# DRUGI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE 1 - A grupa

Zadatak 1. [20 bodova]

a) [10 bodova] Neka su $A$ i $B$ antisimetrične matrice. Dokaži da je njihov produkt $AB$ antisimetrična matrica onda i samo onda ako $A$ i $B$ antikomutiraju, tj. ako vrijedi $AB = -BA$.

b) [10 bodova] Dokažite da je svaka gornjetrokutasta $n \times n$ matrica $A$ (tj. $a_{ij} = 0$ za $i > j$) s nulama na dijagonali nilpotentna.

Zadatak 2. [25 bodova]
Izračunajte sljedeće determinante:

a) [10 bodova] $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 9 & 36 \\ 0 & -8 & 27 & -216 \end{vmatrix}$ b) [15 bodova] $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$

Zadatak 3. [25 bodova]

a) [10 bodova] Pomnožite matrice prethodno ih rastavivši na blok-matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 \\ -2 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) [15 bodova] Riješite matričnu jednadžbu! *Napomena: Prilikom računanja inverza matrice Cramerovim pravilom, pripadnu determinantu izračunajte Laplaceovim razvojem po proizvoljnom retku ili stupcu.*

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4. [15 bodova]

Odredite parametar $x \in \mathbb{R}$ tako da $r(A) = 2$ ako je $A = \begin{bmatrix} x & 14 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadatak 5. [15 bodova]
Dokažite da je matrica koja u svakom retku i svakom stupcu ima samo jedan element različit od nule regularna.

Ivona Puljić

# DRUGI KOLOKVIJ IZ LINEARNE ALGEBRE 1 - B grupa

Zadatak 1. [20 bodova]

a) [10 bodova] Neka su $A$ i $B$ simetrične matrice. Dokaži da je $AB$ simetrična onda i samo onda ako matrice $A$ i $B$ komutiraju.

b) [10 bodova] Dokažite da ne postoje matrice $A, B \in M_n$ sa svojstvom $AB - BA = I$.
*Uputa: Iskoristite svojstva traga matrice!*

Zadatak 2. [25 bodova]

a) [10 bodova] Izračunajte zadanu determinantu svodeći pripadnu matricu elementarnim transformacijama na gornjetrokutastu:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

b) [15 bodova] Izračunajte zadanu determinantu $n$-tog reda:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & \dots & 5 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Zadatak 3. [25 bodova]

a) [10 bodova] Pomnožite matrice prethodno ih rastavivši na blok-matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

b) [15 bodova] Riješite matričnu jednadžbu! *Napomena: Prilikom računanja inverza matrice Cramerovim pravilom, pripadnu determinantu izračunajte Sarrusovim pravilom.*

$$X \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -6 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4. [15 bodova]

U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadatak 5. [15 bodova]
Pokažite da je adjunkta dijagonalne matrice također dijagonalna.

Ivona Puljić