuje da su vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$, $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}$ komplanarni.

Vektorski prostor V^3 uz operaciju vektorskog množenja koja zadovoljava svojstva $1, 2, 3, 2', 3'$, i Jacobijev identitet postaje primjer strukture koja se naziva **Liejeva algebra** nad $\mathbb{R}$.

Zadatak. Pokažite **Lagrangeov identitet**

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Rješenje.

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}))^2 =$$

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2 \angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Cilj nam je sada naći formulu za vektorski produkt vektora koji su zadani svojim koordinatama u nekoj (desnoj) ortonormiranoj bazi. U tu svrhu, uvedimo pojam **determinante drugog i trećeg reda**.

Determinanta drugog reda je funkcija koja brojevima $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj zapisan na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinanta trećeg reda je funkcija koja brojevima $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj zapisan na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2.$$

Izlučivanjem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ iz prethodnog izraza, determinantu trećeg reda možemo zapisati i drugačije

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

što nazivamo **razvojem determinante po prvom retku**.

Formalno, u retku determinante pisat ćemo i vektore. Primjerice,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

Lakim računom mogu se dokazati sljedeća svojstva determinante drugog i trećeg reda:

1. Ako je jedan redak (stupac) determinante jednak 0, tada je determinanta jednaka 0.
2. Zamjenom dva retka (stupca) determinanta mijenja predznak.
3. Ako su reci (stupci) determinante proporcionalni, tada je determinanta jednaka 0.

Propozicija 5.8 *Neka je* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *desna ortonormirana baza vektorskog prostora* V^3 *i neka su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$*,* $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *koordinatni prikazi vektora* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$ *u toj bazi. Tada vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Dokaz. Tablica vektorskog množenja za elemente baze izgleda ovako

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Koristeći tablicu i svojstva vektorskog množenja sada imamo

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \cdot (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) =$$

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1),$$

što možemo napisati u obliku determinante (5.7). □

Zadatak. Kako glasi odgovarajuća tablica množenja, a kako formula za vektorski produkt, ako je polazna baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lijeva?

6 Mješoviti produkt

Definicija 6.1 *Operaciju* $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ *koja trojci vektora* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ *pridružuje skalar* $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$ *nazivamo* **mješovitim množenjem**. *Rezultat* $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}$ *nazivamo* **mješovitim umnoškom** *ili* **produktom**. *Koristimo i oznaku* $m(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Propozicija 6.2 *Mješoviti produkt triju vektora jednak je 0 ako i samo ako su vektori komplanarni.*

Dokaz. Neka su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ komplanarni. Ako su $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ili $\overrightarrow{c}$ jednaki $\overrightarrow{0}$, tada je $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$. Uzmimo zato da su oni različiti od nulvektora. Kako je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, to vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nisu kolinearni, nego su paralelni s nekom ravninom, nazovimo je Π. Vektor $\overrightarrow{c}$ je po pretpostavci također paralelan s tom ravninom. No, po definiciji vektorskog produkta, vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na Π, pa je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$. Dakle, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$.

Obratno, ako je mješoviti produkt vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ jednak 0, to znači da je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c}$. U prva dva slučaja vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ su komplanarni. U trećem slučaju vektor $\overrightarrow{c}$ je paralelan s ravninom određenom sa $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$. □

I za mješoviti produkt možemo izvesti formulu u slučaju kada su vektori dani svojim koordinatnim prikazima u desnoj ortonormiranoj bazi. Neka je, dakle, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ desna ortonormirana baza i neka su $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\overrightarrow{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ koordinatni prikazi vektora s obzirom na tu bazu. Iz propozicija 4.7 i 5.8 slijedi

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) =$$

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2.$$

Dokazali smo:

Propozicija 6.3

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Korolar 6.4 *Tri vektora su komplanarna ako i samo ako za njihove koordinatne prikaze u desnoj ortonormiranoj bazi vrijedi*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz propozicije 6.3 i svojstva determinante da zamjenom redaka mijenja predznak, zaključujemo

Propozicija 6.5 *Za* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}).$$

Dokažimo i svojstvo mješovitog produkta da *operacije mogu zamijeniti uloge*:

Korolar 6.6 *Za* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Dokaz.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

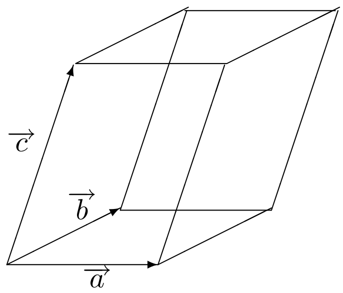
$\square$

Sljedeća svojstva mješovitog produkta posljedica su definicije:

Propozicija 6.7 *Za* $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *vrijedi*

1. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$,
2. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Neka su sada $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ tri nekomplanarna vektora. Oni u prostoru određuju jedan **paralelepiped**. Kažemo da je paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Mješoviti produkt ima sljedeću **geometrijsku interpretaciju**:

Propozicija 6.8 *Volumen paralelepipeda razapetog vektorima* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Dokaz. Neka vektori $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ čine desnu bazu od V^3. Kako i vektori $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ čine desnu bazu od V^3, to su vektori $\vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ s iste strane ravnine razapete s $\vec{a}$, $\vec{b}$, pa je $\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < \pi/2$, odnsono $\cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) > 0$. Nadalje

$$V = Bh = |\vec{a} \times \vec{b}|h = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}|\cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0,$$

jer je $h = |\vec{c}|\cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$. Za lijevu bazu je $V = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. $\square$

7 Koordinatni sustav u E^1, E^2, E^3

U vektorskim prostorima V^1, V^2, V^3 izborom baze bili smo u mogućnosti definirati koordinate prozvoljnog vektora (koordinatizacija). Sada nam je cilj odrediti *koordinate proizvoljne točke* na pravcu E^1, u ravnini E^2 ili u prostoru E^3.

U tu svrhu zadajmo najprije točku O u E^1, E^2 ili E^3. Svakoj točki T pravca E^1, ravnine E^2 ili prostora E^3 možemo pridružiti jedinstvenu usmjerenu (orijentiranu) dužinu $\overrightarrow{OT}$ s početkom u O, a krajem u T, koju nazivamo **radijvektorom točke** T. I obratno, točka T je jednoznačno određena zadavanjem radijvektora s obzirom na neku točku O. Time je zadano bijektivno preslikavanje između točaka iz E^1, E^2 ili E^3 i skupa radijvektora koje označavamo s $V^1(O)$, $V^2(O)$, ili $V^3(O)$ redom.

Nadalje, skupove $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ možemo organizirati u vektorske prostore, uz definirane operacije zbrajanja radijvektora (pravilom paralelograma) i množenjem radijvektora skalarom (kao i za vektore). Osim toga, u njima možemo definirati i skalarno množenje (kao za vektore).

Neka su sad u vektorskim prostorima $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ izabrane baze. **Koordinate točke** T definiramo kao koordinate radijvektora $\overrightarrow{OT}$ s obzirom na te baze.

