Linearna algebra I

Lema 3.3.20.

Neka su $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n$ donjetrokutaste (gornjetrokutaste) matrice. Tada je i AB donjetrokutasta (gornjetrokutasta) matrica.

Definicija 4.1.1.

Linearna jednadžba nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

pri čemu su $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{F}$.
Opći sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ sastoji se od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (1)$$

Skalari a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, zovu se koeficijenti sustava, a $b_1, \ldots, b_m$ slobodni članovi.

Rješivost i struktura skupa rješenja

Definicija 4.1.2.

Rješenje sustava (1) je svaka uređena n-torka

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$$

za koju supstitucija

$$x_1 = \gamma_1, \quad x_2 = \gamma_2, \quad \dots, \quad x_n = \gamma_n$$

zadovoljava sve jednadžbe (tj. ta supstitucija sve jednadžbe prevodi u numeričke identitete).

Rješivost i struktura skupa rješenja

Uz sustav (1) uobičajeno vežemo sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

One se, redom, zovu matrica sustava, matrica nepoznanica, matrica slobodnih članova i proširena matrica sustava.

Rješivost i struktura skupa rješenja

Uz sustav (1) uobičajeno vežemo sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

One se, redom, zovu matrica sustava, matrica nepoznanica, matrica slobodnih članova i proširena matrica sustava.
Uz pomoć uvedenih matrica sustav (1) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$AX = B. \tag{2}$$

Rješivost i struktura skupa rješenja

Napomena 4.1.3.

Sustav (1) i matrična jednadžba (2) ekvivalentni su, ne samo po zapisu, nego i u sljedećem smislu: uređena $n-$torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ zadovoljava (1) ako i samo ako jednostupčana matrica $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ zadovoljava (2). Drugim riječima, prirodna identifikacija

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \mapsto \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

predstavlja bijekciju skupa svih rješenja sustava (1) na skup svih rješenja matrične jednadžbe (2).

Rješivost i struktura skupa rješenja

Propozicija 4.1.4.

Uređena $n-$torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ je rješenje sustava (1) ako i samo ako vrijedi

$$B = \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2 + \cdots + \gamma_n S_n$$

gdje je $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ stupčana reprezentacija matrice A.

Rješivost i struktura skupa rješenja

Propozicija 4.1.4.

Uređena $n-$torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ je rješenje sustava (1) ako i samo ako vrijedi

$$B = \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2 + \cdots + \gamma_n S_n$$

gdje je $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ stupčana reprezentacija matrice A.

Teorem 4.1.5. (Kronecker-Capelli)

Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako vrijedi

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_p).$$

Rješivost i struktura skupa rješenja

Definicija 4.1.6.

Kaže se da je sustav linearnih jednadžbi (1) homogen ako vrijedi

$$b_1 = \cdots = b_m = 0.$$

Opći oblik homogenog sustava je dakle

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

odnosno

$$AX = 0. \tag{4}$$

Rješivost i struktura skupa rješenja

Propozicija 4.1.7.

Homogeni sustav je uvijek rješiv. Skup svih rješenja homogenog sustava (3) je vektorski prostor.

Rješivost i struktura skupa rješenja

Propozicija 4.1.7.

Homogeni sustav je uvijek rješiv. Skup svih rješenja homogenog sustava (3) je vektorski prostor.

Napomena 4.1.8.

Prostor rješenja Ω homogenog sustava $AX = 0$ je uvijek konačnodimenzionalan. Ako označimo

$$\dim \Omega = d,$$

pokazat će se da vrijedi $d = n - r$ gdje je $r = \mathrm{r}(A)$. Ovaj rezultat ćemo dobiti u sljedećoj točki kao direktnu posljedicu opisa Gaussove metode eliminacije.

Napomena 4.1.9.

Uz oznaku

$$\dim \Omega = d,$$

neka je skup $\{C_1, \ldots, C_d\}$ baza prostora rješenja Ω homogenog sustava $AX = 0$. Tradicionalno, ovo se zove fundamentalni skup rješenja. Svako rješenje je sada oblika

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_d C_d$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}$. Ovo, međutim, nije nova činjenica, nego svojstvo (svake) baze (bilo kojeg) vektorskog prostora.

Rješivost i struktura skupa rješenja

Propozicija 4.1.10.

Neka je dan proizvoljan sustav $AX = B$, neka je C_0 bilo koje njegovo rješenje, te neka je Ω prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$. Tada je

$$C_0 + \Omega := \{C_0 + C \ : \ C \in \Omega\}$$

skup svih rješenja sustava $AX = B$.

Rješivost i struktura skupa rješenja

Napomena 4.1.11.

C_0 iz teksta prošle propozicije zovemo partikularnim rješenjem. Ukoliko opet, za $d > 0$, s $\{C_1, \dots, C_d\}$ označimo bazu za Ω onda je proizvoljno rješenje sustava oblika

$$C_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i C_i, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{F}.$$

Ako je $d = 0$ onda je $\Omega = \{0\}$ i oba sustava, $AX = B$ i $AX = 0$, imaju jedinstveno rješenje.