PISMENI ISPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 1

Zadatak 1. [20 bodova]
Je li skup

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + d = 0, 3a + b + c + 2d = 0 \right\}$$

B vektorski potprostor od $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Ako jest, odredite mu **dimenziju**, jednu **bazu** te jedan **direktan komplement** potprostoru B.

Zadatak 2. [20 bodova]
U prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ dani su potprostori

$$L = \left[\left\{1 + 2t + t^2 + t^3, 1 + 3t + 2t^2 + 3t^3, 1 - t^2 - 3t^3\right\}\right]$$

i

$$M = \left[\left\{1 - t^2 - t^3, 1 + t^2 + t^3, 2 + t + t^2 + t^3\right\}\right].$$

Odredite po jednu bazu za $L + M$ i $L \cap M$.

Zadatak 3. [15 bodova]
Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Dokažite da za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $v \in V$ vrijedi $\alpha v = 0$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $v = 0$.

Zadatak 4. [30 bodova]
Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$

a) odredite rang matrice A,

b) izračunajte inverz matrice A kada je to moguće,

c) riješite sustav $AX = 0$.

Zadatak 5. [15 bodova]
Za koje realne brojeve α i β je sustav

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & \alpha - \beta \\ 6x_1 & +\alpha x_2 & +2x_3 & & = & \alpha^2 \\ 5x_1 & +\alpha x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & +\beta x_3 & +\beta x_4 & = & \alpha\beta \end{array}$$

Cramerov? Obrazložite svoj odgovor.