Preciznije, ako je $\left\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right\}$ baza za $V^2(O)$ primjerice, tada postoji jedinstveni rastav

$$\overrightarrow{OT} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}.$$

Uređen par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ su koordinate točke T. Ako je izabrana baza ortonormirana, koordinate točke T zovemo **pravokutnima**. Tada skup $\{0; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ nazivamo **pravokutnim** ili **Kartezijevim koordinatnim sustavom** u E^2. Točku O nazivamo **ishodištem**, a pravce određene točkama OI, OJ **koordinatnim pravcima**. Pravac OI je os apscisa ili x-os, a pravac OJ os ordinata ili y-os.

Ako je točka $T \in E^3$, tada su njene koordinate dane kao uređena trojka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s obzirom na bazu $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\}$ vektorskog prostora $V^3(O)$. U tom slučaju još definiramo koordinatnu os OK kao os aplikatu ili z-os i **koordinatne ravnine** xy, xz, yz određene odgovarajućim pravcima.

8 Pravac u E^2

Propozicija 8.1 *Neka su $A, B \in E^2$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ točke dane svojim koordinatama (s obzirom na neku bazu koja ne mora biti ortonormirana). Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ ima koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Dokaz. Za vektore u V^2 vrijedi

$$[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}],$$

pa je $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]$. Radijvektor $[\overrightarrow{OA}]$ ima u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\vec{i} = [\overrightarrow{OI}]$, $\vec{j} = [\overrightarrow{OJ}]$, $I, J \in E^2$, koordinate a_1, a_2, tj. $[\overrightarrow{OA}] = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, analogno $[\overrightarrow{OB}] = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Oduzimanjem navedenih vektora, slijedi tvrdnja. $\square$

Propozicija 8.2 *Neka su $A, B \in E^2$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ točke dane svojim* pravokutnim *koordinatama. Tada je udaljenost od A do B dana sa*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Dokaz. Kako je $d(A, B) = |AB| = |[\overrightarrow{AB}]|$, tvrdnja slijedi primjenom Pitagorinog poučka. $\square$

Odredimo sada jednadžbu pravca u pravokutnom koordinatnom sustavu $\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ u ravnini E^2.

Neka su zadani točka $T_1 \in E^2$ i vektor $\overrightarrow{s} \in V^2$, $\overrightarrow{s} \neq \overrightarrow{0}$. Tada postoji jedinstveni pravac p kroz točku T_1 paralelan vektoru $\overrightarrow{s}$ (Euklidov 5. postulat). Kažemo da je vektor $\overrightarrow{s}$ **vektor smjera** pravca p. Neka su koordinate točke T_1, vektora $\overrightarrow{s}$ i po volji odabrane točke T pravca p redom $T_1 = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{s} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$, $T = (x, y)$. Kako je vektor $[\overrightarrow{T_1T}]$ kolinearan s vektorom $\overrightarrow{s}$, to postoji (jedinstveni) skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\overrightarrow{T_1T}] = \lambda \overrightarrow{s},$$

odakle je $[\overrightarrow{OT}] - [\overrightarrow{OT_1}] = \lambda \overrightarrow{s}$, tj.

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_1}] + \lambda \overrightarrow{s}.$$

Često pišemo

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda \overrightarrow{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{8.8}$$

pri čemu je $\overrightarrow{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\overrightarrow{r_1} = [\overrightarrow{OT_1}]$.

Uočite da je za svaku izabranu točku T pravca p skalar λ jedinstveno određen, te da je za razne točke skalar λ različit, tj. pridruživanje točaka T pravca p i brojeva $\lambda \in \mathbb{R}$ je bijekcija. Jednadžbu (8.8) nazivamo **parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca** p. Raspisujući jednadžbu (8.8) u koordinatama, dobivamo

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda a \\ y &= y_1 + \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{8.9}$$

što nazivamo **parametarskim koordinatnim oblikom jednadžbe pravca** p.

Ako je $s_1 \neq 0$, tada iz prve jednadžbe od (8.9) slijedi $\lambda = \frac{1}{a}(x - x_1)$, što uvršteno u drugu jednadžbu daje

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1). \tag{8.10}$$

Koeficijent $\frac{b}{a}$ ima i geometrijsko značenje – jednak je tangensu kuta što ga pravac p određuje s pozitivnim dijelom x-osi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Broj $\frac{b}{a}$ naziva se **koeficijent smjera** pravca p i označava s k. Jednadžba (8.10) prelazi u

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{8.11}$$

jednadžbu pravaca zadanog koeficijentom smjera i točkom.

Ako je $a = 0$, tada je $\alpha = \pi/2$, a broj k nije definiran. Takav je pravac paralelan s y-osi, a njegova jednadžba glasi

$$x = x_1.$$

Ako je $b = 0$, tada je $\alpha = 0$, $k = 0$. Takav je pravac paralelan s x-osi, a njegova jednadžba glasi

$$y = y_1.$$

Pravac možemo zadati dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1)$, $T_2 = (x_2, y_2)$. Ako za vektor smjera uzmemo vektor (svi međusobno kolinearni vektori različiti od nulvektora su vektori smjera zadanog pravca)

$$[\overrightarrow{T_1T_2}] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

dobivamo sljedeće jednadžbe pravca:
parametarski vektorski oblik jednadžbe pravca

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_1}] + \lambda([\overrightarrow{OT_2}] - [\overrightarrow{OT_1}]), \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}), \;\; \lambda \in \mathbb{R};$$

i parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ako je $x_1 \neq x_2$, tada je $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, te je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

jednadžba pravca kroz T_1, T_2.

Posebno, ako pravac presjeca x odnosno y-os u točkama $M = (m, 0)$ i $N = (0, n)$, tada dobivamo **segmentni oblik** jednadžbe pravca

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Brojevi m, n nazivaju se odsječci (odresci, segmenti) na osima x i y.

Ako pravac presjeca y-os u točki $L = (0, l)$ i ima koeficijent smjera k, tada (8.11) prelazi u

$$y = kx + l$$

što se naziva **eksplicitnim oblikom** jednadžbe pravca. Broj l zove se odsječak (odrezak) na osi y.

Pravcu umjesto vektora smjera možemo zadati i **vektor normale** $\overrightarrow{n} = (A, B)$ koji je okomit na vektor smjera. Neka je $T = (x_1, y_1)$ zadana točka pravca, a $T = (x, y)$ po volji odabrana točka pravca. Tada je vektor $[\overrightarrow{T_1T}] = (x - x_1, y - y_1)$ okomit na $\overrightarrow{n}$, te je njihov skalarni produkt jednak 0. Prema tome,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

Iz prethodnog možemo uočiti da se jednadžba pravca u E^2 može napisati u obliku

$$Ax + By + C = 0, \tag{8.12}$$

gdje je $C = -(Ax_1 + By_1)$. Jednadžbu (8.12) nazivamo **implicitnim oblikom** jednadžbe pravca.

