PRVI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE 1 - A1 grupa

Zadatak 1. [15 bodova]
Neka je točka C na pravcu AB, $A \neq B$ tako da je $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Dokažite da je

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\lambda\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}}{\lambda + 1}.$$

Zadatak 2. [15 bodova]
Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza vektorskog prostora $V^3(O)$. Dokažite da je tada skup

$$\{\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{c}\}$$

baza tog vektorskog prostora.

Zadatak 3. [20 bodova]
Neka za potprostore L i M vektorskog prostora V vrijedi $L \cap M = \{0\}$. Ako su skupovi $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \subset L$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_t\} \subset M$ linearno nezavisni, dokažite da je linearno nezavisna i njihova unija $A \cup B$.

Zadatak 4. [30 bodova]
Neka je

$$S = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - d = 0, b + c = 0\}.$$

a) Dokažite da je $S \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. [10 bodova]

b) Nađite jednu bazu potprostora S i odredite mu dimenziju. [10 bodova]

c) Odredite jedan direktan komplement potprostoru S. [10 bodova]

Zadatak 5. [20 bodova]
U prostoru $\mathcal{P}_3$ zadani su potprostori M i L razapeti svojim bazama:

$$B_M = \{t^2 + 2, t^3 - 2t^2 + 5t\},$$

$$B_L = \{t^2 - t + 1, t^3 - 2t^2 + 2t - 3\}.$$

Odredite bazu potprostora $M \cap L$.

Ivona Puljić

PRVI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE 1 - A2 grupa

Zadatak 1. [15 bodova]
Neka je točka K na pravcu MN, $M \neq N$ tako da je $\overrightarrow{MK} = \alpha \overrightarrow{KN}$. Dokažite da je

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\alpha \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM}}{\alpha + 1}.$$

Zadatak 2. [15 bodova]
Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza vektorskog prostora $V^3(O)$. Dokažite da je tada skup

$$\{\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, 2\vec{a} + \vec{b}\}$$

baza tog vektorskog prostora.

Zadatak 3. [20 bodova]
Ako su M i L trodimenzionalni potprostori prostora $\mathbb{R}^5$, onda je $M \cap L \neq \{0\}$.

Zadatak 4. [30 bodova]
Neka je

$$S = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 4b + 3c - d = 0 \}.$$

a) Dokažite da je $S \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. [10 bodova]

b) Nađite jednu bazu potprostora S i odredite mu dimenziju. [10 bodova]

c) Odredite jedan direktan komplement potprostoru S. [10 bodova]

Zadatak 5. [20 bodova]
U prostoru $\mathcal{P}_3$ zadani su potprostori M i L razapeti svojim bazama

$$B_M = \{1 + 2t + t^3, 1 + t + t^2\}$$

$$B_L = \{1 + t^2, 3t - t^2 + t^3\}.$$

Odredite bazu potprostora $M \cap L$.

Ivona Puljić

PRVI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE 1 - B1 grupa

Zadatak 1. [20 bodova]
Ako u trokutu ABC točke P, Q, R dijele stranice u istim omjerima, dokaži da trokuti ABC i PQR imaju isto težište.
Napomena: Iskoristite činjenicu da za težište T trokuta ABC vrijedi

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Zadatak 2. [15 bodova]
Dokažite da vrijedi $[\{a_1, a_2\}] = [\{b_1, b_2\}]$ gdje je $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $b_1 = (2, -1, 1)$ i $b_2 = (1, 2, 3)$.

Zadatak 3. [15 bodova]
Neka je $X = \mathbb{R}^\infty$. Stavimo

$$a_1 = (2, 1, 0, 0, \dots), \quad a_2 = (0, 3, 2, 0, 0, \dots), \quad a_3 = (0, 0, 4, 3, 0, 0, \dots)$$

Općenito,

$$a_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, n+1, n, 0, 0, \dots), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da je skup $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ linearno nezavisan u X.

Zadatak 4. [30 bodova]

a) Dokažite da je

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = w\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^4$. [10 bodova]

b) Nađite jednu bazu potprostora W i odredite mu dimenziju. [10 bodova]

c) Odredite jedan direktan komplement potprostoru W. [10 bodova]

Zadatak 5. [20 bodova]
Neka su $\{(1, 1, 2), (1, 0, 2)\}$ i $\{(2, 0, 1), (1, 2, 2)\}$ baze potprostora L odnosno M, prostora $\mathbb{R}^3$. Nađite jednu bazu potprostora $L \cap M$.

Ivona Puljić

PRVI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE 1 - B2 grupa

Zadatak 1. [15 bodova]
Zadan je trokut s vrhovima A, B, C i točka O u prostoru. Neka su A', B' i C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Dokaži da je

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

Zadatak 2. [20 bodova]

a) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ vektori $a = (1, 2, -2)$, $b = (3, 5, -3)$ i $c = (0, -1, \lambda)$ čine bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. [10 bodova]

b) Vektor $d = (2, 1, 5)$ prikažite u bazi $\{a, b, c\}$. [10 bodova]

Zadatak 3. [15 bodova]
Dokažite da vrijedi $[\{a_1, a_2\}] = [\{b_1, b_2\}]$ gdje je $a_1 = (2, 0, 2)$, $a_2 = (0, 2, 2)$, $b_1 = (-4, 2, -2)$ i $b_2 = (-2, -4, -6)$.

Zadatak 4. [30 bodova]

a) Dokažite da je

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^4$. [10 bodova]

b) Nađite jednu bazu potprostora W i odredite mu dimenziju. [10 bodova]

c) Odredite jedan direktan komplement potprostoru W. [10 bodova]

Zadatak 5. [20 bodova]
Neka su $\{(1, 3, 2), (1, 0, 2)\}$ i $\{(1, 3, 4), (1, 0, 1)\}$ baze potprostora L odnosno M, prostora $\mathbb{R}^3$. Nađite jednu bazu potprostora $L \cap M$.

Ivona Puljić