Linearna algebra I

Determinanta

Teorem 3.2.27.

Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je

$$\det A \neq 0.$$

U tom slučaju je inverzna matrica A^{-1} dana formulom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

Još vrijedi

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Definicija 3.3.1.

Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ i neka su

$$S_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, S_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

njezini stupci. Rang matrice A, $\mathrm{r}(A)$, definira se formulom

$$\mathrm{r}(A) = \dim[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}].$$

Rang

Napomena 3.3.2.

(a) Budući je

$$[\{S_1, S_2, \dots, S_n\}] \leq \mathcal{M}_{m1}$$

vrijedi

$$\mathrm{r}(A) \leq m.$$

U drugu ruku, po definiciji linearne ljuske, $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ je sustav izvodnica za potprostor $[\{S_1, S_2, \dots, S_n\}]$, pa je zato

$$\mathrm{r}(A) \leq n.$$

Rang

Napomena 3.3.2.

(a) Budući je

$$[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}] \leq \mathcal{M}_{m1}$$

vrijedi

$$\mathrm{r}(A) \leq m.$$

U drugu ruku, po definiciji linearne ljuske, $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ je sustav izvodnica za potprostor $[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$, pa je zato

$$\mathrm{r}(A) \leq n.$$

(b) Rang matrice je broj njezinih linearno nezavisnih stupaca.

Rang

Napomena 3.3.2.

(a) Budući je
$$[\{S_1, S_2, \dots, S_n\}] \leq \mathcal{M}_{m1}$$
vrijedi
$$\mathrm{r}(A) \leq m.$$
U drugu ruku, po definiciji linearne ljuske, $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ je sustav izvodnica za potprostor $[\{S_1, S_2, \dots, S_n\}]$, pa je zato
$$\mathrm{r}(A) \leq n.$$

(b) Rang matrice je broj njezinih linearno nezavisnih stupaca.

(c) Rang je funkcija koja poprima isključivo cjelobrojne vrijednosti. Nulmatrica je jedina matrica ranga 0. Za jediničnu matricu $I \in \mathcal{M}_n$ vrijedi
$$\mathrm{r}(I) = n.$$

Rang

Teorem 3.3.3.

Neka je rang matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$ jednak r. Tada i broj linearno nezavisnih redaka u A iznosi r.

Rang

Teorem 3.3.3.

Neka je rang matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$ jednak r. Tada i broj linearno nezavisnih redaka u A iznosi r.

Korolar 3.3.4.

Za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_{mn}$ vrijedi

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^T).$$

Rang

Teorem 3.3.3.

Neka je rang matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{mn}$ jednak r. Tada i broj linearno nezavisnih redaka u A iznosi r.

Korolar 3.3.4.

Za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_{mn}$ vrijedi

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^T).$$

Teorem 3.3.5.

Neka je matrica A' dobivena iz matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}$ primjenom neke elementarne transformacije. Tada je

$$\mathrm{r}(A') = \mathrm{r}(A).$$