9 Udaljenost točke od pravca i kut dvaju pravaca u E^2

Općenito, ako su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ skupovi točaka na pravcu, u ravnini ili u prostoru, tada se udaljenost između tih skupova definira kao

$$\inf \{d(A,B) : A \in \mathcal{A},\ \ \mathcal{B} \in \mathcal{B}\}.$$

Naš je cilj odrediti formulu za udaljenost $d(T_0, p)$ točke od pravca. Sljedeća propozicija nam kaže da je tu udaljenost moguće odrediti kao udaljenost dviju točaka, N nožište normale (pravca okomitog na p kroz T_0) na p i točke T_0:

Propozicija 9.1 *Neka je T_0 točka, a p pravac u E^2. Neka je N nožište normale kroz T_0 na pravac p i neka je P po volji odabrana točka pravca p. Tada vrijedi*

$$d(T_0, N) \le d(T_0, P),\ \ P \in p.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi primjenom Pitagorinog poučka. □

Izvedimo sada formulu za $d(T_0, p)$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0)$, a pravac p dan jednadžbom $Ax + By + C = 0$. Neka je $\vec{n} = (A, B)$ vektor normale pravca p. Tada vrijedi

$$d(T_0,p) = d(T_0,N) = |T_0N| = |[\overrightarrow{T_0N}] \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}| = \frac{|([\overrightarrow{ON}] - [\overrightarrow{OT_0}]) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|[\overrightarrow{ON}] \cdot \vec{n} - [\overrightarrow{OT_0}] \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Koristili smo da za točku N na pravcu p vrijedi $[\overrightarrow{ON}] \cdot \vec{n} = -C$.

Dakle, dokazali smo

Propozicija 9.2 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca $p \ldots Ax + By + C = 0$ je*

$$d(T_0, N) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Odredimo još kut što ga zatvaraju dva pravca koji su zadani jednadžbama $y = k_i x + l_i$, $i = 1, 2$. Kut dvaju pravaca poprima vrijednosti u $[0, \pi/2]$. Poznato je da su koeficijenti smjera pravaca tangensi kuteva φ_1, φ_2 što ga pravci zatvaraju s pozitivnim dijelom x-osi

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1,\ \ k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Nadalje, kut između pravaca φ jednak je razlici kuteva $\varphi_1 - \varphi_2 \in [0, \pi/2]$. Iz adicijskih formula za tangens slijedi

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \tag{9.13}$$

Pravci su paralelni ako i samo ako je kut između njih jednak 0, te je $k_1 = k_2$. Pravci su okomiti ako i samo ako je kut između njih jednak $\pi/2$, a to je ako i samo ako je $k_1 = -1/k_2$ (tangens nije definiran, nazivnik izraza (9.13) je 0).

Uočimo da smo do istog zaključka mogli doći i ako kut određujemo kao kut vektora smjera $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ pravaca p_1, p_2. Kut dvaju pravaca jednak je manjem od dvaju kutova što ga zatvaraju njihovi vektori smjera

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}. \tag{9.14}$$

Ako pravac p_i, $i = 1, 2$, zapišemo parametarskim koordinatnim jednadžbama

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= k_i t + l \end{aligned}$$

tada možemo očitati vektore smjera $\vec{s_1} = (1, k_1)$, $\vec{s_2} = (1, k_2)$.

10 Ravnina u E^3

Kao i u E^2, možemo dokazati sljedeće dvije propozicije:

Propozicija 10.1 *Neka su $A, B \in E^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ točke dane svojim koordinatama (s obzirom na neku bazu koja ne mora biti ortonormirana). Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ ima koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Propozicija 10.2 *Neka su $A, B \in E^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ točke dane svojim* pravokutnim *koordinatama. Tada je udaljenost od A do B jednaka*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

U prostoru E^3 cilj nam je odrediti jednadžbe pravaca i ravnina.

Odredimo najprije jednadžbe ravnine u E^3. Kao posljedica aksioma euklidske geometrije u prostoru, postoji jedinstvena ravnina u E^3 koja prolazi točkom T_0 i paralelna je s dva nekolinearna vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$. Kažemo da je ravnina određena ili razapeta vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Neka je T_0 zadana točka, a T po volji odabrana točka ravnine π. Tada su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ komplanarni, pa po propoziciji (3.10) postoje skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Ako uvedemo $\vec{\mathbf{r}} = [\overrightarrow{OT}]$, $\vec{\mathbf{r}_0} = [\overrightarrow{OT_0}]$, prethodni izraz možemo napisati i kao

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{10.15}$$

što predstavlja **parametarski vektorski oblik jednadžbe ravnine** π. Uočimo da su za svaku točku ravnine skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ jedinstveno određeni. Ako su točke T, T_0 i vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ dani pravokutnim koordinatama $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $T = (x, y, z)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ista jednadžba zapisana koordinatno glasi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{10.16}$$

To je **parametarski koordinatni oblik jednadžbe ravnine**.

Nadalje, činjenicu da su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ komplanarni, možemo karakterizirati i preko njihovog mješovitog produkta (koji mora biti jednak 0). Dakle,

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{10.17}$$

je također jednadžba ravnine određene točkom T_0 i dvama nekolinearnim vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Ravnina može biti zadana i trima točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, koje ne leže na istom pravcu. Ako definiramo $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{T_1T_2}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{T_1T_3}]$ i uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.18}$$

Posebno, ako izaberemo točke ravnine u kojima ona presjeca koordinatne osi $T_1 = (m, 0, 0)$, $T_2 = (0, n, 0)$, $T_3 = (0, 0, p)$, razvojem prethodne determinante dobivamo **segmentni oblik** jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Nadalje, ravninu možemo zadati i vektorom normale $\overrightarrow{n} = (A, B, C) \neq \overrightarrow{0}$ i točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tada je točka $T = (x, y, z)$ točka ravnine ako i samo ako su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$ i $\overrightarrow{n}$ okomiti. Kako su ne-nul vektori okomiti ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak 0, dobivamo jednadžbu

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \tag{10.19}$$

Prethodnu jednadžbu možemo napisati i u obliku

$$Ax + Bx + Cz + D = 0, \tag{10.20}$$

gdje je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Jednadnakost (10.20) nazivamo **općim** ili **implicitnim oblikom** jednadžbe ravnine.

Jednadžbu (10.19) možemo zapisati i kao

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0, \tag{10.21}$$

gdje je $\overrightarrow{r}$ radijvektor točke T, a $\overrightarrow{r_0}$ radij-vektor točke T_0.

11 Udaljenost točke od ravnine i kut dviju ravnina u E^3

Odredimo udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine π.

Propozicija 11.1 *Neka je T_0 točka, a π ravnina u E^3. Neka je N nožište normale (pravca okomitog na p) kroz T_0 na ravninu π i neka je P po volji odabrana točka ravnine π. Tada vrijedi*

$$d(T_0, N) \leq d(T_0, P), \quad P \in \pi.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi primjenom Pitagorinog poučka.

Izvedimo sada formulu za $d(T_0, \pi)$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a ravnina π je dana jednadžbom $Ax+By+Cz+D=0$. Vektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ je vektor normale ravnine π. Tada je

$$d(T_0, \pi) = d(T_0, N) = |T_0N| = |[\overrightarrow{T_0N}] \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}| = \frac{|([\overrightarrow{ON}] - [\overrightarrow{OT_0}]) \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$$

$$= \frac{|[\overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{n} - [\overrightarrow{OT_0}] \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

pri čemu smo koristili da točka N ravnine π zadovoljava $[\overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{n} = -D$.

