Linearna algebra I

Definicija 3.3.6.

Kažemo da je matrica $B \in \mathcal{M}_{mn}$ ekvivalentna matrici $A \in \mathcal{M}_{mn}$ (i pišemo $A \sim B$) ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.

Definicija 3.3.6.

Kažemo da je matrica $B \in \mathcal{M}_{mn}$ ekvivalentna matrici $A \in \mathcal{M}_{mn}$ (i pišemo $A \sim B$) ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.

Napomena 3.3.7.

Definirana relacija $\sim$ je očito relacija ekvivalencije na prostoru $\mathcal{M}_{mn}$.

Rang

Definicija 3.3.6.

Kažemo da je matrica $B \in \mathcal{M}_{mn}$ ekvivalentna matrici $A \in \mathcal{M}_{mn}$ (i pišemo $A \sim B$) ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.

Napomena 3.3.7.

Definirana relacija $\sim$ je očito relacija ekvivalencije na prostoru $\mathcal{M}_{mn}$.

Korolar 3.3.8.

Za $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ vrijedi:

$$A \sim B \Longrightarrow \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B).$$

Rang

Definicija 3.3.9.

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$. Matrica

$$D_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{mn}$$

pri čemu je točno r jedinica na dijagonalnim mjestima, zove se kanonska matrica tipa $m \times n$ ranga r.

Rang

Teorem 3.3.10.

Neka je $A \in \mathcal{M}_{mn}$ i $\mathrm{r}(A) = r$. Tada je

$$A \sim D_r \in \mathcal{M}_{mn}.$$

Teorem 3.3.10.

Neka je $A \in \mathcal{M}_{mn}$ i $\mathrm{r}(A) = r$. Tada je

$$A \sim D_r \in \mathcal{M}_{mn}.$$

Korolar 3.3.11.

Neka su $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$. Tada vrijedi:

$$A \sim B \iff \mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B).$$

Rang

Primjer 3.3.12.

Izračunajmo rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rang

Definicija 3.3.13.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Elementarne matrice $n-$tog reda su (elementi koji nisu eksplicitno navedeni jednaki su nula)

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \hline & & & 1 & & & & 0 & & & \\ \hline & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq j;$$

Rang

$$E_{i,\lambda} = \begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\};$$

Rang

$$E_{i,\lambda} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\};$$

$$E_{ij,\lambda} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & j & & & & & \\ & \downarrow & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq j, \quad \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Rang

Napomena 3.3.14.

Podrazumijevamo da je u matrici $E_{ij,\lambda}$ skalar λ na mjestu (i,j) (pa je u navedenoj definiciji matrica $E_{ij,\lambda}$ prikazana u slučaju kad je $j < i$).
Sve elementarne matrice su regularne. Štoviše, lako je odrediti i inverze elementarnih matrica. Vrijedi

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \quad E_{i,\lambda}^{-1} = E_{i,\frac{1}{\lambda}}, \quad E_{ij,\lambda}^{-1} = E_{ij,-\lambda}$$

Napomena 3.3.14.

Podrazumijevamo da je u matrici $E_{ij,\lambda}$ skalar λ na mjestu (i,j) (pa je u navedenoj definiciji matrica $E_{ij,\lambda}$ prikazana u slučaju kad je $j<i$).
Sve elementarne matrice su regularne. Štoviše, lako je odrediti i inverze elementarnih matrica. Vrijedi

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij}, \quad E_{i,\lambda}^{-1}=E_{i,\frac{1}{\lambda}}, \quad E_{ij,\lambda}^{-1}=E_{ij,-\lambda}$$

Teorem 3.3.15.

Množenjem proizvoljne matrice $A\in\mathcal{M}_{mn}$ s elementarnim matricama s lijeve, odnosno desne strane realiziraju se elementarne transformacije nad retcima, odnosno stupcima matrice A.

Rang

Teorem 3.3.16.

Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je

$$\mathrm{r}(A) = n.$$

Rang

Teorem 3.3.16.

Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je

$$\mathrm{r}(A) = n.$$

Korolar 3.3.17.

Svaka regularna matrica je produkt konačnog broja elementarnih matrica.

Rang

Teorem 3.3.16.

Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je

$$\mathrm{r}(A) = n.$$

Korolar 3.3.17.

Svaka regularna matrica je produkt konačnog broja elementarnih matrica.

Korolar 3.3.18.

Matrice $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$ su ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $S \in \mathcal{M}_m$ i $T \in \mathcal{M}_n$ takve da vrijedi

$$B = SAT.$$

Rang

Primjer 3.3.19.

Odredimo, ako postoji, inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$