Dokazali smo

Propozicija 11.2 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine $\pi \ldots Ax+By+Cz+D=0$ je*

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{11.22}$$

Ako je $T_1(x_1, y_1, z_1)$ točka ravnine, a $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravnine, tada koristeći (10.21) jednadžbu iz prethodne propozicije možemo zapisati ovako:

$$d = \frac{(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}. \tag{11.23}$$

Odredimo još kut između dviju ravnina. Neka su dane dvije ravnine $\pi_i \ldots A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2$, pri čemu su $\overrightarrow{n_i} = (A_i, B_i, C_i)$ njihove normale. Kut dviju ravnina je uvijek $\in [0, \pi/2]$ i jednak je manjem od dvaju kuteva njihovih vektora normala

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}.$$

Ravnine su očito paralelne ako i samo ako su im vektori normala kolinearni

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2,$$

a okomite su ako i samo ako su im vektori normala okomiti

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

12 Pravac u E^3

Neka je p pravac u E^3 zadan točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i ne-nul vektorom $\overrightarrow{s}$ (**vektor smjera**). Neka je T po volji odabrana točka pravca p. Parametarske jednadžbe pravca u E^3 izvodimo analogno kao takve jednadžbe u E^2.

Vektor $[\overrightarrow{T_0T}]$ je kolinearan s vektorom $\overrightarrow{s}$, pa postoji skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda\overrightarrow{s}.$$

Ako označimo $\overrightarrow{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\overrightarrow{r_0} = [\overrightarrow{OT_0}]$, tada je prethodna jednakost jednaka

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{12.24}$$

Prethodna jednadžba naziva se **parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca** $p \subset E^3$ koji je određen sa T_0 i $\overrightarrow{s}$.

Neka su sad točka T_0 i vektor $\overrightarrow{s}$ zadani svojim pravokutnim koordinatama, $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Iz (12.24) slijede **parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca**

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\alpha \\ y &= y_0 + \lambda\beta \\ z &= z_0 + \lambda\gamma, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12.25}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo **kanonsku jednadžbu pravca**

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \, (= \lambda).$$

Ako pravac zadamo dvjema točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, tada njegove parametarske jednadžbe glase

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_0 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_0 + \lambda(z_2 - z_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Kanonska jednadžba sada glasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \, (= \lambda).$$

I na kraju, pravac možemo zadati i kao presječnicu dviju neparalelnih ravnina π_1, π_2. Neka su ravnine dane svojim implicitnim jednadžbama

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \end{aligned} \tag{12.27}$$

pri čemu vrijedi $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$. Pravac je zadan sustavom jednadžbi (12.27).

Primjer. Odredimo jednadžbe koordinatne osi x. Os x zadana je točkom $(0, 0, 0)$ i vektorom smjera $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$. Njene koordinatne parametarske jednadžbe glase $x = t, t \in \mathbb{R}$, $y = 0$, $z = 0$. Kanonska jednadžba glasi

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0},$$

a sustav $y = 0$, $z = 0$ predstavlja x-os kao presjek dviju ravnina, primjerice koordinatne xz-ravnine i koordinatne xy-ravnine.

13 Udaljenost točke od pravca i kut dvaju pravaca i pravca i ravnine u E^3

Kao i u E^2 možemo pokazati sljedeće:

Propozicija 13.1 *Udaljenost točke od pravca u E^3 jednaka je udaljenosti točke od njene ortogonalne projekcije na pravac (nožišta normale na pravac).*

Izvedimo sad formulu za udaljenost točke T_0 (s radijvektorom $\vec{\mathbf{r}_0}$) od pravca u E^3. Neka je pravac p dan vektorskom jednadžbom

$$\vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \vec{s}, \tag{13.28}$$

gdje je $\vec{r}$ radijvektor po volji odabrane točke T na pravcu p, a $\vec{r_1}$ radijvektor točke T_1 pravca p. Neka je T_2 točka pravca p za koju vrijedi $[\overrightarrow{T_1T_2}] = \vec{s}$.

Površinu trokuta $\triangle T_0T_1T_2$ računamo na dva načina. Vrijedi

$$P = \text{baza} \cdot \text{visina} = \frac{1}{2}|\vec{s}|d, \tag{13.29}$$

odnosno

$$P = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{T_0T_1}] \times [\overrightarrow{T_1T_2}]| = \frac{1}{2}|(\vec{r_1} - \vec{r_0})| \times \vec{s}. \tag{13.30}$$

Iz (13.29), (13.30) slijedi

$$d = \frac{|(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Dokazali smo:

Propozicija 13.2 *Udaljenost točke T_0 (s radijvektorom $\vec{r_0}$) od pravca p u E^3 danog jednadžbom (13.28) je*

$$d = \frac{|(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

Idući nam je cilj odrediti udaljenost dvaju pravaca. U tu svrhu konstruirajmo zajedničku normalu dvaju pravaca. **Zajednička normala** dvaju pravaca je pravac koji *siječe* oba pravca i na njih je okomit.

Neka su p_i, dva mimosmjerna pravca zadana jednadžbama

$$\vec{r} = \vec{r_i} + \lambda \vec{s_i}, \quad i = 1, 2. \tag{13.31}$$

Vektor smjera $\vec{n}$ zajedničke normale je vektor okomit i na $\vec{s_1}$ i na $\vec{s_2}$, pa je primjerice dan s

$$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}. \tag{13.32}$$

Nadalje, kako se pravci p_1 i p_2 sijeku, to oni određuju ravninu π_1. Ta ravnina prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima $\vec{s_1}$ i $\vec{n}$. Stoga je njena jednadžba dana mješovitim produktom

$$(\vec{r} - \vec{r_1}, \vec{s_1}, \vec{n}) = 0. \tag{13.33}$$

Analogno, točkom T_2 i vektorima $\vec{s_2}$ i $\vec{n}$ razapeta je ravnina π_2 kojoj je jednažba

$$(\vec{r} - \vec{r_2}, \vec{s_2}, \vec{n}) = 0. \tag{13.34}$$

Zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 određena je kao presječnica ravnina π_1 i π_2, dakle sustavom jednadžbi (13.33), (13.34).

Odredimo sada udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2. Pokažimo najprije da udaljenost opet možemo računati kao udaljenost između određenih točaka.

Propozicija 13.3 *Ako su N_1, N_2 nožišta zajedničke normale n na pravcima p_1, p_2, onda vrijedi*

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2).$$

Dokaz. Treba pokazati da je udaljenost točaka N_1, N_2 najmanja moguća od svih udaljenosti točaka $P_1 \in p_1$ i $P_2 \in p_2$. Zaista

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_1P_2}] &= [\overrightarrow{P_1N_1}] + [\overrightarrow{N_1N_2}] + [\overrightarrow{N_2P_2}] \\ &= \lambda_1 \overrightarrow{s_1} + [\overrightarrow{N_1N_2}] + \lambda_2 \overrightarrow{s_1}. \end{aligned}$$

Prema tome je

$$|[\overrightarrow{P_1P_2}]|^2 = [\overrightarrow{P_1P_2}] \cdot [\overrightarrow{P_1P_2}] = [\overrightarrow{N_1N_2}]^2 + (\lambda_1 \overrightarrow{s_1} + \lambda_2 \overrightarrow{s_2})^2 + 2\lambda_1 \overrightarrow{s_1} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] + 2\lambda_2 \overrightarrow{s_2} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}].$$

Kako je $\overrightarrow{s_1} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] = \overrightarrow{s_2} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] = 0$, to je

$$d(P_1, P_2)^2 = |[\overrightarrow{P_1P_2}]|^2 = d(N_1, N_2)^2 + (\lambda_1 \overrightarrow{s_1} + \lambda_2 \overrightarrow{s_2})^2 \geq d(N_1, N_2)^2.$$

□

Izvedimo sada formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2. Uočimo da postoje paralelne ravnine π_1, π_2 koje sadrže pravce p_1, p_2 (vektor normale tih ravnina je upravo $\overrightarrow{n}$). Očito je udaljenost točaka N_1 i N_2 jednaka udaljenosti ravnina π_1, π_2. Udaljenost ravnina π_1, π_2 jednaka je udaljenosti, primjerice, točke T_2 od ravnine π_1. Jednadžbu ravnine π_1 možemo zapisati kao $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Koristeći formulu (11.23) za udaljenost točke od ravnine, dobivamo

$$d(T_2, \pi_1) = \frac{(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|},$$

te koristeći (13.32) dobivamo

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \frac{(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|} \\ &= \frac{(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|}. \end{aligned} \tag{13.35}$$

Dokazali smo

Propozicija 13.4 *Udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 zadanih jednadžbama (13.31) je*

$$d(p_1, p_2) = \frac{(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|}.$$

Analizirajmo kada je $d(p_1, p_2) = 0$. Tada je brojnik izraza (13.35) jednak 0, odnosno vektori $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ su komplanarni, a to je moguće ako i samo ako pravci p_1, p_2 leže u istoj ravnini. Dakle, $(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) = 0$ je nužan i dovoljan uvjet da pravci p_1, p_2 leže u istoj ravnini.

Odredimo sada kut dvaju pravaca u E^3. Kut dvaju pravaca jednak je manjem od dvaju kutova što ga zatvaraju njihovi vektori smjera, te se određuje također formulom (9.14). Uočimo da se pravci ne moraju sjeći (primjerice, okomiti pravci su upravo oni kojima su vektori smjera okomiti, pravci mogu biti i mimoilazni).

Nadalje, kut između pravca i ravnine definiran je kao kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu, dakle, kao kut dvaju pravaca. Ako označimo kut između pravca i ravnine sa ψ, tada je očito $\phi = \pi/2 - \psi$, gdje je ϕ kut između vektora smjera pravca i normale ravnine. Sada je

$$\cos(\pi/2 - \psi) = \cos\phi = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|},$$

pri čemu je

$$\cos(\pi/2 - \psi) = \sin\psi.$$

Iz prethodnog slijedi

$$\sin\psi = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|}.$$

14 Kružnica u E^2

Definicija 14.1 *Kružnica je skup točaka u ravnini E^2 jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.*

Tu čvrstu točku nazivamo **središtem** kružnice, a udaljenost od središta do bilo koje točke kružnice **polumjerom** ili **radijusom**.

Izvedimo jednadžbu kružnice u Kartezijevom sustavu. Neka je $S = (p, q)$ središte kružnice, r njen polumjer, a $T = (x, y)$ po volji odabrana točka kružnice. Tada je točka T točka kružnice ako i samo ako je $d^2(S, T) = R^2$, pa jednadžba kružnice glasi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Nadalje, ispitajmo moguće položaje pravca i kružnice. Neka su zadani pravac $y = kx + l$ i kružnica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Određivanje zajedničkih točaka pravca i kružnice svodi se na određivanje rješenja sustava

$$y = kx + l$$
$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Uvrštavanjem jednadžbe pravca u jednadžbu kružnice, dobivamo sljedeću kvadratnu jednadžbu za x koordinatu točke presjeka

$$(1 + k^2)x^2 + 2x\,(k(l - q) - p) + (l - q)^2 + p^2 - r^2 = 0. \tag{14.36}$$

Kako prethodna jednadžba može imati dva, jedno ili niti jedno (realno) rješenje, to se pravac i kružnica sijeku u dvije točke (pravac je sekanta kružnice), u jednoj točki (pravac je tangenta kružnice) ili se ne sijeku (pravac je pasanta kružnice).

Pravac je tangenta kružnice ukoliko je diskriminanta jednadžbe (14.36) jednaka 0. Tada je

$$0 = ((l - q)k - p)^2 - (1 + k^2)\left((l - q)^2 + p^2 - r^2\right) = 0,$$

odakle slijedi uvjet dodira (tangencijalnosti) pravca i kružnice

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2. \tag{14.37}$$

Uočimo da se prethodni uvjet može izvesti i na sljedeći način. Pravac p je tangenta kružnice ako i samo ako je njegova udaljenost do središta kružnice jednaka polumjeru kružnice. Dakle, pravac p je tangenta ako i samo ako je

$$r = \frac{|q - kp - l|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Kvadriranjem prethodnog izraza dobivamo uvjet (14.37).

15 Polarni koordinatni sustav u E^2

U ravnini E^2 možem uvesti i sljedeći koordinatni sustav. Neka je O čvrsta točka i polupravac o čvrsti polupravac s početkom u točki O. Tada je točka $T \in E^2$, $T \neq O$, jednoznačno je određena svojom udaljenosti $r = d(O, T)$ od točke O i kutom φ što ga polupravac OT zatvara s polupravcem o, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Uvedeni koordinatni sustav nazivamo **polarnim sustavom**, a uređeni par (r, φ) **polarnim koordinatama** točke T.

Odredimo vezu među pravokutnim i polarnim koordinatama točke T, pri čemu pravokutni koordinatni sustav ima ishodište u točki O, a polarna os se podudara s osi apscisa. Očito je

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Obratno,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Pri određivanju kuta φ uzimamo u obzir u kojem kvadrantu leži točka T.

Kako glasi jednadžba kružnice u polarnom sustavu? Ako je to kružnica sa središtem u ishodištu polumjera r_0, tada je njena jednadžba izrazito jednostavna

$$r = r_0.$$

16 Elipsa

Definicija 16.1 *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realan broj $a > e$. Elipsa je skup točaka u E^2 za koje je zbroj udaljenosti od F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$*

$$\mathcal{E} = \left\{T \in E^2 : d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a\right\}.$$

Točke F_1, F_2 nazivamo **žarištima** ili **fokusima elipse**.

Odredimo jednadžbu elipse. Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da točke F_1, F_2 leže na osi x i da je polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ ishodište sustava. Tada točke F_1, F_2 imaju koordinate

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0).$$

Neka je T po volji odabrana točka elipse. Tada je

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a. \tag{16.38}$$

Pomnožimo tu jednadžbu sa $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, te sređivanjem dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{2ex}{a}. \tag{16.39}$$

Zbrajanjem (16.38), (16.39) slijedi

$$(x+e)^2 + y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2,$$

te je uz $b^2 = a^2 - e^2 > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{16.40}$$

Vrijedi i obratno: točka koja zadovoljava jednadžbu (16.40) je točka elipse. Zaista, ako definiramo $e^2 = a^2 - b^2$, $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$, tada su F_1, F_2 tražene točke iz definicije elipse. Treba pokazati da je $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a = konst$. Vrijedi

$$d(T, F_1) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \;\; d(T, F_2) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

pri čemu je $y^2 = b^2 \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Stoga je

$$d(T, F_1) = \left|a + \frac{e}{a}x\right|, \;\; d(T, F_1) = \left|a - \frac{e}{a}x\right|.$$

Kako za apscisu x mora uvijek vrijediti $-a < x < a$ (inače je već pribrojnik $\dfrac{x^2}{a^2}$ u jednadžbi (16.40) veći od 1), to je

$$d(T, F_1) = a + \frac{e}{a}x, \;\; d(T, F_1) = a - \frac{e}{a}x,$$

te je $d(T, F_1) + d(T, F_1) = 2a$.

Jednadžba (16.40) naziva se **kanonskom jednadžbom elipse**. Ona se naziva i **središnjom (centralnom) jednadžbom** jer je ishodište koordinatnog sustava smješteno u središte ili centar elipse (elipsa je centralno simetričan skup točaka sa središtem simetrije u točki O).

Broj e zove se **linearni ekscentricitet elipse**, $e < a$, a broj $\epsilon = e/a$, $0 < \epsilon < 1$, **numerički ekscentricitet elipse**. Kada je ϵ blizak 0, veličine a i e su bliske, pa je elipsa bliska kružnici. Još kažemo da kružnica ima numerički ekscentricitet jednak 0. Ako je numerički ekscentricitet blizak 1, tada je elipsa "jako spljoštena".

Označimo $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, -b)$, $D = (0, a)$. Te točke se zovu **tjemena elipse**. Dužina $\overline{AB}$ zove se **glavna (velika) os**, dužina $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ glavne poluosi, a dužina $\overline{CD}$ **sporedna (mala) os**, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ sporedne poluosi elipse. Prema tome, a je duljina glavne, a b sporedne poluosi.

Pravac $y = kx + l$ i elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ imaju dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Pravac je tangenta elipse, ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + 2kla^2x + a^2(l^2 - b^2) = 0 \tag{16.41}$$

jednaka 0. Dobivamo uvjet dodira (tangencijalnosti) pravca i elipse

$$k^2a^2 + b^2 = l^2.$$

Odredimo jednadžbu tangente u točki elipse $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Rješenja jednadžbe (16.41) uz uvjet $D = 0$ su

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l}, \;\; y_1 = \frac{b^2}{l}.$$

Iz te dvije jednadžbe određujemo koeficijent smjera k i odsječak l tražene tangente

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \;\; l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $y = kx + l$ i sređivanjem dobivamo jednadžbu tangente elipse s diralištem u točki $D_1 = (x_1, y_1)$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Direktrisa elipse je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T elipse omjer udaljenosti od jednog žarišta elipse i od tog pravca konstantan realan broj $c > 0$, tj. vrijedi

$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)} = c. \tag{16.42}$$

Postoji li direktrisa elipse? Ako postoji, ona ne smije sjeći elipsu (tada bi postojale točke elipse čija je udaljenost od direktrise jednaka 0). Također, kako su točke koje su simetrične s obzirom na veliku os elipse, jednako udaljene od jednog fokusa, to moraju biti jednako udaljene i od direktrise. Dakle direktrisa mora biti okomita na veliku os elipse.

Uočimo još kako je elipsa centralnosimetričan skup točaka, ako postoji jedna, onda postoje i dvije direktise, p_1, p_2 (koje odgovaraju dvama žarištima). Iz dosad rečenog slijedi da njihove jednadžbe glase $x = \pm x_0$. Odredimo $x_0 > 0$.

Kako je

$$c \cdot (d(T, p_1) + d(T, p_2)) = 2cx_0 = d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a,$$

to je $x_0 = a/c$. Nadalje, za tjeme elipse B posebno vrijedi $d(B, F_2) = c\, d(B, p_2)$ iz čega slijedi $a - e = c(x_0 - a) = c(a/c - a)$, te je $c = e/a$. Drugim riječima, c je upravo jednako numeričkom ekscentricitetu $0 < \epsilon < 1$. Pokazano je da elipsa ima dvije direktrise s jednadžbama

$$x = \pm a/\epsilon.$$

Direktnom provjerom možemo se uvjeriti da sve točke elipse zadovoljavaju uvjet (16.42), pri čemu za $F(e, 0)$ treba uzeti direktrisu $p \ldots x = a/\epsilon$, a za $F(-e, 0)$ direktrisu $p \ldots x = -a/\epsilon$. Vrijedi i obratno, ako točka T ravnine ispunjava uvjet (16.42), tada je to točka elipse. Stoga uvjet (16.42) uz $c < 1$ karakterizira točke elipse. Ta karakterizacija elipse poznata je kao **Pappus-Boškovićeva definicija (karakterizacija)** elipse.

Polazeći od Pappus-Boškovićeve karakterizacije elipse, izvedimo polarnu jednadžbu elipse. Polarni sustav uvodimo tako da je fokus elipse F pol polarnog sustava, a polupravac s početkom u F okomit na direktrisu p polarna os. Tetivu elipse koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom elipse nazivamo *latus rectum*. Označimo njenu duljinu s $2p$, a točke koje ona odsjeca na elipsi s L, $\bar{L}$. Kako je L točka elipse, vrijedi

$$d(L, F) = \epsilon d(L, p).$$

Neka je sada T neka točka elipse, a (r, φ) njene polarne koordiante. Također vrijedi

$$d(T, F) = \epsilon d(T, p).$$

Prema tome

$$p = d(L, F) = \epsilon d(L, p) = \epsilon(r \cos\varphi + d(T, p)) = \epsilon r \cos\varphi + d(T, F) = \epsilon r \cos\varphi + r.$$

Polarna jednadžba elipse, dakle, glasi

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos\varphi}. \tag{16.43}$$

Veličinu p nazivamo i **parametrom elipse**.

Ako elipsu zamislimo kao zrcalo, tada vrijedi sljedeće *zrcalno (optičko) svojstvo elipse*:

Teorem 16.2 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od elipse, tada reflektirana zraka prolazi drugim fokusom.*

To je razlog odakle potiče naziv za fokuse (žarišta).

Dokaz. Ako u točki T_0 elipse u kojoj se zraka reflektira povučemo tangentu na elipsu, tada moramo dokazati da je kut α što ga zatvara tangenta sa spojnicom T_0F_1 jednak kutu β što ga zatvara tangenta sa spojnicom T_0F_2.

Kut između pravaca računamo po formuli (9.13). Ako je $T_0 = (x_0, y_0)$, tada je koeficijent smjera tangente elipse u toj točki jednak $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, a koeficijent smjera pravca T_0F_1 jednak $\dfrac{y_0}{x_0+e}$. Dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{b^2}{y_0e}\right|.$$

Slično dobivamo i

$$\operatorname{tg}\beta = \left|\frac{b^2}{y_0e}\right|.$$

□

17 Hiperbola

Definicija 17.1 *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realan broj $a < e$. Hiperbola je skup točaka u E^2 za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$*

$$\mathcal{H} = \left\{T \in E^2 : |d(T,F_1) - d(T,F_2)| = 2a\right\}.$$

Točke F_1, F_2 nazivamo **žarištima** ili **fokusima hiperbole**.

Jednadžbu hiperbole izvodimo analogno kao jednadžbu elipse. Dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17.44}$$

gdje je $b^2 = e^2 - a^2$. Analogno kako kod elipse provjeravamo da sve točke skupa pisanog jednadžbom (17.44) su točke hiperbole opisane definicijom.

Točke $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, -b)$, $D = (0, a)$ zovemo **tjemena hiperbole**. Dužinu $\overline{AB}$ zovemo **realna os**, dužine $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ realne poluosi, a dužinu $\overline{CD}$ **imaginarna os**, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ imaginarne poluosi hiperbole.

Jednadžba (17.44) također se naziva **kanonskom jednadžbom hiperbole**. Naziva se i **središnjom (centralnom) jednadžbom** jer je ishodište koordinatnog sustava smještemo u središte ili centar hiperbole (hiperbola je centralno simetričan skup točaka sa središtem simetrije u točki O). Veličina e naziva se **linearni ekscentricitet**, a ϵ **numerički ekscentricitet hiperbole**. Iz $e > a$ slijedi $\epsilon > 1$.

Pravac i hiperbola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Uvjet da je pravac tangenta hiperbole dobivamo na analogan način kao kod elipse (uvjet dodira ili tangencijalnosti)

$$k^2a^2 - b^2 = l^2.$$

Analogno se određuje jednadžba tangente u točki hiperbole $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Dobivamo

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Za razliku od elipse, hiperbola ima asimptote. Asimptote hiperbole su određene kao granični položaj tangente kada se diralište tangente giba po grani hiperbole u beskonačnost. Odredimo jednadžbe asimptota. Tangenta dira hiperbolu u točki s koordinatama

$$x_1 = \frac{a^2 kl}{b^2 - a^2 k^2}, \quad y_1 = \frac{b^2 l}{b^2 - a^2 k^2}.$$

Diralište je *beskonačno daleka* točka hiperbole ako i samo ako je $b^2 - a^2k^2 = 0$, odakle slijedi $k = \pm \frac{b}{a}$. Uvjet tangencijalnosti povlači da je tada $l = 0$, pa su jednadžbe asimptota

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Direktrisa hiperbole je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T hiperbole omjer

$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)}, \tag{17.45}$$

konstantan realan broj $c > 0$. Kao i kod elipse, pokazuje se da hiperbola ima dvije direktrise dane jednadžbama

$$x = \pm \frac{a}{\epsilon} = \pm \frac{a^2}{e}.$$

Nadalje, za hiperbolu također vrijedi **Pappus-Boškovićeva karakterizacija**: Neka je F črsta točka, p čvrsti pravac u E^2. Skup točaka T u E^2 koji zadovoljava uvjet

$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \epsilon, \quad \epsilon > 1$$

je hiperbola.

Polarna jednadžba hiperbole dana je s (16.43) uz uvjet $\epsilon > 1$.

Izrecimo još i *zrcalno svojstvo za hiperbolu*:

Teorem 17.2 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od hiperbole, tada reflektirana zraka izgleda kao da izlazi iz drugog fokusa.*

18 Parabola

Definicija 18.1 *Neka je p čvrsti pravac i F čvrsta točka u E^2 koja ne pripada pravcu p. Parabola je skup točaka u E^2 koje su jednako udaljene od p i F*

$$\mathcal{P} = \left\{ T \in E^2 : d(T,F) = d(T,p) \right\}.$$

Pravac p nazivamo **ravnalicom** ili **direktrisom**, a točku F **žarištem** ili **fokusom parabole**.

Uočimo odmah da je ova definicija jednaka Pappus-Boškovićevoj uz zahtjev $\epsilon = 1$. Polarna jednadžba hiperbole dana je s (16.43).

Izvedimo sada direktno jednadžbu parabole u Kartezijevim koordinatama. Prije nego što izaberemo pravokutni koordinatni sustav, definirajmo tjeme i os parabole. Ako označimo nožište okomice iz F na p sa N, tada je **tjeme parabole** polovište dužine $\overline{FN}$, označimo ga s A. Tjeme očito pripada paraboli. Povučenu okomicu kroz F (stoga i kroz A) nazivamo **os parabole**.

Neka je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava u A, a x-os neka se podudara s osi parabole. Neka je p parametar parabole, tj. polovina duljine tetive *latus rectum* (tetive koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom). Krajnje točke te tetive, kao točke parabole, udaljene su jednako od F i od p i ta je udaljenost jednaka p. Prema tome, udaljenost fokusa od direktrise jednaka je p, pa su koordinate fokusa $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, a jednadžba direktrise p je $x = -\frac{p}{2}$. Sada za neku točku T parabole vrijedi

$$d(T,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \;\; d(T,p) = x + \frac{p}{2},$$

te kvadriranjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \tag{18.46}$$

To je tzv. **kanonska jednadžba parabole**. Nazivamo je još i **tjemenom**.

Vrijedi i obratno, točke koje zadovoljavaju jednadžbu (8.8) su točke parabole. Zaista, kako je x uvijek nenegativan broj, to vrijedi

$$d(T,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \;\; d(T,p) = x + \frac{p}{2}.$$

Nadalje, kako vrijedi i (18.46), dobivamo $d(T,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$, odakle je i $d(T,F) = x + \frac{p}{2}$.

Pravac i parabola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Uvjet da je pravac tangenta parabole dobivamo na analogan način kao kod elipse (uvjet dodira ili tangencijalnosti)

$$p = 2kl.$$

Odredimo jednadžbu tangente u točki parabole $D_1 = (x_1, y_1)$ (dirалište tangente). Koordinate dirališta se dobivaju kao korijeni kvadratne jednadžbe

$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0$$

uz uvjet da je diskriminanta jednaka 0. Dobivamo $x_1 = \frac{p - kl}{k^2}$, $y_1 = \frac{p}{k}$. Odavde je $k = \frac{p}{y_1}$, $l = \frac{px_1}{y_1}$. Uvrštavanjem u jednadžbu $y = kx + l$ dobivamo

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Zrcalno svojstvo za parabolu glasi:

Teorem 18.2 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz fokusa i reflektira se od parabole, tada je reflektirana zraka paralelna s osi parabole i obrnuto.*

Dokaz. Neka je T_0 točka parabole u kojoj se zraka reflektira i neka je u njoj povučena tangenta na parabolu. Treba dokazati da je kut što ga tangenta zatvara sa spojnicom FT_0 jednak kutu što ga tangenta zatvara s osi parabole. Označimo s P točku u kojoj tangenta presjeca x-os. Tada je tvrdnja ekvivalenta s tvrdnjom da je trokut $\triangle T_0PF$ jednakokračan. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je $d(F,P) = d(F,T_0)$. Kako je T_0 točka parabole, to je $T_0 = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$. Tangenta s jednadžbom $yy_0 = p(x+x_0)$ presjeca x-os u točki $P = (-x_0, 0)$. Dakle

$$d(F,P) = \left|\frac{p}{2} + x_0\right|, \quad d(F,T)^2 = \left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2.$$

□

Napomena. Presjek uspravnog kružnog stošca i ravnine nazivamo **konusnim presjekom**. Razlikujemo degenerirane i nedegenerirane presjeke. Degenerirane presjeke dobivamo kad presječna ravnina prolazi vrhom stošca. Oni su sljedeći skupovi točaka: sam vrh stošca (točka), jedna izvodnica (ravnina je tangencijalna ili dirna) i dvije izvodnice. Nedegenerirani presjeci su sljedeći:

1° elipsa (presječna ravnina siječe sve izvodnice); specijalno ako je presječna ravnina okomita na os stošca presjek je kružnica,

2° parabola (presječna ravnina je paralelna s jednom izvodnicom),

3° hiperbola (presječna ravnina je paralelna s dvije izvodnice).

Sljedeći teorem nam govori da su svi (nedegenerirani) konusni presjeci upravo elipsa, hiperbola i parabola (dane Pappus-Boškovićevom karakterizacijom). Stoga se te krivulje zovu i **konike**.

Teorem 18.3 *Neka je $\mathcal{K}$ krivulja dobivena kao presjek uspravnog kružnog stošca i ravnine. Tada u ravnini postoji točka F i pravac p takvi da je omjer udaljenosti $\frac{d(T,F)}{d(T,p)}$ konstantan, gdje je $T \in \mathcal{K}$ po volji odabrana točka krivulje $\mathcal{K}$.*

Vidi sliku:

- π je presječna ravnina
- σ sfera upisana u stožac koja dira ravninu π u F
- k kružnica diranja sfere σ i stošca
- Π ravnina u kojoj leži k
- d je pravac presjeka ravnina π i Π
- α je kut između ravnina π i Π
- β je kut između izvodnice i ravnine Π.

Može se pokazati $\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

19 Geometrijske transformacije ravnine E^2

Geometrijske transformacije ravnine su preslikavanja ravnine E^2 na samu sebe. Pritom se točka $T = (x, y)$ zadana koordinatama u nekom koordinatnom sustavu preslikava u točku $T' = (x', y')$ s koordinatama u istom koordinatnom sustavu. Navedimo neke geometrijske transformacije:

Translacija za vektor $\vec{\mathbf{a}} = (v, w)$ točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (x + v, y + w)$.

Rotacija za kut ϕ u pozitivnom smjeru točki T pridružuje točku T' pri čemu njihove koordinate najlakše zapisujemo u polarnom sustavu: $T = (r, \varphi)$, $T' = (r, \varphi + \phi)$. U Kartezijevom sustavu, primjenom adicijskih teorema, dobivamo

$$x' = r\cos(\varphi + \phi) = r\cos\varphi\cos\phi - r\sin\varphi\sin\phi = x\cos\phi - y\cos\phi$$

$$y' = r\sin(\varphi + \phi) = r\sin\varphi\cos\phi + r\cos\varphi\sin\phi = x\sin\phi + y\cos\phi.$$

Centralna simetrija sa središtem u O točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (-x, -y)$. Centralnu simetriju možemo dobiti kao poseban slučaj rotacije (za kut π).

Osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na x-os točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (x, -y)$. Osna simetrija s obzirom na y-os točki $T = (x, y)$ pridružuje točku $T' = (-x, y)$. Općenitije, osna simetrija s obzirom na os $y = kx$ točki T s polarnim koordinatama (r, φ) pridružuje točku $T' = (r, 2\varphi - \alpha)$, gdje je α kut što ga os simetrije zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Napomena. Rotacija, centralna i osna simetrija su tzv. **linearna preslikavanja**. Više o takvim preslikavanjima na kolegiju **Linearna algebra**.

20 Transformacije koordinata

Cilj poglavlja *Krivulje drugog reda* je prepoznati krivulju koja je zadana općom algebarskom jednadžbom drugog stupnja u varijablama x, y. U tu svrhu, promjenom koordinatnog sustava (tj. rotacijom i translacijom polaznog koordinatnog sustava) naći ćemo nove koordinate u kojima će zadana jednadžba imati prepoznatljiv (kanonski) oblik – kao jednadžba kružnice, elipse, hiperbole, parabole ili kao jednadžba pravca ili para pravaca, odnosno kao koordinate jedne točke ili $\emptyset$.

21 Koordinatni sustavi u prostoru: Sferni koordinatni sustav

Definirajmo najprije sferu:

Definicija 21.1 *Sfera je skup točaka u prostoru E^3 jednako udaljenih od neke čvrste točke prostora.*

Tu čvrstu točku zovemo **središtem** sfere, a udaljenost od središta do neke točke na sferi **polumjerom** sfere.

Izvedimo jednadžbu sfere u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Neka je $S = (p, q, r)$ središte sfere, R njen polumjer. Točka T je točka sfere ako i samo ako vrijedi

$$d(S,T)^2 = R^2.$$

Prema tome, jednadžba sfere glasi

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = R^2.$$

Sferni koordinatni sustav uvodimo na sljedeći način: neka je O čvrsta točka u E^3 i π čvrsta ravnina kroz O. Pravac z neka je pravac okomit na ravninu π u točki O, a pravac x pravac u ravnini π kroz točku O. Neka je T' ortogonalna projekcija točke T na ravninu π.

Točku $T \in E^3$ možemo na jednoznačan način opisati sljedećom uređenom trojkom $T = (r, \varphi, \theta)$, gdje je $r = d(O,T)$, φ kut što ga spojnica OT' zatvara sa pozitivnim dijelom x-osi, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, θ kut što ga spojnica OT zatvara sa pozitivnim dijelom z-osi, $\theta \in [0, \pi\rangle$.

22 Cilindrični koordinatni sustav

U prostoru možemo uvesti i **cilindrični koordinatni sustav** koji je zadan je sljedećim elementima: Neka je O čvrsta točka u E^3 i π čvrsta ravnina kroz O. Pravac z neka je pravac okomit na ravninu π u točki O. Neka je u ravnini π s polom u točki O zadan polarni sustav, te neka je T' ortogonalna projekcija točke T na ravninu π.

Točku $T \in E^3$ možemo na jednoznačan način opisati uređenom trojkom $T = (r, \varphi, z)$, gdje su (r, φ) polarne koordinate točke T' u ravnini π, a z (pozitivna ili negativna) udaljenost točke T od ravnine π.